

Úvod do variačného počtu

PAVOL QUITTNER

Obsah

1. Úvod	2
2. Základné pojmy a motivačné príklady	3
3. Nemyckého zobrazenie	10

I. Abstraktný variačný počet

4. Existencia globálnych minimizérov	15
5. Nutné a postačujúce podmienky pre lokálne extrémny	18
6. Viazané extrémny	20
7. Sedlové body	25
8. Približné a numerické metódy	30
9. Ekelandov variačný princíp	32

II. Variačný počet v $\mathbb{R}^n$

10. Konvexný prípad	34
11. Polykonvexita a kvazikonvexita	38
12. Koncentrovaná kompaktnosť	42

III. Variačný počet v $\mathbb{R}^1$

13. Regularita minimizérov a Eulerova rovnica	48
14. Nutné podmienky pre lokálny minimizér	60
15. Postačujúce podmienky pre lokálny minimizér	64
16. Zovšeobecnenia a modifikácie	77

17. Dodatok	86
Riešenia a návody k cvičeniam	91
Zoznam literatúry	103
Index a zoznam symbolov	105

1. Úvod

Variačný počet patrí k najstarším, ale súčasne k veľmi aktuálnym oblastiam matematiky. Keďže ide o veľmi rozsiahlu a hlboko prepracovanú disciplínu, musí byť každý autor pri písaní učebného textu z tejto oblasti značne selektívny a riadiť sa potrebami a vedomosťami predpokladaných čitateľov. Predložený text je primárne určený študentom magisterského štúdia matematiky na FMFI UK v Bratislave. Na jednej strane využíva rôzne abstraktné pojmy a tvrdenia z funkcionálnej analýzy (a tým snád' aspoň dodatočne motivuje jej štúdium), na druhú stranu je jeho veľká časť venovaná riešeniu konkrétnych — často klasických — úloh.

Hneď po úvodných motivačných príkladoch sa v texte venujeme spojitosti a diferencovateľnosti Nemického zobrazenia. Zvládnutie tejto technickej časti je nevyhnutným predpokladom pre štúdium ďalších kapitol.

Prvá časť kapitoly I (Abstraktný variačný počet) je venovaná jednoduchým aplikáciám funkcionálnej analýzy na dôkaz existencie globálnych minimizérov a na odvodenie nutných a postačujúcich podmienok pre lokálne minimizéry. Tvrdenia v ďalšej časti tejto kapitoly (týkajúce sa sedlových bodov, približných metód a Ekelandovho variačného princípu) nie sú potrebné pre pochopenie látky v nasledujúcich kapitolách.

V kapitole II (Variačný počet v $\mathbb{R}^n$) sú skúmané funkcionály tvaru $\Phi(u) = \int_{\Omega} f(x, u(x), \nabla u(x)) dx$, kde Ω je oblasť v $\mathbb{R}^n$ a $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$. Táto kapitola je technicky aj ideovo najnáročnejšia; jej časti „Polykonvexita a kvazikonvexita” ako aj „Koncentrovaná kompaktnosť” opäť nie sú nevyhnutné pre pochopenie nasledujúceho textu.

Kapitola III (Variačný počet v $\mathbb{R}^1$) je venovaná funkcionálom tvaru $\Phi(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x)) dx$ a obsahuje okrem iného klasickú teóriu konjugovaných bodov a poľa extrémál, ktorá umožňuje úplne vyriešiť viacero zaujímavých jednorozmerných variačných úloh.

V časti “Dodatok” sú uvedené niektoré často používané tvrdenia z reálnej a funkcionálnej analýzy.

Okrem riešených príkladov obsahuje text aj veľa cvičení. Riešenia, návody, prípadne len odpovede k väčšine z týchto cvičení sú uvedené na konci textu.

Autor je vďačný viacerým kolegom (najmä R. Černému a J. Starej z MFF UK v Prahe) a študentom za pripomienky k starším verziám tohto textu.

2. Základné pojmy a motivačné príklady

Pri mnohých prírodných ale aj iných javoch existuje istá kvantita (napr. energia, čas, dĺžka, cena), ktorá závisí od stavu, v ktorom sa daný systém nachádza. Častou úlohou pritom býva nájsť taký stav, pre ktorý je uvažovaná kvantita minimálna alebo maximálna. Takúto úlohu musíme vyriešiť my (ak napr. chceme minimalizovať cenu výrobku), ale často ju rieši aj príroda sama: viaceré fyzikálne princípy totiž zaručujú, že skúmaný systém zaujme taký stav, ktorý minimalizuje vhodnú kvantitu (napr. celkovú energiu).

Ak $\Phi(v)$ označuje skúmanú kvantitu pre stav v a hľadaný stav u minimalizuje Φ , potom pre ľubovoľný iný prípustný stav v musí platiť $\Phi(v) \geq \Phi(u)$. Ak je množina prípustných stavov lineárny priestor a označíme si $\varphi = v - u$, potom pre každé $t \in \mathbb{R}$ zrejme platí $\Phi(u + t\varphi) \geq \Phi(u)$, takže

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi(u + t\varphi) - \Phi(u)}{t} = 0, \quad (2.1)$$

pokiaľ táto limita existuje (limita sprava totiž musí byť nezáporná a limita zľava nekladná). Inými slovami, rýchlosť zmeny (**variácia**) funkcionálu Φ v stave u je nulová. Stav u s touto vlastnosťou sa tiež hovorí **kritický stav**. Pokiaľ je variácia Φ v nejakom stave nulová, tak Φ nemusí v tomto stave nadobúdať minimum ani maximum: môže ísť napr. o tzv. sedlový bod. Ako sa však ukazuje (viď napr. Príklady 2.3, 2.4), pri niektorých variačných princípoch v skutočnosti nehľadáme len stavy minimalizujúce resp. maximalizujúce skúmaný funkcionál, ale všetky kritické stavy.

Funkcionály, ktoré budeme vyšetrovať, budú mať spravidla tvar $\Phi(u) = \int_{\Omega} f(x, u(x), \nabla u(x)) dx$, kde Ω je oblasť v $\mathbb{R}^n$ a $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$. Funkcia

$$f : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN} \rightarrow \mathbb{R} : (x, u, s) \mapsto f(x, u, s)$$

sa nazýva **Lagrangián** (symbolom u značíme nielen funkciu $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ ale tiež nezávislú premennú $u \in \mathbb{R}^N$ funkcie f : z kontextu bude vždy jasné, či hovoríme o funkcii alebo premennej).

Nech $N = 1$ a $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ (= hladké funkcie s kompaktným nosičom v Ω). Ak je $\Phi(u) \leq \Phi(u + t\varphi)$ pre všetky $t \in \mathbb{R}$ malé, potom platí (2.1) (za predpokladu, že uvedená limita existuje). Za istých všeobecných predpokladov na f a u ukážeme, že uvedená limita skutočne existuje a platí

$$0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi(u + t\varphi) - \Phi(u)}{t} = \int_{\Omega} (f_u(x, u(x), \nabla u(x))\varphi(x) + f_s(x, u(x), \nabla u(x)) \cdot \nabla \varphi(x)) dx,$$

kde symboly f_u, f_s označujú parciálne derivácie funkcie f . Ak sú funkcie f aj u dostatočne hladké, potom použitím Greenovej vety dostávame

$$0 = \int_{\Omega} L_f(u)\varphi dx, \quad (2.2)$$

kde

$$L_f(u) := f_u(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot)) - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} [f_{s_i}(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))]$$

je tzv. **Eulerov operátor** (nazývaný tiež Lagrangeova derivácia f). Keďže rovnosť (2.2) platí pre každé $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, z du Bois-Reymondovej lemy (Lema 17.12) plynie, že u je riešením tzv. **Eulerovej rovnice** $L_f(u) = 0$.

Príklad 2.1. (Priehyb membrány)

Aj keď skúmame jav, ktorý má určité (aspoň jedno) riešenie, môže sa stať, že nami vyšetrovaný matematický model takéhoto javu riešenie mať nebude. To sa môže stať buď kvôli tomu, že náš model nie je úplne správny alebo hľadáme riešenie v nesprávnom stavovom priestore. Uvažujme napr. deformáciu elastickej (nekonečne tenkej) membrány, ktorá v kľudovej polohe zaberá dvojrozmernú oblasť Ω v horizontálnej rovine $\{x_3 = 0\}$, je pevne prichytená na hranici $\partial\Omega$ a je vystavená vertikálnej vonkajšej sile $g = g(x)$, kde $x = (x_1, x_2)$. Prepokladajme, že membrána sa deformuje len vo vertikálnom smere a nech $u(x)$ označuje výšku tejto deformácie v bode x . Ak predpokladáme platnosť lineárneho Hookeovho zákona, potom potenciálna energia membrány sa dá vypočítavať ako

$$\Phi(u) = \int_{\Omega} TP(\nabla u(x)) dx - \int_{\Omega} g(x)u(x) dx,$$

kde $T > 0$ (pre jednoduchosť budeme predpokladať, že ide o konštantu) a $P(\nabla u(x)) := \sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2}$ predstavuje nárast plochy membrány. Príslušný Lagrangián má teda tvar $f(x, u, s) = TP(s) - g(x)u$ a hľadaná funkcia u minimalizujúca Φ by mala byť riešením Eulerovej rovnice

$$-\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{T}{P(\nabla u)} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = g \quad \text{v } \Omega. \quad (2.3)$$

Ľavá strana tejto rovnice je (násobok) strednej krivosti u a je známe, že táto rovnica nemusí mať riešenie ani pre „rozumné“ g (viď napr. Príklad 15.39 pre $g = 0$ a nehomogénne okrajové podmienky). Naviac sa dá ukázať, že odvodená rovnica porušuje podmienku rovnováhy síl aj momentov (viď Cvičenie 2.2). Tento zdanlivý spor je dôsledkom nášho chybného predpokladu, že membrána sa bude deformovať len vo vertikálnom smere. Fyzikálne správny model musí uvažovať s trojrozmernou deformáciou u . Na druhej strane, ak predpokladáme, že deformácia membrány je malá, potom môžeme funkciu P v rovnici (2.3) aproximovať konštantou 1, čo vedie k lineárnej rovnici $-\Delta u = g$. Tento model predstavuje dobrú aproximáciu skúmaného javu pre malé deformácie.

Cvičenie 2.2. (J. Nečas) Uvažujme model priehybu membrány z Príkladu 2.1, pričom miesto predpokladu pevného prichytenia na celej hranici predpokladajme, že na časti hranice $\Gamma \subset \partial\Omega$ membrána nie je uchytená, ale pôsobí na ňu sila $H = (h_1, h_2, h) : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^3$. Potenciálna energia membrány (za predpokladu jej vertikálnej deformácie) má potom tvar

$$\Phi(u) = \int_{\Omega} TP(\nabla u) dx - \int_{\Omega} gu dx - \int_{\Gamma} hu dS.$$

Označme $P = P(\nabla u)$ a $u_n := \frac{\partial u}{\partial n}$, kde $n = n_{\Omega}$ označuje jednotkový vektor vonkajšej normály na hranici $\partial\Omega$. Pre ľubovoľné $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})$ spĺňajúce $\varphi = 0$ na $\partial\Omega \setminus \Gamma$ potom za predpokladu hladkosti minimizéra u s použitím Greenovej vety dostávame

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi(u + t\varphi) - \Phi(u)}{t} = \int_{\Omega} \left(\sum_i \frac{T}{P} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - g\varphi \right) dx - \int_{\Gamma} h\varphi dS \\ &= \int_{\Omega} \left(- \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{T}{P} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) - g \right) \varphi dx + \int_{\Gamma} \left(\frac{T}{P} u_n - h \right) \varphi dS, \end{aligned}$$

odkiaľ okrem diferenciálnej rovnice (2.3) plynie aj okrajová podmienka $\frac{T}{P} u_n = h$ na Γ .

Ak si zvolíme oblasť D s vlastnosťou $\bar{D} \subset \Omega$ a s hranicou ∂D parametrizovanou krivkou $t \mapsto (x_1(t), x_2(t))$ (kde t je parameter dĺžky, t.j. $\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 = 1$, kde $\dot{x}_i := \frac{dx_i}{dt}$), potom krivka $\psi : t \mapsto (x_1(t), x_2(t), u(x_1(t), x_2(t)))$ parametrizuje hranicu grafu $u|_D$. Pre napätie membrány $H = (h_1, h_2, h)$ na hranici oblasti D dostávame rovnako ako v prípade oblasti Ω podmienku $\frac{T}{P} u_n = h$ na ∂D , kde $n = n_D$. Vektor H zrejme musí ležať v rovine dotyčnicovej k membráne (takže $H \cdot \nu = 0$, kde $\nu = (-u_{x_1}, -u_{x_2}, 1)$ je normálový vektor k uvažovanej dotyčnicovej rovine a $u_{x_i} := \frac{\partial u}{\partial x_i}$) a H musí byť tiež kolmý na dotyčnicu ku krivke ψ ($H \cdot \tau = 0$, kde $\tau := \dot{\psi} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{u})$ a $\dot{u} := u_{x_1}\dot{x}_1 + u_{x_2}\dot{x}_2$). S využitím vzťahu $u_n = u_{x_1}\dot{x}_2 - u_{x_2}\dot{x}_1$ ukážte, že z rovníc $H \cdot \nu = H \cdot \tau = 0$ za predpokladu $u_n \neq 0$ plynie

$$h_1 = \frac{\dot{x}_2 + u_{x_2}\dot{u}}{u_n} h = \frac{T}{P} (\dot{x}_2 + u_{x_2}\dot{u}) \quad \text{a} \quad h_2 = -\frac{\dot{x}_1 + u_{x_1}\dot{u}}{u_n} h = -\frac{T}{P} (\dot{x}_1 + u_{x_1}\dot{u}).$$

Pri označení $G = (0, 0, g)$ má rovnica rovnováhy síl na oblasti D tvar $\int_D G dx + \int_{\partial D} H dS = 0$. Z diferenciálnej rovnice a okrajovej podmienky pre u sa ľahko odvodí, že táto rovnica je splnená v tretej zložke, avšak pre prvé dve zložky dostávame podmienky $\int_{\partial D} h_1 dS = \int_{\partial D} h_2 dS = 0$, ktoré vo všeobecnosti nebudú splnené (ani pre $\dot{u} \equiv 0$). Podobné problémy sú s rovnicou rovnováhy momentov $\int_D (z \times G) dx + \int_{\partial D} (z \times H) dS = 0$, kde $z := (x_1, x_2, x_3)$.

Príklad 2.3. (Kmitajúca struna)

Nech funkcia $u = u(x, t) : [0, L] \times [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$ popisuje výchylku dokonale elastickej kmitajúcej struny dĺžky L uchytenej v koncových bodoch (t.j. $u(0, t) = u(L, t) = 0$ pre každé t). Potenciálna energia struny v čase t je daná predpisom $U = \tau \int_0^L (\sqrt{1 + u_x^2} - 1) dx$, kde konštanta $\tau > 0$ zodpovedá napätiu struny pozdĺž x -ovej osi v jej kľudovej polohe $u_0(x) \equiv 0$. Za predpokladu, že u_x je malé, môžeme výraz $\sqrt{1 + u_x^2}$ aproximovať hodnotou $1 + u_x^2/2$, takže potom $U = \frac{\tau}{2} \int_0^L u_x^2 dx$. Ak $\sigma(x)$ označuje hustotu rozdelenia hmoty pozdĺž struny, pre kinetickú energiu v čase t platí $T = \frac{1}{2} \int_0^L \sigma u_t^2 dx$. Podľa Hamiltonovho princípu (viď tiež Príklad 13.19) bude hľadaná funkcia u kritickým bodom funkcionálu účinku

$$\Phi(u) := \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L (\sigma u_t^2 - \tau u_x^2) dx dt.$$

Ak je riešenie dostatočne hladké, potom pre každú hladkú funkciu φ s kompaktným nosičom v $(0, L) \times (t_1, t_2)$ integráciou per partes dostaneme

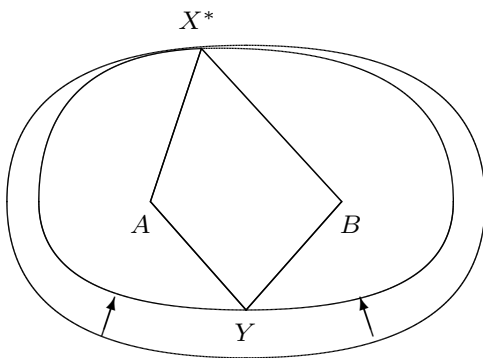
$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\Phi(u + h\varphi) - \Phi(u)) = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L (\sigma u_t \varphi_t - \tau u_x \varphi_x) dx dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L (\sigma u_{tt} - \tau u_{xx}) \varphi dx dt,$$

odkiaľ s použitím Lemy 17.12 dostávame d'Alembertovu rovnicu $\sigma u_{tt} = \tau u_{xx}$. Ide opäť o Eulerovu rovnicu pre funkcionál Φ : ak si označíme premenné x, t ako x_1, x_2 , potom príslušný Lagrangián má tvar

$$f((x_1, x_2), u, (s_1, s_2)) = \frac{1}{2} (\sigma(x_1) s_2^2 - \tau s_1^2).$$

Príklad 2.4. (Fermatov princíp)

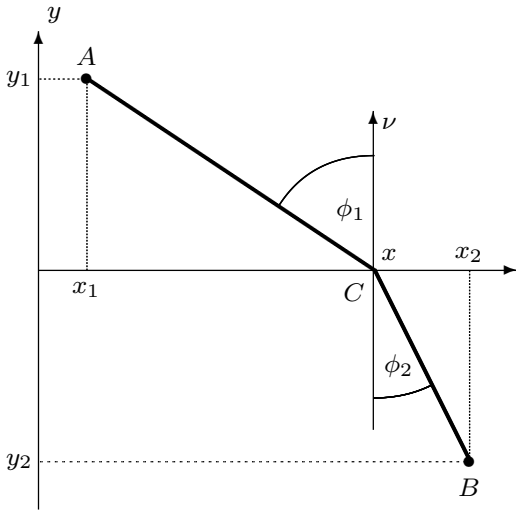
V polovici 17. storočia Pierre de Fermat použil variačný princíp na odvodenie zákona o lome svetla. Tento zákon bol v tej dobe už známy (bol objavený W. Snellom v r. 1621 na základe experimentálnych dát), Fermat ho však odvodil bez použitia experimentov či rôznych heuristických úvah: vychádzal len z princípu, podľa ktorého sa svetlo šíri zo zdroja k pozorovateľovi tak, aby čas na prekonanie tejto vzdialenosti bol minimálny. Takto formulovaný princíp však nie je pravdivý: ak označíme $T(\varphi)$ čas, ktorý potrebuje svetlo na prekonanie dráhy popísanej krivkou φ , potom hľadaná krivka φ^* bude kritickou pre funkcionál T , t.j. variácia T v krivke φ^* bude nulová, nemusí však byť minimizérom. Neplatnosť pôvodného Fermatovho princípu si môžeme ukázať na jednoduchom príklade, kde miesto lomu budeme skúmať odraz svetla.



Uvažujme elipsoid s ohniskami A, B , ktorého vnútorné steny sú tvorené zrkadlom (odrážajú svetlo). Svetlo vychádzajúce z ohniska A sa na stene elipsoidu vždy odrazí k bodu B , pretože vzdialenosť $|AX| + |BX|$ nezávisí od voľby bodu X na stene elipsoidu. (Toto platí aj pre odraz zvukových vln a táto vlastnosť bola v praxi využitá pri stavbe viacerých budov aproximujúcich elipsoidy, v ktorých poslucháč nachádzajúci sa v jednom z ohnísk dobre počuje aj tichý zvuk vychádzajúci z druhého ohniska.) Zvoľme si pevne bod X^* na stene elipsoidu a stlačme elipsoid tak, aby bod X^* ostal na mieste a všetky ostatné body na stenách elipsoidu sa dostali „dovnútra“ pôvodného elipsoidu (viď obrázok). Predpokladáme pritom, že novo vzniknutý útvar bude mať opäť hladké steny;

špeciálne normála k jeho stene v bode X^* bude rovnaká ako predtým. Svetlo vychádzajúce z bodu A k bodu X^* sa preto opäť odrazí do bodu B , vzdialenosť $|AX^*| + |BX^*|$ však zrejme maximalizuje hodnotu $|AY| + |BY|$, kde Y prebieha steny nového útvaru. Ak elipsoid v jednom smere z bodu X^* budeme stláčať a v inom „natáhať“, bude vzdialenosť $|AX^*| + |BX^*|$ zrejme sedlovým bodom funkcionálu $T(Y) := |AY| + |BY|$. Podobné javy možno pozorovať aj v astrofyzike: svetlo sa v prítomnosti gravitačných polí môže šíriť tak, že jeho dráha nebude minimalizovať čas potrebný na jej prekonanie. Naviac sa môže stať, že svetlo pochádzajúce z toho istého zdroja príde k pozorovateľovi po rôznych dráhach a za rôzny čas: všetky tieto dráhy však budú kritickými bodmi príslušného funkcionálu.

Ukážme si teraz odvodenie zákona lomu svetla z (pôvodného) Fermatovho princípu. Majme dve rôzne (opticky homogénne) látky M_1, M_2 s rýchlosťami šírenia sa svetla v_1, v_2 , ktoré sú oddelené rovinou $\{(x, y, z) : y = 0\}$. Uvažujme body $A = (x_1, y_1, 0)$ a $B = (x_2, y_2, 0)$, kde $y_1 > 0 > y_2$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že bod A leží v M_1 a bod B v M_2 .



Podľa Fermatovho princípu musí dráha svetelného lúča smerujúceho z bodu A do bodu B ležať v rovine $z = 0$ a musí pozostávať z dvoch úsečiek AC a CB , kde $C = (x, 0)$. Čas potrebný na prekonanie tejto dráhy, sa rovná

$$T = T(x) = \frac{\sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2}}{v_2}. \quad (2.4)$$

Ak funkcia T nadobúda minimum v bode x , musí $T'(x) = 0$, t.j.

$$\frac{1}{v_1} \frac{x - x_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2}} - \frac{1}{v_2} \frac{x_2 - x}{\sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2}} = 0,$$

odkiaľ

$$\frac{\sin \phi_1}{v_1} = \frac{\sin \phi_2}{v_2}, \quad (2.5)$$

kde ϕ_1 je uhol medzi úsečkou AC a normálou ν k rozhraniu $y = 0$ a analogicky ϕ_2 je uhol medzi úsečkou BC a normálou ν . Vzťah (2.5) vyjadruje zákon lomu svetla.

Predpokladajme teraz, že rýchlosť šírenia sa svetla v v danom médiu je spojitá funkcia premennej y , $v = v(y)$, a nech $\varphi : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ je C^1 -funkcia, ktorej graf popisuje nejakú dráhu od bodu A k bodu B (t.j. $\varphi(x_1) = y_1$, $\varphi(x_2) = y_2$). Čas potrebný na prekonanie tejto dráhy sa potom rovná

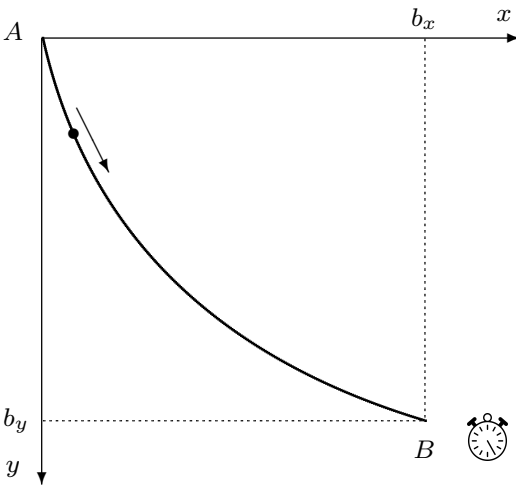
$$T(\varphi) = \int_A^B v^{-1} ds = \int_{x_1}^{x_2} v^{-1}(\varphi)(1 + \varphi'^2)^{1/2} dx. \quad (2.6)$$

Označme $\phi(x)$ uhol, ktorý zvierajú dotyčnica ku grafu funkcie φ v bode $(x, \varphi(x))$ s osou y . V Cvičeniach 13.51 a 15.43 ukážeme, že hľadanie kritických bodov funkcionálu v (2.6) vedie k podmienke, aby bol výraz $v^{-1} \sin \phi$ konštantný.

Príklad 2.5. (Úloha o brachistochrone)

Úloha o brachistochrone¹ patrí k najslávnejším úlohám variačného počtu. Jedná sa o úlohu nájsť dráhu pohybu hmotného bodu, pri ktorej tento prejde pôsobením vlastnej tiaže z bodu A do bodu B za najkratší možný čas. Body A, B sú pritom body v jednej vertikálnej rovine a bod B leží nižšie ako bod A .

Už Galileo Galilei si v r. 1638 všimol, že hľadaná dráha nebude úsečka spájajúca body A, B , avšak správne riešenie našiel až v r. 1696 Johann Bernoulli. V nižšie uvedenom riešení tohoto problému nebudeme (podobne ako Bernoulli) príliš rigorózní: budeme napr. predpokladať, že riešenie existuje a že je dostatočne hladké (s použitím Weierstrassovej teórie poľa extrémál je však možné dokázať, že nami nájdené riešenie je jediným minimizérom uvažovaného funkcionálu, viď napr. [6]). Budeme tiež predpokladať, že uvažovaný hmotný bod má na začiatku nulovú rýchlosť.



Ak si vo vertikálnej rovine obsahujúcej body A, B zvolíme súradnicovú sústavu podľa obrázku (os y smeruje dole), potom $A = (0, 0)$ a $B = (b_x, b_y)$, kde $b_x, b_y > 0$. Predpokladajme, že pohyb hmotného bodu je popísaný C^1 -krivkou $(x, y) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \xi \mapsto (x(\xi), y(\xi))$, pre ktorú $(x, y)(0) = A$ a $(x, y)(1) = B$. Ak je m hmotnosť a v rýchlosť uvažovaného bodu a symbolom g si označíme gravitačné zrýchlenie, potom porovnaním potenciálnej a kinetickej energie plynie

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2, \quad v = \sqrt{2gy}. \quad (2.7)$$

Ďalej platí

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad \text{kde} \quad s = s(\xi_0) = \int_0^{\xi_0} \sqrt{x'^2 + y'^2} d\xi \quad (2.8)$$

je dĺžka krivky od bodu A po bod $(x(\xi_0), y(\xi_0))$. Zo vzťahov (2.7) a (2.8) dostávame

$$\sqrt{2gy} = \frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2 + y'^2} \frac{d\xi}{dt},$$

¹brachistos = najkratší, chronos = čas

odkiaľ

$$\frac{dt}{d\xi} = \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{\sqrt{2gy}}$$

a integrovaním

$$T = T(x, y) = \int_0^1 \frac{dt}{d\xi} d\xi = \int_0^1 \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{\sqrt{2gy}} d\xi. \quad (2.9)$$

Hľadaná krivka (x, y) minimalizuje hodnotu T , takže špeciálne pre ľubovoľnú C^1 -funkciu $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ s vlastnosťou $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ musí platiť $T(x + \varphi, y) \geq T(x, y)$. Odtiaľ plynie, že funkcia $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : r \mapsto T(x + r\varphi, y)$ má v bode $r = 0$ minimum. Ak teda existuje

$$\Phi'(0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\Phi(r) - \Phi(0)}{r},$$

musí byť táto limita rovná nule. Ak predpokladáme, že pre hľadané funkcie x, y platí $x'^2 + y'^2 > 0$, $y'(0) > 0$ a $y(\xi) > 0$ pre $\xi > 0$, potom môžeme integrál $\Phi(r)$ derivovať podľa parametra r a dostávame

$$\Phi'(0) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2gy}} \frac{x'\varphi'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} d\xi = 0$$

a po integrácii per partes

$$\int_0^1 h'\varphi d\xi = 0, \quad \text{kde} \quad h = h(\xi) := \frac{x'}{\sqrt{y(x'^2 + y'^2)}}.$$

Z du Bois-Reymondovej lemy (Lema 17.12) plynie, že funkcia h musí byť na intervale $[0, 1]$ konštantná. Máme teda riešiť diferenciálnu rovnicu

$$\frac{x'}{\sqrt{y(x'^2 + y'^2)}} = C, \quad (2.10)$$

kde C je konštanta. Voľbou nového parametra $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2]$ s vlastnosťou

$$\sin \alpha = \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \quad \left(\text{t.j.} \quad \cos \alpha = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right) \quad (2.11)$$

(α je uhol, ktorý zvierajú dotýčnica hľadanej krivky s osou x) dostávame z (2.10)

$$y = \frac{1}{C^2} \cos^2 \alpha = a(1 + \cos 2\alpha), \quad (2.12)$$

kde $a = \frac{1}{2C^2} > 0$. Z (2.12) plynie $y' = -2a \sin 2\alpha$, takže (2.11) dáva $x' = \pm 4a \cos^2 \alpha$, odkiaľ

$$x = \pm a(2\alpha + \sin 2\alpha) + b, \quad (2.13)$$

kde b je integračná konštanta. Konečne, voľba nového parametra $\tau = \pi - 2\alpha \in [0, 2\pi)$ dáva riešenie v tvare

$$y(\tau) = a(1 - \cos \tau), \quad x(\tau) = \pm a(\tau - \sin \tau) + \tilde{b},$$

kde $a, \tilde{b}$ sú konštanty, ktoré sa dajú určiť z okrajových podmienok. Napr. v bode $A = (0, 0)$ je zrejme $\alpha = \alpha(A) \in [0, \pi/2]$, t.j. $\tau(A) \in [0, \pi]$. Z podmienky $x(A) = 0$ dostaneme $\tau(A) = 0$, takže $x(A) = 0$ implikuje $\tilde{b} = 0$. Keďže $\tau > \sin \tau$ pre $\tau > 0$ a $a > 0$, platí

$$y(\tau) = a(1 - \cos \tau), \quad x(\tau) = a(\tau - \sin \tau), \quad (2.14)$$

kde $\tau \in [0, \tau^*]$, $\tau^* := \tau(B)$. Hodnota $\tau^* \in (0, 2\pi)$ je pritom daná podmienkou

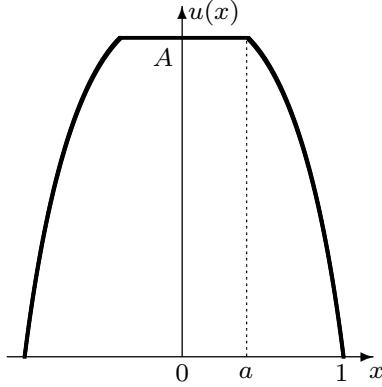
$$\frac{b_x}{b_y} = \frac{x(\tau^*)}{y(\tau^*)} = \frac{\tau^* - \sin \tau^*}{1 - \cos \tau^*} =: f(\tau^*).$$

Vzhľadom k tomu, že funkcia $f : (0, 2\pi) \rightarrow (0, \infty)$ je rastúca a surjektívna, existuje pre každé $b_x, b_y > 0$ práve jedna hodnota τ^* s požadovanou vlastnosťou (a hodnota a sa určí z podmienky $a = b_y/(1 - \cos \tau^*)$).

Krivka určená riešením úlohy o brachistochrone je cykloida, t.j. krivka, ktorá vznikne pohybom pevne zvoleného bodu na kružnici s polomerom a otáčajúcej sa pozdĺž priamky $y = 0$. Vlastnosti cykloidy boli študované už v 16. storočí a jednu z jej najzaujímavejších vlastností objavil Christian Huygens v r. 1673: ak sa závažie kyvadla pohybuje pozdĺž cykloidy, nezávisí perióda tohto pohybu na amplitúde, t.j. veľkosti výchylky (viď Cvičenie 13.20).

Cvičenie 2.6. Ukážte, že nájdená krivka sa dá napísať ako graf funkcie f závislej od premennej y len v prípade $b_x/b_y \leq \pi/2$.

Príklad 2.7. (Úloha o minimálnom odpore) Nasledujúca úloha skúmaná Newtonom už v r. 1686 v [47] je pravdepodobne prvou vyriešenou úlohou variačného počtu, ktorá sa nedá redukovať na minimalizáciu funkcie konečného počtu premenných (ako tomu bolo v prípade Fermatovho princípu). Úloha je zaujímavá aj tým, že minimalizovať treba nekonvexný funkcionál (na konvexnej množine) a riešenie napriek hladkosti funkcionálu nemá spojitú prvú deriváciu. Úloha je navyše pozoruhodná aj vďaka tomu, že má výrazne aplikačný charakter: Newton uvažoval o aplikáciach pri stavbe lodí a jeho model testovala aj NASA pri kozmických letoch v 60-tych rokoch, pretože dobre zodpovedá realite najmä pri nadzvukovom prúdení v horných, redších vrstvách atmosféry.



Hľadáme radiálne symetrický profil trojrozmerného telesa (napr. torpéda alebo rakety) s minimálnym aerodynamickým odporom. Ak uvažujeme profily symetrické okolo osi z , ktorých výška je A a maximálny horizontálny prierez je jednotkový kruh (v rovine $z = 0$), potom funkcia $u = u(x)$ popisujúca výšku tohto profilu pre polomer x spĺňa podmienky $u(0) = A > 0$, $u(1) = 0$. Pre minimizujúcu funkciu u musí z fyzikálnych dôvodov tiež platiť $u' \leq 0$. Newton vychádzal z predpokladu, že na veľkosť odporu vplyvajú len zrážky (rovnomerne rozdelených) častíc okolitého média s telesom. Tento predpoklad vedie k tomu, že uvažovaný odpor bude úmerný funkcionálu

$$\Phi(u) = \int_0^1 f(x, u'(x)) dx, \quad \text{kde} \quad f(x, s) = \frac{x}{1+s^2}. \quad (2.15)$$

V Príklade 15.44 najprv ukážeme, že funkcionál Φ nadobúda infimum na konvexnej množine

$$M := \{u \in W^{1,1}(0,1) : u(0) = A, u(1) = 0, u' \leq 0\}$$

a každý minimizér u je konkávna funkcia, $a_u := \sup\{x : u(x) = A\} \in (0,1)$, $u|_{[a_u,1]} \in C^2$ a $(u|_{[a_u,1]})' \leq -1$. S použitím nasledujúcich úvah potom v Príklade 15.44 tiež dokážeme jednoznačnosť minimizéra u_0 .

Vzhľadom k práve uvedeným vlastnostiam minimizérov stačí zrejme minimalizovať Φ na množine

$$\tilde{M} := \{u \in M : u \text{ je konkávna, } a_u > 0, u|_{[a_u,1]} \in C^1 \text{ a } (u|_{[a_u,1]})' < 0\}.$$

Nech $u \in \tilde{M}$. Potom $u(x) = A$ pre $x \in [0, a_u]$, $u'(x) < 0$ pre $x > a_u$, takže na intervale $[a_u, 1]$ existuje inverzná funkcia $v(y) := u^{-1}(A - y)$, pričom v je rastúca, $v(0) = a_u$, $v(A) = 1$. Použitím substitúcie $x = v(y)$ pre $x \in [a_u, 1]$ sa dá funkcionál Φ napísať v tvare

$$\Psi(v) = \int_0^A g(v(y), v'(y)) dy + \frac{1}{2}v(0)^2, \quad \text{kde} \quad g(v, s) = \frac{vs^3}{1+s^2}.$$

Miesto minimalizácie Φ na množine $\tilde{M}$ teda môžeme minimalizovať Ψ na množine

$$N := \{v \in C^1([0, A]) : v(0) > 0, v(A) = 1, v' > 0\}.$$

Pre minimizér v a ľubovoľnú funkciu $h \in C^1([0, A])$ spĺňajúcu okrajovú podmienku $h(A) = 0$ platí $v + th \in N$ pre malé $t \in \mathbb{R}$, takže musí $\lim_{t \rightarrow 0} (\Psi(v + th) - \Psi(v))/t = 0$, odkiaľ po integrácii per partes s využitím $v \in C^2$ dostávame

$$\int_0^A (g_v(v, v') - [g_s(v, v')]') h dy + (-g_s(v(0), v'(0)) + v(0))h(0) = 0.$$

Odtiaľ okrem Eulerovej rovnice $g_v(v, v') = [g_s(v, v')]'$ dostávame tiež okrajovú podmienku $v'(0) = 1$ (a teda $u'(a+) = -1$). Explicitný tvar riešenia v možno nájsť napr. v [13, str.42–43].

Nech teraz $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ a $\mathcal{M}$ označuje triedu všetkých konkávných funkcií $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ spĺňajúcich podmienky $0 \leq w \leq A$ a $w(x) = 0$ pre $|x| = 1$. Funkcionál

$$\Theta(w) = \int_{\Omega} \frac{1}{1 + |\nabla w|^2} dx$$

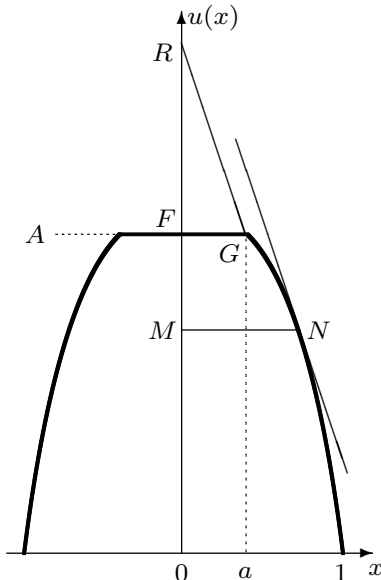
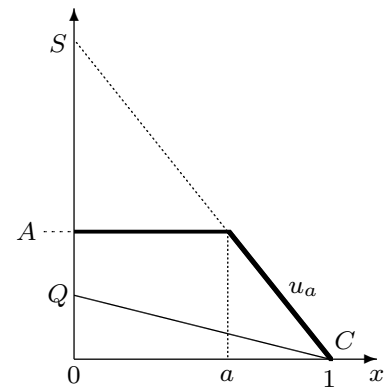
(ktorý zodpovedá aerodynamickému odporu pre profil popísaný funkciou w) nadobúda na množine $\mathcal{M}$ infimum (viď [12]); označme w_0 jeho minimizér. Z vyššie uvedeného plynie, že funkcia $\tilde{u}_0(x) := u_0(|x|)$ (kde u_0 je jediný minimizér vyššie študovanej jednorozmernej úlohy) je minimizérom funkcionálu Θ v triede tých funkcií $w \in \mathcal{M}$, ktoré sú radiálne symetrické. Platí však $\Theta(w_0) < \Theta(\tilde{u}_0)$ (viď [11]), takže minimizér w_0 nie je radiálne symetrický.

Cvičenie 2.8. Nech je Φ funkcionál z Príkladu 2.7 definovaný v (2.15).

(i) Pre $a \in [0, 1]$ položme

$$u_a(x) = \begin{cases} A & \text{pre } x \in [0, a], \\ A[1 - (x - a)/(1 - a)] & \text{pre } x \in [a, 1]. \end{cases}$$

Ukážte, že $\Phi(u_a)$ je minimálne pre $a = (2 + A^2 - \sqrt{4A^2 + A^4})/2 > 0$ a pre toto a a $x \in (a, 1)$ platí $|u'_a(x)| = s$, kde $s := (\sqrt{4 + A^2} + A)/2 > 1$. Ukážte tiež, že ak pre toto s označíme $S = (0, s)$, $C = (1, 0)$ a $Q = (0, A/2)$, potom $|SQ| = |QC|$ (takto geometricky charakterizoval riešenie Newton).



(ii) Ukážte, že Eulerova rovnica pre funkcionál Φ má tvar

$$-2xu' = C(1 + u'^2)^2, \quad (2.16)$$

pričom z podmienky $u'(a) = -1$ plynie $C = a/2$.

Newton naformuloval túto rovnicu geometricky: Zvoľme si $x \in (a, 1)$ pevne a položme $N = (x, u(x))$, $M = (0, u(x))$, $G = (a, A)$, $F = (0, A)$; vid' obrázok. Bodom G ďalej vedme rovnobežku s dotyčnicou ku grafu u v bode N a označme R jej priesečník s osou $x = 0$. Potom platí

$$\frac{|MN|}{|GR|} = \frac{|GR|^3}{4|FR| \cdot |FG|^2}.$$

Ukážte, že ide naozaj o vyjadrenie rovnice (2.16) s $C = a/2$.

Príklad 2.9. (Dirichletov princíp a Weierstrassov príklad) Nech Ω je ohraničená oblasť v $\mathbb{R}^2$ alebo $\mathbb{R}^3$, $f \in C(\partial\Omega)$ a hľadáme riešenie $u \in X := C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ okrajovej úlohy

$$\Delta u = 0 \quad \text{v } \Omega, \quad u = f \quad \text{na } \partial\Omega.$$

Keďže Laplaceova rovnica $\Delta u = 0$ je Eulerovou rovnicou pre (nezáporný) funkcionál

$$\Phi : X \rightarrow \mathbb{R} : u \mapsto \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx,$$

k nájdeniu riešenia uvedenej okrajovej úlohy stačí nájsť minimizér funkcionálu Φ v triede funkcií $v \in X$ spĺňajúcich okrajové podmienky $v = f$ na $\partial\Omega$. Existencia takéhoto minimizéru sa zdá byť z fyzikálneho pohľadu opodstatnená (ide napr. o klasickú úlohu z elektrostatiky) a v 19. storočí túto existenciu bez dôkazu predpokladali aj mnohí známi matematici (Gauss, Kelvin, Dirichlet, Riemann). Riemann dokonca túto existenciu postuloval ako tzv. Dirichletov princíp. Tvrdenie pritom platí len pre oblasti s dostatočne regulárnou hranicou.

Na potrebu rigorózneho teórie upozornil v r. 1869 nasledujúcim príkladom Karl Weierstrass:

Nech $X = \{u \in C^1([-1, 1]) : u(-1) = -1, u(1) = 1\}$ a $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ je definovaný predpisom $\Phi(u) = \int_{-1}^1 (xu')^2 dx$. Potom Φ nenadobúda v priestore X svoje infimum. Ľahko sa totiž ukáže, že pre funkcie $u_\varepsilon(x) = c_\varepsilon \arctan(x/\varepsilon)$ (kde c_ε je zvolené tak, aby $u_\varepsilon \in X$) platí $\Phi(u_\varepsilon) \rightarrow 0$ pre $\varepsilon \rightarrow 0+$, avšak $\Phi(u) > 0$ pre každé $u \in X$.

Cvičenie 2.10. Nech $X = \{u \in C^1([-1, 1]) : u(-1) = -1, u(1) = 1\}$ a $\Phi(u) = \int_{-1}^1 ((xu')^2 + 2u^2) dx$. Pomocou nerovnosti

$$(xu')^2 + u^2 + u^2 \geq 2xu'u + u^2 = (u^2x)' \quad (2.17)$$

ukážte, že funkcia $u_0(x) := x$ je globálnym minimizérom Φ v X .

Ukážte tiež, že príslušná Eulerova rovnica $(x^2u')' = 2u$ má pre $x \neq 0$ riešenia tvaru $u(x) = C_1x + C_2/x^2$ a že funkcia $u_1(x) := 1/x^2$ je globálnym minimizérom $\Psi(u) = \int_1^\infty ((xu')^2 + 2u^2) dx$ na množine $Y = \{u \in C^1([1, \infty)) : u(1) = 1\}$. Nakoniec ukážte, že $\Theta(u) = \int_{-1}^\infty ((xu')^2 + 2u^2) dx$ nenadobúda svoje infimum na množine $Z = \{u \in C^1([-1, \infty)) : u(-1) = -1\}$.

3. Nemyckého zobrazenie

Ak sú X, Y reálne Banachove priestory, $w, h, h_1, h_2, \dots, h_n \in X$, a $F : X \rightarrow Y$, potom symbolom $\delta F(w; h)$ resp. $\delta^n F(w; h_1, \dots, h_n)$ budeme označovať deriváciu F v bode w v smere h resp. n -tú deriváciu F v bode w v smere $h_1, h_2, \dots, h_n$. Symbolmi $DF(w)$ resp. $F'(w)$ budeme označovať Gâteauxovu resp. Fréchetovu deriváciu F v bode w .

Nech je ďalej $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvorená, $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ a $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. **Nemyckého**² (alebo tiež substitučné) **zobrazenie** $f^\natural$ príslušné zobrazeniu f je definované predpisom $f^\natural(u) = f(\cdot, u(\cdot))$.

Funkcia $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ sa nazýva **Carathéodoryho funkcia** (a píšeme $f \in CAR$), ak

(i) $f(\cdot, u) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je merateľná pre každé $u \in \mathbb{R}^m$,

(ii) $f(x, \cdot) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá pre s.v. $x \in \Omega$.

Ak navyše platí $f(x, \cdot) \in C^k(\mathbb{R}^m)$ pre s.v. $x \in \Omega$, budeme písať $f \in CAR^k$.

Nasledujúca lema zaručuje, že Nemyckého zobrazenie príslušné Carathéodoryho funkcii zobrazuje merateľné funkcie na merateľné funkcie.

Lema 3.1. *Nech je $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ merateľná, $f \in CAR$. Potom je funkcia $f(\cdot, u(\cdot)) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ merateľná.*

Dôkaz. Nech (u_k) je postupnosť jednoduchých funkcií takých, že $u_k \rightarrow u$ s.v. Ak (pre pevné k) $u_k = \sum_{i=1}^j \alpha_i \chi_{A_i}$, kde množiny A_i sú merateľné a po dvoch disjunktné, potom $f_k := f(\cdot, u_k(\cdot)) = \sum_{i=1}^j f(\cdot, \alpha_i) \chi_{A_i} + f(\cdot, 0) \chi_{\Omega \setminus \bigcup_i A_i}$, takže funkcie f_k sú merateľné, $f_k \rightarrow f(\cdot, u(\cdot))$ s.v. $\square$

Veta 3.2. (O spojitosti Nemyckého zobrazenia v L^p -priestoroch) *Nech je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvorená, $\vec{p} = (p_1, \dots, p_m)$, kde $1 \leq p_j < \infty$, $j = 1, 2, \dots, m$, a položíme $L^{\vec{p}}(\Omega) = L^{p_1}(\Omega) \times \dots \times L^{p_m}(\Omega)$. Nech $1 \leq q < \infty$, $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ je Carathéodoryho funkcia a nech existujú $a \in L^q(\Omega)$ a $\beta > 0$ tak, že*

$$|f(x, u)| \leq a(x) + \beta \sum_{j=1}^m |u_j|^{p_j/q} \quad \text{pre s.v. } x \in \Omega \text{ a každé } u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m. \quad (3.1)$$

Potom je príslušné Nemyckého zobrazenie $f^\natural$ spojité ako zobrazenie $L^{\vec{p}}(\Omega)$ do $L^q(\Omega)$ a zobrazuje ohraničené množiny v $L^{\vec{p}}(\Omega)$ na ohraničené množiny v $L^q(\Omega)$.

Dôkaz. Označme $\|\cdot\|_r$ normu v $L^r(\Omega)$. Z Minkowského nerovnosti a (3.1) plynie

$$\|f^\natural(u)\|_q \leq \|a\|_q + \beta \sum_{j=1}^m \|u_j\|_{p_j}^{p_j/q},$$

takže $f^\natural$ zobrazuje ohraničené množiny v $L^{\vec{p}}(\Omega)$ na ohraničené množiny v $L^q(\Omega)$.

Nech ďalej $u^{(k)} \rightarrow u$ v $L^{\vec{p}}(\Omega)$ a predpokladajme, že $f^\natural(u^{(k)}) \not\rightarrow f^\natural(u)$ v $L^q(\Omega)$, takže $\|f^\natural(u^{(k)}) - f^\natural(u)\|_q \geq \varepsilon_0$ pre vhodné $\varepsilon_0 > 0$ (a vybranú postupnosť, ktorú sme opäť označili $(u^{(k)})$). Prechodom k vybranej postupnosti môžeme predpokladať, že $u^{(k)} \rightarrow u$ s.v. a $\|u^{(k)} - u\|_{\vec{p}} < 2^{-k}$. Pre každé $j = 1, 2, \dots, m$ je funkcia $h_j(x) := |u_j(x)| + \sum_{k=1}^{\infty} |u_j^{(k)}(x) - u_j(x)|$ majorantou pre postupnosť funkcií $\{u_j^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ a platí tiež $(h_1, \dots, h_m) \in L^{\vec{p}}(\Omega)$.

Z predpokladu (3.1) plynie, že funkcia $a + \beta \sum_j h_j^{p_j/q} \in L^q(\Omega)$ je majoranta pre funkcie $f(\cdot, u^{(k)}(\cdot))$. Pretože $f(\cdot, u^{(k)}(\cdot)) \rightarrow f(\cdot, u(\cdot))$ s.v., Lebesgueova veta implikuje $f^\natural(u^{(k)}) \rightarrow f^\natural(u)$ v $L^q(\Omega)$, čo je spor. $\square$

²súčasný anglický prepis mena Немыцкий je najčastejšie Nemytskii

Poznámky 3.3. (i) Z dôkazu Vety 3.2 plynie, že ak napr. priestor $L^{p_1}(\Omega)$ nahradíme priestorom X_1 , kde X_1 je jeden z priestorov $L^\infty(\Omega)$, $L^{p_1} \cap L^\infty(\Omega)$ a $L^{p_1} \cap L^{\tilde{p}_1}(\Omega)$ ($1 \leq \tilde{p}_1 < \infty$), potom tvrdenie vety bude platiť, pokiaľ rastovú podmienku (3.1) nahradíme podmienkou

$$\begin{aligned} |f(x, u)| &\leq M(|u_1|) \left(a(x) + \beta \sum_{j=2}^m |u_j|^{p_j/q} \right) & \text{ak } X_1 = L^\infty(\Omega), \\ |f(x, u)| &\leq M(|u_1|) \left(a(x) + \beta \sum_{j=1}^m |u_j|^{p_j/q} \right) & \text{ak } X_1 = L^{p_1} \cap L^\infty(\Omega), \\ |f(x, u)| &\leq a(x) + \beta \left(|u_1|^{\tilde{p}_1/q} + \sum_{j=1}^m |u_j|^{p_j/q} \right) & \text{ak } X_1 = L^{p_1} \cap L^{\tilde{p}_1}(\Omega), \end{aligned} \quad (3.2)$$

kde $M : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ je ľubovoľná neklesajúca funkcia.

(ii) Ak $f \in CAR$ a $f^\natural$ zobrazuje $L^{\vec{p}}(\Omega)$ do $L^q(\Omega)$, potom existujú $a \in L^q(\Omega)$ a $\beta > 0$ tak, že platí (3.1).

Veta 3.4. (O diferencovateľnosti Nemyckého zobrazenia v L^p -priestoroch) *Nech je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvorená, $1 \leq q < \infty$, $\vec{p} = (p_1, \dots, p_m)$, kde $q < p_i < \infty$, $i = 1, 2, \dots, m$; položíme $L^{\vec{p}}(\Omega) = L^{p_1}(\Omega) \times \dots \times L^{p_m}(\Omega)$ a $1/r_i := 1/q - 1/p_i$. Nech $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ je triedy CAR^1 , $f(\cdot, 0) \in L^q(\Omega)$ a nech existujú $a_i \in L^{r_i}(\Omega)$, $i = 1, 2, \dots, m$, a $\beta > 0$ tak, že*

$$|f_{u_i}(x, u)| \leq a_i(x) + \beta \sum_{j=1}^m |u_j|^{p_j/r_i} \quad \text{pre s.v. } x \in \Omega \text{ a každé } u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m. \quad (3.3)$$

Potom je Nemyckého zobrazenie $f^\natural : L^{\vec{p}}(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$ triedy C^1 , $f^\natural, (f^\natural)'$ zobrazujú ohraničené množiny na ohraničené množiny a

$$(f^\natural)'(u)h = \sum_{i=1}^m f_{u_i}(\cdot, u(\cdot))h_i(\cdot). \quad (3.4)$$

Dôkaz. Použitím vety o strednej hodnote, (3.3) a Youngovej nerovnosti (s exponentami p_i/q a $(p_i/q)' = r_i/q$) dostaneme pre vhodné $\theta = \theta(x, u) \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} |f(x, u)| &= |f(x, 0) + \sum_i f_{u_i}(x, \theta u)u_i| \leq |f(x, 0)| + \sum_i (a_i(x) + \beta \sum_j |\theta u_j|^{p_j/r_i})|u_i| \\ &\leq \tilde{a}(x) + C \sum_j |u_j|^{p_j/q} \quad \text{pre každé } u \in \mathbb{R}^m \text{ a skoro každé } x \in \Omega, \end{aligned}$$

kde $\tilde{a} = |f(\cdot, 0)| + C \sum_i |a_i|^{r_i/q} \in L^q(\Omega)$ a $C > 0$ je vhodná konštanta, takže $f^\natural : L^{\vec{p}}(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$ je podľa Vety 3.2 spojitě zobrazenie a zobrazuje ohraničené množiny na ohraničené množiny. Zobrazenia $(f_{u_i})^\natural : L^{\vec{p}}(\Omega) \rightarrow L^{r_i}(\Omega)$ sú tiež podľa Vety 3.2 spojitě a zobrazujú ohraničené množiny na ohraničené množiny. Ak teda pre $u, h \in L^{\vec{p}}(\Omega)$ definujeme $A(u)h := \sum_{i=1}^m (f_{u_i})^\natural(u)h_i$, potom z odhadu $\|A(u)h - A(v)h\|_q \leq \sum_i \|(f_{u_i})^\natural(u) - (f_{u_i})^\natural(v)\|_{r_i} \|h_i\|_{p_i}$ dostaneme, že zobrazenie $A : L^{\vec{p}}(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}(L^{\vec{p}}(\Omega), L^q(\Omega))$ je spojitě a zobrazuje ohraničené množiny na ohraničené množiny.

Zvoľme $u, h \in L^{\vec{p}}(\Omega)$. Použitím vety o strednej hodnote dostávame pre s.v. $x \in \Omega$

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} (f^\natural(u + th)(x) - f^\natural(u)(x)) &= \frac{1}{t} \int_0^1 \frac{d}{d\theta} f(x, u(x) + \theta th(x)) d\theta \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^m f_{u_i}(x, u(x) + \theta th(x)) h_i(x) d\theta \rightarrow \sum_{i=1}^m f_{u_i}(x, u(x)) h_i(x) \quad \text{pre } t \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Z Lebesgueovej vety teraz plynie, že existuje smerová derivácia $\delta f^\natural(u; h) = A(u)h$. Keďže $A(u) \in \mathcal{L}(L^{\vec{p}}(\Omega), L^q(\Omega))$, existuje tiež Gâteauxova derivácia $Df^\natural(u) = A(u)$ a vzhľadom k vlastnostiam zobrazenia A existuje aj Fréchetova derivácia $(f^\natural)' = A$ a má požadované vlastnosti. $\square$

Poznámky 3.5. (i) Podobné modifikácie ako v Poznámke 3.3(i) platia aj pre Vetu 3.4. Ak napr. priestor $L^{p_1}(\Omega)$ nahradíme priestorom $L^{p_1} \cap L^\infty(\Omega)$, potom miesto predpokladu (3.3) stačí žiadať

$$|f_{u_i}(x, u)| \leq M(|u_1|) \left(a_i(x) + \beta \sum_{j=1}^m |u_j|^{p_j/r_i} \right) \quad \text{pre s.v. } x \in \Omega \text{ a každé } u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m,$$

kde $M : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ je neklesajúca funkcia, pričom v prípade $i = 1$ môžeme naviac výraz $|u_j|^{p_j/r_1}$ na pravej strane nahradiť výrazom $\max(|u_j|^{p_j/r_1}, |u_j|^{p_j/q})$.

(ii) Pomocou matematickej indukcie sa dá Veta 3.4 zovšeobecniť na získanie postačujúcich podmienok pre existenciu a spojitost' vyšších derivácií Nemyckého zobrazenia. Uvedme si formuláciu takéhoto tvrdenia aspoň v jednoduchom prípade $p_1 = p_2 = \dots = p_m =: p$: Nech $f \in CAR^k$, $k < p/q$ prirodzené, $1/r_j := 1/q - j/p$ pre $j = 0, 1, \dots, k$. Nech $D_u^j f(\cdot, 0) \in L^{r_j}(\Omega)$ pre $j = 0, 1, \dots, k-1$ a $|D_u^k f(x, u)| \leq a(x) + \beta |u|^{(p/q)-k}$, kde $a \in L^{r_k}(\Omega)$ a $\beta > 0$. Potom $f^\sharp \in C^k$.

(iii) Nech $m = 1$ a $f^\sharp : L^p(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ je fréchetovsky diferencovateľné. Potom existujú $a \in L^\infty(\Omega)$ a $b \in L^p(\Omega)$ tak, že $f(x, u) = a(x)u + b(x)$ pre s.v. $x \in \Omega$ a každé $u \in \mathbb{R}$.

(iv) Nech $m = 1$, $f \in CAR^1$, $1 \leq p < \infty$, $f(\cdot, 0) \in L^p(\Omega)$ a nech je f_u ohraničená. Potom je $f^\sharp$ lipschitzovské zobrazenie $L^p(\Omega)$ do $L^p(\Omega)$, ktoré je naviac gâteauxovsky diferencovateľné a $Df^\sharp(u)h = f_u(\cdot, u(\cdot))h$.

Príklad 3.6. Nech je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ oblasť s lipschitzovskou hranicou, $p_1 \geq p_2 > q \geq 1$, $p_1 = np_2/(n - p_2)$ ak $p_2 < n$. Nech $f : \Omega \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R} : (x, (u, s)) \mapsto f(x, u, s)$ je triedy CAR^1 , $f(\cdot, (0, 0)) \in L^q(\Omega)$,

$$\begin{aligned} |f_u(x, u, s)| &\leq a_1(x) + \beta(|u|^{p_1/r_1} + |s|^{p_2/r_1}), \\ |f_s(x, u, s)| &\leq a_2(x) + \beta(|u|^{p_1/r_2} + |s|^{p_2/r_2}), \end{aligned}$$

kde $a_j \in L^{r_j}(\Omega)$ a $1/r_j := 1/q - 1/p_j$, $j = 1, 2$. Potom je zobrazenie $F : W^{1,p_2}(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega) : u \mapsto f(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))$ triedy C^1 a

$$F'(u)h = f_u(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))h + f_s(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot)) \cdot \nabla h.$$

To plynie z Vety 3.4, ak si F napíšeme v tvare $F(u) = f^\sharp(u, \nabla u) = f^\sharp(Au)$, kde

$$A : W^{1,p_2}(\Omega) \rightarrow L^{p_1}(\Omega) \times (L^{p_2}(\Omega))^n : u \mapsto (u, \nabla u)$$

je spojité lineárne zobrazenie a $f^\sharp : L^{\vec{p}}(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$ je triedy C^1 pre $\vec{p} = (p_1, \underbrace{p_2, p_2, \dots, p_2}_n)$, takže $F'(u)h = (f^\sharp)'(Au)Ah$.

Špeciálne, ak $q = 1$ a $E : W^{1,p_2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} : u \mapsto \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x)) dx$, potom je E triedy C^1 a

$$E'(u)h = \int_\Omega [f_u(x, u(x), \nabla u(x))h(x) + f_s(x, u(x), \nabla u(x)) \cdot \nabla h(x)] dx.$$

To dostaneme, ak si E napíšeme v tvare $E(u) = BF(u)$, kde $B : L^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} : u \mapsto \int_\Omega u(x) dx$ je spojitý lineárny operátor.

Cvičenie 3.7. Ukážte, že Nemyckého zobrazenie $f^\sharp$ pre $f(x, u) = \sin(u)$ je ako zobrazenie $L^2(0, 1)$ do $L^2(0, 1)$ gâteauxovsky diferencovateľné, ale neexistuje Fréchetova derivácia $(f^\sharp)'(0)$.

Cvičenie 3.8. Nech $f : \Omega \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ je Carathéodoryho funkcia. Vyslovte a dokážte vetu o spojitosti a diferencovateľnosti Nemyckého zobrazenia $f^\sharp : L^p \cap L^\infty(\Omega) \times (L^p(\Omega))^n \rightarrow L^q(\Omega)$. Ako dôsledok tejto vety ukážte spojitost' zobrazenia

$$F : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega) : u \mapsto f(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))$$

pre $p > n$ za rastového predpokladu

$$|f(x, u, s)| \leq M(|u|)(a(x) + |u|^{p/q} + |s|^{p/q}),$$

kde $a \in L^q(\Omega)$ a $M : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ je neklesajúca funkcia, resp. jeho diferencovateľnosť, ak $f \in CAR^1$, $f(\cdot, 0, 0) \in L^q(\Omega)$,

$$\begin{aligned} |f_u(x, u, s)| &\leq M(|u|)(a_0(x) + a_1(x) + |u|^{p/r} + |s|^{p/r} + |s|^{p/q}), \\ |f_s(x, u, s)| &\leq M(|u|)(a_1(x) + |u|^{p/r} + |s|^{p/r}), \end{aligned} \quad (3.5)$$

kde $a_0 \in L^q(\Omega)$, $a_1 \in L^r(\Omega)$, $1/r = 1/q - 1/p$ a $p > \max(q, n)$. V prípade, že má Ω konečnú mieru, možno rastové predpoklady (3.5) napísať v jednoduchšom tvare:

$$\begin{aligned} |f_u(x, u, s)| &\leq M(|u|)(a_0(x) + |s|^{p/q}), \\ |f_s(x, u, s)| &\leq M(|u|)(a_1(x) + |s|^{p/r}). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Pre takúto Ω nájdite tiež podmienky, za ktorých bude F triedy C^2 .

Veta 3.9. (O spojitosti Nemyckého zobrazenia v priestoroch spojitých funkcií) *Nech je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvorená a ohraničená a $f \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$. Potom $f^\sharp : C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^m) \rightarrow C(\bar{\Omega})$ je spojitá.*

Dôkaz. Nech $u_j \rightarrow u_0$ v $C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^m)$, dokážeme $f^\sharp(u_j) \rightarrow f^\sharp(u_0)$ v $C(\bar{\Omega})$.

Označme $M := \bigcup \{u_j(x) : x \in \bar{\Omega}, j \geq 0\}$. Z konvergencie $u_j \rightarrow u_0$ plynie ohraničenosť $\{u_j\}$ v $C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^m)$, takže tiež $M \subset \mathbb{R}^m$ je ohraničená. Množina $\bar{\Omega} \times \bar{M}$ je teda kompaktná, takže reštrikcia f na túto množinu je rovnomerne spojitá. Pretože $\sup_{x \in \bar{\Omega}} \|(x, u_j(x)) - (x, u_0(x))\| \rightarrow 0$ pre $j \rightarrow \infty$, plynie zo spomínanej rovnomernej spojitosti $f^\sharp(u_j) \rightarrow f^\sharp(u_0)$ v $C(\bar{\Omega})$. $\square$

Poznámky 3.10. (i) Množina M v dôkaze Vety 3.9 je nielen ohraničená ale tiež kompaktná. Ak totiž $s_k \in M$, potom $s_k = u_{j_k}(x_k)$ pre vhodné $x_k \in \bar{\Omega}$ a $j_k \geq 0$. Pre vybranú postupnosť potom platí $x_k \rightarrow x \in \bar{\Omega}$ a $u_{j_k} \rightarrow u_j$ v $C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^m)$, odkiaľ $s_k \rightarrow u_j(x) \in M$.

(ii) S využitím argumentov v (i) vidno, že tvrdenie vo Vete 3.9 platí aj pre funkcie $u \in C(\bar{\Omega}, E)$ a $f \in C(\bar{\Omega} \times E, F)$, kde E, F sú Banachove priestory (a $f^\sharp : C(\bar{\Omega}, E) \rightarrow C(\bar{\Omega}, F)$).

Veta 3.11. (O diferencovateľnosti Nemyckého zobrazenia v priestoroch spojitých funkcií) *Nech je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvorená a ohraničená a $f \in C^{0,k}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$. Potom $f^\sharp : C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^m) \rightarrow C(\bar{\Omega})$ je triedy C^k a $[(f^\sharp)'(u)h](x) = f_u(x, u(x)) \cdot h(x)$.*

Dôkaz. Tvrdenie dokážeme pre $k = 1$, všeobecný prípad sa dokáže indukciou. Označme $Au := f_u(\cdot, u(\cdot))$. Podľa Poznámky 3.10(ii) je A spojitá zobrazenie $C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ do $C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^m)$. Ak označíme

$$\omega(h) := f^\sharp(u + h) - f^\sharp(u) - Au \cdot h, \quad (3.7)$$

potom použitím vety o strednej hodnote (pre $\varphi(t) = f(x, u(x) + th(x))$ s pevným $x \in \bar{\Omega}$) dostávame

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \bar{\Omega}} |\omega(h)(x)| &= \sup_{x \in \bar{\Omega}} \left| \int_0^1 [f_u(x, u(x) + th(x)) - f_u(x, u(x))] \cdot h(x) dt \right| \\ &\leq \|h\| \int_0^1 \|A(u + th) - A(u)\| dt = o(\|h\|), \end{aligned}$$

kde $\|\cdot\|$ je norma v $C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^m)$, takže existuje $(f^\sharp)'(u)$ a platí $(f^\sharp)'(u)h = Au \cdot h$. Spojitosť tejto derivácie teraz plynie zo spojitosti A a z odhadu $\|((f^\sharp)'(u) - (f^\sharp)'(v))h\| \leq \|A(u) - A(v)\| \cdot \|h\|$. $\square$

Príklad 3.12. Nech je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvorená a ohraničená,

$$f : \bar{\Omega} \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R} : (x, (u, s)) \mapsto f(x, u, s)$$

je spojitá v x a triedy C^k v (u, s) . Nech $F : C^1(\bar{\Omega}) \rightarrow C(\bar{\Omega}) : u \mapsto f(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))$. Potom je F triedy C^k a $F'(u)h = f_u(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))h(\cdot) + f_s(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot)) \cdot \nabla h(\cdot)$. Ak $k \geq 2$ a $n = 1$, potom

$$F''(u)(h, h) = f_{uu}(\cdot, u(\cdot), u'(\cdot))h^2 + 2f_{us}(\cdot, u(\cdot), u'(\cdot))hh' + f_{ss}(\cdot, u(\cdot), u'(\cdot))(h')^2.$$

Príklad 3.13. Ak je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvorená a ohraničená a $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je Carathéodoryho funkcia spĺňajúca rastový podmienku

$$|f(x, u)| \leq a(x)M(|u|) \quad \text{pre s.v. } x \in \Omega \text{ a každé } u \in \mathbb{R}, \quad (3.8)$$

kde $M : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ je neklesajúca funkcia a $a \in L^q(\Omega)$, $1 \leq q < \infty$, potom z Poznámky 3.3(i) plynie spojitost' Nemyckého zobrazenia $f^\sharp : C(\bar{\Omega}) \rightarrow L^q(\Omega)$. Dá sa ukázať, že táto podmienka je aj nutná na to, aby operátor $f^\sharp$ zobrazoval $C(\bar{\Omega})$ do $L^q(\Omega)$, takže pokiaľ $f^\sharp$ zobrazuje $C(\bar{\Omega})$ do $L^q(\Omega)$, tak je automaticky spojitý a ohraničený na ohraničených množinách. (Podobné tvrdenie v prípade $f^\sharp : L^p(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$ plynie z Poznámky 3.3(ii).) Z podmienky (3.8) zrejme plynie odhad

$$\int_{\Omega} \sup_{|u| \leq K} |f(x, u)|^q dx < \infty \quad \forall K > 0. \quad (3.9)$$

Ukážeme, že odhad (3.9) je aj postačujúci, a teda ekvivalentný s podmienkou (3.8).

Položme $f_k(x) := \sup_{|u| \leq k} |f(x, u)|$ pre $k = 1, 2, \dots$; potom z (3.9) plynie $f_k \in L^q(\Omega)$. Definujme

$$a(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k(x)}{2^k \|f_k\|_q}.$$

Potom $a \in L^q(\Omega)$ a

$$|f(x, u)| \leq f_{[|u|]+1}(x) \leq 2^{[|u|]+1} \|f_{[|u|]+1}\|_q a(x) = a(x)M(|u|),$$

kde $M(t) := 2^{[t]+1} \|f_{[t]+1}\|_q$ a $[x]$ označuje celú časť čísla x .

Cvičenie 3.14. Nech $\Omega = (0, 1)$, $q = 1$, $\alpha > 1$ a $f(x, u) = |u|^\alpha / (x^2 + (u^2 - x)^2)$. Ukážte, že f spĺňa podmienku (3.8) resp. (3.9) (t.j. $f^\sharp$ zobrazuje $C(\bar{\Omega})$ do $L^1(\Omega)$) len ak $\alpha > 2$. Na druhej strane ukážte, že operátor $f^\sharp$ zobrazuje $C^1(\bar{\Omega})$ do $L^1(\Omega)$ pre každé $\alpha > 1$, ale nie je spojitý pre $\alpha \leq 2$ a nie je ohraničený na ohraničených množinách pre $\alpha < 2$.

Príklad 3.15. Vzhľadom k výsledkom o regularite riešení eliptických a parabolických rovníc sa často skúmajú tiež Nemyckého zobrazenia v priestoroch hölderovských funkcií. Ukážme, že podobne ako v Cvičení 3.14 (a na rozdiel od situácie v Príklade 3.13 alebo Poznámke 3.3(ii)), Nemyckého zobrazenie v tomto prípade nemusí byť automaticky spojitý.

Nech $\alpha \in (0, 1)$, $X = BUC^\alpha(-1, 1)$ je priestor ohraničených uniformne α -hölderovských funkcií $u : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ s normou

$$\|u\|_\alpha := \sup_{x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} + \sup_x |u(x)|$$

a $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je lokálne lipschitzovská funkcia. Potom zrejme $f^\sharp$ zobrazuje X do X . Ukážeme, že ak je zobrazenie $f^\sharp : X \rightarrow X$ spojitý, potom nutne $f \in C^1$.

Keďže funkcia f je lokálne lipschitzovská, má doplnok množiny $D := \{v \in \mathbb{R} : \text{existuje konečná } f'(v)\}$ nulový Lebesgueovu mieru. Zvoľme $u \in \mathbb{R}$ pevne a uvažujme $v \in D$ a postupnosť $h_n \rightarrow 0$. Položme $\tilde{u}(x) = u + |x|^\alpha \text{sign}(x)$, $\tilde{v}(x) = v + |x|^\alpha \text{sign}(x)$ a zvoľme $x_n \in \mathbb{R}$ tak, aby $|x_n|^\alpha \text{sign}(x_n) = h_n$. Potom platí

$$\left| \frac{f(u + h_n) - f(u)}{h_n} - \frac{f(v + h_n) - f(v)}{h_n} \right| = \left| \frac{(f^\sharp(\tilde{u}) - f^\sharp(\tilde{v}))(x_n) - (f^\sharp(\tilde{u}) - f^\sharp(\tilde{v}))(0)}{|x_n|^\alpha} \right| \leq \|f^\sharp(\tilde{u}) - f^\sharp(\tilde{v})\|_\alpha.$$

Ak zvolíme $\varepsilon > 0$, potom existuje $v \in D$ tak, že $\|f^\sharp(\tilde{u}) - f^\sharp(\tilde{v})\|_\alpha < \varepsilon$, takže pre všetky n dostatočne veľké platí $\left| \frac{f(u + h_n) - f(u)}{h_n} - f'(v) \right| < 2\varepsilon$. Odtiaľ plynie existencia konečnej $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(u + h_n) - f(u)}{h_n}$, a teda tiež existencia konečnej $f'(u)$. Platí teda $D = \mathbb{R}$ a z práve dokázaných odhadov plynie tiež $|f'(u) - f'(v)| \leq \|f^\sharp(\tilde{u}) - f^\sharp(\tilde{v})\|_\alpha \rightarrow 0$ pre $v \rightarrow u$.

Poznámky 3.16. (i) Nech je $C \subset [0, 1]$ Cantorovo diskontinuum a $c : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ Cantorova funkcia; $g(x) := (x + c(x))/2$ a $u := g^{-1}$. Množina $g(C)$ má kladnú Lebesgueovu mieru, takže existuje jej nemerateľná podmnožina E . Položme $A := u(E) \subset C$ a $f := \chi_A$. Potom je u spojitá, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ merateľná, ale $f^\sharp(u) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ nie je merateľná.

(ii) Ak je $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ borelovsky merateľná a $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ merateľná, potom je zrejme $f^\sharp(u)$ merateľná (a podobné tvrdenie platí aj pre funkcie $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$), ale zobrazenie $f^\sharp : L^p \rightarrow L^q$ nemusí byť spojitý ani pre f ohraničenú (uvažujte napr. $\Omega = (0, 1)$, $f = \chi_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$ a $u_k(x) = x/k$).

(iii) Nech $\Omega = (0, 1)$, $f(u) = \max(-1, \min(1, u))$ a $1 \leq p < \infty$. Potom $f^\sharp$ zobrazuje $L^p(\Omega)$ do $L^\infty(\Omega)$, ale nie je spojitý (uvažujte $u_k(x) = x^k$).

I. Abstraktný variačný počet

4. Existencia globálnych minimizérov

Vo všetkých tvrdeniach o existencii minimizérov budeme implicitne predpokladať, že množiny, v ktorých minimizér hľadáme, sú neprázdne.

Nech je T topologický priestor. Funkcia $\Phi : T \rightarrow \mathbb{R}$ sa nazýva **zdola polospojité**, ak pre každé $w \in T$ a $\varepsilon > 0$ je množina $\{u : \Phi(u) > \Phi(w) - \varepsilon\}$ okolím bodu w . Funkcia Φ je zdola polospojité práve vtedy, keď pre každé $\alpha \in \mathbb{R}$ je množina $\{u : \Phi(u) \leq \alpha\}$ uzavretá. Funkcia $\Phi : T \rightarrow \mathbb{R}$ sa nazýva **sekvenciálne zdola polospojité**, ak pre každú postupnosť $u_n \rightarrow w$ v T platí $\liminf_{n \rightarrow \infty} \Phi(u_n) \geq \Phi(w)$. Každá zdola polospojité funkcia je sekvenciálne zdola polospojité. Ak je T metrický priestor, platí tiež obrátené tvrdenie: každá sekvenciálne zdola polospojité funkcia je zdola polospojité.

Nech je X reálny Banachov priestor, $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ a $T = (X, w)$ (t.j. T je priestor X so slabou topológiou). Ak je funkcionál $\Phi : T \rightarrow \mathbb{R}$ (sekvenciálne) zdola polospojité, nazýva sa $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ **slabo (sekvenciálne) zdola polospojité**. Analogicky sa definuje slabo (sekvenciálne) spojité funkcionál.

Cvičenie 4.1. Ak $X \hookrightarrow Y$ (kompaktné vnorenie), potom je norma $\|\cdot\|_Y$ slabo sekvenciálne spojité v X . Dokážte a použite toto tvrdenie na dôkaz slabej sekvenciálnej zdola polospojitosti funkcionálu $\Phi(u) = \int_0^1 [(u')^2 - |u|^p] dx$ ($p \geq 1$) vo $W^{1,2}(0,1)$.

Nech je $M \subset X$ konvexná množina. Funkcionál $\Phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ sa nazýva **konvexný**, ak

$$\Phi(\alpha u + (1 - \alpha)v) \leq \alpha \Phi(u) + (1 - \alpha)\Phi(v) \quad (4.1)$$

pre každé $\alpha \in (0,1)$ a $u, v \in M$, $u \neq v$. Potom tiež platí $\Phi(\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \Phi(u_i)$ pre ľubovoľné $u_i \in M$, $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, a množina $\{u : \Phi(u) \leq \beta\}$ je konvexná pre každé $\beta \in \mathbb{R}$. Funkcionál $\Phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ sa nazýva **striktne konvexný**, ak v (4.1) platí ostrá nerovnosť. Ak existuje $\delta^2 \Phi(w; h, h)$ a platí $\delta^2 \Phi(w; h, h) > 0$ pre každé $w \in M$ a $h \in X \setminus \{0\}$, potom je zrejmé Φ striktne konvexný (stačí uvažovať funkciu $\varphi(t) = \Phi(u + t(v - u))$).

Nech je ďalej M ľubovoľná podmnožina X a $\Phi : M \rightarrow \mathbb{R}$. Funkcionál $\Phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ sa nazýva **koercívny** (na množine M), ak $\lim_{u \in M, \|u\| \rightarrow \infty} \Phi(u) = +\infty$. Postupnosť prvkov $\{u_n\} \subset M$ sa nazýva **minimizujúca** pre Φ , ak $\Phi(u_n) \rightarrow \inf_M \Phi$. Prvok $u \in M$ sa nazýva **minimizér** funkcionálu Φ na množine M , ak $\Phi(u) = \inf_M \Phi$.

Cvičenie 4.2. Nech je X uniformne konvexný a $\Psi : X \rightarrow \mathbb{R}$ je slabo sekvenciálne zdola polospojité. Ak je $\{u_n\}$ ohraničená minimizujúca postupnosť pre $\Phi(u) = \|u\| + \Psi(u)$, potom (pre vybranú podpostupnosť) platí $u_n \rightarrow u$, kde u je minimizér (podobne pre $\Phi(u) = h(\|u\|) + \Psi(u)$, kde h je spojité a rastúce). Dokážte.

Lema 4.3. Nech je T kompaktný topologický priestor a $\Phi : T \rightarrow \mathbb{R}$ je zdola polospojité. Potom existuje $\min_T \Phi$.

Dôkaz. Zvoľme klesajúcu postupnosť α_n s vlastnosťou $\alpha_n \rightarrow \inf_T \Phi$. Potom je $K_n = \{u \in T : \Phi(u) \leq \alpha_n\}$ nerastúca postupnosť neprázdnych kompaktných množín, takže existuje $u \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$. Zrejme $\Phi(u) = \min_T \Phi$. $\square$

Dôsledok 4.4. Nech je X reálny Banachov priestor, $M \subset X$ je slabo kompaktná a $\Phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ je slabo zdola polospojité. Potom existuje $\min_M \Phi$.

Poznámky 4.5. (i) Ak je X' separabilný, potom je slabá topológia na ohraničených množinách v X metrizovateľná, takže v Dôsledku 4.4 stačí miesto slabej zdola polospojitosť Φ požadovať jeho slabú sekvenciálnu zdola polospojitosť.

(ii) Ak je Φ konvexný a spojitý, potom je slabo zdola polospojité. Množiny typu $\{u : \Phi(u) \leq \alpha\}$ sú totiž konvexné a uzavreté, a teda tiež slabo uzavreté.

(iii) Ak X je reflexívny a M je konvexná, ohraničená, uzavretá, potom je tiež slabo kompaktná. Z konvexnosti a uzavretosti množiny M totiž plynie jej slabá uzavretosť a z reflexivity X a ohraničenosti M potom plynie slabá kompaktnosť M .

(iv) Nech je Φ koercívny, $M \subset X$ neohraničená a $A := \inf_M \Phi$. Potom pre dostatočne veľké $C > 0$ platí $A = \inf_{M \cap B_C} \Phi$, kde $B_C = \{u \in X : \|u\| \leq C\}$, takže miesto hľadania minima Φ v M stačí hľadať jeho minimum na ohraničenej množine $M \cap B_C$. Pokiaľ je množina M konvexná a uzavretá, tak je $M \cap B_C$ konvexná, uzavretá a ohraničená (a teda v prípade reflexívneho priestoru X tiež slabo kompaktná).

Veta 4.6. *Nech je X reflexívny, M je ohraničená a slabo sekvenciálne uzavretá a $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ je slabo sekvenciálne zdola polospojité. Potom existuje $\min_M \Phi$.*

Dôkaz. Nech je $\{u_n\} \subset M$ minimizujúca postupnosť pre Φ . Z Eberlein-Šmuljanovej vety plynie existencia slabo konvergentnej podpostupnosti $\{u_{n_k}\}$. Zo slabej sekvenciálnej uzavretosti M a slabej sekvenciálnej zdola polospojitosť Φ plynie $u_{n_k} \rightharpoonup u \in M$ a $\Phi(u) = \min_M \Phi$. $\square$

Veta 4.7. *Nech je X reálny Banachov priestor, $M \subset X$ konvexná a $\Phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ striktné konvexný. Potom existuje nanajvýš jedno $u \in M$, pre ktoré $\Phi(u) = \inf_M \Phi$.*

Dôkaz. Ak sú $u_1, u_2 \in M$ dva rôzne minimizéry Φ a $u = \frac{u_1 + u_2}{2}$, potom $u \in M$ a $\Phi(u) < \frac{1}{2}(\Phi(u_1) + \Phi(u_2)) = \inf_M \Phi$, spor. $\square$

Cvičenie 4.8. Nech $X = C([0, 1])$, $M = \{u \in X : |u| \leq 1\}$, $\Phi(u) = \int_0^{1/2} u(x) dx - \int_{1/2}^1 u(x) dx$. Ukážte, že M je konvexná, ohraničená, uzavretá a Φ je spojitý a lineárny (a teda tiež konvexný), ale Φ nenadobúda na M svoje infimum. (Dôsledok: priestor X nie je reflexívny.) Vyšetrite tiež prípad $X = W^{1,2}([0, 1])$, $M = \{u \in X : |u| \leq 1\}$.

Cvičenie 4.9. Nech $\Phi(u) = \int_0^1 u dx$, $X = \{u \in C([0, 1]) : u(0) = u(1) = 0\}$ alebo $X = W_0^{1,2}(0, 1)$ a $M = \{u \in X : |u| \leq 1\}$. Existuje $\min_M \Phi$? Vyšetrite tiež prípad $X = W_0^{1,2}(0, 1)$ a $M = \{u \in X : |u'| \leq 1\}$.

Cvičenie 4.10. Nech $\Phi(u) = \int_0^1 ((u')^2 - u^4) dx$, $M_k = \{u \in W_0^{1,2}(0, 1) : |u| \leq k\}$, kde $k \in \{3, 5\}$. Ukážte, že $\Phi(0) = \min_{M_3} \Phi$, že existuje $\min_{M_5} \Phi$ a každý globálny minimizér u_0 funkcionálu Φ na M_5 spĺňa $\max |u_0| = 5$.

Cvičenie 4.11. Nech $\Phi(u) = \int_0^1 \sqrt{u^2 + (u')^2} dx$, $M_p = \{u \in W^{1,p}(0, 1) : u(0) = 0, u(1) = 1\}$, $p = 1, 2$. Ukážte, že $\Phi : M_p \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitý, konvexný pre $p = 1, 2$ a koercívny pre $p = 1$, ale nenadobúda v M_1 ani M_2 svoje infimum.

Cvičenie 4.12. Nech $a_k = 2(1 - 1/k)$ a $\Phi(u) = \|u\|^2 - \sum_k a_k u_k$ pre $u = (u_1, u_2, \dots) \in \ell^1$. Ukážte, že Φ je koercívny a slabo zdola polospojité, ale nenadobúda v ℓ^1 svoje infimum.

Cvičenie 4.13. Ukážte, že $\Phi(u) = \int_0^1 x(u')^2 dx$ nenadobúda infimum na množine $\{u \in W^{1,2} : u(0) = 1, u(1) = 0\}$.

Cvičenie 4.14. Nech je $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdola polospojité a zdola ohraničená. Ukážte, že existuje globálny minimizér funkcionálu $\Phi(u) = \int_0^1 ((u')^2 + g(u)) dx$ v priestore $W_0^{1,2}(0, 1)$. Existuje takýto minimizér aj pre $g = \chi_{[0, \infty)}$?

Cvičenie 4.15. Uvažujte funkcionál $\Phi(u) = \int_{-1}^1 ((u')^2 - 1)^2 dx$ v priestoroch $X_1 = W_0^{1,4}(-1, 1)$ a $X_2 = \{u \in C^1([-1, 1]) : u(-1) = u(1) = 0\}$. Ukážte, že Φ nadobúda infimum v X_1 ale nie v X_2 . Ďalej ukážte, že Φ je slabo sekvenciálne zdola polospojité v X_2 ale nie v X_1 a vyšetrite tiež koercivitu Φ v X_1 a X_2 .

Cvičenie 4.16. Nech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je ohraničená oblasť s lipschitzovskou hranicou, $0 \in \Omega$ a $X = W^{1,2}(\Omega)$. Pre aké n je

$$\Phi : X \rightarrow \mathbb{R} : u \mapsto \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |u|^3 + \frac{u}{|x|^3}) dx$$

triedy C^2 ? Pre takéto n ukážte, že existuje práve jedna funkcia $u \in X$ s vlastnosťou $\Phi'(u) = 0$.

Cvičenie 4.17. Ukážte, že pre $\varepsilon > 0$ existuje (jediný) globálny minimizér funkcionálu

$$\Phi : W^{1,2}(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R} : u \mapsto \int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla u|^2 + \varepsilon u^2 + \frac{u^2}{|x|} - \frac{u}{|x|^2}) dx.$$

Ďalej ukážte, že pre $\varepsilon = 0$ nie je Φ zdola ohraničený.

Cvičenie 4.18. Nech $Z, K > 0$, $M_K := \{u \in L^{5/3}(\mathbb{R}^3) : u \geq 0, \int_{\mathbb{R}^3} u(x) dx \leq K\}$ a

$$\Phi(u) := \frac{3}{5} \int_{\mathbb{R}^3} |u|^{5/3}(x) dx - Z \int_{\mathbb{R}^3} \frac{u(x)}{|x|} dx + \frac{1}{2} \Psi(u), \quad \text{kde} \quad \Psi(u) := \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{u(x)u(y)}{|x-y|} dx dy.$$

Ukážte existenciu jediného globálneho minimizéra u_K funkcionálu Φ na množine M_K .

Návod: Nech $L^p := L^p(\mathbb{R}^3)$ a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ označuje dualitu medzi priestorom temperovaných distribúcií $\mathcal{S}'$ a $\mathcal{S}$. Pre Fourierovu transformáciu funkcie $g(x) := \frac{1}{|x|}$ platí $(\mathcal{F}g)(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{|\xi|^2} > 0$, takže pre $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ dostaneme

$$\Psi(u) = \langle g * u, u \rangle = \langle u * g, u \rangle = \langle \mathcal{F}(u * g), \mathcal{F}^{-1}u \rangle = (2\pi)^{3/2} \langle \mathcal{F}u \cdot \mathcal{F}g, \overline{\mathcal{F}u} \rangle = (2\pi)^{3/2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{F}g |\mathcal{F}u|^2 dx \geq 0.$$

Z hustoty $\mathcal{D}$ v $L^{6/5}$ a spojitosti Ψ v $L^{6/5}$ (viď (17.2)) plynie $\Psi(u) \geq 0$ pre $u \in L^{6/5}$, takže $\Psi''(u)(\varphi, \varphi) = 2\Psi(\varphi) \geq 0$, a teda Ψ je konvexný v $L^{6/5}$. Funkcionál $\Sigma(u) := \int_{\mathbb{R}^3} |u|^{5/3}(x) dx$ je spojitý a striktnie konvexný v $L^{5/3}$. Ďalej označme $\Theta_1(u) := \int_{|x| \leq 1} \frac{u(x)}{|x|} dx$, $\Theta_2(u) := \int_{|x| > 1} \frac{u(x)}{|x|} dx$. Potom $\Theta_1 \in (L^{5/3})'$, $\Theta_2 \in (L^{6/5})'$, $\Theta_2(u) \leq K$ pre $u \in M_K$. S použitím (17.3) nájdite minimizujúcu postupnosť pre Φ tak, aby konvergovala slabo v $L^{5/3}$ aj $L^{6/5}$.

Poznámka: Funkcionál Φ sa vyskytuje v Thomas-Fermiho aproximatívnom modeli pre atóm s veľkým počtom elektrónov: u zodpovedá hustote náboja elektrónov a konštanta Z náboju atómového jadra. Pre nájdenný minimizér u_K sa dá dokázať $\int_{\mathbb{R}^3} u_K(x) dx = \min(K, Z)$, takže napr. u_Z je minimizér Φ v $\{u \in L^{5/3} \cap L^1 : u \geq 0\}$ a u_K pre $K \leq Z$ je minimizér Φ v $A_K := \{u \in L^{5/3} : u \geq 0, \int_{\mathbb{R}^3} u(x) dx = K\}$; viď [40] alebo [23]. Tiež sa dá dokázať, že Φ nenadobúda infimum v A_K pre $K > Z$, u_K má kompaktný nosič pre $K < Z$, $u_Z > 0$ v $\mathbb{R}^3$.

Príklad 4.19. (Lineárna pružnosť) Nech $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je ohraničená oblasť s lipschitzovskou hranicou a funkcia $u = (u_1, u_2, u_3) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ popisuje (stacionárnu) deformáciu pružného telesa pri pôsobení vonkajšej sily $F = (F_1, F_2, F_3) \in (L^2(\Omega))^3$ a s predpísanou okrajovou podmienkou $u = w$ na $\partial\Omega$, kde $w \in (W^{1,2}(\Omega))^3$ je pevne daná funkcia. Lineárny Hookeov zákon pre izotropný materiál má tvar

$$\tau_{ij}(x) = \lambda(x) \delta_{ij} \sum_k e_{kk}(x) + 2\mu(x) e_{ij}(x), \quad x \in \Omega, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

kde τ_{ij} sú zložky tenzoru napätia, $e_{ij} = e_{ij}(u) := \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$ sú zložky tenzora malej deformácie a λ, μ sú tzv. Lamého koeficienty (predpokladáme $\lambda, \mu \in L^\infty(\Omega)$, $\lambda \geq 0$ a $\mu \geq \mu_0$ pre vhodnú konštantu $\mu_0 > 0$). Máme teda minimalizovať funkcionál potenciálnej energie

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i,j} \tau_{ij} e_{ij} dx - \int_{\Omega} \sum_i F_i u_i dx = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \lambda \left(\sum_i e_{ii}(u) \right)^2 + \mu \sum_{i,j} e_{ij}(u) e_{ij}(u) \right) dx - \int_{\Omega} \sum_i F_i u_i dx$$

na množine prípustných posunutí $W := \{u \in (W^{1,2}(\Omega))^3 : u = w \text{ na } \partial\Omega\}$.

Ukážme si najprv, že pre každé $v \in (W_0^{1,2}(\Omega))^3$ platí tzv. **Kornova nerovnosť**

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j} e_{ij}(v) e_{ij}(v) dx \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i,j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx. \quad (4.2)$$

Vzhľadom k hustote $\mathcal{D}(\Omega)$ vo $W_0^{1,2}(\Omega)$ stačí nerovnosť (4.2) dokázať pre funkcie $v \in (\mathcal{D}(\Omega))^3$. Pre takúto funkcie nerovnosť plynie z identity

$$\frac{1}{4} \int_{\Omega} \sum_{i,j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i,j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i,j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx,$$

pretože pre druhý integrál na pravej strane použitím Greenovej vety dostávame

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i,j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\sum_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right)^2 dx \geq 0.$$

Nech $\Psi(v) := \Phi(v + w)$ pre $v \in (W_0^{1,2}(\Omega))^3$. Z Kornovej nerovnosti ľahko plynie koercivita Ψ ako aj pozitívna definitnosť Ψ'' , a teda striktná konvexita Ψ . Funkcionál Ψ je teda tiež slabo zdola polospojité a existuje preň jediný globálny minimizér $\tilde{v} \in (W_0^{1,2}(\Omega))^3$. Funkcia $\tilde{u} := \tilde{v} + w$ je potom jediným globálnym minimizérom funkcionálu Φ na množine W . Eulerove rovnice pre tento (vektorový) minimizér majú pritom tvar $\sum_j \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0$, $i = 1, 2, 3$ (rovnice rovnováhy).

5. Nutné a postačujúce podmienky pre lokálne extrém

Nech je X reálny Banachov priestor a $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Veta 5.1. (Eulerova nutná podmienka) *Nech má Φ v bode $w \in X$ lokálny extrém (minimum alebo maximum) a nech $h \in X$. Ak existuje smerová derivácia $\delta\Phi(w; h)$, potom sa rovná nule.*

Dôkaz. Tvrdenie plynie z toho, že funkcia $\varphi(t) := \Phi(w + th)$ má v bode $t = 0$ lokálny extrém a $\delta\Phi(w; h) = \varphi'(0)$. $\square$

Prvok $w \in X$ sa nazýva **kritický bod** Φ , ak $\delta\Phi(w; h) = 0$ pre každé $h \in X$.

Príklad 5.2. Nech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je ohraničená oblasť s lipschitzovskou hranicou a $p > 1$. Uvažujme funkcionál $\Phi(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx - \int_{\Omega} f u dx$ v priestore $X = \{u \in W^{1,p}(\Omega) : u = 0 \text{ na } \partial\Omega\}$, kde $f \in L^q(\Omega)$, $q \geq np/(np - n + p)$, $q \geq 1$, $q > 1$ ak $p = n$. Tento funkcionál je zrejme konvexný, koercívny a triedy C^1 , takže nadobúda globálne infimum. Pre príslušný minimizér musí platiť $\Phi'(u)\varphi = 0$ pre každé $\varphi \in X$, t.j.

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx \quad \text{pre každé } \varphi \in X,$$

takže ide o slabé riešenie úlohy

$$\begin{aligned} -\Delta_p u &= f \quad \text{v } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{na } \partial\Omega, \end{aligned}$$

kde $\Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ je tzv. p -Laplacián. Z nerovností $(|\alpha|^{p-2}\alpha - |\beta|^{p-2}\beta)(\alpha - \beta) \geq c|\alpha - \beta|^p$ pre $p \geq 2$ a $(|\alpha|^{p-2}\alpha - |\beta|^{p-2}\beta)(\alpha - \beta) \geq c(|\alpha| + |\beta|)^{p-2}|\alpha - \beta|^2$ pre $1 < p < 2$ ďalej plynie jednoznačnosť takéhoto riešenia (ak sú u, v dve riešenia, použije sa testovacia funkcia $\varphi = u - v$). Vzhľadom k uniformnej konvexite L^p -normy je Φ striktne konvexný.

Cvičenie 5.3. Nech je $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ konvexný a spojitý, nech je $M \subset X$ hustá, $w \in X$ a nech pre každé $h \in M$ existuje $\delta\Phi(w; h)$ a rovná sa nule. Ukážte, že potom je w globálny minimizér Φ v X .

Cvičenie 5.4. Nech $f \in L^2(\mathbb{R})$ a $\Phi(u) = \int_{\mathbb{R}} (\frac{1}{2}(u')^2 - fu) dx$ pre $u \in W^{1,2}(\mathbb{R})$. Ukážte, že Φ je triedy C^∞ , je striktne konvexný, nie je koercívny, ale $\lim_{t \in \mathbb{R}, |t| \rightarrow \infty} \Phi(tu) = \infty$ pre každé $u \neq 0$. Ukážte, že existujú husté množiny $M_1, M_2 \subset L^2(\mathbb{R})$ tak, že pre $f \in M_1$ nie je Φ zdola ohraničený a pre $f \in M_2$ nadobúda Φ svoje infimum.

Veta 5.5. (Lagrangeova postačujúca podmienka) *Nech je $w \in X$ kritický bod Φ , nech je Φ triedy C^2 v okolí w a nech existuje $\alpha > 0$ tak, že $\Phi''(w)(h, h) \geq \alpha\|h\|^2$ pre všetky $h \in X$. Potom má Φ v bode w ostré lokálne minimum.*

Dôkaz. Z vety o strednej hodnote v integrálnom tvare (Veta 17.15) dostávame

$$\begin{aligned} \Phi(w + h) - \Phi(w) &= \underbrace{\Phi'(w)h}_{=0} + \int_0^1 (1-t)\Phi''(w+th)(h, h) dt \\ &= \frac{1}{2}\Phi''(w)(h, h) + \int_0^1 (1-t)(\Phi''(w+th) - \Phi''(w))(h, h) dt. \end{aligned}$$

Pretože $\Phi''(w)(h, h) \geq \alpha\|h\|^2$ a $\|\Phi''(w+th) - \Phi''(w)\| < \frac{\alpha}{2}$ pre $\|h\|$ malé a $t \in [0, 1]$, plynie z vyššie uvedenej rovnosti $\Phi(w + h) - \Phi(w) \geq \frac{\alpha}{4}\|h\|^2 > 0$ pre $\|h\|$ malé, $h \neq 0$. $\square$

Poznámky 5.6. (i) Ak na nejakom okolí w existuje spojitá a nezáporná $\delta^2\Phi(x; h, h)$ pre každé h , potom z dôkazu Vety 5.5 plynie, že Φ má v bode w lokálne minimum (ktoré je ostré, ak $\delta^2\Phi(w; h, h) > 0$ pre $h \neq 0$).

(ii) Ak má Φ v bode $w \in X$ lokálne minimum a existuje $D^2\Phi(w)$, potom zrejme musí platiť $D^2\Phi(w)(h, h) \geq 0$ pre každé $h \in X$ (Lagrangeova nutná podmienka).

Cvičenie 5.7. Uvažujte funkcionál $\Phi(u) = \int_0^1 u^2(x-u) dx$ v $C([0,1])$ alebo $W^{1,2}(0,1)$. Platí $\Phi \in C^\infty$, $\Phi'(0) = 0$, $\Phi''(0)(h,h) = 2 \int_0^1 h^2 dx > 0$ pre $h \neq 0$, ale $u_0 = 0$ nie je lokálny minimizér Φ . Dokážte.

Cvičenie 5.8. Uvažujte funkcionál $\Phi(u) = \int_{-1}^1 (x^2(u'(x))^2 + x(u'(x))^3 + (u'(x))^m) dx$ ($m \in \mathbb{N}$, $m \geq 4$) v priestore $C_0^1 := \{u \in C^1([-1,1]) : u(-1) = u(1) = 0\}$. Platí $\Phi'(0) = 0$, $\Phi''(0)(h,h) = 2 \int_{-1}^1 x^2(h')^2 dx > 0$ pre $h \neq 0$. Ukážte, že $u_0 \equiv 0$ je globálny minimizér pre $m = 4$, ale nie je ani lokálny minimizér pre $m > 4$.

Cvičenie 5.9. Nech $f \in BC^2(\mathbb{R})$, $f(u) = u^2$ pre $|u| \leq 3$, $\Phi(u) = \int_0^\pi \sin(f(u)) dx$ pre $u \in L^2(0,\pi)$. Ukážte, že $\Phi \in C^1$ je dvakrát gâteauxovsky diferencovateľný, $D^2\Phi(0)(h,h) = 2\|h\|^2$, ale 0 nie je lokálny minimizér Φ . Ukážte tiež, že pre každé h existuje okolie nuly U v $L^2(0,\pi)$ tak, že funkcia $d : U \rightarrow \mathbb{R} : u \mapsto \delta^2\Phi(u; h, h)$ je spojitá a $d(u) > 0$ pre $u \neq 0$; porovnajte s Poznámkou 5.6(i). Uvažujte tiež funkcionál $\Phi(u) = \int_0^\pi \sin(f(u')) dx$ vo $W_0^{1,2}(0,\pi)$.

Cvičenie 5.10. Nech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je ohraničená, $X \in \{C(\overline{\Omega}), W^{1,2}(\Omega), L^2(\Omega)\}$, $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R} : u \mapsto \int_\Omega (2 \sin u^2 - u^2) dx$. Je Φ triedy C^2 ? Je $u_0 \equiv 0$ lokálny minimizér?

Cvičenie 5.11. Nech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je ohraničená oblasť s lipschitzovskou hranicou a $X = W^{1,2}(\Omega)$ alebo $X = W_0^{1,2}(\Omega)$. Pre aké n je

$$\Phi : X \rightarrow \mathbb{R} : u \mapsto \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \sin u^3) dx$$

triedy C^2 ? Je $u_0 \equiv 0$ lokálny minimizér? Existuje globálne minimum? Pre $n = 1$, $\Omega = (0,\omega)$ a $X = W_0^{1,2}(\Omega)$ ukážte, že 0 je globálny minimizér pre ω malé, ale nie pre ω veľké.

Cvičenie 5.12. Nech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je ohraničená oblasť s lipschitzovskou hranicou,

$$\Phi(u) = \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \frac{u^2}{1+u^2} \right) dx.$$

Vyšetrite vlastnosti Φ (koercivita, slabá sekvenciálna zdola polospojitosť, diferencovateľnosť, konvexita) v priestore $X := W_0^{1,2}(\Omega)$. Existuje globálne minimum? Je $u = 0$ lokálny minimizér?

Cvičenie 5.13. Nech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je ohraničená oblasť s lipschitzovskou hranicou, $0 \in \Omega$ a $X = W^{1,2}(\Omega)$. Pre aké n je

$$\Phi : X \rightarrow \mathbb{R} : u \mapsto \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + u^4 + \frac{\cos u}{|x|} \right) dx$$

triedy C^2 ? Pre takéto n ukážte, že existujú aspoň tri kritické body Φ .

Cvičenie 5.14. Nech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je ohraničená oblasť s lipschitzovskou hranicou, $X = W_0^{1,4}(\Omega)$ a

$$\Phi : X \rightarrow \mathbb{R} : u \mapsto \int_\Omega (|\nabla u|^4 - u^3) dx.$$

Ukážte, že Φ je triedy C^∞ , je koercívny a slabo sekvenciálne zdola polospojité, ale nie je konvexný. Ďalej ukážte, že $u = 0$ nie je minimizér.

Cvičenie 5.15. Nech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je ohraničená oblasť. Vyšetrite lokálne extrémny funkcionálu

$$\Phi(u) = \int_\Omega \left(u^2 + \frac{4}{1+u^2} \right) dx$$

v priestoroch $X = C(\overline{\Omega})$ resp. $X = L^2(\Omega)$.

Cvičenie 5.16. Nech $\Phi(u) = \int_0^\pi ((u')^2 - u^2 \ln(a+u^2)) dx$, kde $a \in \{1/3, 1, 3\}$. Zistite, či je $u = 0$ lokálny minimizér Φ v priestore $W^{1,2}(0,\pi)$ resp. $W_0^{1,2}(0,\pi)$.

Cvičenie 5.17. Nech je u_0 globálny minimizér funkcionálu $\Phi(u) = \int_0^1 ((u')^2 - u^4) dx$ na množine $M_5 = \{u \in W_0^{1,2}(0,1) : |u| \leq 5\}$, viď Cvičenie 4.10. Ukážte, že u_0 nie je kritickým bodom Φ vo $W_0^{1,2}(0,1)$. Nech je $u_1 \neq 0$ kritickým bodom Φ vo $W_0^{1,2}(0,1)$ (existencia u_1 plynie napr. z úvah v Príklade 6.6 alebo 7.6; Φ má dokonca nekonečne veľa kritických bodov vo $W_0^{1,2}(0,1)$). Ukážte, že u_1 nie je lokálnym minimizérom Φ vo $W_0^{1,2}(0,1)$.

Cvičenie 5.18. Nech $\Phi(u,v) = \int_0^{\pi/2} ((u')^2 + u'v' + v^2) dx$ pre $(u,v) \in X := W_0^{1,2}(0,\pi/2) \times W_0^{1,2}(0,\pi/2)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $u_0(x) = \alpha \sin(2x)$, $v_0 = -2u_0$. Ukážte, že (u_0, v_0) je kritickým bodom Φ a pre každé $h \in W_0^{1,2}(0,\pi/2) \setminus \{0\}$ platí $\Phi(u_0+h, v_0) > \Phi(u_0, v_0)$, $\Phi(u_0, v_0+h) > \Phi(u_0, v_0)$, $\Phi(u_0+h, v_0+h) > \Phi(u_0, v_0)$ a $\Phi(u_0+h, v_0-h) > \Phi(u_0, v_0)$. S použitím nerovnosti (6.8) ďalej ukážte, že (u_0, v_0) je globálny maximizér Φ v priestore $\{(u,v) \in X : v = -2u\}$.

6. Viazané extrém

Veta 6.1. (Ljusternikova veta: nutná podmienka pre viazaný extrém) *Nech sú $\Phi, \Psi_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ triedy C^1 v okolí bodu $w \in X$ pre $i = 1, 2, \dots, n$. Nech sú $\{\Psi'_i(w)\}_{i=1}^n$ lineárne nezávislé a nech má Φ v bode w lokálny extrém vzhľadom k množine $M := \{u : \Psi_i(u) = \Psi_i(w), i = 1, 2, \dots, n\}$. Potom existujú $\lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$, tak, že $\Phi'(w) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \Psi'_i(w)$.*

Poznámka 6.2. Čísla λ_i sa nazývajú **Lagrangeove multiplikátory** a Ljusternikova veta sa tiež nazýva veta o Lagrangeových multiplikátoroch. Tvrdenie platí aj za slabších predpokladov na hladkosť funkcií Φ a Ψ_i : stačí, aby existovali $\Phi'(w), \Psi'_i(w)$ a aby funkcie Φ, Ψ_i boli spojité v okolí bodu w (miesto vety o implicitnej funkcii dôkaz využíva stupeň zobrazenia).

V dôkaze Ljusternikovej vety použijeme nasledujúce dve pomocné tvrdenia.

Lema 6.3. *Nech sú $h_1, h_2, \dots, h_n \in X'$ lineárne nezávislé. Potom existujú $u_1, u_2, \dots, u_n \in X$ tak, že $h_i(u_j) = \delta_{ij}$ (kde $\delta_{ij} = 1$ pre $i = j$ a $\delta_{ij} = 0$ pre $i \neq j$; $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ sa nazýva **biortogonálna postupnosť** k postupnosti $\{h_1, h_2, \dots, h_n\}$).*

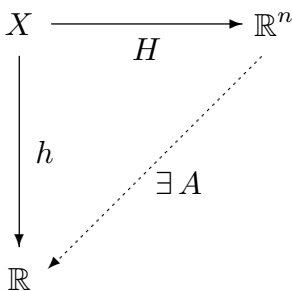
Dôkaz. Indukciou. Pre $n = 1$ je tvrdenie zrejmé. Nech tvrdenie lemy platí pre $n < k$ a nech sú $h_1, h_2, \dots, h_k \in X'$ lineárne nezávislé. Podľa indukčného predpokladu existuje postupnosť $\{u_1, u_2, \dots, u_{k-1}\}$ biortogonálna k $\{h_1, h_2, \dots, h_{k-1}\}$. Definujme lineárne zobrazenie

$$T : X \rightarrow \mathbb{R}^k : u \mapsto [h_1(u), \dots, h_k(u)].$$

Z vlastností prvkov $u_1, u_2, \dots, u_{k-1}$ plynie, že $\dim T(X) \geq k-1$, nám stačí dokázať $\dim T(X) = k$. Predpokladajme opak, t.j. $\dim T(X) = k-1$. Potom sú $Tu_1, Tu_2, \dots, Tu_{k-1}$ generátory $T(X)$, takže pre každé $u \in X$ existujú $\mu_i = \mu_i(u) \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, k-1$, tak, že $Tu = \sum_{i=1}^{k-1} \mu_i(u) Tu_i$, čo znamená

$$h_j(u) = \sum_{i=1}^{k-1} \mu_i(u) h_j(u_i) \quad \text{pre } j = 1, 2, \dots, k. \quad (6.1)$$

Z rovnosti $h_j(u_i) = \delta_{ij}$ pre $i, j < k$ a (6.1) plynie $h_j(u) = \mu_j(u)$ pre $j < k$. Z rovnosti (6.1) pre $j = k$ teraz dostaneme $h_k(u) = \sum_{i=1}^{k-1} \mu_i(u) h_k(u_i)$, takže $h_k = \sum_{i=1}^{k-1} h_k(u_i) h_i$, čo je spor s lineárnou nezávislosťou $h_1, h_2, \dots, h_k$. $\square$



Lema 6.4. *Nech $h, h_1, h_2, \dots, h_n \in X'$, $\bigcap_{i=1}^n \text{Ker } h_i \subset \text{Ker } h$. Potom existujú $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tak, že $h = \sum_{i=1}^n \lambda_i h_i$.*

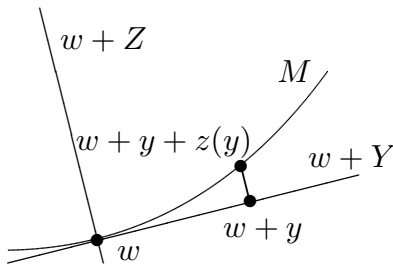
Dôkaz. Definujme $H : X \rightarrow \mathbb{R}^n : u \mapsto [h_1(u), h_2(u), \dots, h_n(u)]$. Potom $\text{Ker } H \subset \text{Ker } h$, takže z lineárnej algebry plynie existencia lineárneho zobrazenia $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ takého, že $h = A \circ H$. Pretože lineárne zobrazenie A musí mať tvar $Az = \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i$, dostávame tvrdenie lemy. $\square$

Dôkaz Ljusternikovej vety. Označme $Y := \bigcap_{i=1}^n \text{Ker } \Psi'_i(w)$. Podľa Lemy 6.4 stačí dokázať

$$Y \subset \text{Ker } \Phi'(w). \quad (6.2)$$

Podľa Lemy 6.3 existujú $u_1, u_2, \dots, u_n \in X$ tak, že $\Psi'_i(w)u_j = \delta_{ij}$. Označme $Z := \text{lin } \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ (lineárny obal) a definujme

$$G : Y \times Z \rightarrow \mathbb{R}^n : (y, z) \mapsto \{\Psi_i(w + y + z) - \Psi_i(w)\}_{i=1}^n.$$



Potom $G(0, 0) = 0$ a $G'_Z(0, 0)$ je izomorfizmus, takže podľa vety o implicitnej funkcii pre každé $y \in Y$ malé existuje práve jedno $z = z(y) \in Z$ malé tak, že $G(y, z(y)) = 0$. Pretože $G'_Y(0, 0) = 0$, dostávame tiež $z'(0) = -[G'_Z(0, 0)]^{-1}G'_Y(0, 0) = 0$.

Funkcionál $F : Y \rightarrow \mathbb{R} : y \mapsto \Phi(w + y + z(y))$ má v bode 0 lokálny extrém, takže pre každé $y \in Y$ platí

$$0 = F'(0)y = \Phi'(w)(y + z'(0)y) = \Phi'(w)y,$$

odkiaľ plynie (6.2). $\square$

Poznámky 6.5. Nech sú $\Phi, \Psi_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ triedy C^2 v okolí bodu $w \in X$ pre $i = 1, 2, \dots, n$. Nech sú $\{\Psi'_i(w)\}_{i=1}^n$ lineárne nezávislé a nech G, F, z sú zobrazenia z dôkazu Vety 6.1. Ak $\Phi'(w) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \Psi'_i(w)$, potom $F'(0) = 0$. Derivovaním rovnice $G(y, z(y)) = 0$ a s využitím $z'(0) = 0$ dostaneme

$$F''(0)(y, y) = \Phi''(w)(y, y) + \Phi'(w)[z''(0)(y, y)] = \Phi''(w)(y, y) - \Phi'(w)[G'_Z(0, 0)]^{-1}G''_Y(0, 0). \quad (6.3)$$

Ak je druhá derivácia $F''(0)$ rovnomerne pozitívne definitná, potom je podľa Lagrangeovej postačujúcej podmienky 0 ostrým lokálnym minimizérom funkcionálu F , a teda w je ostrý lokálny minimizér funkcionálu Φ vzhľadom k množine M . Podobne, ak je $F''(0)$ indefinitná, nenadobúda Φ v bode w lokálny extrém vzhľadom k množine M .

Nech je špeciálne X Hilbertov priestor, $n = 1$ a $\Psi_1(u) = \|u\|^2$. Potom dostávame

$$F''(0)(y, y) = \Phi''(w)(y, y) - \frac{\|y\|^2}{\|w\|^2} \Phi'(w)w, \quad y \perp w. \quad (6.4)$$

Príklad 6.6. Nech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je ohraničená oblasť s lipschitzovskou hranicou, $p > 2$, $p < 2n/(n-2)$ ak $n > 2$. Ukážeme, že existuje netriviálne (slabé) riešenie úlohy

$$\begin{aligned} \Delta u + |u|^{p-2}u &= 0 & \text{v } \Omega, \\ u &= 0 & \text{na } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Hľadané riešenie je kritický bod funkcionálu

$$\tilde{\Phi} : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} : u \mapsto \Phi(u) - \Psi(u), \quad \text{kde } \Phi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx, \quad \Psi(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |u|^p.$$

Hľadáme najprv kritické body Φ vzhľadom k množine $M := \{u : \Psi(u) = 1\}$. Funkcionál Φ je konvexný, koercívny; Φ aj Ψ sú triedy C^2 . Ukážme, že M je slabo sekvenciálne uzavretá: ak $u_n \in M$, $u_n \rightharpoonup u$, potom z kompaktnosti vnorenia $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ plynie $u_n \rightarrow u$ v $L^p(\Omega)$, takže $u \in M$. Existuje teda $\min_M \Phi$; nech sa toto minimum nadobúda vo funkcii $u \in M$. Pretože $|u| \in M$ a $\Phi(|u|) = \Phi(u)$, môžeme predpokladať $u \geq 0$. Z vety o Lagrangeových multiplikátoroch plynie existencia $\lambda \in \mathbb{R}$ takého, že $\Phi'(u) = \lambda \Psi'(u)$. Špeciálne dostávame

$$\lambda p = \lambda p \Psi(u) = \lambda \Psi'(u)u = \Phi'(u)u = 2\Phi(u) > 0,$$

takže $\lambda > 0$. Položme $\tilde{u} = tu$, kde $t = \lambda^{1/(p-2)}$. Potom

$$\Phi'(\tilde{u}) = t\Phi'(u) = t\lambda\Psi'(u) = t\lambda t^{1-p}\Psi'(\tilde{u}) = \Psi'(\tilde{u}),$$

takže $\tilde{u}$ je hľadaný kritický bod funkcionálu $\tilde{\Phi} = \Phi - \Psi$.

Poznámka: Z regularity slabých riešení úlohy (6.5) plynie, že nájdené riešenie je klasickým riešením a z princípu maxima dostaneme $u > 0$ v Ω . Je známe, že úloha $\Delta u + u^{p-1} = 0$ v $\mathbb{R}^n$ nemá kladné klasické riešenia pre $p \in (2, 2n/(n-2))$, takže z úvah vyššie plynie, že pre $\Omega = \mathbb{R}^n$ funkcionál Φ nenadobúda infimum na množine M . Na druhú stranu, ak $n > 2$ a $p = 2n/(n-2)$, potom sa pre $\Omega = \mathbb{R}^n$ toto infimum nadobúda (príslušný minimizér má tvar $u_0(x) = (c^2 + |x - x_0|^2)^{-(n-2)/2}$ pre vhodné $c > 0$ a ľubovoľné $x_0 \in \mathbb{R}^n$), ale pre ohraničenú Ω sa nenadobúda.

Cvičenie 6.7. Zopakovaním postupu z Príkladu 6.6 ukážte, že pre $n \geq 2$ a $2 < p < 2n/(n-2)$ existuje kladné, radiálne symetrické riešenie úlohy $\Delta u - u + |u|^{p-2}u = 0$ v $\mathbb{R}^n$: definujte Ψ a M ako v Príklade 6.6 (s $\Omega = \mathbb{R}^n$), $\Phi(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u|^2 + u^2) dx$, $M_r = \{u \in M : u \text{ je radiálne symetrická}\}$, využite (17.10) a to, že (nezáporný) minimizér Φ v M_r je minimizérom aj vo väčšej množine M (to plynie z vlastností Schwarzovej (radiálne nerastúcej) symetrizácie funkcií, viď [40, (3.3.4) a Lemma 7.17]).

Cvičenie 6.8. Nájdite minimizér funkcionálu $\Phi(u) = \int_0^1 xu \, dx$ na množine $\{u \in W_0^{1,2}(0,1) : \int_0^1 (u')^2 \, dx = 1\}$.

Cvičenie 6.9. Nájdite profil, ktorý vytvorí hladina kávy, ktorú miešame konštantnou uhlovou rýchlosťou ω vo valcovej šálke s horizontálnym prierezom $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < R\}$ (pri zanedbaní viskozity, povrchového napätia atď.). Odvoďte tiež diferenciálnu rovnicu a okrajovú podmienku pre profil pri nulovej rýchlosti, ale pri uvážení povrchového napätia a kapilárnych efektov (minimalizujte energetický funkcionál tvaru $\int_\Omega (\sqrt{1 + |\nabla u|^2} + \frac{\kappa}{2} u^2) \, dx - \cos \gamma \int_{\partial\Omega} u \, dS$, kde u popisuje výšku hladiny, $\kappa > 0$ a $\gamma \in (0, \pi/2)$ sú konštanty).

Cvičenie 6.10. Dokážte, že existuje minimum funkcionálu $\Phi(u) = \int_0^\pi [2(\sin x)u + u'^2] \, dx$ vo $W_0^{1,2}(0, \pi)$ s väzbovou podmienkou $\int_0^\pi u \, dx = 1$ a nájdite príslušný minimizér.

Cvičenie 6.11. Nájdite minimizéry nasledujúcich funkcionálov Φ s uvedenými väzbovými podmienkami (o priestoroch, v ktorých budete pracovať, rozhodnite sami):

- (i) $\Phi(u) = \int_0^1 x^2 u \, dx$ s väzbou $\int_0^1 |u|^5 \, dx = 1$
- (ii) $\Phi(u) = \int_0^2 [(u')^2 + u] \, dx$, $u(0) = 1$, $u(2) = 48$, $\int_0^2 ux \, dx = 43$
- (iii) $\Phi(u) = \int_0^1 [\frac{1}{2}(u')^2 + uu'] \, dx$, $u(0) = 0$, $u(1) = 5$, $\int_0^1 u \, dx = 2$
- (iv) $\Phi(u) = \int_0^1 (u')^2 \, dx$, $u(0) = 2$, $u(1) = 4$, $\int_0^1 u \, dx = 1$
- (v) $\Phi(u) = \int_0^b \sqrt{1 + u^2} \, dx$, $\int_0^b u \, dx = C$
- (vi) $\Phi(u) = \int_0^1 u \, dx$, $\int_0^1 u^2 \, dx \leq 9$
- (vii) $\Phi(u) = \int_0^1 (u^2 - 2u) \, dx$, $\int_0^1 x|u| \, dx \leq 1/6$

Cvičenie 6.12. Ukážte, že úloha minimalizácie funkcionálu $\Phi(u) = \int_a^b f(x, u') \, dx$ s podmienkami $u(a) = A$, $u(b) = B$, je ekvivalentná úlohe minimalizácie funkcionálu $\Psi(v) = \int_a^b f(x, v) \, dx$ s väzbovou podmienkou $\int_a^b v \, dx = B - A$.

Lagrangeova úloha

Lagrangeova úloha je úloha minimalizovať funkcionál $\Phi(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x)) \, dx$ v triede všetkých (napr. C^1) funkcií $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ spĺňajúcich isté okrajové podmienky a väzbové podmienky tvaru $h(x, u(x), u'(x)) = 0$, kde $h = (h_1, h_2, \dots, h_m) : [a, b] \times \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m < N$, $h_j = h_j(x, u_1, \dots, u_N, s_1, \dots, s_N)$, $j = 1, \dots, m$. Ak sú f, h dostatočne hladké (napr. C^4), u_0 je C^1 minimizér a hodnosť matice $(\frac{\partial h_j}{\partial s_i}(x, u_0(x), u'_0(x)))$ typu $m \times N$ je m pre každé x , potom sa dá ukázať existencia konštanty λ_0 a spojitých funkcií $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ takých, že $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ nie sú všetky identicky nulové a pre Lagrangian

$$F(x, u, s) = \lambda_0 f(x, u, s) + \sum_{j=1}^m \lambda_j(x) h_j(x, u, s) \quad (6.6)$$

sú splnené Eulerove rovnice $\frac{d}{dx} F_{s_i}(x, u_0(x), u'_0(x)) = F_{u_i}(x, u_0(x), u'_0(x))$, $i = 1, \dots, N$, vid' [7].

Príklad 6.13. Uvažujme úlohu o brachistochrone, pričom budeme predpokladať, že prostredie kladie pohybu hmotného bodu odpor $R(v)$ závislý na jeho rýchlosti v . Ak budeme hľadať krivku $\xi \mapsto (x(\xi), y(\xi))$ z Príkladu 2.5 parametrizovať tak, aby $x(\xi) = \xi$ (t.j. $\xi = x$) a g, t, s majú rovnaký význam ako v Príklade 2.5 (gravitačné zrýchlenie, čas a dĺžka dráhy), potom platí

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = g \frac{dy}{ds} - R(v), \quad s' := \frac{ds}{dx} = \frac{ds}{dt} \frac{dt}{dx} = v \frac{dt}{dx}.$$

Vynásobením týchto rovností dostaneme väzbovú podmienku

$$vv' = gy' - R(v)s' = gy' - R(v)\sqrt{1 + (y')^2},$$

pričom máme minimalizovať funkcionál

$$\Phi(y, v) = \int_A^B \frac{1}{v} \, ds = \int_0^{b_x} \frac{1}{v} \sqrt{1 + (y')^2} \, dx.$$

Okrajové podmienky pre y sú $y(0) = 0$, $y(b_x) = b_y$; okrajová podmienka pre funkciu v je zadaná len pre $x = 0$. Riešenie tejto úlohy (aj mnohých ďalších) možno nájsť v [7].

Vlastné čísla a body bifurkácií

Pomocou Ljusternikovej vety dokážeme teraz existenciu a variačnú charakterizáciu vlastných čísel kompaktných samoadjungovaných lineárnych operátorov v Hilbertovom priestore. V Príklade 6.19 ukážeme tiež existenciu bodov bifurkácií pre istú triedu nelineárnych potenciálnych operátorov.

Veta 6.14. *Nech je X Hilbertov priestor a $A : X \rightarrow X$ kompaktné samoadjungované lineárne zobrazenie, $(Au, u) > 0$ pre $u \neq 0$. Potom jeho vlastné čísla tvoria postupnosť $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots > 0$, $\lambda_k \rightarrow 0$ ak $\dim(X) = \infty$, pričom príslušné vlastné vektory φ_k sa dajú vybrať tak, aby tvorili ortonormálnu bázu priestoru X . Pre vlastné číslo λ_k platí*

$$\lambda_k = \min_{V \in W_{k-1}} \max_{0 \neq u \perp V} R(u) = \max_{0 \neq u \perp V_{k-1}} R(u), \quad \text{kde } R(u) := \frac{(Au, u)}{(u, u)}, \quad (6.7)$$

W_j označuje systém všetkých j -rozmerných podpriestorov X a V_j je lineárny obal $\{\varphi_1, \dots, \varphi_j\}$.

Poznámka 6.15. Existenčná časť Vety 6.14 je známa ako Hilbert-Schmidtova veta. Variačná charakterizácia vlastných čísel v (6.7) sa nazýva **Courant-Weinsteinov princíp**, podiel $R(u)$ sa nazýva **Rayleighov podiel**. Platí tiež duálna charakterizácia:

$$\lambda_k = \max_{V \in W_k} \min_{0 \neq u \in V} R(u) = \min_{0 \neq u \in V_k} R(u).$$

Dôkaz. Označme $S = \{u : \|u\| = 1\}$ jednotkovú sféru, $B = \{u : \|u\| \leq 1\}$ jednotkovú guľu, $\Phi(u) = (Au, u)$, $\Psi(u) = (u, u) = \|u\|^2$. Funkcionály Φ, Ψ sú triedy C^∞ , Φ je slabo sekvenciálne spojitý (ak $u_n \rightharpoonup u$, potom $Au_n \rightarrow Au$, a teda tiež $\Phi(u_n) \rightarrow \Phi(u)$).

Množina B je konvexná, uzavretá a ohraničená, takže existuje $\varphi_1 \in B$ tak, že $\Phi(\varphi_1) = \max_B \Phi$. Zrejme $\Phi(\varphi_1) > 0$, takže $\varphi_1 \neq 0$. Keby $\|\varphi_1\| < 1$, potom pre $\tilde{\varphi}_1 := \varphi_1 / \|\varphi_1\|$ dostaneme $\tilde{\varphi}_1 \in B$, $\Phi(\tilde{\varphi}_1) = \Phi(\varphi_1) / \|\varphi_1\|^2 > \Phi(\varphi_1) = \max_B \Phi$, čo je spor. Platí teda $\varphi_1 \in S$ a Φ nadobúda v bode φ_1 maximum vzhľadom k S . Z Ljusternikovej vety plynie, že existuje λ_1 tak, že $\Phi'(\varphi_1) = \lambda_1 \Psi'(\varphi_1)$, odkiaľ $A\varphi_1 = \lambda_1 \varphi_1$. Ak je λ ľubovoľné vlastné číslo A a $u \in S$ príslušný vlastný vektor, potom $\lambda = \lambda(u, u) = (Au, u) = \Phi(u)$, takže $\lambda_1 = \Phi(\varphi_1) \geq \Phi(u) = \lambda$ a λ_1 je najväčšie vlastné číslo A . Zrejme tiež platí $\lambda_1 = \Phi(\varphi_1) = \max_S \Phi = \max_{X \setminus \{0\}} R$, pretože $R(u) = \Phi(\tilde{u})$ pre $\tilde{u} = u / \|u\|$.

Položme ďalej $\Psi_1(u) = (\varphi_1, u)$ a nech φ_2 maximalizuje Φ na konvexnej uzavretej ohraničenej množine $B \cap \{u : \Psi_1(u) = 0\}$. Rovnako ako vyššie dostávame $\varphi_2 \in S$, takže ide o bod extrém Φ vzhľadom ku množine $\{u : \Psi(u) = 1, \Psi_1(u) = 0\}$. Ďalej platí $\nabla \Psi_1(\varphi_2) = \varphi_1$ a $\nabla \Psi(\varphi_2) = 2\varphi_2 \perp \varphi_1$, takže $\Psi'_1(\varphi_2), \Psi'(\varphi_2)$ sú lineárne nezávislé. Preto podľa Ljusternikovej vety existujú $\lambda_2, \nu \in \mathbb{R}$ tak, že $\Phi'(\varphi_2) = \lambda_2 \Psi'(\varphi_2) + \nu \Psi'_1(\varphi_2)$, t.j. $A\varphi_2 = \lambda_2 \varphi_2 + \frac{\nu}{2} \varphi_1$. Pretože

$$0 = \lambda_1(\varphi_1, \varphi_2) = (A\varphi_1, \varphi_2) = (A\varphi_2, \varphi_1) = \frac{\nu}{2}(\varphi_1, \varphi_1),$$

musí $\nu = 0$, a teda $A\varphi_2 = \lambda_2 \varphi_2$. Zrejme $\lambda_2 = \Phi(\varphi_2) \leq \Phi(\varphi_1) = \lambda_1$ a

$$\lambda_2 = \max_{u \in S, u \perp \varphi_1} \Phi(u) = \max_{u \neq 0, u \perp \varphi_1} R(u).$$

Ak $V \in W_1$, zvolíme $u \in S \cap \text{lin}\{\varphi_1, \varphi_2\}$ tak, aby $u \perp V$. Potom $R(u) = \Phi(u) = \lambda_1(u, \varphi_1)^2 + \lambda_2(u, \varphi_2)^2 \geq \lambda_2$, takže platí (6.7) (pre $k = 2$).

Indukciou dostaneme postupnosť vlastných čísel $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots > 0$ a príslušných vlastných vektorov $\varphi_k \in S$, $(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij}$, pre ktoré platí charakterizácia (6.7).

Pretože postupnosť $A\varphi_k = \lambda_k \varphi_k$ je relatívne kompaktná množina a $\|\lambda_k \varphi_k - \lambda_j \varphi_j\|^2 = \lambda_k^2 + \lambda_j^2$ pre $k \neq j$, musí $\lambda_k \rightarrow 0$.

Ak $u \in S$, $u \perp \varphi_k$ pre všetky k , potom z charakterizácie (6.7) plyní $\Phi(u) \leq \lambda_k$ pre všetky k , takže $\Phi(u) = 0$, čo je spor. Vlastné vektory φ_k teda tvoria ortonormálnu bázu v X .

Nech λ je ľubovoľné vlastné číslo A s vlastným vektorom $\varphi \in S$ a predpokladajme, že buď $\lambda \neq \lambda_k$ pre žiadne k alebo $\lambda_{k-1} > \lambda = \lambda_k = \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_{k+j} > \lambda_{k+j+1}$ a φ neleží v lineárnom obale $\varphi_k, \dots, \varphi_{k+j}$. V prvom prípade dostaneme $\varphi \perp \varphi_k$ pre všetky k , spor. V druhom prípade v lineárnom obale funkcií $\varphi, \varphi_k, \dots, \varphi_{k+j}$ nájdeme vlastný vektor $\tilde{\varphi} \in S$ príslušný vlastnému číslu λ tak, aby $\tilde{\varphi} \perp \{\varphi_k, \dots, \varphi_{k+j}\}$. Pretože $\tilde{\varphi} \perp \varphi_i$ aj pre ostatné i , opäť dostávame spor. $\square$

Príklad 6.16. Nech je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ohraničená oblasť s lipschitzovskou hranicou a $X = W_0^{1,2}(\Omega)$ so skalárnym súčinom $(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$. Nech $A : X \rightarrow X$ je definované predpisom $(Au, v) = \int_{\Omega} uv \, dx$. Potom je A kompaktné samoadjungované lineárne pozitívne zobrazenie a pre jeho vlastné číslo λ a vlastný vektor φ platí

$$\int_{\Omega} \varphi w \, dx = (A\varphi, w) = \lambda(\varphi, w) = \lambda \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla w \, dx \quad \text{pre každé } w \in X,$$

takže φ je slabé riešenie úlohy

$$\lambda(-\Delta\varphi) = \varphi \text{ v } \Omega, \quad \varphi = 0 \text{ na } \partial\Omega.$$

Hodnota $1/\lambda$ je teda vlastné číslo operátora operátora $-\Delta$ na oblasti Ω s homogénnymi Dirichletovými podmienkami. Z variačnej charakterizácie prvého vlastného čísla λ_1 pritom plyní $\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \geq (1/\lambda_1) \int_{\Omega} u^2 \, dx$ pre každé $u \in X$. Špeciálne pre $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$ dostávame

$$\int_a^b |u'|^2 \, dx \geq \left(\frac{\pi}{b-a}\right)^2 \int_a^b u^2 \, dx \quad \text{pre všetky } u \in W_0^{1,2}(a, b), \quad (6.8)$$

pričom rovnosť nastáva práve pre násobky funkcie $u(x) = \sin(\pi(x-a)/(b-a))$.

Cvičenie 6.17. Nech $W_{per}^{1,2}(a, b) := \{u \in W^{1,2}(a, b) : u(a) = u(b)\}$. Dokážte Wirtingerovu nerovnosť:

$$\int_a^b |u'|^2 \, dx \geq \left(\frac{2\pi}{b-a}\right)^2 \int_a^b u^2 \, dx \quad \text{pre každé } u \in X := \left\{v \in W_{per}^{1,2}(a, b) : \int_a^b v(x) \, dx = 0\right\}.$$

Ako dôsledok dokážte, že $\int_{-1}^1 (u'^2 + v'^2) \, dx \geq 2\pi \int_{-1}^1 uv' \, dx$ pre každé $u, v \in W_{per}^{1,2}(-1, 1)$, pričom rovnosť platí práve vtedy, keď existujú $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$ tak, že $(u(x) - r_1)^2 + (v(x) - r_2)^2 = r_3^2$ pre všetky $x \in [-1, 1]$.

Cvičenie 6.18. (Izoperimetrická úloha - Dido) Nech je $A \subset \mathbb{R}^2$ ohraničená množina, ktorej hranica ∂A je uzavretá krivka parametrizovaná v tvare $\{(u(t), v(t)) : t \in (-1, 1)\}$, kde $u, v \in W^{1,2}(-1, 1)$, $u(-1) = u(1)$, $v(-1) = v(1)$. Dĺžka tejto krivky je daná vzorcom $L(\partial A) = \int_{-1}^1 \sqrt{u'^2 + v'^2} \, dx$ a miera množiny A sa vďaka Greenovej vete dá vypočítavať ako $\mu(A) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (uv' - vu') \, dx = \int_{-1}^1 uv' \, dx$. Ukážte, že $L(\partial A)^2 \geq 4\pi\mu(A)$, pričom rovnosť platí práve vtedy, keď A je kruh.

Príklad 6.19. Nech X je Hilbertov priestor a $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ slabo spojitý funkcionál triedy C^2 , $\Phi(0) = 0$, $\Phi'(0) = 0$. Nech je ďalej Φ' totálne spojitý a $A := \Phi''(0)$ pozitívny. Potom je A kompaktný a samoadjungovaný lineárny operátor, takže existuje postupnosť $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots$ jeho vlastných čísel a postupnosť φ_n príslušných (jednotkových) vlastných vektorov.

Nech $r_k > 0$, $r_k \rightarrow 0$ pre $k \rightarrow \infty$, a nech $u_k \in S_k := \{u \in X : \|u\| = r_k\}$ je bod, v ktorom Φ nadobúda maximum vzhľadom k S_k . Potom existujú ν_k tak, že $\Phi'(u_k) = \nu_k u_k$, odkiaľ $\nu_k = r_k^{-2} \Phi'(u_k) u_k$. Z vety o strednej hodnote plyní

$$\Phi(u) = \Phi'(u)u + o(\|u\|^2) = (Au, u) + o(\|u\|^2), \quad (6.9)$$

takže

$$\lambda_1 r_k^2 \geq (Au_k, u_k) = \Phi(u_k) + o(r_k^2) \geq \Phi(r_k \varphi_1) + o(r_k^2) = (A(r_k \varphi_1), r_k \varphi_1) + o(r_k^2) = (\lambda_1 + o(1))r_k^2. \quad (6.10)$$

Z odhadov (6.9) a (6.10) plyní teraz $\nu_k \rightarrow \lambda_1$, takže λ_1 je bod bifurkácie rovnice $\Phi'(u) - \lambda u = 0$. To platí pre ľubovoľnú násobnosť uvažovaného vlastného čísla (pri dôkaze, že vlastné číslo linearizácie je bodom bifurkácie pomocou stupňa zobrazenia, sa vyžaduje, aby násobnosť tohto vlastného čísla bola nepárna).

Vyšetrovaním sedlových bodov funkcionálu Φ na sférach S_k sa dá dokonca ukázať, že každé λ_j je bod bifurkácie uvedenej rovnice. Naznačme dôkaz tohto tvrdenia.

Nech teda $\lambda_j > \lambda_{j+1}$, $X^j = \text{lin}\{\varphi_1, \dots, \varphi_j\}$, $S = \{u \in X : \|u\| = r\}$ a $S^j = S \cap X^j$, kde $r > 0$. Označme $F(u) = \nabla\Phi(u) - \frac{1}{r^2}(\Phi'(u), u)u$ pre $u \in S$ (t.j. $F(u)$ je projekcia $\nabla\Phi(u)$ na dotyčnicovú nadrovinu k S v bode u) a nech $\Theta(t, u)$ pre $t \geq 0$, $u \in S$, je riešením diferenciálnej rovnice $\Theta_t(t, u) = F(\Theta(t, u))$ s počiatočnou podmienkou $\Theta(0, u) = u$.

Pretože $\frac{d}{dt}\|\Theta(t, u)\|^2 = 2(F(\Theta(t, u)), \Theta(t, u)) = 0$, platí $\Theta(t, u) \in S$. Ďalej $\frac{d}{dt}\Phi(\Theta(t, u)) = \|F(\Theta(t, u))\|^2 \geq 0$, takže Φ neklesá pozdĺž deformácie Θ . Odtiaľ plynie, že množina $S^j(t) := \Theta(t, S^j)$ nie je stiahnuteľná do bodu v $X \setminus (X^j)^\perp$ pre malé r (dokážte; využite to, že pre funkciu $\psi(t) := \min_{S^j(t)} \Phi$ platí $\psi(t) \geq \psi(0) \geq \lambda_j r^2 + o(r^2)$, ale $\sup_{S \cap (X^j)^\perp} \Phi \leq \lambda_{j+1} r^2 + o(r^2)$). Ľahko sa tiež ukáže, že pre každé t existuje $u \in S^j(t)$ tak, že $u \perp \varphi_i$ pre $i < j$, odkiaľ $\psi(t) \leq \Phi(u) \leq \lambda_j r^2 + o(r^2)$.

Nech U_t je množina všetkých minimizérov Φ na kompakte $S^j(t)$ a nech u_t minimalizuje $\|F(u)\|$ na kompakte U_t . Pretože ψ je neklesajúca a ohraničená, existujú $t_n \rightarrow \infty$ tak, že existuje $\psi'(t_n)$ a $\psi'(t_n) \rightarrow 0$. Prechodom k vybranej postupnosti môžeme predpokladať $u_{t_n} \rightarrow w^j$. Pretože $\psi'(t) \geq \|F(u_t)\|^2$ (viď nasledujúce cvičenie), platí $F(u_{t_n}) \rightarrow 0$, takže $F(w^j) = 0$, t.j. $\Phi'(w^j) = \nu_j w^j$ pre vhodné $\nu_j = \nu_j(r)$. Z odhadu $\psi(t) = \lambda_j r^2 + o(r^2)$ ľahko plynie $\nu_j(r) \rightarrow \lambda_j$ pre $r \rightarrow 0+$, takže λ_j je bod bifurkácie rovnice $\Phi'(u) = \lambda u$.

Podobné úvahy ako vyššie vedú k dôkazu existencie riešenia rovnice $\Phi'(u) = \lambda u$ aj pre u „veľké“, pokiaľ je funkcionál Φ párný (t.j. $\Phi(u) = \Phi(-u)$). Príslušné tvrdenie je obsahom tzv. Ljusternik-Schnirelmanovej vety, ktorá je ne-lineárnou analógiou Courant-Weinsteinovho princípu.

Cvičenie 6.20. V Príklade 6.19 ukážte $\psi'(t) \geq \|F(u_t)\|^2$ (pokiaľ $\psi'(t)$ existuje).

Cvičenie 6.21. Nech $w \in W^{2,2}(a, b)$ popisuje ohnutie tenkej elastickej tyče, ktorá je buď uchytená na koncoch ($w(a) = w(b) = 0$) alebo uchytená a votknutá na jednom konci ($w(a) = w'(a) = 0$) alebo na oboch koncoch ($w(a) = w'(a) = w(b) = w'(b) = 0$). Predpokladajme, že tyč v kľudovej polohe je popísaná funkciou $w(x) \equiv 0$ a že na tyč pôsobí (len) sila P v smere osi x . Pre malé deformácie sa dá vnútorná energia tyče aproximovať výrazom $\Phi_i(w) = \frac{EI}{2} \int_a^b (w'')^2 dx$ (kde E, I sú kladné konštanty) a práca vonkajších síl výrazom $P\Phi_e(w)$, kde $\Phi_e(w) = \frac{1}{2} \int_a^b (w')^2 dx$. K ohnutiu tyče príde pri kritickom zaťažení P^* , pre ktoré existuje $w_0 \neq 0$ spĺňajúca dané okrajové podmienky a $\Phi_i(w_0) = P^* \Phi_e(w_0)$. Nájdite P^* a w_0 pre dané typy okrajových podmienok a $a = 0$, $b = 2\pi$.

7. Sedlové body

Nech $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ je triedy C^1 . V tomto odstavci sa budeme venovať kritickým bodom Φ , v ktorých Φ nebude nadobúdať lokálny extrém.

Jedným z najčastejšie používaných tvrdení pri hľadaní sedlových bodov funkcionálov je tzv. Veta o horskom sedle (Mountain Pass Theorem), ktorej prvú verziu dokázali v r. 1973 A. Ambrosetti a P. Rabinowitz, viď [3]. Táto veta veľmi zhruba povedané tvrdí, že na každom rozumnom horskom hrebeni (a to nielen v trojrozmernom priestore) existuje horské sedlo. Presnejšie: Nech Φ popisuje výšku terénu nad priestorom X a majme dva body $A_0, A_1 \in X$ také, že body $(A_0, \Phi(A_0))$ a $(A_1, \Phi(A_1))$ ležia v rôznych údoliach, t.j. pre ľubovoľnú spojitú cestu z A_0 do A_1 v X nadobúda Φ pozdĺž tejto cesty hodnotu väčšiu alebo rovnú než β , kde $\beta > \max(\Phi(A_0), \Phi(A_1))$ je pevné. Potom (za istých dodatočných predpokladov o funkcionáli Φ) existuje kritický bod B , pre ktorý $\Phi(B) \geq \beta$. Pre všeobecný funkcionál toto tvrdenie neplatí už ani pre $X = \mathbb{R}^2$, viď Príklad 7.1. Ako uvidíme, postačujúca podmienka pre Φ bude nasledujúca **Palais-Smaleova podmienka**:

Ak je $\{\Phi(u_n)\}$ ohraničená a $\Phi'(u_n) \rightarrow 0$, potom je postupnosť $\{u_n\}$ relatívne kompaktná. (PS)

Príklad 7.1. Nech $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto e^x - y^2$, $A_0 = (0, -2)$, $A_1 = (0, 2)$. Potom $\Phi(A_0) = \Phi(A_1) = -3$ a ľubovoľná cesta od A_0 k A_1 musí prejsť cez priamku $y = 0$, t.j. cez miesto, kde $\Phi > 0$. Napriek tomu Φ nemá žiaden kritický bod, pretože $\Phi_x(x, y) = e^x > 0$.

Cvičenie 7.2. Ukážte, že ak $X = \mathbb{R}^n$ a $|\Phi| + \|\Phi'\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je koercívny potom Φ spĺňa (PS).

Veta 7.3. (Mountain Pass Theorem) *Nech $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ je triedy C^1 a splňa podmienku (PS). Nech $u_0, u_1 \in X$, $P := \{p \in C([0, 1], X) : p(0) = u_0, p(1) = u_1\}$,*

$$M := \max(\Phi(u_0), \Phi(u_1)), \quad \beta := \inf_{p \in P} \max_{t \in [0, 1]} \Phi(p(t)).$$

*Ak $\beta > M$, potom je β **kritická hodnota** Φ (t.j. existuje kritický bod $v \in X$, pre ktorý $\Phi(v) = \beta$).*

Dôkaz. Aby sme sa vyhli technickým problémom, dokážeme uvedenú vetu len za dodatočných predpokladov, že X je Hilbertov priestor a Φ je triedy C^2 . Pre $\delta > 0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ označme

$$N_\delta := \{u \in X : |\Phi(u) - \beta| \leq \delta, \|\Phi'(u)\| \leq \delta\}, \quad \Phi_\alpha := \{u \in X : \Phi(u) < \alpha\}.$$

Predpokladajme, že β nie je kritická hodnota Φ . Z podmienky (PS) potom (dôkazom sporom) plyní, že existuje $\delta > 0$ tak, že $N_\delta = \emptyset$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať $\delta < 1$, $\delta^2 < \beta - M$. Položme $\varepsilon := \frac{1}{2}\delta^2$. Nižšie ukážeme, že existuje spojité zobrazenie $\Theta : X \times [0, 1] \rightarrow X$ s vlastnosťami

- (i) $\Theta(u, t) = u$ ak $t = 0$ alebo $\Phi'(u) = 0$ alebo $|\Phi(u) - \beta| \geq 2\varepsilon$,
- (ii) $t \mapsto \Phi(\Theta(u, t))$ je nerastúca pre každé u ,
- (iii) $\Theta(\Phi_{\beta+\varepsilon}, 1) \subset \Phi_{\beta-\varepsilon}$.

Z definície β plyní existencia $p \in P$ tak, že $\max_{t \in [0, 1]} \Phi(p(t)) < \beta + \varepsilon$. Pretože pre $i = 0, 1$ platí $\Phi(u_i) \leq M < \beta - \delta^2 = \beta - 2\varepsilon$, z vlastnosti (i) zobrazenia Θ plyní, že $p_1 : t \mapsto \Theta(p(t), 1)$ je prvkom P . Vlastnosť (iii) však zaručuje $\max_{t \in [0, 1]} \Phi(p_1(t)) \leq \beta - \varepsilon$, čo je spor s definíciou β .

Zostáva dokázať existenciu zobrazenia Θ .

Zvoľme si funkcie $\varphi, \psi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ tak, aby φ bola hladká,

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= 1 \text{ pre } |t - \beta| \leq \varepsilon, \quad \varphi(t) = 0 \text{ pre } |t - \beta| \geq 2\varepsilon, \\ \psi(t) &= 1 \text{ pre } t \leq 1, \quad \psi(t) = 1/t \text{ pre } t > 1. \end{aligned}$$

Vektorové pole

$$F : X \rightarrow X : u \mapsto -\varphi(\Phi(u))\psi(\|\Phi'(u)\|)\nabla\Phi(u)$$

je (lokálne) lipschitzovské a ohraničené, takže pre každé $u \in X$ existuje jediné riešenie počiatkovej úlohy

$$\begin{aligned} \Theta_t(u, t) &= F(\Theta(u, t)), \quad \text{pre } t \in [0, 1], \\ \Theta(u, 0) &= u. \end{aligned}$$

Takto definované zobrazenie Θ je zrejme spojité a splňa (i). Ďalej pri označení $v := \Theta(u, t)$ platí

$$\frac{d}{dt}\Phi(\Theta(u, t)) = \frac{d}{dt}\Phi(v) = \Phi'(v)F(v) = -\varphi(\Phi(v))\psi(\|\Phi'(v)\|)\|\Phi'(v)\|^2 \leq 0,$$

takže platí (ii).

Sporom dokážeme ešte (iii). Nech $u \in \Phi_{\beta+\varepsilon}$ a predpokladajme $\Theta(u, 1) \notin \Phi_{\beta-\varepsilon}$. Potom z (ii) plyní $|\Phi(\Theta(u, t)) - \beta| \leq \varepsilon < \delta$ pre $t \in [0, 1]$, takže $N_\delta = \emptyset$ implikuje $\|\Phi'(\Theta(u, t))\| \geq \delta$ pre $t \in [0, 1]$. S využitím tohto odhadu a vlastností funkcií φ, ψ dostávame

$$\begin{aligned} \Phi(\Theta(u, 1)) &= \Phi(u) + \int_0^1 \frac{d}{dt}\Phi(\Theta(u, t)) dt \\ &= \Phi(u) - \int_0^1 \underbrace{\varphi(\Phi(\Theta(u, t)))}_{=1} \underbrace{\psi(\|\Phi'(\Theta(u, t))\|)\|\Phi'(\Theta(u, t))\|^2}_{\geq \delta^2} dt \\ &< \beta + \varepsilon - \delta^2 \leq \beta - \varepsilon, \end{aligned}$$

čo je spor. $\square$

Poznámky 7.4. (i) Za predpokladov Vety 7.3 dokonca platí, že existuje kritický bod $v \in X$, pre ktorý $\Phi(v) = \beta$ a navyac buď Φ nadobúda vo v lokálne minimum alebo pre každé otvorené okolie U bodu v je $\Phi_\beta \cap U = \{u \in U : \Phi(u) < \beta\}$ neprázdna množina, ktorá nie je oblúkovito súvislá. Bodom druhého druhu sa hovorí **body typu horského sedla**. Ak sú všetky kritické body Φ s vlastnosťou $\Phi(v) = \beta$ izolované, potom je aspoň jeden z nich bod typu horského sedla, vid' [32].

(ii) Nech je X Hilbertov priestor, $\Phi \in C^2$, Φ' je kompaktnou perturbáciou identity, v je izolovaný kritický bod Φ typu horského sedla a λ_1 je prvé (najmenšie) vlastné číslo zobrazenia $\Phi''(v)$. Ak $\lambda_1 = 0$, predpokladajme tiež, že λ_1 je jednoduché. Potom platí, že Leray-Schauderov index zobrazenia Φ' v bode v je rovný -1 , vid' [33].

Cvičenie 7.5. Nech $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ je triedy C^1 , $\Phi(u) = 1$ práve keď $u \in [0, 1]$. Ak zvolíme $u_0 < 0$, $u_1 > 1$, potom $\beta = 1$ a žiaden z kritických bodov v s vlastnosťou $\Phi(v) = 1$ nie je typu horského sedla. Ukážte.

Príklad 7.6. Pomocou Vety 7.3 opäť dokážeme existenciu netriviálneho riešenia úlohy (6.5) z Príkladu 6.6. Na rozdiel od uvedeného príkladu však teraz nevyužijeme homogenitu nelinearity, takže tento postup sa dá použiť aj pre všeobecnejšie nelinearity.

Nech je teda $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je ohraničená oblasť s lipschitzovskou hranicou, $p > 2$, $p < 2n/(n-2)$ ak $n > 2$. Vieme, že slabé riešenia úlohy (6.5) zodpovedajú kritickým bodom C^2 -funkcionálu

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{p} \int_{\Omega} |u|^p dx,$$

definovaného v Hilbertovom priestore $X := W_0^{1,2}(\Omega)$. V priestore X pritom môžeme uvažovať (ekvivalentnú) normu generovanú skalárnym súčinom $(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx$.

Pretože $\Phi'(0) = 0$ a $\Phi''(0)(v, v) = \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx = \|v\|^2$, nadobúda Φ v $u_0 := 0$ ostré lokálne minimum $\Phi(0) = 0$.

Navyše z vety o strednej hodnote plynie existencia $\varepsilon, \delta > 0$ tak, že $\Phi(v) \geq \delta$ pre $\|v\| = \varepsilon$.

Zvoľme ďalej funkciu $w \in X$, $w \not\equiv 0$, a označme $a := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx$, $b := \frac{1}{p} \int_{\Omega} |w|^p dx$. Potom $a, b > 0$, takže $\Phi(tw) = t^2 a - t^p b < 0$ pre dostatočne veľké $t > 0$. Zvoľme si t tak, aby $\Phi(tw) < 0$, $\|tw\| > \varepsilon$, a položíme $u_1 = tw$.

Pre každú cestu p z $u_0 = 0$ do u_1 existuje $t_\varepsilon \in (0, 1)$ tak že $\|p(t_\varepsilon)\| = \varepsilon$, takže $\max_{t \in [0, 1]} \Phi(p(t)) \geq \Phi(p(t_\varepsilon)) \geq \delta$. Pretože $\delta > 0 = \max(\Phi(u_0), \Phi(u_1))$, bude z Vety 7.3 plynúť existencia kritického bodu w s $\Phi(w) \geq \delta$, pokiaľ dokážeme, že Φ spĺňa podmienku (PS).

Nech je teda $\{\Phi(u_n)\}$ ohraničená a $\Phi'(u_n) \rightarrow 0$. Potom existujú $C_1, C_2 > 0$ tak, že $p\Phi(u_n) \leq C_1$ a $-\Phi'(u_n)u_n \leq C_2\|u_n\|$. Sčítaním týchto nerovností dostaneme $\frac{p-2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx \leq C_1 + C_2\|u_n\|$, takže $\{u_n\}$ je ohraničená.

Definujme $K : L^p(\Omega) \rightarrow L^{p'}(\Omega) : u \mapsto |u|^{p-2}u$, kde p' je duálny exponent k p ($1/p + 1/p' = 1$). Potom je K spojitý, a teda zobrazuje kompaktné množiny na kompaktné množiny. Identické vnorenie $I_p : X \rightarrow L^p(\Omega)$ je kompaktné, takže tiež k nemu adjungované zobrazenie $I_p' : (L^p(\Omega))' \rightarrow X'$ je kompaktné. Označme ďalej $R : X' \rightarrow X$ Rieszov izomorfizmus (takže $R\Phi'(u) = \nabla\Phi(u)$). S využitím izomorfizmu $J : L^{p'}(\Omega) \rightarrow (L^p(\Omega))'$, $(Ju)u = \int_{\Omega} uw dx$ pre $u \in L^p(\Omega)$, potom platí $\nabla\Phi(u) = u + \tilde{K}(u)$, kde $\tilde{K} : X \rightarrow X : u \mapsto RI_p'JKI_p(u)$ je kompaktné zobrazenie. Postupnosť $\tilde{K}(u_n)$ je teda relatívne kompaktná a (po výbere vhodnej podpostupnosti) môžeme predpokladať $\tilde{K}(u_n) \rightarrow z$. Pretože $\nabla\Phi(u_n) \rightarrow 0$, dostávame $u_n = \nabla\Phi(u_n) - \tilde{K}(u_n) \rightarrow z$, takže platí (PS).

Cvičenie 7.7. Ukážte, že úloha z Príkladu 7.6 má kladné riešenie.

Poznámka 7.8. Predpokladajme, že ohraničená oblasť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ s hladkou hranicou má nasledujúcu vlastnosť: existuje $x_0 \in \Omega$ tak, že pre každé $x \in \overline{\Omega}$ leží úsečka $[x_0, x]$ v Ω (túto vlastnosť má určite každá konvexná oblasť Ω). Potom z Pochožajevovej³ identity (vid' [49]) plynie, že úloha z Príkladu 7.6 resp. Cvičenia 7.7 nemá netriviálne klasické riešenie ak $n > 2$ a $p \geq 2n/(n-2)$. Tzv. **kritický Sobolevov exponent** $2^* := 2n/(n-2)$ je teda kritický nielen pre platnosť vnorenia $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ ale aj pre existenciu netriviálnych riešení úlohy z Príkladu 7.6.

Cvičenie 7.9. Nech $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : 1 < |x| < 2\}$ a $X = \{u \in W_0^{1,2}(\Omega) : u \text{ je radiálne symetrická}\}$. Ukážte, že priestor X je kompaktné vnorenie do $L^p(\Omega)$ pre ľubovoľné $p > 1$ a zopakovaním postupu z Príkladu 7.6 ukážte, že uvažovaná úloha má kladné riešenie pre ľubovoľné $p > 1$.

³častý anglický prepis mena Похожаев je Pohozaev alebo Pokhozhaev

Cvičenie 7.10. Použite Vety 5.5 a 7.3 na dôkaz existencie netriviálneho kritického bodu funkcionálu

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u_1|^2 + |\nabla u_2|^2 + u_1 u_2^2) dx,$$

definovaného v Hilbertovom priestore $X := W_0^{1,2}(\Omega) \times W_0^{1,2}(\Omega)$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je ohraničená, $n < 6$. Zistite tiež, riešením akého systému rovníc je nájdený kritický bod.

Príklad 7.11. Nech je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ohraničená oblasť s hladkou hranicou $\partial\Omega$, ν označuje jednotkový vektor vonkajšej normály na $\partial\Omega$ a $X := W^{1,2}(\Omega)$. Nech ďalej $a > 0$, $p, q > 2$, pričom v prípade $n > 2$ predpokladajme tiež $p < \frac{2n}{n-2}$, $q < \frac{2n-2}{n-2}$ (tieto podmienky zaručujú kompaktnosť vnorenia $X \hookrightarrow L^p(\Omega)$ aj operátora stopy $T : X \rightarrow L^q(\partial\Omega)$). Kritické body funkcionálu

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{a}{p} \int_{\Omega} |u|^p dx - \frac{1}{q} \int_{\partial\Omega} |u|^q dS, \quad u \in X$$

zodpovedajú slabým riešeniam úlohy

$$\begin{aligned} \Delta u &= a|u|^{p-2} & \text{v } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= |u|^{q-2}u & \text{na } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Nech $\delta > 0$. Keďže $g(u) := \frac{1}{q}|u|^q \in W^{1,1}(\Omega)$, z Vety 17.6 plynie

$$\left\| g(u) - \frac{1}{|\partial\Omega|} \int_{\partial\Omega} g(u) dS \right\|_{L^1(\Omega)} \leq C_{\Omega} \|\nabla g(u)\|_{L^1(\Omega)} = C_{\Omega} \|g'(u) \nabla u\|_{L^1(\Omega)} \leq \delta \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{C_{\Omega}^2}{4\delta} \|g'(u)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Pretože

$$-\frac{1}{q} \int_{\partial\Omega} |u|^q dS = \frac{|\partial\Omega|}{|\Omega|} \int_{\Omega} \left(g(u) - \frac{1}{|\partial\Omega|} \int_{\partial\Omega} g(u) dS \right) dx - \frac{|\partial\Omega|}{|\Omega|} \int_{\Omega} g(u) dx,$$

voľbou $\delta = \frac{|\Omega|}{4|\partial\Omega|}$ dostávame

$$\Phi(u) \geq \frac{1}{4} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{a}{p} \int_{\Omega} |u|^p dx - \frac{|\partial\Omega|}{q|\Omega|} \int_{\Omega} |u|^q dx - \frac{C_{\Omega}^2}{4\delta} \frac{|\partial\Omega|}{|\Omega|} \int_{\Omega} |u|^{2q-2} dx. \quad (7.1)$$

Nech najprv $p < q$. Potom sa podobne ako v Príklade 7.6 ukáže, že Φ spĺňa podmienku (PS) a $\Phi(tu) \rightarrow -\infty$ pre $w \in X$ pevné ($w \not\equiv 0$ na $\partial\Omega$) a $t \rightarrow \infty$. Navyiac z odhadu (7.1) plynie

$$\Phi(u) \geq c_1 \|u\|_X^p - c_2 \|u\|_X^q \geq c \|u\|_X^p \quad \text{pre } \|u\|_X \ll 1.$$

Pre $p < q$ teda môžeme použiť Vetu 7.3 a dostaneme existenciu netriviálneho kritického bodu. Tú dostaneme aj pre $p > 2q - 2$, pretože vtedy je Φ koercívny (vd'aka (7.1)), slabo sekvenciálne zdola polospojité (viď Cvičenie 4.1) a $u_0 = 0$ nie je lokálny minimizér (uvažujte $u_{\varepsilon} \equiv \varepsilon$). V oboch prípadoch sa dá dokázať aj existencia kladného kritického bodu.

Pre $q < p < 2q - 2$ je Φ zdola neohraničený (uvažujte funkcie $u_{\varepsilon}(x) := \varepsilon^{-\kappa}(\varepsilon - \text{dist}(x, \partial\Omega))_+$ pre vhodné $\kappa > 0$ a $\varepsilon \rightarrow 0+$), $u_0 = 0$ nie je lokálny minimizér a dá sa ukázať existencia $a_0 > 0$ s nasledujúcou vlastnosťou: pre $a > a_0$ existujú aspoň dva kladné kritické body a pre $a < a_0$ neexistujú žiadne kladné kritické body. Presné počty všetkých kritických bodov Φ pre $n = 1$ (a rôzne hodnoty parametrov p, q, a) možno nájsť v [16].

Veta 7.12. (Linking) Nech $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ je triedy C^1 a spĺňa podmienku (PS). Nech Q je podvarieta X s relatívnou hranicou ∂Q a $P := \{p \in C(Q, X) : p(u) = u \text{ pre } u \in \partial Q\}$. Nech je ďalej $S \subset X$ uzavretá množina s vlastnosťami $S \cap \partial Q = \emptyset$ a $S \cap p(Q) \neq \emptyset$ pre každé $p \in P$. Označme

$$d := \inf_S \Phi, \quad M := \sup_{\partial Q} \Phi, \quad \beta := \inf_{p \in P} \sup_{u \in Q} \Phi(p(u)).$$

Ak $d > M$, potom je β kritická hodnota Φ .

Veta 7.12 je zovšeobecnením Vety 7.3: stačí zvoliť Q rovné úsečke $[u_0, u_1]$ a $S = \{u : \Phi(u) \geq \frac{1}{2}(\beta + M)\}$. Jej dôkaz je priamočiarym zovšeobecnením dôkazu Vety 7.3, takže ho vynecháme.

Príklad 7.13. Uvažujme modifikáciu úlohy z Príkladu 7.6: nech je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je ohraničená oblasť s lipschitzovskou hranicou, $p > 2$, $p < 2n/(n-2)$ ak $n > 2$, $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned}\Delta u + \lambda u + |u|^{p-2}u &= 0 & \text{v } \Omega, \\ u &= 0 & \text{na } \partial\Omega.\end{aligned}$$

Riešenia tejto úlohy sú kritickými bodmi C^2 -funkcionálu

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} u^2 dx - \frac{1}{p} \int_{\Omega} |u|^p, \quad u \in X := W_0^{1,2}(\Omega).$$

Nech $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$ sú vlastné čísla a φ_j , $j = 1, 2, 3, \dots$ príslušné vlastné funkcie úlohy

$$\begin{aligned}-\Delta \varphi &= \tilde{\lambda} \varphi & \text{v } \Omega, \\ \varphi &= 0 & \text{na } \partial\Omega.\end{aligned}$$

Môžeme predpokladať, že $\{\varphi_j\}$ tvoria ortonormálnu bázu v X .

Ak $\lambda \geq \lambda_1$, potom $u_0 = 0$ nebude lokálnym minimom Φ , takže nemôžeme použiť Vetu 7.3 tak ako v Príklade 7.6. Zvoľme k tak, aby $\lambda_k \leq \lambda < \lambda_{k+1}$ a položíme $X^+ = \text{lin}\{\varphi_j : j > k\}$, $X^- = \text{lin}\{\varphi_j : j \leq k\}$, $W = \text{lin}\{\varphi_j : j \leq k+1\}$. Ak $u \in X^-$, potom z Courant-Weinsteinovho princípu plyní

$$\Phi(u) \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} u^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda_k}{2} \int_{\Omega} u^2 dx \leq 0.$$

Ak je S_W jednotková sféra vo W a označíme $a = \min_{S_W} \frac{1}{p} \int_{\Omega} |u|^p dx$ a $b = \max_{S_W} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$, potom $a, b > 0$ a pre $w \in S_W$ a $t > 0$ platí $\Phi(tw) < t^2 b - t^p a$, takže $\Phi(u) \rightarrow -\infty$ pre $u \in W$, $\|u\| \rightarrow \infty$.

Položíme

$$\begin{aligned}Q &= \{u + s\varphi_{k+1} : u \in X^-, \|u\| \leq R, 0 \leq s \leq R\}, \\ S &= \{u \in X^+ : \|u\| = \varepsilon\},\end{aligned}$$

kde R je veľké a δ malé. Potom pre $u \in \partial Q$ bude platiť $\Phi(u) \leq 0$ (pretože $\Phi(u) \leq 0$ pre $u \in X^-$ a $u \in W$, $\|u\| \gg 1$ pre $u \in \partial Q \setminus X^-$) a pre $u \in S$ naopak $\Phi(u) \geq \delta > 0$, pretože pre $v \in X^+$ platí

$$\Phi''(0)(v, v) = \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} v^2 dx \geq c\|v\|^2,$$

kde $c = 1 - \lambda/\lambda_{k+1} > 0$.

Tvrdenie $p(Q) \cap S \neq \emptyset$ pre každé $p \in P$ je jednoduchým dôsledkom vlastností Brouwerovho stupňa zobrazenia použitého na zobrazenie $(P^-p, \|(I - P^-)p\|_{\varphi_{k+1}})$ a hodnotu $(0, \varepsilon_{\varphi_{k+1}})$, kde P^- je ortogonálna projekcia na X^- . Funkcionál Φ (podobne ako v Príklade 7.6) spĺňa tiež Palais-Smaleovu podmienku, takže Veta 7.12 nám zaručuje existenciu kritického bodu v s $\Phi(v) \geq \delta$.

Cvičenie 7.14. Ukážte podmienku (PS) pre funkcionál Φ z Príkladu 7.13.

Poznámka 7.15. Nech $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je C^2 funkcia, nech 1 je regulárna hodnota H (t.j. $\nabla H(x) \neq 0$ pre každé $x \in H^{-1}(1)$) a nech je $H^{-1}(1)$ kompaktná a súvislá množina. Uvažujme hamiltonovský systém

$$\dot{x} = J\nabla H(x), \quad \text{kde} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -id \\ id & 0 \end{pmatrix}, \quad id : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : y \mapsto y.$$

Hamiltonián H je konštantný pozdĺž každého riešenia a vyššie uvedené vety sa dajú úspešne použiť na dôkaz existencie periodických riešení ležiacich v množine $H^{-1}(\beta)$ pre ľubovoľné β blízke 1 (viď [51, Theorem II.8.7]). Príslušný funkcionál má pritom tvar $\Phi(x) = \int_0^T (\frac{1}{2}\dot{x} \cdot Jx - H(x)) dt$. Podobné tvrdenia sa dajú dokázať aj pre Hamiltoniány, ktoré su navyše periodicky závislé na t .

8. Približné a numerické metódy

Veta 8.1. *Nech je X reflexívny Banachov priestor, nech existuje druhá Gâteauxova derivácia funkcionálu $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ a nech je rovnomerne pozitívne definitná, t.j.*

$$(\exists \alpha > 0)(\forall u, h \in X) D^2\Phi(u)(h, h) \geq \alpha \|h\|^2.$$

Potom existuje jediný prvok $u_0 \in X$ tak, že $\Phi(u_0) = \inf_X \Phi$ a navyše každá minimizujúca postupnosť konverguje (v norme) k u_0 .

Dôkaz. Nech $u, w \in X$. Funkcia $\varphi : t \mapsto D\Phi(w + t(u - w))(u - w)$ je diferencovateľná a pre každé $t \in (0, 1)$ existuje $\theta_t \in (0, t)$ tak, že

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \varphi(0) + t\varphi'(\theta_t) = D\Phi(w)(u - w) + tD^2\Phi(w + \theta_t(u - w))(u - w, u - w) \\ &\geq D\Phi(w)(u - w) + t\alpha\|u - w\|^2, \end{aligned}$$

takže

$$\Phi(u) - \Phi(w) = \int_0^1 \varphi(t) dt \geq D\Phi(w)(u - w) + \frac{\alpha}{2}\|u - w\|^2 \geq \|u - w\| \left(\frac{\alpha}{2}\|u - w\| - \|D\Phi(w)\| \right). \quad (8.1)$$

Z odhadu (8.1) plynie, že Φ je koercívny. Ak $u_n \rightarrow u$, potom (8.1) implikuje

$$\Phi(u_n) - \Phi(u) \geq \|u_n - u\| \left(\frac{\alpha}{2}\|u_n - u\| - \|D\Phi(u)\| \right) \rightarrow 0,$$

takže Φ je tiež zdola polospojité. Keďže Φ je vďaka kladnosti druhej derivácie aj striktne konvexný, existuje jediné u_0 tak, že $\Phi(u_0) = \inf_X \Phi$.

Nech je ďalej $\{u_n\}$ ľubovoľná minimizujúca postupnosť pre Φ . Potom z (8.1) a Eulerovej nutnej podmienky $D\Phi(u_0) = 0$ plynie $\frac{\alpha}{2}\|u_n - u_0\|^2 \leq \Phi(u_n) - \Phi(u_0) \rightarrow 0$, odkiaľ $u_n \rightarrow u_0$. $\square$

Veta 8.2. (Metóda najväčšieho spádu) *Nech je X Hilbertov priestor, $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ je triedy C^2 , $\Phi''(u)(h, h) \geq \alpha\|h\|^2$, $\|\Phi''(u)\| \leq M(\|u\|)$, kde $M : \mathbb{R}^+ \rightarrow [1, \infty)$ je neklesajúca. Zvoľme $u_1 \in X$, $\varepsilon_0 \in (0, 1]$ a položíme $u_{n+1} = u_n - \varepsilon_n \nabla \Phi(u_n)$, kde $\varepsilon_n \in [\varepsilon_0/M_n, 1/M_n]$ a $M_n = M(\|u_n\| + \|\Phi'(u_n)\|)$. Potom $u_n \rightarrow u_0$, kde u_0 je jediný minimizér Φ v X .*

Dôkaz. Existencia jediného minimizéru u_0 plynie z Vety 8.1. Ďalej pre $t \in [0, 1]$ platí

$$\|t(u_{n+1} - u_n)\| \leq \|(u_{n+1} - u_n)\| \leq \varepsilon_n \|\Phi'(u_n)\| \leq \|\Phi'(u_n)\|,$$

takže $\|\Phi''(u_n + t(u_{n+1} - u_n))\| \leq M_n$ a

$$\begin{aligned} \Phi(u_{n+1}) - \Phi(u_n) &= \Phi'(u_n)(u_{n+1} - u_n) \\ &\quad + \int_0^1 (1-t)\Phi''(u_n + t(u_{n+1} - u_n))(u_{n+1} - u_n, u_{n+1} - u_n) dt \\ &\leq -\varepsilon_n \|\Phi'(u_n)\|^2 + \frac{1}{2}M_n\varepsilon_n^2 \|\Phi'(u_n)\|^2 \leq -\frac{\varepsilon_n}{2} \|\Phi'(u_n)\|^2. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Odtiaľ plynie, že $\{\Phi(u_n)\}$ je nerastúca postupnosť, takže $\Phi(u_n) \rightarrow z$ pre vhodné $z \geq \Phi(u_0)$. Z dôkazu Vety 8.1 plynie, že Φ je koercívny, takže z ohraničenosti $\{\Phi(u_n)\}$ plynie ohraničenosť $\{u_n\}$, t.j. $\|u_n\| \leq C$. Keďže

$$\|\Phi'(u_n)\| = \|\Phi'(0) + \int_0^1 \Phi''(tu_n)u_n dt\| \leq \|\Phi'(0)\| + M(C)C,$$

je aj postupnosť $\{M_n\}$ ohraničená, a teda $\varepsilon_n \geq c > 0$. Z (8.2) teraz plynie $\Phi'(u_n) \rightarrow 0$.

Pretože $\Phi'(u_0) = 0$, platí

$$\Phi'(u_n)(u_n - u_0) = \int_0^1 \Phi''(u_0 + t(u_n - u_0))(u_n - u_0, u_n - u_0) dt \geq \alpha\|u_n - u_0\|^2,$$

odkiaľ $\|\Phi'(u_n)\| \geq \alpha\|u_n - u_0\|$. Z konvergenzie $\Phi'(u_n) \rightarrow 0$ teda plynie $u_n \rightarrow u_0$. $\square$

Poznámka 8.3. Metóda najväčšieho spádu konverguje aj pre funkcionály v reflexívnych Banachových priestoroch (a za slabších predpokladov napr. na pozitivnosť Φ''). Ak naopak Φ vyhovuje silnejším predpokladom, potom sa dá ukázať konvergencia presnejšej Newtonovej metódy

$$u_{n+1} = u_n - [\Phi''(u_n)]^{-1} \Phi'(u_n).$$

Cvičenie 8.4. Nech Ω je ohraničená oblasť v $\mathbb{R}^m$ s lipschitzovskou hranicou, nech $X = W^{1,2}(\Omega)$ alebo $X = W_0^{1,2}(\Omega)$ (pričom v druhom prípade v X uvažujeme normu $\|u\|^2 = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$). V priestore X uvažujeme funkcionál $\Phi(u) = \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + g(u) + fu) dx$, kde $g(u) = (u^4 - c)/(u^2 + 1)$, $|c| < 1$, a $f \in L^2(\Omega)$. Zvoľme $u_1 \in X$ ľubovoľne a položme $u_{n+1} = u_n - \varepsilon \nabla \Phi(u_n)$. Zistite, pre aké c existuje $\varepsilon > 0$ nezávislé na n (a čomu sa rovná) tak, že sú splnené predpoklady Vety 8.2. Ďalej zistite, čomu sa rovná $\nabla \Phi(u)$ (vyjadrené pomocou funkcií g, f).

Veta 8.5. (Ritzova metóda) *Nech je $\{X_n\}$ postupnosť uzavretých podpriestorov X , ktorých zjednotenie je husté v X a $X_n \subset X_{n+1}$ pre každé n . Nech $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitý a nech existujú $u_n \in X_n$ tak, že $\Phi(u_n) = \min_{X_n} \Phi$. Potom je postupnosť $\{u_n\}$ minimalizujúca pre Φ .*

Dôkaz. Nech $\alpha_k \searrow \inf_X \Phi$. Potom existujú $v_k \in X$ tak, že $\Phi(v_k) < \alpha_k$. Ďalej existujú $v_{k,j} \in \bigcup_n X_n$ tak, že $v_{k,j} \rightarrow v_k$, a teda tiež $\Phi(v_{k,j}) \rightarrow \Phi(v_k)$. Zvoľme j_k tak, aby $\Phi(v_{k,j_k}) < \alpha_k$ a n_k tak, aby $v_{k,j_k} \in X_{n_k}$. Môžeme predpokladať $n_k < n_{k+1}$. Položme $w_n = v_{k,j_k}$ pre $n_k \leq n < n_{k+1}$. Potom $w_n \in X_n$ a $\Phi(w_n) \rightarrow \inf_X \Phi$. Pretože $\Phi(w_n) \geq \min_{X_n} \Phi = \Phi(u_n)$, platí $\Phi(u_n) \rightarrow \inf_X \Phi$. $\square$

Cvičenie 8.6. Nech $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\Phi(u) = \Phi_f(u) := \int_{\mathbb{R}} (\frac{1}{2}(u')^2 - fu) dx$ pre $u \in X := W^{1,2}(\mathbb{R})$ (viď Cvičenie 5.4) a $X_n := \{u \in X : u(x) = 0 \text{ pre } |x| > n\} = W_0^{1,2}(-n, n)$. Ukážte, že sú splnené predpoklady Vety 8.5. Ukážte tiež, že ak neexistuje $\min_X \Phi$, potom $\|u_n\| \rightarrow \infty$. Zvoľme ďalej $\kappa \in \{0, 1/2, 1, 2\}$, položme $f_n = n^{-\kappa} \chi_{[-1,1]}$ a nech $\tilde{u}_n$ je minimizér Φ_{f_n} v X_n . Vypočítajte $U_{\kappa}(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{u}_n(x)$ a $L_{\kappa} := \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{f_n}(\tilde{u}_n)$.

Príklad 8.7. (Metóda konečných prvkov) Nech $X = \{u \in W^{1,2}(0,1) : u(0) = u(1) = 0\}$,

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 u'^2 dt + \int_0^1 gu dt, \quad \text{kde } g \in L^1(0,1).$$

Podľa Vety 8.1 existuje jediný minimizér u funkcionálu Φ v X , pričom z Eulerovej nutnej podmienky plynie, že ide o slabé (a pre g spojitú sa ľahko overí, že tiež klasické) riešenie okrajovej úlohy $u'' = g$ na $(0,1)$, $u(0) = u(1) = 0$. Zvoľme n prirodzené, položme $t_k = k/(n+1)$ pre $k = 0, 1, \dots, n+1$ a

$$X_n = \{u \in X : u \text{ je afinná na } [t_k, t_{k+1}] \text{ pre } k = 0, 1, \dots, n\}.$$

Nech $v_k \in X_n$ sú definované požiadavkou $v_k(t_j) = \delta_{kj}/(n+1)$ pre $k, j = 1, 2, \dots, n$. Potom tvoria funkcie $v_1, v_2, \dots, v_n$ bázu priestoru X_n . Navyše $X_{n_i} \subset X_{n_{i+1}}$ pre $n_i = 2^i - 1$ a $\bigcup_i X_{n_i}$ je hustý podpriestor X .

Nech u_n minimalizuje Φ na X_n a $y_k := u_n(t_k)$ pre $k = 0, 1, 2, \dots, n+1$. Z Eulerovej nutnej podmienky plynie

$$0 = \Phi'(u_n)v_k = \int_{t_{k-1}}^{t_{k+1}} [u'_n v'_k + g v_k] dt = \int_{t_{k-1}}^{t_k} u'_n dt - \int_{t_k}^{t_{k+1}} u'_n dt + \int_{t_{k-1}}^{t_{k+1}} g v_k dt, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

odkiaľ

$$-y_{k+1} + 2y_k - y_{k-1} = z_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad \text{kde } z_k = - \int_{t_{k-1}}^{t_{k+1}} g v_k dt.$$

Po dosadení $y_0 = y_{n+1} = 0$ vidíme, že $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ je riešením sústavy lineárnych rovníc $Ay = z$ s maticou

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vety 8.1, 8.5 a vnorenie $W_0^{1,2}(0,1) \hookrightarrow C([0,1])$ zaručujú, že takto vypočítané približné riešenie u_n (v bodoch $t_1, t_2, \dots, t_n$) bude blízke hľadanému riešeniu. Podobne sa dá postupovať aj pre úlohy na viacrozmerných polygonálnych oblastiach $\Omega \subset \mathbb{R}^m$; pokiaľ však v tomto prípade zvolíme $X = W_0^{1,2}(\Omega)$ a X_n po častiach afinné funkcie, bude zaručená blízkosť približného riešenia u_n k hľadanému riešeniu len v integrálnej norme. Vhodnou voľbou priestorov X a X_n sa však aj vo viacrozmernom prípade dá často zaručiť bodová konvergencia približných riešení a dokonca odhadnúť tiež rád tejto konvergenencie.

9. Ekelandov variačný princíp

Nasledujúci variačný princíp dokázal I. Ekeland začiatkom 70-tych rokov. Tento princíp si odvtedy našiel veľmi široké použitie (napr. na dôkaz viet o pevných bodoch, v teórii nelineárnych semigrúp, teórii riadenia, matematickom programovaní či globálnej analýze); my sa obmedzíme na jeho dôkaz a jednu jednoduchú aplikáciu.

Veta 9.1. (Ekelandov variačný princíp) *Nech je (X, d) úplný metrický priestor a $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ je zdola polospojité a zdola ohraňovaný funkcionál. Nech je dané $\varepsilon > 0$ a $\bar{u} \in X$ tak, že*

$$\Phi(\bar{u}) \leq \inf_X \Phi + \varepsilon. \quad (9.1)$$

Potom pre každé $\lambda > 0$ existuje $u_\lambda \in X$ tak, že

$$\Phi(u_\lambda) \leq \Phi(\bar{u}), \quad d(u_\lambda, \bar{u}) \leq \lambda, \quad \Phi(u_\lambda) < \Phi(u) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(u, u_\lambda) \quad \text{pre každé } u \neq u_\lambda. \quad (9.2)$$

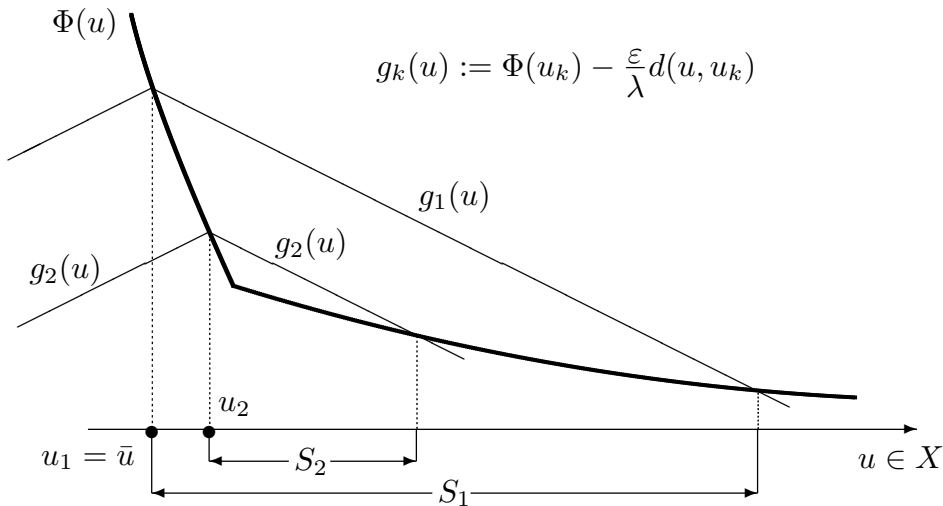
Dôkaz. Definujme na X usporiadanie $\leq$ predpisom

$$u \leq v \iff \Phi(u) \leq \Phi(v) - \frac{\varepsilon}{\lambda} d(u, v)$$

(ide zrejme o reflexívnu, antisymetrickú a tranzitívnu reláciu). Položme $S_1 = \{u \in X : u \leq u_1\}$, kde $u_1 = \bar{u}$. Indukciou nájdeme

$$u_{n+1} \in S_n \text{ tak, že } \Phi(u_{n+1}) \leq \inf_{S_n} \Phi + \varepsilon 2^{-(n+1)} \text{ a definujeme } S_{n+1} = \{u \in X : u \leq u_{n+1}\}.$$

Zrejme $S_{n+1} \subset S_n$; zo zdola polospojitosti Φ plynie, že S_n je uzavretá.



Ukážeme, že $\text{diam } S_n \rightarrow 0$. Zvoľme $w \in S_n$. Potom $w \leq u_n$, t.j.

$$\Phi(w) \leq \Phi(u_n) - \frac{\varepsilon}{\lambda} d(w, u_n). \quad (9.3)$$

Pretože $w \in S_{n-1}$, z definície u_n plynie

$$\Phi(u_n) \leq \Phi(w) + \frac{\varepsilon}{2^n}. \quad (9.4)$$

Z (9.3) a (9.4) dostávame $d(w, u_n) \leq \lambda 2^{-n}$ pre každé $w \in S_n$, takže $\text{diam } S_n \rightarrow 0$.

Z vlatností množín S_n plynie, že existuje jediný prvok u_λ , ktorý patrí do $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$. Ukážeme, že u_λ spĺňa (9.2). Pretože $u_\lambda \leq \bar{u}$, platí

$$\Phi(u_\lambda) \leq \Phi(\bar{u}) - \frac{\varepsilon}{\lambda} d(u_\lambda, \bar{u}) \leq \inf_X \Phi + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{\lambda} d(u_\lambda, \bar{u}) \leq \Phi(u_\lambda) + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{\lambda} d(u_\lambda, \bar{u}),$$

odkiaľ plynú prvé dve nerovnosti v (9.2). Nech teraz $u \neq u_\lambda$. Nemôže platiť $u \leq u_\lambda$, pretože inak by u patrilo do prieniku množín S_n . Musí teda

$$\Phi(u) > \Phi(u_\lambda) - \frac{\varepsilon}{\lambda} d(u, u_\lambda),$$

odkiaľ plynie tretia z dokazovaných nerovností. $\square$

Dôsledok 1. *Nech je (X, d) úplný metrický priestor a $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ je zdola polospojité a zdola ohraničený funkcionál. Potom pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $u_\varepsilon \in X$ tak, že*

$$\Phi(u_\varepsilon) \leq \inf_X \Phi + \varepsilon \quad \text{a} \quad \Phi(u_\varepsilon) < \Phi(u) + \varepsilon d(u, u_\varepsilon) \quad \text{pre každé } u \neq u_\varepsilon. \quad (9.5)$$

Dôkaz. V Ekelandovom princípe stačí zvolit' $\lambda = 1$. $\square$

Dôsledok 2. *Nech je X Banachov priestor a nech je $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ zdola polospojité, zdola ohraničený a gâteauxovsky diferencovateľný funkcionál. Potom pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $u_\varepsilon \in X$ tak, že*

$$\Phi(u_\varepsilon) \leq \inf_X \Phi + \varepsilon \quad \text{a} \quad \|D\Phi(u_\varepsilon)\| \leq \varepsilon. \quad (9.6)$$

Dôkaz. Podľa Dôsledku 1 existuje $u_\varepsilon \in X$ tak, že

$$\Phi(u_\varepsilon) \leq \inf_X \Phi + \varepsilon \quad \text{a} \quad \Phi(u_\varepsilon) \leq \Phi(u) + \varepsilon \|u - u_\varepsilon\| \quad \text{pre každé } u \in X. \quad (9.7)$$

Zvoľme $v \in X$ a $t > 0$ a v (9.7) položíme $u = u_\varepsilon + tv$. Dostávame

$$t^{-1}(\Phi(u_\varepsilon) - \Phi(u_\varepsilon + tv)) \leq \varepsilon \|v\|$$

a limitným prechodom pre $t \rightarrow 0$ dostaneme $-D\Phi(u_\varepsilon)v \leq \varepsilon \|v\|$ pre každé $v \in X$. Ak miesto v uvažujeme $-v$, vidíme, že platí $|D\Phi(u_\varepsilon)v| \leq \varepsilon \|v\|$, odkiaľ plynie aj druhá nerovnosť v (9.6). $\square$

Ako aplikáciu Dôsledku 2 si dokážme nasledujúce jednoduché tvrdenie.

Veta 9.2. *Nech je X Banachov priestor a $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ je triedy C^1 , je zdola ohraničený a spĺňa Palais-Smaleovu podmienku. Potom existuje globálny minimizér u_0 funkcionálu Φ .*

Dôkaz. Podľa Dôsledku 2 pre každé n existuje $u_n \in X$ tak, že

$$\Phi(u_n) \leq \inf_X \Phi + \frac{1}{n} \quad \text{a} \quad \|\Phi'(u_n)\| \leq \frac{1}{n}.$$

Z podmienky (PS) plynie existencia podpostupnosti u_{n_i} tak, že $u_{n_i} \rightarrow u_0$. Tvrdenie plynie zo spojitosti Φ . $\square$

Cvičenie 9.3. Použite Ekelandov variačný princíp na dôkaz toho, že funkcionál Φ spĺňajúci predpoklady Vety 9.2 je koercívny.

II. Variačný počet v $\mathbb{R}^n$

10. Konvexný prípad

V tomto paragrafe budeme predpokladať, že $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je ohraničená oblasť, $f : \Omega \times (\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{Nn}) \rightarrow \mathbb{R}$ je Carathéodoryho funkcia a $\Phi(u) = \int_{\Omega} f(x, u(x), \nabla u(x)) dx$ pre $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$.

Ak je funkcia $f(x, \cdot, \cdot) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{Nn} \rightarrow \mathbb{R}$ konvexná pre s.v. $x \in \Omega$, potom je zrejme Φ konvexný funkcionál, takže jeho prípadná spojitosť implikuje slabú zdola polospojitosť, ktorá je kľúčovou podmienkou pre existenciu minima.

Ak je $f = f(x, u, s)$ konvexná len v premennej s , potom funkcionál Φ môže ale nemusí byť konvexný (viď Cvičenie 10.1). Naším hlavným cieľom bude ukázať, že konvexita f v premennej s zaručí slabú zdola polospojitosť Φ aj v prípade, keď Φ nebude konvexný.

Cvičenie 10.1. Nech $\Phi(u) = \int_0^1 (\frac{1}{2}(u^2 - 1)^2 + (u')^2) dx$ pre $u \in C^1$, $u(0) = u(1) = 0$. Je Φ konvexný?

Nájdite postačujúcu podmienku pre hladké funkcie g, h , aby bol funkcionál $\Phi(u) = \int_0^1 (g(u) + h(u')) dx$ konvexný.

Cvičenie 10.2. Ukážte, že funkcia $f(u, s) = us$ je separátne konvexná, ale funkcionál $\Phi(u) = \int_0^1 uu' dx$ nie je konvexný (vo $W^{1,2}(0, 1)$).

Veta 10.3. Nech je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ohraničená oblasť, $f \in CAR$, $\Phi(u) = \int_{\Omega} f(x, u(x), \nabla u(x)) dx$. Nech je f konvexná v premennej s a nech existuje $a \in L^1(\Omega)$ tak, že $f(\cdot, u, s) \geq a$ (pre každé $u \in \mathbb{R}^N$, $s \in \mathbb{R}^{Nn}$ a s.v. $x \in \Omega$). Potom je Φ slabo sekvenciálne zdola polospojité vo $W^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^N)$.

Dôkaz. Nech $u_k \rightharpoonup u$ vo $W^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, nech $L := \liminf \Phi(u_k)$. Máme dokázať $\Phi(u) \leq L$. Ak $L = +\infty$, sme hotoví. Nech teda $L < +\infty$. Pretože Φ je zdola ohraničený ($\Phi(u) \geq \int_{\Omega} a dx$), platí $L > -\infty$. Môžeme predpokladať, že $\Phi(u_k) \rightarrow L$ (inak prejdeme k vybranej postupnosti). Môžeme tiež predpokladať $f \geq 0$ (inak stačí uvažovať $\tilde{f}(x, u, s) = f(x, u, s) - a(x)$). Pretože priestor $W^{1,1}$ je kompaktné vnorený do L^1 , platí $u_k \rightarrow u$ v $L^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ a prechodom k vybranej postupnosti môžeme dosiahnuť, aby $u_k(x) \rightarrow u(x)$ pre s.v. $x \in \Omega$.

Zo slabej konvergenzie $u_k \rightharpoonup u$ vo $W^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ plyní slabá konvergenzia $\nabla u_k \rightharpoonup \nabla u$ v $L^1(\Omega, \mathbb{R}^{Nn})$. Pretože uzávery konvexnej množiny v slabej a silnej topológii sú zhodné, pre každé k_0 prirodzené existujú konvexné kombinácie funkcií ∇u_k tvaru $s_j(x) = \sum_{k=k_0}^j \alpha_{k,j} \nabla u_k(x)$ tak, že $s_j \rightarrow \nabla u$ pre $j \rightarrow \infty$ v L^1 . Prechodom k vybranej postupnosti môžeme predpokladať, že tiež $s_j(x) \rightarrow \nabla u(x)$ pre s.v. $x \in \Omega$. Pre ľubovoľnú merateľnú podmnožinu $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ teraz s využitím Fatouovej lemy a konvexity f v premennej s dostávame

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\Omega}} f(x, u(x), \nabla u(x)) dx &= \int_{\tilde{\Omega}} \lim_{j \rightarrow \infty} f(x, u(x), s_j(x)) dx \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\tilde{\Omega}} f(x, u(x), s_j(x)) dx \\ &\leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\tilde{\Omega}} \sum_{k=k_0}^j \alpha_{k,j} f(x, u(x), \nabla u_k(x)) dx \leq \sup_{k \geq k_0} \int_{\tilde{\Omega}} f(x, u(x), \nabla u_k(x)) dx, \end{aligned}$$

odkiaľ limitným prechodom pre $k_0 \rightarrow \infty$ plyní

$$\int_{\tilde{\Omega}} f(x, u(x), \nabla u(x)) dx \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{\tilde{\Omega}} f(x, u(x), \nabla u_k(x)) dx \quad (10.1)$$

Na konci dôkazu ukážeme, že existuje podpostupnosť postupnosti $\{u_k\}$ (ktorú opäť budeme značiť $\{u_k\}$) tak, že

$$f(x, u_k(x), \nabla u_k(x)) - f(x, u(x), \nabla u_k(x)) \rightarrow 0 \quad \text{podľa miery,} \quad (10.2)$$

t.j. že pre každé $\varepsilon > 0$ miera $|\Omega_{\varepsilon,k}|$ množiny

$$\Omega_{\varepsilon,k} = \{x : |f(x, u_k(x), \nabla u_k(x)) - f(x, u(x), \nabla u_k(x))| \geq \varepsilon\}$$

konverguje k nule pre $k \rightarrow \infty$. Zvoľme k_j tak, že $|\Omega_{\varepsilon,k_j}| < \varepsilon 2^{-j}$ a položíme $\Omega_\varepsilon = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_{\varepsilon,k_j}$. Potom $|\Omega_\varepsilon| \leq \varepsilon$ a pre $x \notin \Omega_\varepsilon$ platí

$$|f(x, u_{k_j}(x), \nabla u_{k_j}(x)) - f(x, u(x), \nabla u_{k_j}(x))| < \varepsilon \quad \text{pre všetky } j. \quad (10.3)$$

S využitím nerovnosti (10.1) (odvodenej pre postupnosť u_{k_j}), (10.3) a nezápornosti f postupne dostávame

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon} f(x, u(x), \nabla u(x)) dx &\leq \limsup_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon} f(x, u(x), \nabla u_{k_j}(x)) dx \\ &\leq \limsup_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon} f(x, u_{k_j}(x), \nabla u_{k_j}(x)) dx + \varepsilon |\Omega| \\ &\leq \limsup_{j \rightarrow \infty} \Phi(u_{k_j}) + \varepsilon |\Omega|, \end{aligned}$$

odkiaľ limitným prechodom $\varepsilon \rightarrow 0$ (s využitím Fatouovej lemy) dostávame dokazované tvrdenie.

Zostáva dokázať (10.2); toto tvrdenie dokážeme sporom. Nech teda existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $|\Omega_{\varepsilon,k}| \not\rightarrow 0$. Prechodom k vybranej postupnosti a prípadným zmenšením ε môžeme predpokladať $\liminf_{k \rightarrow \infty} |\Omega_{\varepsilon,k}| \geq 2\varepsilon$. Zo slabej konvergenencie ∇u_k v L^1 plyní ohraničenosť tejto postupnosti v L^1 vhodnou konštantou C_1 . Pre $C_\varepsilon := C_1/\varepsilon$ potom platí

$$|\{x : |\nabla u_k(x)| \geq C_\varepsilon\}| \leq \frac{1}{C_\varepsilon} \int_{\Omega} |\nabla u_k(x)| dx \leq \frac{C_1}{C_\varepsilon} = \varepsilon.$$

Ak teda položíme $\Omega_k = \{x \in \Omega_{\varepsilon,k} : |\nabla u_k(x)| \leq C_\varepsilon\}$, potom $\liminf_{k \rightarrow \infty} |\Omega_k| \geq \varepsilon$, takže pre $\Omega_\infty := \limsup \Omega_k = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} \Omega_k$ platí $|\Omega_\infty| \geq \varepsilon$. Prípadným zmenšením Ω_∞ o množinu miery nula môžeme predpokladať, že $f(x, \cdot, \cdot)$ je spojitá a $u_k(x) \rightarrow u(x)$ pre každé $x \in \Omega_\infty$.

Zvoľme $x \in \Omega_\infty$ pevne. Potom $x \in \Omega_k$ pre nekonečne veľa k ; prechodom k vybranej postupnosti môžeme predpokladať $x \in \Omega_k$ pre všetky k . Ďalej platí $|\nabla u_k(x)| \leq C_\varepsilon$, prechodom k vybranej postupnosti môžeme predpokladať $\nabla u_k(x) \rightarrow s$ pre vhodné $s \in \mathbb{R}^{Nn}$. Zo spojitosti $f(x, \cdot, \cdot)$ a konverencií $u_k(x)$ a $\nabla u_k(x)$ plyní teraz $f(x, u_k(x), \nabla u_k(x)) \rightarrow f(x, u(x), s)$, ale tiež $f(x, u(x), \nabla u_k(x)) \rightarrow f(x, u(x), s)$, čo je spor s $x \in \Omega_k \subset \Omega_{\varepsilon,k}$ a definíciou $\Omega_{\varepsilon,k}$. $\square$

Poznámky 10.4. (i) Podobné tvrdenie ako vo Vete 10.3 platí aj pre neohraničené oblasti Ω . Pre $\Phi(u) \leq \liminf \Phi(u_k)$ potom stačí predpokladať, že u_k, u sú funkcie, ktoré sú lokálne vo $W^{1,1}$, $u_k \rightarrow u$ v $L^1(\Omega')$, $\nabla u_k \rightharpoonup \nabla u$ v $L^1(\Omega')$ pre každú ohraničenú oblasť Ω' , ktorej uzáver je podmnožinou Ω (viď [51]).

(ii) Ak je $f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{Nn} \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá, existuje spojitá f_s a funkcia a vo Vete 10.3 je spojitá, potom sa dá tvrdenie Vety 10.3 dokázať podstatne jednoduchšie:

Nech totiž $u_k \rightharpoonup u$ vo $W^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Podobne ako v dôkaze Vety 10.3 môžeme predpokladať, že existuje konečná $L := \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(u_k)$, že $u_k \rightarrow u$ v $L^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $u_k \rightarrow u$ s.v. a $f \geq 0$.

Zvoľme $\varepsilon > 0$. Z Jegorovovej vety plynie existencia merateľnej množiny $E_\varepsilon \subset \Omega$ tak, že $|\Omega \setminus E_\varepsilon| < \varepsilon$ a $u_k \rightarrow u$ rovnomerne v E_ε . Ak položíme

$$F_\varepsilon := \{x \in \Omega : |u(x)| + |\nabla u(x)| < \frac{1}{\varepsilon}\}, \quad \Omega_\varepsilon := E_\varepsilon \cap F_\varepsilon,$$

potom $|\Omega \setminus F_\varepsilon| \rightarrow 0$ pre $\varepsilon \rightarrow 0$, takže tiež $|\Omega \setminus \Omega_\varepsilon| \rightarrow 0$ pre $\varepsilon \rightarrow 0$.

Na množine Ω_ε konverguje u_k k u rovnomerne a $u, \nabla u$ sú ohraničené, takže zo spojitosti f a f_s plynie rovnomerná konvergencia $f(x, u_k(x), \nabla u_k(x))$ k $f(x, u(x), \nabla u(x))$ a $f_s(x, u_k(x), \nabla u_k(x))$ k $f_s(x, u(x), \nabla u(x))$ na Ω_ε . Pretože tiež $\nabla u_k \rightharpoonup \nabla u$ v $L^1(\Omega, \mathbb{R}^{Nn})$, platí

$$\begin{aligned} \Phi(u_k) &= \int_{\Omega} f(x, u_k(x), \nabla u_k(x)) dx \geq \int_{\Omega_\varepsilon} f(x, u_k(x), \nabla u_k(x)) dx \\ &\geq \int_{\Omega_\varepsilon} f(x, u_k(x), \nabla u(x)) dx + \int_{\Omega_\varepsilon} f_s(x, u_k(x), \nabla u(x)) \cdot (\nabla u_k(x) - \nabla u(x)) dx \\ &\rightarrow \int_{\Omega_\varepsilon} f(x, u(x), \nabla u(x)) dx, \quad k \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

takže $L \geq \int_{\Omega_\varepsilon} f(x, u(x), \nabla u(x)) dx$. Limitným prechodom $\varepsilon \rightarrow 0$ dostávame dokazované tvrdenie (zvoľte $f_k := f\chi_{\Omega_{\varepsilon_k}}$, kde $|\Omega \setminus \Omega_{\varepsilon_k}| < 2^{-k}$, a použite Fatouovu lemu).

Dôsledok 10.5. *Za predpokladov Vety 10.3 je funkcionál Φ slabo sekvenciálne zdola polospojité vo $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ pre každé $p > 1$.*

Dôkaz. Pretože $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^N) \hookrightarrow W^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, plynie zo slabej konverencie $u_k \rightharpoonup u$ v priestore $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ slabá konvergencia $u_k \rightharpoonup u$ vo $W^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^N)$. $\square$

Veta 10.6. *Nech je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ohraničená oblasť s lipschitzovskou hranicou, $f : \Omega \times (\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{Nn}) \rightarrow \mathbb{R}$ je Carathéodoryho funkcia, $\Phi(u) = \int_{\Omega} f(x, u(x), \nabla u(x)) dx$. Nech je $f(x, u, \cdot)$ konvexná (pre s.v. x a každé u),*

$$C_1|s|^p + C_2|u|^r + a(x) \geq f(x, u, s) \geq C_0|s|^p - a(x), \quad (10.4)$$

kde C_0, C_1, C_2 sú kladné konštanty, $a \in L^1(\Omega)$, $p > 1$ a buď $p \geq n$ alebo $r \leq np/(n-p)$. Potom existuje (konečné) $\min_X \Phi$, kde $X = W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^N)$.

Dôkaz. Z rastových podmienok (10.4) a vnorenia $X \hookrightarrow L^r(\Omega, \mathbb{R}^N)$ plynie, že $\Phi(u) < \infty$ pre každé $u \in X$. Z dolného odhadu v (10.4) a Poincarého nerovnosti ďalej plynie $\Phi(u) \geq \tilde{C}_0 \|u\|_X^p - C_3$ (kde $C_3 := \int_{\Omega} a(x) dx$), takže Φ je koercívny a $A := \inf_X \Phi$ je konečné číslo. Nech $\{u_k\}$ je minimizujúca postupnosť pre Φ . Z koercivity Φ plynie ohraničenosť $\{u_k\}$; z reflexivity X plynie, že môžeme predpokladať $u_k \rightharpoonup u$ v X . Z Vety 10.3 teraz plynie $\Phi(u) \leq A$, takže musí $\Phi(u) = A = \min_X \Phi$. $\square$

Poznámky 10.7. (i) Ak $p > n$ potom je $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^N) \hookrightarrow C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, takže odhad na rast f zhora v (10.4) možno nahradiť odhadom $f(x, u, s) \leq M(|u|)(a(x) + |s|^p)$, kde $M : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ je neklesajúca funkcia. Existenciu minima Φ vo Vete 10.6 zrejme dostaneme aj pre f , ktoré nespĺňajú horný odhad v podmienke (10.4). Potom však Φ môže nadobúdať aj hodnoty $+\infty$ (a aj samotné minimum môže byť $+\infty$).

(ii) Nájdene minimum funkcionálu Φ v X je súčasne minimom Φ vo väčšom priestore $X_1 := \{u \in W^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^N) : u = 0 \text{ na } \partial\Omega\}$. Ak totiž $u \in X_1$ a $\Phi(u) < \infty$, potom z (10.4) plynie $u \in X$.

(iii) Ak je $f(x, u, s)$ konvexná v s a $f(x, \cdot, \cdot)$ je separátne spojitá v u aj v s , potom je tiež $f(x, (\cdot, \cdot))$ spojitá v (u, s) (viď [51]).

Cvičenie 10.8. Nájdite dodatočné predpoklady na funkciu f , za ktorých bude funkcionál Φ vo Vete 10.6 triedy C^1 a zistite, akú okrajovú úlohu bude minimizér u (v slabom zmysle) riešiť.

Cvičenie 10.9. Vyslovte a dokážte vetu o existencii minima funkcionálu Φ z Vety 10.6 v množine $M = \{u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^N) : u = u_0 \text{ na } \partial\Omega\}$, kde $u_0 \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ je daná funkcia.

Cvičenie 10.10. Ukážte, že ak f vo Vete 10.6 spĺňa nasledujúci silnejší dolný odhad $f(x, u, s) \geq C_0(|s|^p + |u|) - a(x)$, potom existuje minimum Φ v celom priestore $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Pre $\Phi \in C^1$ je potom príslušný minimizér slabým riešením úlohy s Neumannovou okrajovou podmienkou.

Regularita minimizérov pre $N = 1$

V tomto odstavci bez dôkazu uvedieme niekoľko známych tvrdení o regularite minimizérov v skalárnom prípade ($N = 1$); ich dôkazy presahujú rámec tohto učebného textu. Pre $N > 1$ sú už aj samotné tvrdenia o regularite dost' komplikované: za všeobecných predpokladov sa vie dokázať len parciálna regularita minimizérov, t.j. ich hladkosť na $\Omega \setminus \Sigma$, kde množina Σ je v istom zmysle malá. Takéto výsledky sú pritom vo vektorovom prípade optimálne, pretože ani pre hladký uniformne konvexný Lagrangián tvaru $f = f(\nabla u(x))$ (s ohraňenými druhými deriváciami) nemusí byť príslušný minimizér C^1 funkcia, viď [45, 54].

Nech teda $N = 1$. Veta 10.6 zaručuje existenciu minimizéra $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$, kde p je dané rastovou podmienkou (10.4). Ak $p \leq n$, potom funkcie z $W^{1,p}$ nemusia byť spojité (ani ohraňené), nájdený minimizér však bude hölderovská funkcia, ak v (10.4) navyše predpokladáme $a \in L^\infty(\Omega)$ a $r < np/(n - p)$. Takáto regularita globálneho minimizéra platí dokonca aj bez predpokladu konvexity f v premennej s a bola dokázaná v r. 1982 M. Giaquintom a E. Giustim.

Ak navyše predpokladáme, že funkcia f je dvakrát diferencovateľná v premennej s a platí

$$\begin{aligned} |f_{ss}(x, u, s)| &\leq C, \\ f_{s_i s_j}(x, u, s) \xi_i \xi_j &\geq \nu |\xi|^2, \quad \nu > 0, \\ \nu |s|^2 - C &\leq f(x, u, s) \leq C(|s|^2 + 1), \\ |f(x, u, s) - f(y, v, s)| &\leq C(1 + |s|^2)(|x - y| + |u - v|)^\sigma, \quad \sigma > 0, \end{aligned}$$

potom je príslušný globálny minimizér triedy $C^{1,\alpha}$ (ide opäť o výsledok M. Giaquintu a E. Giustiho z r. 1983).

Ak napr. f_{ss} spĺňa vyššie uvedené podmienky, f je diferencovateľná aj v u a spĺňa rastové podmienky zaručujúce diferencovateľnosť Φ vo $W^{1,2}(\Omega)$, potom sa dá vyššia hladkosť ukázať pre každý kritický bod u_0 skúmaného funkcionálu. Funkcionál Φ bude totiž triedy C^1 , takže u_0 bude slabým riešením príslušnej okrajovej úlohy. Voľbou vhodných testovacích funkcií sa dá najprv ukázať $u_0 \in W^{2,2}(\Omega)$. Použitím Greenovej vety (integrácie per partes) potom pre u_0 dostaneme lineárnu rovnicu (s ohraňenými merateľnými koeficientami tvaru $f_{s_i s_j}(x, u_0(x), \nabla u_0(x))$), na ktorú môžeme použiť výsledok o regularite slabých riešení dokázaný v r. 1957 nezávisle DeGiorgim a Nashom: dostaneme $u_0 \in C^{1,\alpha}$. Na dôkaz vyššej regularity takýchto riešení (pre hladšie f) môžeme potom použiť Schauderove odhady (viď [28]). Podobné tvrdenie o regularite kritických bodov pre $n = 1$ dokážeme v nasledujúcej kapitole; v tomto prípade je však dôkaz podstatne ľahší.

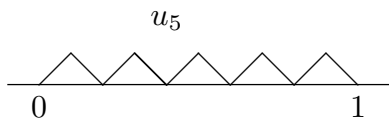
11. Polykonvexita a kvazikonvexita

V tomto paragrafe budeme (pre jednoduchost') predpokladať, že $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je ohraničená oblasť, $p > 1$, $f : \mathbb{R}^{N^n} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkcia spĺňajúca rastový predpoklad $0 \leq f(s) \leq C(1 + |s|^p)$ a $\Phi(u) = \int_{\Omega} f(\nabla u(x)) dx$ pre $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$. Bude nás zaujímať najmä slabá sekvenciálna zdola polospojitosť Φ vo $W^{1,p}(\Omega)$ pre funkcie f , ktoré nie sú konvexné.

Veta 11.1. *Nech $N = 1$. Funkcionál Φ je slabo sekvenciálne zdola polospojité vo $W^{1,p}(\Omega)$ práve vtedy, keď je f konvexná.*

Dôkaz. Ak je f konvexná, plynie slabá sekvenciálna zdola polospojitosť Φ z Dôsledku 10.5.

Nech f nie je konvexná a nech najprv $n = 1$, $\Omega = (0, 1)$. Prípadným odčítaním afinnej funkcie od f a (afinnou) substitúciou môžeme dosiahnuť, že $f(-1) = f(1) = 0$, ale $f(s) > 0$ pre $|s| < 1$ (slabá sekvenciálna zdola polospojitosť Φ sa pri takýchto úpravách f nemení).



Nech $U(x) = x$ pre $x \in [0, 1/2]$, $U(x) = 1 - x$ pre $x \in [1/2, 1]$ a nech je U dodefinovaná 1-periodicky pre $x > 1$. Položme $u_k(x) = \frac{1}{k}U(kx)$ pre $x \in [0, 1]$. Potom $u_k \rightharpoonup 0$ vo $W^{1,p}(0, 1)$ pre ľubovoľné $1 < p < \infty$, ale $0 = \Phi(u_k) < \Phi(0)$, takže Φ nie je

slabo sekvenciálne zdola polospojité.

Pre $n > 1$ je konštrukcia protipríkladu podobná (funkcie u_k budú závisieť len od jedného parametra). $\square$

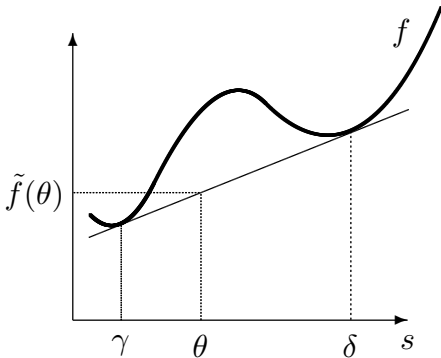
Aj keď Φ nie je slabo sekvenciálne zdola polospojité, môže nadobúdať svoje infimum na vhodných podmnožinách $W^{1,p}(\Omega)$. Uvažujme pre jednoduchost' prípad $N = n = 1$, $\Omega = (a, b)$ a označme $\mathcal{A}_p := \{u \in W^{1,p}(a, b) : u(a) = A, u(b) = B\}$. Ďalej položíme $\theta = \frac{B-A}{b-a}$,

$$\tilde{u}_0(x) := A + \theta(x - a), \quad \tilde{f}(s) := \sup\{g(s) : g \leq f \text{ a } g \text{ je konvexná}\} \quad \text{a} \quad \tilde{\Phi}(u) := \int_a^b \tilde{f}(u'(x)) dx.$$

Funkcia $\tilde{f}$ je konvexná (nazýva sa konvexná obálka f), takže existuje $L \in \mathbb{R}$ tak, že $\tilde{f}(s) \geq \tilde{f}(\theta) + L(s - \theta)$ pre všetky $s \in \mathbb{R}$, a teda

$$\tilde{\Phi}(\tilde{u}_0 + \varphi) = \int_a^b \tilde{f}(\theta + \varphi'(x)) dx \geq \tilde{\Phi}(\tilde{u}_0) + \int_a^b L\varphi'(x) dx = \tilde{\Phi}(\tilde{u}_0) \quad \text{pre všetky } \varphi \in \mathcal{D}((a, b)).$$

Vzhľadom k spojitosti $\tilde{\Phi}$ vo $W^{1,p}$ a hustote $\mathcal{D}((a, b))$ vo $W_0^{1,p}(a, b)$ je teda $\tilde{u}_0$ globálny minimizér $\tilde{\Phi}$ v $\mathcal{A}_p$.



Ak je f superlineárna (t.j. $\liminf_{|s| \rightarrow \infty} f(s)/|s| = +\infty$), potom zrejme existujú $\lambda \in [0, 1]$ a $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\theta = \lambda\gamma + (1 - \lambda)\delta, \quad \tilde{f}(\theta) = \lambda f(\gamma) + (1 - \lambda)f(\delta)$$

a funkcia

$$u_0(x) := \begin{cases} \gamma(x - a) + A & \text{ak } x \in [a, a + \lambda(b - a)], \\ \delta(x - b) + B & \text{ak } x \in [a + \lambda(b - a), b] \end{cases} \quad (11.1)$$

je globálnym minimizérom Φ v $\mathcal{A}_p$, pretože $\Phi(u_0) = \tilde{\Phi}(\tilde{u}_0)$.

Na druhú stranu, ak je napr. $f(s) = 1/(1 + s^2)$ a $A = B = 0$, potom $\tilde{f} = 0$, $\tilde{u}_0 = 0$, ale $\inf_{\mathcal{A}_p} \Phi$ sa nenadobúda.

Cvičenie 11.2. Ako vyzerá $\tilde{f}$ a minimizér u_0 v (11.1) v prípade $a = 0$, $b = 1$, $A = B = 0$ a $f(s) = (s^2 - 1)^2$? Ukážte, že funkcie u_k z dôkazu Vety 11.1 sú v tomto prípade tiež globálnymi minimizérmi Φ .

Pre $N > 1$ tvrdenie vo Vete 11.1 neplatí. Aby sme mohli popísať nutné a postačujúce podmienky pre slabú sekvenciálnu zdola polospojitosť Φ , potrebujeme si zaviesť niekoľko nových pojmov: Funkcia f sa nazýva

- **rank-1 konvexná**, ak pre každé $A, B \in \mathbb{R}^{Nn}$ platí: ak je hodnosť (rank) matice B rovná 1, potom je funkcia $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto f(A + tB)$ konvexná;
- **kvazikonvexná**, ak pre každé $A \in \mathbb{R}^{Nn}$ a $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ platí $\int_{\Omega} f(A + \nabla \varphi(x)) dx \geq \int_{\Omega} f(A) dx$;
- **polykonvexná**, ak sa $f(A)$ dá napísať ako konvexná funkcia minorov matice A .

Dá sa ukázať, že za našich predpokladov je kvazikonvexita nutná a postačujúca podmienka pre slabú sekvenciálnu zdola polospojitosť Φ vo $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Problém tejto podmienky spočíva v tom, že je len ťažko overiteľná. Platí však, že z konvexity f plynie polykonvexita, z polykonvexity kvazikonvexita a z kvazikonvexity rank-1 konvexita, takže polykonvexita je postačujúca a rank-1 konvexita nutná podmienka pre slabú sekvenciálnu zdola polospojitosť Φ . Pre $N = 1$ všetky spomenuté pojmy konvexity splývajú, pre všeobecné $N, n \geq 2$ však žiadne dva z nich nie sú totožné (to, že z rank-1 konvexity nevyplýva kvazikonvexita, bol skoro 40 rokov otvorený problém a bol vyriešený pre $n \geq 3$ a $N \geq 2$ v [53]; príslušný protipríklad je pritom veľmi jednoduchý: ide o polynóm 4. stupňa).

Ak je f triedy C^2 , potom konvexita f je ekvivalentná s tzv. Legendrovou podmienkou

$$\sum_{i,j=1}^n \sum_{\alpha,\beta=1}^N f_{a_{\alpha}^i a_{\beta}^j}(A) \zeta_i^{\alpha} \zeta_j^{\beta} \geq 0 \quad \text{pre všetky } \zeta \in \mathbb{R}^{Nn}$$

a rank-1 konvexita s tzv. Legendre-Hadamardovou podmienkou

$$\sum_{i,j=1}^n \sum_{\alpha,\beta=1}^N f_{a_{\alpha}^i a_{\beta}^j}(A) \xi^{\alpha} \xi^{\beta} \eta_i \eta_j \geq 0 \quad \text{pre všetky } \xi \in \mathbb{R}^N, \eta \in \mathbb{R}^n.$$

Príklad 11.3. Nech $N = n = 2$. Ukážme, že z polykonvexity plynie kvazikonvexita.

Nech $f(A) = g(A, \det A)$, kde g je konvexná. Zvoľme A pevne. Existuje afinná funkcia $L \leq g$ tak, že $g(A, \det A) = L(A, \det A)$. Stačí zrejme dokázať $\int_{\Omega} L(A + \nabla \varphi, \det(A + \nabla \varphi)) dx = \int_{\Omega} L(A, \det A) dx$ pre $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^2)$. To však plynie z Greenovej vety, pretože napr. $\int_{\Omega} \det(\nabla \psi) dx = \int_{\Omega} [\partial_1(\psi_1 \psi_{2,2}) - \partial_2(\psi_{2,1} \psi_1)] dx$ závisí len na hodnotách, ktoré ψ nadobúda na hranici Ω .

Príklad 11.4. Ukážme, že kvazikonvexita je nutná pre slabú sekvenciálnu zdola polospojitosť.

Nech $\Omega = (0, 1)^n$ a $\int_{\Omega} f(A + \nabla \varphi) dx < \int_{\Omega} f(A) dx$, kde $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Nech je u lineárna, $\nabla u = A$. Položme $u_j(x) = u(x) + \frac{1}{j} \tilde{\varphi}(jx)$, kde $\tilde{\varphi}$ je funkcia φ periodicky rozšírená na $\mathbb{R}^n$. Potom $u_j \rightharpoonup u$ vo $W^{1,p}$, ale $\lim_{j \rightarrow \infty} \Phi(u_j) = \Phi(u + \varphi) < \Phi(u)$ (dokážte!).

Príklad 11.5. Nech je f kvadratická forma. Ukážme, že potom je f kvazikonvexná práve vtedy, keď je rank-1 konvexná. (Pre $n = N = 2$ tiež platí, že kvadratická forma f je rank-1 konvexná práve vtedy, keď je polykonvexná.)

Forma $f(\xi) = a_{\alpha\beta}^{ij} \xi_i^{\alpha} \xi_j^{\beta}$ je rank-1 konvexná práve vtedy, keď $f(\xi) \geq 0$ pre všetky ξ hodnosti 1, t.j. $\xi_i^{\alpha} = \lambda_i \eta^{\alpha}$. Z Greenovej vety plynie $\int_{\Omega} f(A + \nabla \varphi) dx = \int_{\Omega} f(A) dx + \int_{\mathbb{R}^n} f(\nabla \varphi) dx$; s použitím Fourierovej transformácie máme $\int_{\mathbb{R}^n} f(\nabla \varphi) dx = \int_{\mathbb{R}^n} a_{\alpha\beta}^{ij} \partial_j \varphi^{\beta} \partial_i \varphi^{\alpha} dx = c \int_{\mathbb{R}^n} a_{\alpha\beta}^{ij} \xi_i \xi_j \hat{\varphi}^{\alpha} \bar{\hat{\varphi}}^{\beta} d\xi = c \int_{\mathbb{R}^n} a_{\alpha\beta}^{ij} \xi_i \xi_j (\operatorname{Re} \hat{\varphi}^{\alpha} \operatorname{Re} \hat{\varphi}^{\beta} + \operatorname{Im} \hat{\varphi}^{\alpha} \operatorname{Im} \hat{\varphi}^{\beta}) d\xi \geq 0$.

V ďalšom dokážeme priamo (bez pojmu kvazikonvexity), že polykonvexita f implikuje slabú sekvenciálnu zdola polospojitosť Φ a ukážeme si tiež typickú aplikáciu takéhoto výsledku.

Pre $u_k, u \in L^1(\Omega)$ budeme hovoriť, že $u_k \rightharpoonup^* u$ v $\mathcal{M}(\Omega)$ (slabá* konvergencia v mierach), ak pre každú $\varphi \in C_c(\Omega)$ platí $\int_{\Omega} u_k \varphi dx \rightarrow \int_{\Omega} u \varphi dx$. (Táto terminológia plynie z Rieszovej vety o reprezentácii duálu k $C_c(\Omega)$ prostredníctvom priestoru borelovských mier.)

Veta 11.6. *Nech je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvorená a ohraničená. Nech je $G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ konvexná a zdola polospojité, $u_k, u \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$, $u_k \rightharpoonup^* u$ v $\mathcal{M}(\Omega)$. Potom*

$$\int_{\Omega} G(u) dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} G(u_k) dx.$$

Dôkaz. Označme $u_{\varepsilon} = R_{\varepsilon}u$ a $u_{k,\varepsilon} = R_{\varepsilon}u_k$, kde R_{ε} je operátor regularizácie (vid' (17.4)). Potom platí $u_{\varepsilon} \in C^{\infty}(\bar{\Omega})$, $u_{\varepsilon} \rightarrow u$ v $L^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ a s.v. pre $\varepsilon \rightarrow 0+$ a podobne pre funkcie u_k .

Označme $C = \int_{\Omega} G(u) dx$ a nech $C' < C$. Zvoľme $K \subset \Omega$ kompaktnú tak, aby $\int_K G(u) dx > C'$. Pretože $u_{\varepsilon} \rightarrow u$ s.v. a G je zdola polospojité, použitím Fatouovej lemy dostávame

$$\int_K G(u) dx \leq \int_K \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} G(u_{\varepsilon}) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_K G(u_{\varepsilon}) dx,$$

takže existuje $\varepsilon < \frac{1}{2} \text{dist}(\partial\Omega, K)$ tak, aby $\int_K G(u_{\varepsilon}) dx > C'$.

Zo slabej* konvergencie $u_k \rightarrow u$ v $\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ plynie $u_{k,\varepsilon}(x) \rightarrow u_{\varepsilon}(x)$ pre všetky x , takže s použitím slabej zdola polospojitosti G , Fatouovej lemy, Jensenovej nerovnosti, Fubiniho vety a nezápornosti G postupne dostávame

$$\begin{aligned} C' &< \int_K G(u_{\varepsilon}) dx \leq \int_K \liminf_{k \rightarrow \infty} G(u_{k,\varepsilon}) dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_K G(u_{k,\varepsilon}) dx \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_K \left(\int_{\mathbb{R}^n} G(u_k(y)) \omega_{\varepsilon}(x-y) dy \right) dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} G(u_k) dx. \end{aligned}$$

Vzhľadom k ľubovoľnosti $C' < C$ odtiaľ plynie $\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} G(u_k) dx \geq C = \int_{\Omega} G(u) dx$. $\square$

Veta 11.7. *Nech je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ohraničená oblasť s lipschitzovskou hranicou. Nech $u_j \rightharpoonup u$ vo $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, nech je k prirodzené, $k \leq p$ a nech $J_k(A)$ je pevne zvolený subdeterminant matice $A \in \mathbb{R}^{n \times N}$ rádu k . Potom $J_k(\nabla u_j) \rightharpoonup^* J_k(\nabla u)$ v $\mathcal{M}(\Omega)$.*

Dôkaz. Indukciou. Pre $k = 1$ je tvrdenie zrejmé. Nech $1 < k \leq p$ a nech tvrdenie platí pre $k-1$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $J_k(A)$ je hlavným minorom matice A rádu k , t.j.

$$J_k(A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix} = \sum_{l=1}^k a_{1l} X^{1l}(A),$$

kde

$$X^{1l}(A) = (-1)^{l+1} \det \begin{pmatrix} a_{21} & \dots & \hat{a}_{2l} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & \hat{a}_{kl} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

(strieškou je označený vynechaný stĺpec). Pre $v \in C^{\infty}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ sa indukciou ľahko ukáže

$$\sum_{l=1}^k [X^{1l}(\nabla v)]_{,l} = 0, \quad (11.2)$$

kde $f_{,l}$ označuje deriváciu f podľa x_l (napr. pre $k = n = N = 2$ je $X^{11} = v_{2,2}$, $X^{12} = -v_{2,1}$ a $\sum_{l=1}^2 [X^{1l}(\nabla v)]_{,l} = v_{2,21} - v_{2,12} = 0$). Ak rovnosť (11.2) vynásobíme funkciou $v_1 \Phi$, kde $\Phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, zintegrujeme cez Ω a použijeme Greenovu vetu, dostaneme

$$\int_{\Omega} \sum_{l=1}^k X^{1l}(\nabla v) (v_1 \Phi)_{,l} dx = 0. \quad (11.3)$$

Ak teraz $v \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, potom existujú $v_j \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ tak, že $v_j \rightarrow v$ vo $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Limitným prechodom v (11.3) (pre funkcie v_j) dostaneme, že (11.3) platí aj pre $v \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Pre takúto funkciu v a $\Phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ teda platí

$$\int_{\Omega} J_k(\nabla v) \Phi \, dx = \int_{\Omega} \sum_{l=1}^k v_{1,l} X^{1l}(\nabla v) \Phi \, dx = - \int_{\Omega} \sum_{l=1}^k X^{1l}(\nabla v) v_{1,l} \Phi_{,l} \, dx. \quad (11.4)$$

Pretože u_j sú ohraničené vo $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, je postupnosť funkcií $X^{1l}(\nabla u_j)$ ohraničená v $L^{p'}(\Omega)$ pre $p' = p/(p-1)$. Ďalej z kompaktnosti vnorenia $W^{1,p} \hookrightarrow L^p$ plynie, že $(u_j)_1 \Phi_{,l} \rightarrow u_1 \Phi_{,l}$ v $L^p(\Omega)$ (kde $u_j = ((u_j)_1, \dots, (u_j)_N)$). Nech ďalej $(u_1 \Phi_{,l})_\varepsilon \in \mathcal{D}(\Omega)$, $(u_1 \Phi_{,l})_\varepsilon \rightarrow u_1 \Phi_{,l}$ v $L^p(\Omega)$ pre $\varepsilon \rightarrow 0+$. Pretože tiež $X^{1l}(\nabla u_j) \rightharpoonup^* X^{1l}(\nabla u)$ v $\mathcal{M}(\Omega)$, dostávame pre $j \rightarrow \infty$ a $\varepsilon \rightarrow 0+$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} X^{1l}(\nabla u_j) (u_j)_1 \Phi_{,l} \, dx - \int_{\Omega} X^{1l}(\nabla u) u_1 \Phi_{,l} \, dx \\ &= \int_{\Omega} \left\{ X^{1l}(\nabla u_j) [(u_j)_1 \Phi_{,l} - u_1 \Phi_{,l}] + (u_1 \Phi_{,l} - (u_1 \Phi_{,l})_\varepsilon) \right. \\ & \quad \left. + [X^{1l}(\nabla u_j) - X^{1l}(\nabla u)] (u_1 \Phi_{,l})_\varepsilon + X^{1l}(\nabla u) [(u_1 \Phi_{,l})_\varepsilon - u_1 \Phi_{,l}] \right\} dx \rightarrow 0, \end{aligned}$$

odkiaľ

$$\int_{\Omega} J_k(\nabla u_j) \Phi \, dx \rightarrow \int_{\Omega} J_k(\nabla u) \Phi \, dx \quad (11.5)$$

pre každé $\Phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Ak teraz využijeme hustotu $\mathcal{D}(\Omega)$ v $C_c(\Omega)$ a ohraničenosť $J_k(\nabla u_j)$ v $L^1(\Omega)$, dostaneme, že (11.5) platí aj pre $\Phi \in C_c(\Omega)$. $\square$

Príklad 11.8. (Nelineárna pružnosť) Nech $N = n = 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je ohraničená s lipschitzovskou hranicou, $u_0 : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\lambda > 0$, $f(A) = |A|^3 + g(\det A)$, kde $g(t) = t^{-\lambda}$ pre $t > 0$, $g(t) = +\infty$ pre $t \leq 0$, $\Phi(u) = \int_{\Omega} f(\nabla u) \, dx$,

$$\mathcal{A} = \{u \in W^{1,3}(\Omega, \mathbb{R}^3) : u = u_0 \text{ na } \partial\Omega, \int_{\Omega} f(\nabla u) \, dx < \infty\}.$$

Ukážeme, že ak $\mathcal{A} \neq \emptyset$, potom existuje $\min\{\Phi(u) : u \in \mathcal{A}\}$.

Nech je $\{u_j\} \subset \mathcal{A}$ minimizujúca postupnosť. Z koercivity Φ plynie, že $\{u_j\}$ je ohraničená vo $W^{1,3}$, takže môžeme predpokladať $u_j \rightharpoonup u$ vo $W^{1,3}$. Z Vety 11.7 plynie $\nabla u_j \rightharpoonup^* \nabla u$ a $\det(\nabla u_j) \rightharpoonup^* \det(\nabla u)$ v $\mathcal{M}(\Omega)$. Funkcia f je zrejme polykonvexná, $f(\nabla u) = G(\nabla u, \det(\nabla u))$, kde $G(A, t) = |A|^3 + g(t)$ je konvexná a zdola polospojité. Z Vety 11.6 plynie $\Phi(u) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \Phi(u_j) = \inf\{\Phi(v) : v \in \mathcal{A}\} < \infty$, takže $u \in \mathcal{A}$ je globálny minimizér Φ v $\mathcal{A}$.

Cvičenie 11.9. Nech $N = n = 2$, $\Omega = (0, a)^2$, $0 < a < 1$, $\Phi(u) = \int_{\Omega} \det \nabla u \, dx \, dy$ a

$$u_k(x, y) = \frac{1}{\sqrt{k}} (1 - y)^k (\sin kx, \cos kx).$$

Ukážte, že $u_k \rightharpoonup 0$ vo $W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^2)$, ale $\liminf_{k \rightarrow \infty} \Phi(u_k) = -\frac{a}{2} < 0 = \Phi(0)$. Ďalej dokážte, že funkcionál $\tilde{\Phi}(u) = \int_{\Omega} |\det \nabla u| \, dx \, dy$ je slabo sekvenciálne zdola polospojité vo $W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^2)$.

12. Koncentrovaná kompaktnosť

Mnohé (nielen) fyzikálne problémy vedú k minimalizácii funkcionálov Φ , v ktorých je hľadaná funkcia definovaná na celom $\mathbb{R}^n$. Pokiaľ je takýto funkcionál translačne invariantný (t.j. $\Phi(u) = \Phi(u(\cdot + x_0))$ pre ľubovoľné $x_0 \in \mathbb{R}^n$), u_k je minimizujúca postupnosť a $x_k \in \mathbb{R}^n$, potom je postupnosť $\tilde{u}_k(x) = u_k(x + x_k)$ tiež minimizujúca, a teda nemôžeme očakávať, že postupnosť u_k bude relatívne kompaktná. Postupnosť $u_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ nazveme **relatívne kompaktnou až na translácie** (v topologickom priestore T), ak existujú $x_k \in \mathbb{R}^n$ tak, že postupnosť $u_k(\cdot + x_k)$ je relatívne kompaktná (v T).

Príklad 12.1. Nech $a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá a kladná, $a(x) \rightarrow a_\infty > 0$ pre $|x| \rightarrow \infty$, $p > 2$. Skúsme hľadať (netriviálne) riešenia diferenciálnej rovnice $-\Delta u + a(x)u = u|u|^{p-2}$ v $\mathbb{R}^n$ (kde $p < 2n/(n-2)$ pre $n > 2$) pomocou hľadania minimizéra funkcionálu $\Phi(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} [|\nabla u|^2 + a(x)u^2] dx$ na množine $M = \{u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} |u|^p dx = 1\}$ (viď analogický Príklad 6.6 a Cvičenie 6.7). Položme $\Phi_\infty(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} [|\nabla u|^2 + a_\infty u^2] dx$ a označme $I = \inf_M \Phi$, $I_\infty = \inf_M \Phi_\infty$. Dá sa ukázať (viď [51]), že podmienka $I < I_\infty$ je v tomto prípade nutná a postačujúca pre relatívnu kompaktnosť (ľubovoľnej) minimizujúcej postupnosti $\{u_k\}$ funkcionálu Φ v M a je tiež postačujúca pre existenciu hľadaného netriviálneho riešenia (netriviálne riešenie však existuje napr. aj pre $a(x) \equiv a_\infty$). My si dokážeme len nutnosť tejto podmienky pre relatívnu kompaktnosť minimizujúcich postupností.

Nech teda $I \geq I_\infty$ (čo napr. triviálne platí, ak $a \geq a_\infty$) a nech u_k je minimizujúca postupnosť pre Φ_∞ (na množine M). Vzhľadom na translačnú invarianciu Φ_∞ je $\tilde{u}_k(x) = u_k(x + x_k)$ minimizujúca postupnosť pre Φ_∞ pre každé $x_k \in \mathbb{R}^n$. Zvoľme teraz k pevné a uvažujme postupnosť bodov $y_m \in \mathbb{R}^n$, $|y_m| \rightarrow \infty$. Pre dané $\varepsilon > 0$ existujú kompaktné množiny K_a a K_u tak, že $|a(x) - a_\infty| < \varepsilon$ pre $x \notin K_a$, $\int_{\mathbb{R}^n \setminus K_u} u_k^2(x) dx < \varepsilon$. Naviac existuje A tak, že $|a(x) - a_\infty| \leq A$ pre všetky $x \in \mathbb{R}^n$. Zvoľme m tak veľké, aby $(y_m + K_a) \cap K_u = \emptyset$ a položme $x_k := y_m$. Pre $\tilde{u}_k(x) := u_k(x + x_k)$ bude platiť

$$\begin{aligned} |\Phi(\tilde{u}_k) - \Phi_\infty(\tilde{u}_k)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (a(x) - a_\infty) \tilde{u}_k^2(x) dx \right| = \left| \int_{K_a} \dots + \int_{\mathbb{R}^n \setminus K_a} \dots \right| \\ &\leq \int_{K_a} A u_k^2(x + x_k) dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus K_a} \varepsilon \tilde{u}_k^2(x) dx \\ &\leq A \int_{x_k + K_a} u_k^2(x) dx + \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} u_k^2(x) dx \leq \varepsilon(A + \|u_k\|_2^2), \end{aligned}$$

pretože $(x_k + K_a) \subset \mathbb{R}^n \setminus K_u$. Vhodnou voľbou ε teda môžeme dosiahnuť $|\Phi(\tilde{u}_k) - \Phi_\infty(\tilde{u}_k)| < 1/k$, odkiaľ plynie vzhľadom k $I \geq I_\infty$, že postupnosť $\tilde{u}_k$ je minimizujúca pre Φ (a tiež $I = I_\infty$). Keďže (prípadným zväčšením m pri voľbe x_k môžeme dosiahnuť) $\tilde{u}_k \rightarrow 0$ v $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, postupnosť $\tilde{u}_k$ nie je relatívne kompaktná v $M \subset L^p(\mathbb{R}^n)$.

Uvažujme teraz funkcionál

$$\Phi(\rho) = \int_{\mathbb{R}^3} j(\rho(x)) dx - \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{\rho(x)\rho(y)}{|x-y|} dx dy,$$

ktorý sa vyskytuje v astrofyzike, v teórii rotujúcich hviezd: prvý z integrálov zodpovedá vnútornej energii, druhý, dvojný, gravitačnej energii, ρ je hustota. Budeme predpokladať, že $j(t) = \mu|t|^p$, kde $p > 4/3$, a budeme minimalizovať Φ na množine

$$\mathcal{A}_\lambda = \{\rho \in L^1(\mathbb{R}^3) \cap L^p(\mathbb{R}^3) : \rho \geq 0, \int_{\mathbb{R}^3} \rho = \lambda\},$$

kde $\lambda > 0$ reprezentuje hmotnosť hviezdy. Ukážeme, že existuje minimizér Φ na $\mathcal{A}_\lambda$ a že každá minimizujúca postupnosť je kompaktná až na translácie v $L^1(\mathbb{R}^3) \cap L^p(\mathbb{R}^3)$.

Nižšie uvedený prístup k tomuto špeciálnemu problému sa dá použiť aj pre veľa iných funkcionálov z kvantovej a štatistickej fyziky (viď napr. [41]) prípadne pre iné úlohy; napr. na dôkaz existencie extrémálnych funkcií pre Sobolevove vnorenie $W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$, kde $kp < n$, $p > 1$, $1/q = 1/p - k/n$ (t.j. funkcií, ktoré minimalizujú hodnotu $\|u\|_{k,p}/\|u\|_q$).

Pri vyšetovaní vlastností funkcionálu Φ budeme často používať Vety 17.2, 17.3 ako aj vlastnosti Rieszovho potenciálu (vid' Dodatok).

Pre $\rho \in \mathcal{A}_\lambda$ s využitím (17.2) a (17.3) dostávame

$$\Phi(\rho) \geq \mu \|\rho\|_p^p - C \|\rho\|_{6/5}^2 \geq \mu \|\rho\|_p^p - C \|\rho\|_1^{2/3} \|\rho\|_{4/3}^{4/3} = \mu \|\rho\|_p^p - C \lambda^{2/3} \|\rho\|_{4/3}^{4/3}. \quad (12.1)$$

Pretože podľa (17.3) platí $\|\rho\|_{4/3} \leq \lambda^{1-t} \|\rho\|_p^t$ pre vhodné $t \in (0, 1)$, plynie z (12.1) koercivita Φ v $L^p(\mathbb{R}^3)$ na množine $\mathcal{A}_\lambda$. Každá minimizujúca postupnosť v množine $\mathcal{A}_\lambda$ musí byť teda ohraničená v $L^1(\mathbb{R}^3)$ aj v $L^p(\mathbb{R}^3)$. Relatívnu kompaktnosť minimizujúcich postupností dokážeme pomocou nasledujúcich dvoch tvrdení.

Tvrdenie 12.2. *Nech*

$$E_\lambda := \inf\{\Phi(\rho) : \rho \in \mathcal{A}_\lambda\}.$$

Potom

$$\text{pre každé } \alpha \in (0, \lambda) \quad \text{platí} \quad E_\lambda < E_\alpha + E_{\lambda-\alpha}. \quad (12.2)$$

Dôkaz. Nech $\rho \in \mathcal{A}_\lambda$. Voľbou $\rho_\varepsilon = \varepsilon \chi_{B^\varepsilon}$, kde $B^\varepsilon \subset \mathbb{R}^3$ je guľa so stredom v počiatku a s vlastnosťou $|B^\varepsilon| = \lambda/\varepsilon$, dostávame

$$\Phi(\rho_\varepsilon) \leq \mu \varepsilon^p |B^\varepsilon| - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \iint_{B^\varepsilon \times B^\varepsilon} \frac{1}{|x-y|} dx dy \leq \lambda \mu \varepsilon^{p-1} - c \varepsilon^2 \left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)^{5/3} < 0$$

pre malé ε , takže

$$E_\lambda < 0. \quad (12.3)$$

Nech je ďalej $\theta \in (0, 1)$ a zvolíme $\varepsilon > 0$. Potom existuje $\rho \in \mathcal{A}_\lambda$ tak, že $\Phi(\rho) > E_\lambda - \varepsilon$. Pre funkciu $\rho_\theta(x) = \rho(x/\theta^{1/3})$ potom platí $\rho_\theta \in \mathcal{A}_{\theta\lambda}$ a použitím vety o substitúcii dostávame

$$\begin{aligned} E_{\theta\lambda} &\geq \Phi(\rho_\theta) = \theta \int_{\mathbb{R}^3} \mu \rho^p dx - \theta^{5/3} \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{\rho(x)\rho(y)}{|x-y|} dx dy \\ &> \theta^{5/3} \Phi(\rho) > \theta^{5/3} (E_\lambda - \varepsilon), \end{aligned}$$

takže

$$E_{\theta\lambda} \geq \theta^{5/3} E_\lambda. \quad (12.4)$$

Z (12.4) a (12.3) plynie

$$E_{\theta\lambda} > \theta E_\lambda \quad \text{pre každé } \theta \in (0, 1). \quad (12.5)$$

Na dôkaz (12.2) zrejme stačí predpokladať $\alpha \geq \lambda/2$. Opätovným použitím (12.5) dostávame

$$E_\lambda < \frac{\lambda}{\alpha} E_\alpha = E_\alpha + \frac{\lambda - \alpha}{\alpha} E_\alpha \leq E_\alpha + E_{\lambda-\alpha},$$

odkiaľ plynie (12.2). $\square$

Lema 12.3. (O koncentrovanej kompaktnosti) *Nech μ_k je postupnosť pravdepodobnostných mier na $\mathbb{R}^n$ (t.j. μ_k je borelovská, nezáporná a $\int_{\mathbb{R}^n} d\mu_k = 1$). Potom existuje podpostupnosť (ktorú opäť označíme μ_k) tak, že pre ňu platí práve jedna z nasledujúcich podmienok:*

- (i) *existujú $x_k \in \mathbb{R}^n$ tak, že pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $R > 0$ tak, že $\int_{B_R(x_k)} d\mu_k \geq 1 - \varepsilon$ pre všetky k , kde $B_R(x_k) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_k| < R\}$,*
- (ii) *pre každé $R < \infty$ platí $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{B_R(x)} d\mu_k \rightarrow 0$ pre $k \rightarrow \infty$*
- (iii) *existuje $\theta \in (0, 1)$ tak, že pre každé $\varepsilon > 0$ existujú $x_k \in \mathbb{R}^n$ a $R_0, R_k > 0$, $R_k \rightarrow \infty$ tak, že*

$$\left| \int_{B_{R_0}(x_k)} d\mu_k - \theta \right| \leq \varepsilon \quad \text{a} \quad \left| \int_{B_{R_k}(x_k)} d\mu_k - \theta \right| \leq \varepsilon. \quad (12.6)$$

Dôkaz. Pre $r > 0$ položíme

$$Q_k(r) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_{B_r(x)} d\mu_k \right).$$

Funkcia Q_k je nezáporná a neklesajúca, $Q_k(R) \rightarrow 1$ pre $R \rightarrow \infty$. Postupnosť Q_k je relatívne kompaktná v $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+)$ (viď Vetu 17.11), takže existuje podpostupnosť (ktorú opäť označíme Q_k) tak, že $Q_k(x) \rightarrow Q(x)$ s.v. Limitná funkcia Q je zrejme neklesajúca, takže existuje

$$\theta := \lim_{R \rightarrow \infty} Q(R), \quad \theta \in [0, 1].$$

Ak $\theta = 0$, potom zrejme nastáva prípad (ii). Ukážeme, že pre $\theta = 1$ resp. $\theta \in (0, 1)$ nastáva prípad (i) resp. (iii).

Nech teda $\theta = 1$. Potom existuje R_0 tak, že $Q_k(R_0) \rightarrow Q(R_0) > \frac{1}{2}$. Zvoľme x_k tak, aby

$$Q_k(R_0) < \int_{B_{R_0}(x_k)} d\mu_k + \frac{1}{k}.$$

Pre dané $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ zvoľme R' tak, aby $Q_k(R') \rightarrow Q(R') > 1 - \varepsilon$ a nech y_k je také, že

$$Q_k(R') < \int_{B_{R'}(y_k)} d\mu_k + \frac{1}{k}.$$

Pre k veľké potom platí

$$\int_{B_{R'}(y_k)} d\mu_k + \int_{B_{R_0}(x_k)} d\mu_k > 1 = \int_{\mathbb{R}^n} d\mu_k,$$

takže $B_{R'}(y_k) \cap B_{R_0}(x_k) \neq \emptyset$ a $B_{R'}(y_k) \subset B_{2R'+R_0}(x_k)$. V prípade (i) teda stačí zvoliť $R = 2R' + R_0$.

Nech konečne $\theta \in (0, 1)$. K danému $\varepsilon > 0$ zvoľme R_0 a postupnosť x_k (závislú na ε aj R_0) tak, aby (pre veľké k platilo)

$$\int_{B_{R_0}(x_k)} d\mu_k > \theta - \varepsilon.$$

Označme ďalej $\alpha_k = \sup\{R : Q_k(R) < \theta + \varepsilon\}$. Keby $\liminf \alpha_k < \infty$, potom pre $R \geq \tilde{R} > \liminf \alpha_k$ (a vybranú postupnosť) dostávame $Q_k(R) \geq \theta + \varepsilon$, takže nemôže platiť $Q_k(R) \rightarrow Q(R) \leq \theta$, spor. Platí teda $\alpha_k \rightarrow \infty$, takže (pre k veľké) existujú $R_k \rightarrow \infty$ tak, že $Q_k(R_0) \leq Q_k(R_k) < \theta + \varepsilon$. Celkove dostávame

$$\theta - \varepsilon < \int_{B_{R_0}(x_k)} d\mu_k \leq \int_{B_{R_k}(x_k)} d\mu_k \leq Q_k(R_k) < \theta + \varepsilon,$$

odkiaľ plynie (iii). $\square$

Poznámka 12.4. Prípad (i) v Leme 12.3 zodpovedá relatívnej kompaktnosti až na translácie. Prípadu (iii) sa hovorí dichotómia, prípad (ii) nastáva napr. pre miery $d\mu_k = (\pi k)^{-n/2} e^{-|x|^2/k} dx$.

Pokračujme v dôkaze kompaktnosti minimizujúcich postupností funkcionálu Φ . Nech je teda $\{\rho_k\} \subset \mathcal{A}_\lambda$ minimizujúca postupnosť a položíme $d\mu_k = (\rho_k/\lambda)dx$. Podľa Lemy 12.3 existuje vybraná postupnosť, pre ktorú platí jedna z uvedených alternatív (i),(ii) a (iii). Najprv sporom dokážeme, že v našom prípade nastáva alternatíva (i).

Predpokladajme teda najskôr, že nastáva alternatíva (iii), t.j. existuje $\theta \in (0, 1)$ tak, že pre každé $\varepsilon > 0$ existujú $x_k \in \mathbb{R}^n$ a $R_0, R_k > 0$, $R_k \rightarrow \infty$ tak, že platí (12.6). Položme $\rho_{1,k} = \rho_k \chi_{B_{R_0}(x_k)}$, $\rho_{2,k} = \rho_k \chi_{B_{R_k}^C(x_k)}$ a $\rho_{3,k} = \rho_k - (\rho_{1,k} + \rho_{2,k})$, kde B^C označuje doplnok množiny B v $\mathbb{R}^3$. Potom platí

$$\Phi(\rho_k) = \Phi(\rho_{1,k}) + \Phi(\rho_{2,k}) + I - II - III,$$

kde

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbb{R}^3} \mu \rho_{3,k}^p dx \geq 0, \\ II &= \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{2\rho_{1,k}(x)\rho_{2,k}(y)}{|x-y|} dx dy \leq \frac{1}{R_k - R_0} \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \rho_{1,k}(x)\rho_{2,k}(y) dx dy \leq \frac{\lambda^2}{R_k - R_0} \rightarrow 0, \\ III &= \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{(2\rho_{1,k} + 2\rho_{2,k} + \rho_{3,k})(x)\rho_{3,k}(y)}{|x-y|} dx dy \leq \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{2\rho_k(x)\rho_{3,k}(y)}{|x-y|} dx dy \\ &\leq C_1 \|\rho_k\|_{6/5} \|\rho_{3,k}\|_{6/5} \leq C_2 \|\rho_{3,k}\|_1^{1/3} \|\rho_{3,k}\|_{4/3}^{2/3} \leq C_3 \|\rho_{3,k}\|_1^{1/3} \leq C_4 \varepsilon^{1/3}, \end{aligned}$$

kde sme použili (17.2), ohraňičenosť ρ_k v $L^1 \cap L^p$ a (12.6). Odtiaľ súhrnom dostávame odhad

$$E_\lambda = \lim_k \Phi(\rho_k) \geq \limsup_k (E_{\alpha_k \lambda} + E_{\beta_k \lambda}) - C_4 \varepsilon^{1/3}, \quad (12.7)$$

kde $\alpha_k = \|\rho_{1,k}\|_1/\lambda$ a $\beta_k = \|\rho_{2,k}\|_1/\lambda$. Môžeme predpokladať $\alpha_k \rightarrow \alpha$, $\beta_k \rightarrow \beta$. Z (12.6) plynie $|\alpha - \theta| \leq \varepsilon$ a $|\beta - (1 - \theta)| \leq \varepsilon$. Pretože funkcia $\lambda \mapsto E_\lambda$ je spojitá (dokážte!), plynie limitným prechodom $\varepsilon \rightarrow 0+$ z (12.7) nerovnosť

$$E_\lambda \geq E_{\theta \lambda} + E_{(1-\theta)\lambda},$$

čo je spor s (12.2).

Predpokladajme teraz alternatívu (ii), t.j. $\tilde{Q}_k(R) := \sup_x \int_{B_R(x)} \rho_k dx \rightarrow 0$ pre ľubovoľné $R > 0$. Potom platí

$$\iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{\rho_k(x)\rho_k(y)}{|x-y|} dx dy = \int_{\mathbb{R}^3} \rho_k(x) \left(\int_{A_I \cup A_{II} \cup A_{III}} \frac{\rho_k(y)}{|x-y|} dy \right) dx = I + II + III,$$

kde

$$\begin{aligned} A_I &= \{y : |x-y| \leq \delta\}, \\ A_{II} &= \{y : \delta < |x-y| < M\}, \\ A_{III} &= \{y : |x-y| \geq M\}, \\ I &\leq \delta^{1/2} \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{\rho_k(x)\rho_k(y)}{|x-y|^{3/2}} dx dy \leq \tilde{C}_1 \delta^{1/2} \|\rho_k\|_{4/3}^2 \leq C_1 \delta^{1/2}, \\ II &\leq \frac{1}{\delta} \int_{\mathbb{R}^3} \rho_k(x) \left(\sup_x \int_{B_M(x)} \rho_k(y) dy \right) dx = \frac{\tilde{Q}_k(M)}{\delta} \|\rho_k\|_1 \rightarrow 0, \\ III &\leq \frac{1}{M} \|\rho_k\|_1^2. \end{aligned}$$

Odtiaľ dostávame

$$\iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{\rho_k(x)\rho_k(y)}{|x-y|} dx dy \rightarrow 0,$$

takže $E_\lambda \geq 0$, čo je spor s (12.3).

Platí teda alternatíva (i), takže existujú $x_k \in \mathbb{R}^n$ tak, že pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $R > 0$ s vlastnosťou $\int_{B_R(x_k)} \rho_k dx \geq \lambda - \varepsilon$. Položme $\tilde{\rho}_k(x) = \rho_k(x + x_k)$. Potom platí

$$\int_{B_R} \tilde{\rho}_k dx \geq \lambda - \varepsilon, \quad \int_{B_R^C} \tilde{\rho}_k dx \leq \varepsilon. \quad (12.8)$$

Ukážeme, že z postupnosti funkcií $\tilde{\rho}_k$ sa dá vybrať podpostupnosť, ktorá konverguje v L^1 aj v L^p k minimizéru funkcionálu Φ na množine $\mathcal{A}_\lambda$.

Z ohraničenosti $\tilde{\rho}_k$ v $L^p(\mathbb{R}^3)$ a reflexivity $L^p(\mathbb{R}^3)$ plynie, že môžeme predpokladať $\tilde{\rho}_k \rightarrow \tilde{\rho}$ slabo v $L^p(\mathbb{R}^3)$. Pretože $\{u \in L^p(\mathbb{R}^3) : u \geq 0\}$ je konvexná a uzavretá, je tiež slabo uzavretá, takže $\tilde{\rho} \geq 0$. Zo slabej konvergenzie $\tilde{\rho}_k \rightarrow \tilde{\rho}$ tiež plynie

$$\int_{B_R} \tilde{\rho}_k dx = \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\rho}_k \chi_{B_R} dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\rho} \chi_{B_R} dx = \int_{B_R} \tilde{\rho} dx,$$

odkiaľ vzhľadom k (12.8) plynie

$$\int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\rho} dx = \lambda. \quad (12.9)$$

Položme ďalej $\Phi(\rho) = \Phi_1(\rho) - \frac{1}{2}\Phi_2(\rho)$, kde

$$\Phi_1(\rho) = \mu \int_{\mathbb{R}^3} \rho^p dx, \quad \Phi_2(\rho) = \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{\rho(x)\rho(y)}{|x-y|} dx dy.$$

Pretože Φ_1 je konvexný a spojitý, je tiež slabo zdola polospojité v $L^p(\mathbb{R}^3)$, takže

$$\liminf_k \Phi_1(\tilde{\rho}_k) \geq \Phi_1(\tilde{\rho}). \quad (12.10)$$

Funkcionál Φ_2 môžeme písať v tvare

$$\Phi_2(\tilde{\rho}_k) = \int_{B_R \cup B_R^C} \tilde{\rho}_k(x) \left(\frac{1}{|\cdot|} * \tilde{\rho}_k \right)(x) dx = I + II.$$

Postupnosť $\frac{1}{|\cdot|} * \tilde{\rho}_k$ je podľa (17.9) ohraničená vo $W^{2,p}(B_R)$ a priestor $W^{2,p}(B_R)$ je kompaktné vnorený do $L^{p'}(B_R)$ (kde $1/p + 1/p' = 1$ a využívame $p > 6/5$), takže (vybraná) postupnosť konverguje v $L^{p'}(B_R)$ k nejakej funkcii φ . Postupnosť $\tilde{\rho}_k$ konverguje slabo k $\tilde{\rho}$ v $L^1(B_R)$, takže $\frac{1}{|\cdot|} * \tilde{\rho}_k \rightarrow \frac{1}{|\cdot|} * \tilde{\rho}$ slabo v $L^1(B_R)$; z jednoznačnosti slabej limity dostávame $\varphi = \frac{1}{|\cdot|} * \tilde{\rho}$. Platí teda

$$I = \int_{B_R} \tilde{\rho}_k(x) \left(\frac{1}{|\cdot|} * \tilde{\rho}_k \right)(x) dx \rightarrow \int_{B_R} \tilde{\rho}(x) \left(\frac{1}{|\cdot|} * \tilde{\rho} \right)(x) dx.$$

Ak definujeme $\psi_k = \tilde{\rho}_k \chi_{B_R^C}$, potom pre člen II dostávame odhad

$$\begin{aligned} II &= \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{\psi_k(x) \tilde{\rho}_k(y)}{|x-y|} dx dy \leq C_1 \|\psi_k\|_{6/5} \|\tilde{\rho}_k\|_{6/5} \\ &\leq C_2 \|\psi_k\|_1^{1/3} \|\psi_k\|_{4/3}^{2/3} \leq C_3 \|\psi_k\|_1^{1/3} \leq C_3 \varepsilon^{1/3}, \end{aligned}$$

kde sme okrem (17.2) a (17.3) použili (12.8). Z odhadov pre I a II plynie

$$\Phi_2(\tilde{\rho}_k) \rightarrow \Phi_2(\tilde{\rho}), \quad (12.11)$$

takže spolu s (12.10) dostávame

$$\liminf_k \Phi(\tilde{\rho}_k) \geq \Phi(\tilde{\rho}).$$

Pretože podľa (12.9) je $\tilde{\rho} \in \mathcal{A}_\lambda$ a $\tilde{\rho}_k$ bola minimizujúca postupnosť, musí

$$\lim_k \Phi(\tilde{\rho}_k) = \Phi(\tilde{\rho}) \quad (12.12)$$

a $\tilde{\rho}$ je minimizér Φ v $\mathcal{A}_\lambda$. Ostáva dokázať silnú konvergenciu $\tilde{\rho}_k$ k $\tilde{\rho}$ v $L^1 \cap L^p$. Z (12.10)-(12.12) plynie $\Phi_1(\tilde{\rho}_k) \rightarrow \Phi_1(\tilde{\rho})$, t.j. $\|\tilde{\rho}_k\|_p \rightarrow \|\tilde{\rho}\|_p$. Pretože $L^p(\mathbb{R}^3)$ je uniformne konvexný a $\tilde{\rho}_k \rightarrow \tilde{\rho}$ slabo, plynie z konvergence noriem $\tilde{\rho}_k \rightarrow \tilde{\rho}$ silno v $L^p(\mathbb{R}^3)$. Odtiaľ tiež plynie $\tilde{\rho}_k \rightarrow \tilde{\rho}$ v $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$, a vzhľadom k odhadom $\int_{B_R^C} \tilde{\rho}_k dx \leq \varepsilon$ a $\int_{B_R^C} \tilde{\rho} dx \leq \varepsilon$ tiež $\tilde{\rho}_k \rightarrow \tilde{\rho}$ v $L^1(\mathbb{R}^3)$. Tým sú všetky avízované tvrdenia dokázané. $\square$

V prípade intenzívne študovanej polynomiálnej nelinearity $|u|^{p-1}u$ z Príkladu 12.1 je na vylúčenie alternatívy (ii) z Lemy o koncentrovanej kompaktnosti často užitočná nasledujúca lema.

Lema 12.5. (Lions) *Nech $n \geq 3$ a $p \in (2, 2^*)$, kde $2^* := 2n/(n-2)$. Nech je $\{u_k\} \subset W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ ohraničená postupnosť splňajúca*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{B_R(y)} |u_k|^p dx \right) = 0 \quad \text{pre každé } R > 0.$$

Potom $u_k \rightarrow 0$ v $L^q(\mathbb{R}^n)$ pre každé $q \in (2, 2^)$.*

Dôkaz. Pre $s \in (p, 2^*)$ definujme $\theta \in (0, 1)$ vzt'ahom $1/s = (1-\theta)/p + \theta/2^*$. Pre $B := B_R(y)$ potom z interpolačnej nerovnosti (17.3) a vnorenia $W^{1,2}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^n)$ plynie pre $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$

$$\|u\|_{L^s(B)} \leq \|u\|_{L^p(B)}^{1-\theta} \|u\|_{L^{2^*}(B)}^\theta \leq C \|u\|_{L^p(B)}^{1-\theta} \|u\|_{W^{1,2}(B)}^\theta,$$

takže ak zvolíme s tak, aby $\theta = 2/s$, dostaneme

$$\int_B |u|^s dx \leq C^s \|u\|_{L^p(B)}^{s(1-\theta)} \|u\|_{W^{1,2}(B)}^2 \leq C^s \left(\sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{B_R(y)} |u|^p dx \right)^{s(1-\theta)/p} \int_B (|u|^2 + |\nabla u|^2) dx. \quad (12.13)$$

Pre pevné R zvolíme také pokrytie $\mathbb{R}^n$ guľami tvaru $B = B_R(y)$, aby každý bod v $\mathbb{R}^n$ bol obsiahnutý v najviac K guľach z tohto pokrytia (pričom K nezávisí od x). Potom použitím (12.13) pre každú z týchto guľí a sčítaním výsledných nerovností dostaneme

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^s dx \leq K C^s \left(\sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{B_R(y)} |u|^p dx \right)^{s(1-\theta)/p} \int_{\mathbb{R}^n} (|u|^2 + |\nabla u|^2) dx,$$

odkiaľ plynie $u_k \rightarrow 0$ v $L^s(\mathbb{R}^n)$. Tvrdenie teraz plynie z interpolačnej nerovnosti (17.3). $\square$

III. Variačný počet v $\mathbb{R}^1$

V tejto kapitole budeme vyšetrovať funkcionály typu $\Phi(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x)) dx$, kde

$$-\infty < a < b < +\infty, \quad u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad f : [a, b] \times \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \in CAR.$$

Mnohé tvrdenia budú mať lokálny charakter: v tom prípade samozrejme bude stačiť, aby f bola definovaná (prípadne mala isté vlastnosti) napr. pre $(x, u, s) \in [a, b] \times D$, kde D je vhodná podmnožina $\mathbb{R}^{2N}$. Implicitne budeme predpokladať $N = 1$; prípadu $N > 1$ sa budeme venovať len v poznámkach a príkladoch. Okrem bežných symbolov budeme používať nasledujúce značenie:

$$C_0^1 = C_0^1([a, b]) := \{u \in C^1([a, b]) : u(a) = u(b) = 0\}.$$

Toto značenie nie je úplne štandardné: symbol $C_0^1(\Omega)$ sa používa aj na označenie uzáveru priestoru $\mathcal{D}(\Omega)$ v C^1 norme prípadne na označenie priestoru C^1 funkcií s kompaktným nosičom v Ω .

13. Regularita minimizérov a Eulerova rovnica

V tomto odstavci budeme vyšetrovať regularitu minimizérov Φ v množine funkcií u spĺňajúcich okrajové podmienky $u(a) = A$, $u(b) = B$. Presnejšie, budeme skúmať (globálne aj lokálne) minimizéry Φ v množinách

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_C &:= \{u \in C^1([a, b]) : u(a) = A, u(b) = B\}, \\ \mathcal{A}_p &:= \{u \in W^{1,p}(a, b) : u(a) = A, u(b) = B\}, \quad 1 \leq p \leq \infty. \end{aligned}$$

Zrejme $\mathcal{A}_C \subset \mathcal{A}_p \subset \mathcal{A}_q$ pre $1 \leq q \leq p \leq \infty$. Priestor $W^{1,1}(a, b)$ (absolútne spojité funkcie) je zrejme najväčší možný, na ktorom je Φ „rozumne“ definovaný (pre $u \in W^{1,1}(a, b)$ existuje $u'(x)$ s.v., $u' \in L^1(a, b)$ a $\int_a^b u'(x) dx = u(b) - u(a)$).

Z Vety 10.6 a z poznámok a príkladov uvedených za ňou plynú nasledujúca veta.

Veta 13.1. *Nech je $f(x, u, \cdot)$ konvexná a $f(x, u, s) \geq C_0|s|^p - \varphi(x)$, kde $\varphi \in L^1(a, b)$ a $p > 1$. Potom existuje globálne minimum Φ na množine $\mathcal{A}_1$.*

Rastový predpoklad pre f vo Vete 13.1 sa dá ešte zoslabiť na podmienku typu $f(x, u, s) \geq \psi(|s|)$, kde ψ je zdola ohraničená a $\psi(t)/t \rightarrow \infty$ pre $t \rightarrow \infty$.

Pretože (lokálne) maximá funkcionálu Φ zodpovedajú (lokálnym) minimám funkcionálu $-\Phi$, budeme naše tvrdenia a definície formulovať len pre minimá. Nech $\mathcal{A} \in \{\mathcal{A}_C, \mathcal{A}_p : p \geq 1\}$. Povieme, že $u \in \mathcal{A}$ je **slabý** (resp. **silný**) **lokálny minimizér** funkcionálu Φ v $\mathcal{A}$, ak existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $\Phi(u) \leq \Phi(v)$ pre každé $v \in \mathcal{A}$ spĺňajúce podmienku $\text{ess sup}_{x \in [a, b]} (|u(x) - v(x)| + |u'(x) - v'(x)|) \leq \varepsilon$ (resp. $\max_{x \in [a, b]} |u(x) - v(x)| \leq \varepsilon$). Povieme tiež, že $u \in \mathcal{A}_p$ je **lokálny minimizér** funkcionálu Φ v $\mathcal{A}_p$, ak existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $\Phi(u) \leq \Phi(v)$ pre každé $v \in \mathcal{A}_p$ spĺňajúce podmienku $\|u - v\|_{1,p} \leq \varepsilon$. Z týchto definícií plynú, že každý silný lokálny minimizér v $\mathcal{A}$ je slabý lokálny minimizér v $\mathcal{A}$, každý silný lokálny minimizér v $\mathcal{A}_p$ je lokálny minimizér v $\mathcal{A}_p$ a každý lokálny minimizér v $\mathcal{A}_p$ je slabý lokálny minimizér v $\mathcal{A}_p$. Obrátené implikácie všeobecne neplatia (viď Príklady 13.3, 13.4 a 13.5).

Cvičenie 13.2. Nech je $\Phi(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x)) dx$ spojitý vo $W^{1,p}(a, b)$ a nech $u_0 \in C^1([a, b])$ je silný lokálny minimizér Φ v $\mathcal{A}_C$ (pre nejaké A, B). Ukážte, že potom je u_0 lokálny minimizér Φ v $\mathcal{A}_p$.

Príklad 13.3. (Scheeffer) Nech $\Phi(u) = \int_0^1 (u'^2 + u'^3) dx$, $u(0) = u(1) = 0$. Keďže $s^2 + s^3 \geq 0$ pre malé $s \in \mathbb{R}$, je $u_0 \equiv 0$ slabý lokálny minimizér Φ . Funkcionál Φ je triedy C^2 vo $W^{1,3}(0,1)$, $\Phi''(0)(w,w) \geq \|w\|_{1,2}^2$ pre $w \in W_0^{1,3}(0,1)$. Funkcia u_0 však nie je lokálny minimizér Φ v $\mathcal{A}_3 = W_0^{1,3}(0,1)$: pre funkcie u_h definované affine na $[0, h^2]$ a $[h^2, 1]$, $u_h(0) = u_h(1) = 0$, $u_h(h^2) = -h^{3/2}$ a $h \rightarrow 0+$ platí $u_h \rightarrow 0$ vo $W^{1,3}$, ale $\Phi(u_h) < 0$ pre malé $h > 0$.

Keďže funkcia u_0 nie je lokálnym minimizérom vo $W_0^{1,3}$, nemôže byť ani silným lokálnym minimizérom. Pre $\tilde{u}_h := u_h/\sqrt{h}$ dokonca platí $\sup |\tilde{u}_h| \rightarrow 0$, ale $\Phi(\tilde{u}_h) \rightarrow -\infty$ pre $h \rightarrow 0+$. Vhodnou aproximáciou $\tilde{u}_h$ v okolí bodu h^2 dostaneme aj C^1 funkcie s rovnakými vlastnosťami ako $\tilde{u}_h$.

Príklad 13.4. Uvažujme funkcionál $\Phi(u) = \int_0^1 [(u')^2 - (u')^4 u^2] dx$ s okrajovými podmienkami $u(0) = 0$, $u(1) = 0$. Ukážeme, že $u_0 \equiv 0$ je jeho lokálnym minimizérom v $\mathcal{A}_4$, ale nie je silným lokálnym minimizérom.

Ak $0 < \|u\|_{1,4} < \varepsilon < 1$, potom $\eta := \max |u| = |u|(x_0) > 0$. Ďalej $\int_0^{x_0} (u')^2 dx \geq |\int_0^{x_0} u' dx|^2 = \eta^2$, $\int_0^1 (u')^4 u^2 dx \leq \eta^2 \varepsilon^4$, takže $\Phi(u) \geq \eta^2(1 - \varepsilon^4) > 0 = \Phi(0)$. Nech u_ε je spojitá, po častiach afinná funkcia, $u_\varepsilon(x) = x$ pre $x \leq \varepsilon$, $u_\varepsilon = 1 - x$ pre $x \geq 1 - \varepsilon$, $|u'_\varepsilon| = \varepsilon^{-2}$ a $\varepsilon/2 \leq u_\varepsilon \leq \varepsilon$ pre $x \in [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$. Zrejme $\Phi(u_\varepsilon) < 0$ pre malé ε . Vo $W^{1,4}$ -okolí u_ε môžeme teraz zvoliť $\tilde{u}_\varepsilon \in C^1$ tak, aby $\Phi(\tilde{u}_\varepsilon) < 0$.

Príklad 13.5. Nech $a, b > 0$. Ukážeme, že $u_0 \equiv 0$ je lokálnym minimizérom funkcionálu $\Phi(u) = \int_0^1 (au'^2 - 4buu'^3 + 2bxu'^4) dx$ v priestore $X := W_0^{1,4}(0,1)$, ale nie je silným lokálnym minimizérom.

Predpokladajme $u \in X$, $\|u\|_X < \varepsilon$ a $\Phi(u) < 0$. Potom existuje $x \in (0,1)$ tak, že $u'(x)^2(a - 4bu(x)u'(x) + 2bxu'(x)^2) < 0$. Keďže $a + 2bxu'(x)^2 \geq 2\sqrt{2abx}|u'(x)|$, musí $4bu(x)u'(x) > 2\sqrt{2abx}|u'(x)|$, a teda

$$\sqrt{\frac{ax}{2b}} < |u(x)| \leq \int_0^x |u'(t)| dt \leq \left(\int_0^x u'(t)^4 dt \right)^{1/4} x^{3/4} \leq \varepsilon x^{3/4},$$

odkiaľ $\varepsilon > \varepsilon x^{1/4} > \sqrt{a/(2b)}$, čo je spor pre malé ε .

Pre funkcie u affine na intervaloch $[0, \varepsilon]$, $[\varepsilon, 1]$ s hodnotami $u(0) = u(1) = 0$, $u(\varepsilon) = \delta$, kde $\delta \ll 1$ a $\varepsilon \ll \delta^2$, platí $\Phi(u) < \Phi(0) = 0$. Preto platí $\Phi(\tilde{u}) < 0$ aj pre vhodnú $\tilde{u} \in \mathcal{A}_C$ ležiacu blízko u napr. vo $W^{1,4}$, takže $u_0 \equiv 0$ nie je silný lokálny minimizér.

Ak je u minimizér Φ v $\mathcal{A}_p$ (resp. $\mathcal{A}_C$) a označíme $u_{A,B}(x) = A + (B - A)(x - a)/(b - a)$, potom je $v := u - u_{A,B}$ minimizér funkcionálu $\tilde{\Phi}(v) = \int_a^b f(x, v(x) + u_{A,B}(x), v'(x) + u'_{A,B}(x)) dx$ v priestore $W_0^{1,p}(a,b)$ (resp. C_0^1). Funkcionál Φ je pritom konvexný resp. koercívny na konvexnej množine $\mathcal{A}_p$ (alebo $\mathcal{A}_C$) práve vtedy, keď je $\tilde{\Phi}$ konvexný resp. koercívny vo $W_0^{1,p}(a,b)$ (alebo C_0^1).

Ak funkcia f spĺňa predpoklady príslušnej vety o diferencovateľnosti funkcionálu Φ v priestore $W^{1,p}$ (resp. C^1), potom je zrejme tiež $\tilde{\Phi}$ diferencovateľný a z definície (slabého) minimizéru vyplýva $\Phi'(u)h = \tilde{\Phi}'(u - u_{A,B})h = 0$ pre každé $h \in C_0^1$. Pretože priestor $C_0^1([a,b])$ je hustý vo $W_0^{1,p}(a,b)$ pre $p < \infty$, platí $\Phi'(u)h = 0$ v prípade $u \in \mathcal{A}_p$ tiež pre $h \in W_0^{1,p}(a,b)$. Pretože

$$\Phi'(u)h = \int_a^b (f_u(x, u(x), u'(x))h(x) + f_s(x, u(x), u'(x))h'(x)) dx,$$

je u slabým riešením okrajovej úlohy

$$-\frac{d}{dx} f_s(x, u(x), u'(x)) + f_u(x, u(x), u'(x)) = 0 \quad \text{v } (a,b), \quad u(a) = A, \quad u(b) = B. \quad (13.1)$$

Pre $u \in C^1([a,b])$ okrem hladkosti funkcie f na odvodenie tohto faktu nepotrebuje žiadne ďalšie podmienky; pre $u \in W^{1,p}(a,b)$ musíme od f okrem hladkosti požadovať rastové podmienky v premennej s . Pre hľadanie extrémov pomocou riešenia úlohy (13.1) je teda dôležité vedieť dopredu niečo o hladkosti prípadného minimizéra.

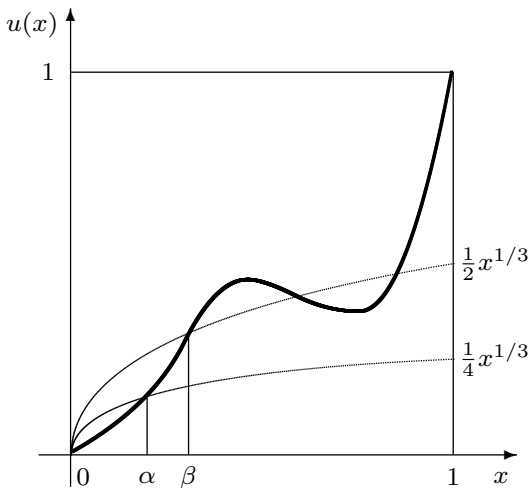
Tvrdenie 13.6. Nech f je triedy C^3 , nech je ohraničená zdola a spĺňa podmienku $f_{ss} > 0$. Ak je u silný lokálny minimizér Φ v $\mathcal{A}_1$, potom existuje uzavretá množina $\Sigma \subset [a,b]$ miery 0 tak, že $u \in C^1([a,b] \setminus \Sigma)$ a pre každé $x \in \Sigma$ existuje $\lim_{y \rightarrow x} u'(y) = \pm\infty$.

Ak navyše f nezávisí od u alebo od u a $\lim_{|s| \rightarrow \infty} f(x, u, s)/|s| = \infty$ pre každé $x \in [a,b]$ a $u \in \mathbb{R}$, potom $\Sigma = \emptyset$, t.j. $u \in C^1([a,b])$.

Poznámka 13.7. Množina Σ v Tvrdení 13.6 sa nazýva **Tonelliho množina** podľa L. Tonelliho, ktorý v r. 1915 dokázal prvú verziu uvedeného tvrdenia (viď [56]). To, že množina Σ za daných predpokladov skutočne môže byť neprázdna, ukázali až J. Ball a V. Mizel v r. 1985 (viď [4], kde možno tiež nájsť dôkaz Tvrdenia 13.6). V ich príklade má funkcia f tvar $f(x, u, s) = (x^4 - u^6)^2 |s|^p + \varepsilon |s|^2$, kde $\varepsilon > 0$ a $p \geq 27$; viď tiež Príklad 13.10. Prázdnosť množiny Σ možno dokázať aj v iných prípadoch než sú spomenuté v Tvrdení 13.6: napr. ak f spĺňa vhodné rastové podmienky (viď Vetu 13.11). Podobne existenciu Tonelliho množiny možno dokázať aj za iných predpokladov ako v Tvrdení 13.6: napr. miesto $f \in C^3$, $f_{ss} > 0$ stačí spojitost' f v x , lokálna lipschitzovskosť v (u, s) , striktná konvexita a istá superlinearita v gradientnej premennej s (viď napr. [17]). Konvexitu f v premennej s tiež možno z predpokladov vylúčiť (viď [18]); v tom prípade však bude minimizér len lokálne lipschitzovský v $[a, b] \setminus \Sigma$. Takýmto príkladom sa budeme venovať pri vyšetrovaní minimizérov, ktoré sú po častiach C^1 .

Funkcionály v nasledujúcich príkladoch majú pozoruhodnú vlastnosť: ich infimum v množine $\mathcal{A}_\infty$ je väčšie než ich minimum v množine $\mathcal{A}_1$. Na tento jav prvýkrát poukázal M. Lavrentiev v r. 1926 (viď [38]). Takmer súčasne L. Tonelli ukázal (viď [57]), že takýto jav nemôže nastať, ak sa napr. f dá napísať v tvare $g + h$, kde $|g(x, u, s)| + |h_u(x, u, s)| \leq M(|u|)(1 + |s|)$ a $M : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ je rastúca.

Príklad 13.8. (Lavrentievov jav; Manià [43]) Uvažujme funkcionál $\Phi(u) = \int_0^1 f(x, u, u') dx$ s okrajovými podmienkami $u(0) = 0$, $u(1) = 1$ a Lagrangiánom $f(x, u, s) = (x - u^3)^2 s^6$. Ak $p < 3/2$, potom je zrejmé $u_1(x) = x^{1/3}$ globálny minimizér Φ v $\mathcal{A}_p$ a $\Phi(u_1) = 0$. Ukážeme, že ak $p > 3/2$, potom $\inf_{\mathcal{A}_p} \Phi > 0$.



Predpokladajme teda $p > 3/2$ a zvolíme $u \in \mathcal{A}_p$. Sporom najprv dokážeme, že existuje $x \in (0, 1)$ tak, že $u(x) < \frac{1}{4}x^{1/3}$. Nech naopak $u(x) \geq \frac{1}{4}x^{1/3}$ pre všetky $x \in (0, 1)$. Potom pre každé $x \in (0, 1)$ s využitím Hölderovej nerovnosti dostávame

$$\begin{aligned} \|u\|^p &\geq \int_0^x |u'|^p dt \geq \left(\int_0^x u' dt \right)^p / \left(\int_0^x 1 dt \right)^{p-1} \\ &= \frac{u(x)^p}{x^{p-1}} \geq \frac{1}{4^p} x^{1-2p/3} \rightarrow \infty \end{aligned}$$

pre $x \rightarrow 0+$, spor.

Pretože $u(x) > \frac{1}{2}x^{1/3}$ pre $x = 1$, existujú $0 < \alpha < \beta < 1$ tak, že

$$u(\alpha) = \frac{\alpha^{1/3}}{4}, \quad u(\beta) = \frac{\beta^{1/3}}{2}, \quad \frac{\beta^{1/3}}{4} \leq u(x) \leq \frac{x^{1/3}}{2}, \quad x \in (\alpha, \beta).$$

Odtiaľ potom plynie okrem iného $x \geq 8u^3$ pre $x \in [\alpha, \beta]$, takže

$$\begin{aligned} \Phi(u) &\geq \int_\alpha^\beta (x - u^3)^2 (u')^6 dx \geq \left(\frac{7}{8}\right)^2 \int_\alpha^\beta (2uu')^6 dx \geq \left(\frac{7}{8}\right)^2 \left(\int_\alpha^\beta 2uu' dx \right)^6 / \left(\int_\alpha^\beta 1 dx \right)^5 \\ &= \left(\frac{7}{8}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\beta^{2/3} - \frac{1}{16}\alpha^{2/3} \right)^6 / (\beta - \alpha)^5 = \left(\frac{7}{8}\right)^2 \frac{1}{4^6} \frac{1}{\beta} \left(1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{2/3} \right)^6 / \left(1 - \frac{\alpha}{\beta} \right)^5 \geq \left(\frac{7}{8}\right)^2 \left(\frac{3}{16} \right)^6. \end{aligned}$$

Cvičenie 13.9. Uvažujte funkcionál Φ a jeho minimizér u_1 z Príkladu 13.8. Nech $v_k \in \mathcal{A}_p$ pre $p > 3/2$, $v_k \rightarrow u_1$ v $\mathcal{A}_1$. Ukážte, že potom $\Phi(u_k) \rightarrow \infty$. Ukážte tiež, že $\inf_{\mathcal{A}_{3/2}} \Phi > 0$.

Príklad 13.10. Nech $\Phi(u) = \int_{-1}^1 f(x, u, u') dx$, kde $f(x, u, s) = (u^5 - x^3)^2 s^{20} + \varepsilon s^2$ a $u(\pm 1) = \pm 1$. Ukážeme, že pre $\varepsilon > 0$ malé je $\min_{\mathcal{A}_1} \Phi < \inf_{\mathcal{A}_\infty} \Phi$ a pre príslušný minimizér v $\mathcal{A}_1$ je Tonelliho množina neprázdna. Existencia minimizéra u v $\mathcal{A}_1$ plyní z Vety 13.1. Vzhľadom k symetrii úlohy môžeme predpokladať $u(0) \leq 0$. Keby bola derivácia u v okolí nuly ohraničená, potom by existovali $0 \leq \alpha < \beta < 1$ tak, že $u(\alpha) = 0$, $u(\beta) = (\beta^3/2)^{1/5}$ a $0 < u(x) < (x^3/2)^{1/5}$ pre $x \in (\alpha, \beta)$. Podobne ako v Príklade 13.8 dostaneme

$$\begin{aligned} \Phi(u) &\geq \int_\alpha^\beta (u^5 - x^3)^2 (u')^{20} dx \geq \int_\alpha^\beta u^{10} (u')^{20} dx \geq \frac{1}{(\beta - \alpha)^{19}} \left(\int_\alpha^\beta \sqrt{u} u' dx \right)^{20} \\ &= \frac{1}{(\beta - \alpha)^{19}} \left(\frac{2}{3} \right)^{20} \left(\frac{\beta^3}{2} \right)^6 \geq \frac{2^{14}}{3^{20}} =: I. \end{aligned}$$

Pre $u_1(x) := |x|^{3/5} \text{sign } x$ a ε malé ale platí $\Phi(u_1) = \frac{18}{5}\varepsilon < I$, čo je spor. Z odhadov vyššie pre takého ε tiež plyní $\inf_{\mathcal{A}_\infty} \Phi \geq I > \min_{\mathcal{A}_1} \Phi$.

Veta 13.11. (Regularita minimizéra vo $W^{1,p}$) *Nech $p > 1$ a $p' = p/(p-1)$. Predpokladajme, že $f \in C^{0,1}([a,b] \times \mathbb{R}^2)$, že existuje spojitá f_{ss} , funkcie $g_0 \in L^1(a,b)$, $g_1 \in L^{p'}(a,b)$ a neklesajúca funkcia $M : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ tak, že pre všetky x, u, s platí*

$$\begin{aligned} |f_u(x, u, s)| &\leq M(|u|)(g_0(x) + C|s|^p), \\ |f_s(x, u, s)| &\leq M(|u|)(g_1(x) + C|s|^{p-1}). \end{aligned}$$

Nech u_0 je lokálny minimizér Φ v množine $\mathcal{A}_p$. Nech $f_{ss}(x, u_0(x), s) > 0$ pre každé $x \in [a, b]$, $s \in \mathbb{R}$, a nech funkcia $f_s(x, u_0(x), \cdot)$ zobrazuje $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$ pre každé $x \in [a, b]$. Potom $u_0 \in C^1([a, b])$.

Dôkaz. Z Cvičenia 3.8 (viď rastové predpoklady (3.6) pre $q = 1$) plynie, že $\Phi : W^{1,p}(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ je triedy C^1 , takže $\Phi'(u_0)h = 0$ pre všetky $h \in W_0^{1,p}(a, b)$. Odtiaľ

$$\int_a^b [f_u(x, u_0(x), u'_0(x))h(x) + f_s(x, u_0(x), u'_0(x))h'(x)] dx = 0 \quad (13.2)$$

pre všetky $h \in W_0^{1,p}(a, b)$, takže integrovaním per partes dostaneme, že pre funkciu

$$H(x) := f_s(x, u_0(x), u'_0(x)) - \int_a^x f_u(\xi, u_0(\xi), u'_0(\xi)) d\xi \quad (13.3)$$

platí $\int_a^b H(x)h'(x) dx = 0$ pre všetky $h \in W_0^{1,p}(a, b)$. Pretože množina $\{h' : h \in W_0^{1,p}(a, b)\}$ obsahuje funkcie $\varphi \in \mathcal{D}(a, b)$ s vlastnosťou $\int_a^b \varphi(x) dx = 0$, existuje podľa du Bois-Reymondovej lemy (Lema 17.12) konštanta C tak, že $H(x) = C$ s.v.

Pre $x \in [a, b]$ a $s \in \mathbb{R}$ položíme

$$F(x, s) := f_s(x, u_0(x), s) - \int_a^x f_u(\xi, u_0(\xi), u'_0(\xi)) d\xi - C. \quad (13.4)$$

Funkcia F je triedy $C^{0,1}$ a $F_s(x, s) = f_{ss}(x, u_0(x), s) > 0$. Pretože $F(x, \cdot)$ je rastúca a podľa predpokladov zobrazuje $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$, existuje pre každé $x \in [a, b]$ jediné $s = s(x)$ tak, že $F(x, s) = 0$. Z vety o implicitnej funkcii ďalej plynie, že funkcia $s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá. Pretože $F(x, u'_0(x)) = H(x) - C = 0$ s.v., musí $u'_0(x) = s(x)$ s.v. Funkcia u_0 je absolútne spojitá, takže $u_0(x) = A + \int_a^x s(t) dt$. Keďže s je spojitá, platí $u'_0 = s$ všade, a teda $u'_0 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá. $\square$

Poznámky 13.12. (i) Z dôkazu Vety 13.11 plynie, že analogické tvrdenie o regularite platí pre všetky kritické body daného funkcionálu (nielen minimizéry).

(ii) Ak sú predpoklady vety o funkcii $f_s(x, u_0(x), \cdot)$ splnené len lokálne (t.j. v okolí nejakého bodu x_0), potom z dôkazu plynie, že príslušný minimizér u_0 bude lokálne triedy C^1 .

Cvičenie 13.13. Nech $g \in C^1(\mathbb{R})$ a u_0 je lokálny minimizér funkcionálu $\Phi(u) = \int_a^b ((u')^2 + g(u)) dx$ vo $W_0^{1,2}(a, b)$. Ukážte, že $u_0 \in C^1$.

Príklad 13.14. Nech $g \in C^1(\mathbb{R})$ a uvažujme funkcionál tvaru $\Phi(u) = \int_a^b ((u')^2 + g(u)) dx$ s okrajovými podmienkami $u(a) = u(b) = 0$. Predpokladajme, že $u_0 \equiv 0$ je slabý lokálny minimizér. Ukážeme, že potom je u_0 tiež silný lokálny minimizér (porovnajme napr. s Príkladmi 13.3, 13.4 a 13.5).

Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať $g(0) = 0$. Keďže $\Phi'(0)h = \int_a^b g'(0)h dx = 0$ pre každé $h \in C_0^1$, platí $g'(0) = 0$. Ukážme najprv, že u_0 je lokálny minimizér vo $W_0^{1,2}(a, b)$. Predpokladajme opak, t.j. že existujú $v_k \in W_0^{1,2}(a, b)$ tak, že $\|v_k\|^2 := \int_a^b (v'_k)^2 dx \rightarrow 0$, ale $\Phi(v_k) < 0$. Vzhľadom k tomu, že Φ je slabo sekvenciálne zdola polospojité vo $W_0^{1,2}$ (viď Cvičenie 4.14), existuje jeho minimizér u_k na množine $B_k := \{u \in W_0^{1,2}(a, b) : \|u\| \leq \|v_k\|\}$. Zrejme $\varepsilon_k := \|u_k\| \in (0, \|v_k\|]$ a u_k je minimizér Φ na množine $S_k := \{u \in W_0^{1,2}(a, b) : \Psi(u) = \varepsilon_k^2\}$, kde $\Psi(u) := \|u\|^2$. Z Vety 6.1 plynie existencia multiplikátorov λ_k tak, že $\Phi'(u_k) = \lambda_k \Psi'(u_k)$, takže

$$\int_a^b (2u'_k h' + g'(u_k)h - 2\lambda_k u'_k h') dx = 0 \quad \text{pre každé } h \in W_0^{1,2}(a, b).$$

Odtiaľ rovnako ako v dôkaze Vety 13.11 dostávame existenciu konštánt C_k tak, že

$$2(1 - \lambda_k)u'_k(x) = C_k + \int_a^x g'(u_k(\xi)) d\xi \quad \text{pre s.v. } x \in (a, b). \quad (13.5)$$

Keďže $\Phi(u_k) \leq \Phi(tu_k)$ pre $t \in [0, 1]$, musí platiť $\Phi'(u_k)u_k \leq 0$, takže $\lambda_k \leq 0$. Pravá strana v rovnosti (13.5) je C^1 funkcia, takže $u_k \in C^2$ a $2(1 - \lambda_k)u''_k = g'(u_k)$. Z ohraničenosti u_k vo $W^{1,2}$ teraz plynie, že u_k sú rovnako ohraničené v C^2 a z Arzelà-Ascoliho vety dostávame relatívnu kompaktnosť tejto postupnosti v C^1 . Môžeme teda predpokladať, že vybraná postupnosť $\{u_k\}$ konverguje v C^1 . Keďže $u_k \rightarrow u_0$ vo $W^{1,2}$, je limita nájdenej vybranej postupnosti v C^1 tiež u_0 , čo je spor s predpokladom, že u_0 je slabý lokálny minimizér.

Ukážme teraz, že u_0 je silný lokálny minimizér. Predpokladajme opak. Potom existujú $w_k \in W_0^{1,2}(a, b)$ tak, že $\sup |w_k| \rightarrow 0$ ale $\Phi(w_k) < 0$. Keďže u_0 je lokálny minimizér vo $W_0^{1,2}$, existuje $\varepsilon < 0$ tak, že $\|w_k\| > \varepsilon$, a teda $0 > \Phi(w_k) > \varepsilon^2 + \int_a^b g(w_k) dx$. Z Lebesgueovej vety však plynie $\int_a^b g(w_k) dx \rightarrow 0$, čo dáva spor.

Úvahy, ktoré sme použili na dôkaz faktu, že slabý lokálny minimizér funkcionálu Φ musí byť lokálny minimizér vo $W_0^{1,2}$, sa dajú použiť aj na (nenulové) lokálne minimizéry funkcionálov tvaru $\Phi(u) = \int_{\Omega} (|\nabla u|^p + g(x, u)) dx$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a g spĺňa vhodné rastové podmienky. Takéto tvrdenia sa potom dajú použiť na dôkaz multiplicity riešení príslušných úloh, viď napr. [10, 25].

Cvičenie 13.15. Nech $\Phi(u) = \int_0^\pi ((u')^2 + g(u)) dx$, kde $g \in C^2$, $g(0) = g'(0) = 0$ a $u(0) = u(\pi) = 0$, $u_0 \equiv 0$. Ukážte, že ak je $g''(0) > -2$, potom je u_0 silný lokálny minimizér, a ak $g''(0) < -2$, potom u_0 nie je minimizér ani maximizér. Ďalej vyšetrite u_0 pre $g(u) = -u^2 \pm u^4$.

Veta 13.16. (Eulerova nutná podmienka) Nech $f : [a, b] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je triedy $C^{0,1}$, nech je $u_0 \in C^1([a, b])$ slabý lokálny minimizér Φ na množine $\mathcal{A}_C$. Potom je funkcia $x \mapsto f_s(x, u_0(x), u'_0(x))$ triedy $C^1([a, b])$ a pre každé $x \in [a, b]$ platí **Eulerova** (alebo tiež prvá Euler-Lagrangeova) rovnica

$$-\frac{d}{dx} f_s(x, u_0(x), u'_0(x)) + f_u(x, u_0(x), u'_0(x)) = 0.$$

Dôkaz. Funkcionál $\Phi : C^1[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovateľný a pre každé $h \in C_0^1$ platí $\Phi'(u_0)h = 0$. Pre každé $h \in C_0^1$ teda platí (13.2), a teda tiež $\int_a^b H(x)h'(x) dx = 0$ pre všetky $h \in C_0^1$, kde H je definovaná v (13.3). Z du Bois-Reymondovej lemy (Lema 17.12) plynie existencia konštanty C tak, že $H(x) = C$ s.v.; pretože H je spojitá, musí $H(x) = C$ všade. Z definície H plynie teraz

$$f_s(x, u_0(x), u'_0(x)) = C + \int_a^x f_u(\xi, u_0(\xi), u'_0(\xi)) d\xi. \quad (13.6)$$

Pretože pravá strana v (13.6) je spojitě diferencovateľná, má túto vlastnosť aj ľavá strana. Derivovaním (13.6) dostaneme Eulerovu rovnicu. $\square$

Poznámky 13.17. (i) Riešenia Eulerovej rovnice sa nazývajú **extremály**. Z dôkazu Vety 13.16 vidieť, že tvrdenie vety platí pre ľubovoľný kritický bod u_0 funkcionálu Φ (t.j. pre $u_0 \in \mathcal{A}_C$ také, že $\Phi'(u_0)h = 0$ pre všetky $h \in C_0^1$). Zrejme platí aj obrátené tvrdenie: Ak pre $u_0 \in \mathcal{A}_C$ je funkcia $f_s(x, u_0(x), u'_0(x))$ triedy C^1 a je splnená Eulerova rovnica, potom je u_0 kritickým bodom Φ (stačí vynásobiť Eulerovu rovnicu funkciou $h \in C_0^1$, zintegrovat' pre $x \in [a, b]$ a použiť integráciu per partes).

(ii) Nech $f \in C^{0,1} : [a, b] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $p > 1$, nech je $u_0 \in W^{1,p}(a, b)$ slabý lokálny minimizér Φ na množine $\mathcal{A}_p$. Ak je $\Phi : W^{1,p}(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ diferencovateľný, potom $\Phi'(u_0)h = 0$ pre všetky $h \in C_0^1$, takže podobne ako v dôkazoch Viet 13.11 a 13.16 dostávame pre funkciu H definovanú v (13.3) $H(x) = C$ s.v., takže

$$f_s(x, u_0(x), u'_0(x)) = \int_a^x f_u(\xi, u_0(\xi), u'_0(\xi)) d\xi + C \quad \text{s.v. v } [a, b]. \quad (13.7)$$

Takýto integrovaný tvar Eulerovej rovnice sa dá odvodiť aj za všeobecnejších predpokladov.

(iii) Ľahko sa vidí, že analógia Vety 13.16 platí aj pre $N > 1$ (vyslovte ju a dokážte!).

Cvičenie 13.18. Nech $g \in C^1(\mathbb{R})$. S použitím Cvičenia 13.13 a Vety 13.16 ukážte, že (ľubovoľný) globálny minimizér funkcionálu Φ z Cvičenia 4.14 je C^2 funkcia a je riešením Eulerovej rovnice $-2u'' + g'(u) = 0$. Ďalej ukážte, že pre $K > 4$ a $g = -K^2\chi_{[1,\infty)}$ je globálnym minimizérom Φ funkcia $u_K(x) = \min(Kx, 1, K(1-x))$.

Príklad 13.19. (Klasická mechanika) Uvažujme systém n hmotných bodov s m stupňami voľnosti, ktorých poloha je daná (zovšeobecnenými) súradnicami $q = (q_1, q_2, \dots, q_m)$, a nech v čase t_0 platí $q(t_0) = q_0$. K základným problémom klasickej mechaniky patrí určenie polohy q v čase $t > t_0$. Označme $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$ súradnice rýchlosti, $T(t, q, \dot{q})$ kinetickú a $U(t, q)$ potenciálnu energiu. Potom Hamiltonov princíp (1835) hovorí, že pohyb uvažovaného systému v čase $[t_0, t_1]$ bude popísaný funkciou $q : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^m$, ktorá bude kritickým bodom funkcionálu účinku $\Phi(q) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, q, \dot{q}) dt$, kde $L(t, q, \dot{q}) = T(t, q, \dot{q}) - U(t, q)$ je Lagrangeova funkcia daného systému. Príslušná Eulerova rovnica má zrejme tvar $\frac{d}{dt}(L_{\dot{q}}) = L_q$. Špeciálne, ak uvažujeme pohyb jedného hmotného bodu v časove nemennom potenciálovom poli $U(t, q) = U(q)$ a predpokladáme $T(t, q, \dot{q}) = T(\dot{q}) = \frac{1}{2}m|\dot{q}|^2$, potom má uvedená Eulerova rovnica tvar $m\ddot{q} = -\nabla U(q)$, čo je Newtonov pohybový zákon.

Hľadaná funkcia pritom nemusí minimalizovať Φ (pokiaľ rozdiel $t_1 - t_0$ nie je „malý“). Ak napríklad uvažujeme kľudový stav hmotného bodu s hmotnosťou $m = 2$ upevneného na strunu, ktorá naň pri jeho prípadnej (jednorozmernej) výchylke q pôsobí silou $-mq$, potom $L(t, q, \dot{q}) = \dot{q}^2 - q^2$ a pre $t_1 - t_0 > \pi$ nebude $q \equiv 0$ minimizérom Φ , ale jeho sedlovým bodom (viď napr. Príklad 14.14).

Ak uvažujeme uzavretý systém (t.j. súčet $T + U$ je konštantný), potom pri hľadaní kritických bodov funkcionálu účinku môžeme funkciu $L = T - U$ zrejme nahradiť funkciou $2T = L + (T + U)$, t.j. hľadáme kritické body funkcionálu $\tilde{\Phi}(u) = \int_{t_0}^{t_1} 2T(t, q, \dot{q}) dt$ (Maupertuisov princíp).

Cvičenie 13.20. (Cykloidálne kyvadlo, Huygens) Určite pohyb kyvadla, ktorého závažie sa pohybuje po cykloide (t.j. $x = a(\varphi + \sin \varphi)$, $y = a(1 - \cos \varphi)$). Ukážte, že doba kyvu nezávisí na amplitúde.

Príklad 13.21. (Keplerove zákony) Uvažujme periodický rovinný pohyb hmotného bodu v centrálnom poli (t.j. poli, kde potenciál závisí len od vzdialenosti od počiatku). V polárnych súradniciach má kinetická energia tvar $T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$ a pre potenciál tvaru $U = -k/r$ (kde $k > 0$) dostávame Eulerove rovnice $\text{const} = L_{\dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}$, $0 = \frac{d}{dt}L_{\dot{r}} - L_r = m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 + k/r^2$. Prvá rovnica vyjadruje prvý Keplerov zákon, z druhej sa pri využití prvej dá ľahko odvodiť, že uvažovaný pohyb bude prebiehať po elipse (viď napr. [9]) a tiež vzťah pre podiel T^2/a^3 , kde T je doba obehu a a je dĺžka hlavnej poloosi danej elipsy.

Príklad 13.22. (Geodetické krivky na sfére) Majme dva body A, B na jednotkovej sfére S v $\mathbb{R}^3$ také, že $A \neq -B$ a hľadáme C^1 -krivku v S spájajúcu A s B s minimálnou dĺžkou. Ak je sféra popísaná lokálne pomocou troch funkcií x, y, z dvoch premenných u, v a s je parameter dĺžky krivky, potom pre jeho diferenciál ds platí

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = P(u, v) (du)^2 + 2Q(u, v) du dv + R(u, v) (dv)^2,$$

kde

$$P = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \quad R = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2, \quad Q = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v.$$

Zvoľme na S polárne súradnice

$$x = \sin u \cos v, \quad y = \sin u \sin v, \quad z = \cos u, \quad 0 \leq u \leq \pi, \quad -\pi \leq v \leq \pi,$$

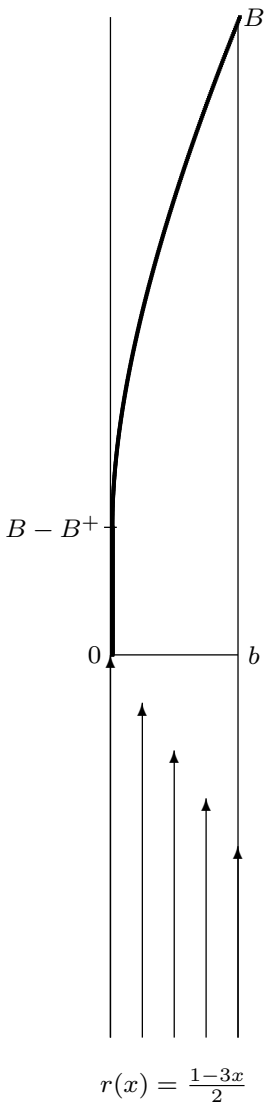
tak, aby pre súradnice bodov A, B platilo $v_A = v_B = 0$, $0 < u_A < u_B < \pi$. Pre krivku φ v S spájajúcu bod A s bodom B a popísanú funkciou $v : [u_A, u_B] \rightarrow [-\pi, \pi]$, $v(u_A) = v(u_B) = 0$, s využitím $P = 1$, $Q = 0$ a $R = \sin^2 u$ dostávame pre dĺžku φ vyjadrenie

$$\Phi(v) = \int_{u_A}^{u_B} (P(u, v) + 2Q(u, v)v' + R(u, v)v'^2)^{1/2} du = \int_{u_A}^{u_B} (1 + v'^2 \sin^2 u)^{1/2} du.$$

Funkcionál Φ je striktnie konvexný a Eulerova rovnica $v' \sin^2 u = C(1 + v'^2 \sin^2 u)^{1/2}$ má riešenie $v \equiv 0$, takže ide o globálny minimizér. Hľadanou krivkou (a dá sa ukázať, že nielen v triede vyššie uvažovaných kriviek) je teda časť hlavnej kružnice, prechádzajúcej bodmi A, B . Každá hlavná kružnica je teda geodetická krivka (lokálne minimalizuje vzdialenosť medzi jej bodmi).

Existencia (viacerých) uzavretých geodetických kriviek na kompaktnej Riemannovej variete patrí k slávnym problémom variačného počtu; významný pokrok v tomto smere urobili Ljusternik a Schnirelman koncom 20-tych rokov 20. storočia.

Príklad 13.23. (Minimálny čas na preplávanie rieky) Predpokladajme, že loď, ktorá je schopná vyvinúť maximálnu rýchlosť 1, má preplávať z jedného brehu rieky (z bodu $[0, 0]$) na druhý (do bodu $[b, B]$), kde brehy rieky sú rovnobežné s osou y (t.j. šírka rieky je b) a rýchlosť prúdu r závisí iba od x -ovej súradnice, $r(x) \in (0, 1)$.



Ak označíme $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ uhol, ktorý zvierá smer pohybu lode s osou x , potom skutočná rýchlosť lode je $v = (\cos \theta, r + \sin \theta)$ a čas potrebný na preplávanie je $T = \int_0^b 1/\cos \theta \, dx$. Ak je $u : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ hľadaná dráha ($u(0) = 0$, $u(b) = B$), potom $u' = (r + \sin \theta)/\cos \theta$, odkiaľ (vzhľadom ku $\cos \theta > 0$)

$$\cos \theta = [u'r + \sqrt{(u'r)^2 + (1 - r^2)(1 + u'^2)}]/(1 + u'^2);$$

po dosadení do funkcionálu času T a úprave dostaneme

$$T(u) = \int_0^b [\alpha \sqrt{1 + (\alpha u')^2} - \alpha^2 u' r] \, dx, \quad \text{kde} \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - r^2}}.$$

Pre Lagrangián $f(x, s)$ platí $f_{ss} > 0$, takže funkcionál je striktnie konvexný. Z Eulerovej rovnice $\alpha u' = [C(1 - r^2) + r]/\sqrt{1 + (\alpha u')^2}$ dostaneme

$$u'^2[(1 - Cr)^2 - C^2] = [C(1 - r^2) + r]^2$$

pre vhodnú konštantu C , takže musí $(1 - Cr)^2 - C^2 > 0$ s.v. a

$$B = \int_0^b u' \, dx = \int_0^b \frac{C(1 - r^2) + r}{\sqrt{(1 - Cr)^2 - C^2}} \, dx.$$

Podmienka pre C sa dá tiež napísať v tvare $C \in (-(1 - r)^{-1}, (1 + r)^{-1})$ s.v. Ak je r konštantné, potom vhodnou voľbou C dosiahneme zrejme ľubovoľnú predpísanú hodnotu B . Ak je však napr. $b = 1/6$ a $r(x) = \frac{1}{2}(1 - 3x)$, potom $r \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ a hodnoty B , ktoré dostaneme pre $C \in [-4/3, 2/3]$, vyplnia len ohraničený interval hodnôt $[B^-, B^+]$, pričom napr. B^+ sa nadobúda pre $C = 2/3$:

$$B^+ = \int_0^b \frac{2 + 3r - 2r^2}{\sqrt{5 - 12r + 4r^2}} \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{1/6} \frac{6 - 3x - 9x^2}{\sqrt{12x + 9x^2}} \, dx = \frac{7}{16} + \frac{\ln 2}{3} \doteq 0.67.$$

Interpretácia: Pre hodnoty $B > B^+$ bude prvá časť ideálnej dráhy spočívať v plavbe popri „rýchlom“ brehu až do vzdialenosti $B - B^+$; pre $B < B^-$ bude záverečná časť dráhy spočívať v plavbe proti prúdu pri „pomalom“ brehu. Podobne, keby napr. $b = 1$, $r(x) = \min(1/4 + x, 5/4 - x)$, potom by pre veľké B časť optimálnej dráhy spočívala v plavbe po prúde v strede rieky (a teda by nebola funkciou premennej x).

Uvedený príklad je veľmi špeciálnym prípadom tzv. Zermelovho navigačného problému, viď napr. [14].

Príklad 13.24. (Ramseyov model z ekonomickej úlohy o optimálnej spotrebe) Hľadáme maximum funkcionálu $\int_0^T e^{-\delta t} U(c(t)) \, dt$, kde funkcia $c : [0, T] \rightarrow (0, \infty)$ reprezentuje spotrebu, $U \in C^2(0, \infty)$ je úžitková funkcia spĺňajúca podmienky $U' > 0$, $U'' \leq 0$ a $\delta > 0$ je parameter, ktorý zodpovedá miere netrpezlivosti spotrebiteľa. Ak $u = u(t)$ označuje kapitál, $p = p(u)$ produkčnú funkciu a $r \geq 0$ koeficient znehodnocovania kapitálu, potom pre u dostávame diferenciálnu rovnicu $u'(t) = p(u(t)) - ru(t) - c(t)$, takže máme maximalizovať funkcionál $\Phi(u) = \int_0^T e^{-\delta t} U(p(u(t)) - ru(t) - u'(t)) \, dt$. Uvažujme okrajové podmienky $u(0) = A > 0$, $u(T) = 0$ a uvažujme tiež pre jednoduchosť prípad $p(u) = qu$, kde $q > 0$ (q môže predstavovať úrok, r infláciu). Ak označíme $m := q - r$, potom má podintegrovaná funkcia f tvar $f(t, u, s) := e^{-\delta t} U(mu - s)$ a Eulerova rovnica má za predpokladu $u \in C^2$ tvar $(u'' - mu')U''(mu - u') = (m - \delta)U'(mu - u')$. Pre $c = mu - u'$, dostávame teda rovnicu $U''(c)c' + (m - \delta)U'(c) = 0$, odkiaľ $U'(c) = Ce^{-(m-\delta)t}$. Špeciálne pre $U(c) = \ln c$ dostávame $c(t) = \tilde{C}e^{(m-\delta)t}$, $u(t) = e^{mt}(C_1 + C_2e^{-\delta t})$, takže vzhľadom k okrajovým podmienkam

$$u(t) = Ae^{mt} \frac{e^{-\delta t} - e^{-\delta T}}{1 - e^{-\delta T}}, \quad c(t) = \delta A \frac{e^{(m-\delta)t}}{1 - e^{-\delta T}}.$$

S použitím teórie poľa extrémál (viď Veta 15.11) je jednoduché dokázať, že nájdená funkcia u je globálnym maximizérom funkcionálu Φ medzi všetkými C^1 funkciami spĺňajúcimi dané okrajové podmienky a podmienku $mu - u' > 0$. Nájdite optimálnu spotrebu pre $\delta = 0$.

Príklad 13.25. (Weierstrass) Nech $\Phi(u) = \int_{-1}^1 x^2(u')^2 dx$ pre $u \in W^{1,2}(-1,1)$, $u(-1) = -1$, $u(1) = 1$. Funkcionál Φ je konvexný, ale nie je koercívny. Ak je u slabý lokálny minimizér, potom z (13.7) dostaneme rovnicu $2u'x^2 = C$, ktorá nemá riešenie ani v triede $\mathcal{A}_1$ ($C/x^2 \notin L^1$ pre $C \neq 0$).

Príklad 13.26. (Hilbert) Uvažujme funkcionál $\Phi(u) = \int_0^1 x^{2/3}(u')^2 dx$ s okrajovými podmienkami $u(0) = 0$, $u(1) = 1$. Riešením Eulerovej rovnice $x^{2/3}u' = C$ dostaneme podozrivú funkciu $u_0(x) = x^{1/3}$, ktorá síce nepatrí do $W^{1,2}(0,1)$, ale $\Phi(u_0) < \infty$. Ukážme, že ide o globálny minimizér v triede $\mathcal{A}_1$.

Predpokladajme naopak, že existuje $v \in \mathcal{A}_1$ a $\eta > 0$ tak, že $\Phi(v) \leq \Phi(u_0) - \eta$. Pre $\delta \in (0,1)$ označme $\Phi_\delta(u) = \int_\delta^1 x^{2/3}(u')^2 dx$ a $v_\delta = v|_{[\delta,1]}$. Keďže $\Phi_\delta(v_\delta) < \infty$, platí $v_\delta \in W^{1,2}(\delta,1)$. Funkcionál Φ_δ je konvexný, koercívny a spojitý na množine $\mathcal{A}_{2,\delta} := \{u \in W^{1,2}(\delta,1) : u(\delta) = v(\delta), u(1) = 1\}$, takže existuje jeho globálny minimizér u_δ . Podľa Vety 13.11 je u_δ triedy C^1 . Riešením Eulerovej rovnice dostaneme $u_\delta(x) = C_\delta x^{1/3} + 1 - C_\delta$, kde $C_\delta = (1 - v(\delta))/(1 - \delta^{1/3}) \rightarrow 1$ pre $\delta \rightarrow 0+$. Zrejme platí

$$\Phi(u_0) - \eta \geq \Phi(v) \geq \Phi_\delta(v_\delta) \geq \Phi_\delta(u_\delta) \rightarrow \Phi(u_0),$$

čo je spor. Ukážte tiež $\Phi(u_0 + v) = \Phi(u_0) + \Phi(v) \geq \Phi(u_0)$ a s pomocou per partes ukážte, že substitúcia $u = x^{1/3}v$ vedie k minimalizácii funkcionálu $\tilde{\Phi}(v) = \frac{1}{3} + \int_0^1 x^{7/9}(v'(x))^2 dx$.

Cvičenie 13.27. Ukážte, že $u_0(x) = x^{1/3}$ je globálny minimizér funkcionálu $\Phi(u) = \int_0^1 x^2(u')^4 dx$ na množine $\{u \in W^{1,1}(0,1) : u(0) = 0, u(1) = 1\}$.

Príklad 13.28. Nech $\Phi(u) = \int_{-1}^1 x^{2/5}(u')^2 dx$ pre $u \in W^{1,2}(-1,1)$, $u(-1) = -1$, $u(1) = 1$. Funkcionál Φ je konvexný (a kvadratický), nie je koercívny. Z (13.7) dostaneme jedinú podozrivú funkciu $u_0(x) = x^{3/5}$. Ľahko sa overí, že pre $h \in W_0^{1,2}(-1,1)$ platí $\Phi'(u_0)h = 0$, $\Phi''(u_0)(h,h) = 2 \int_{-1}^1 x^{2/5}(h')^2 dx \geq 0$, čo vzhľadom k tomu, že ide o kvadratický funkcionál, znamená $\Phi''(u)(h,h) \geq 0$ pre každé $u \in W^{1,2}(-1,1)$, takže u_0 je globálny minimizér.

Cvičenie 13.29. (Hilbert) Nech $\Phi(u) = \int_0^1 (x^2(u')^2 + 12u^2) dx$, $u(0) = A$, $u(1) = 1$. Ukážte, že Φ nadobúda svoje infimum v triede $\mathcal{A}_2$ práve vtedy, keď $A = 0$. Označme ďalej $I_A := \inf_{\mathcal{A}_2} \Phi$. Ukážte, že $I_A = I_0$ pre každé A .

Cvičenie 13.30. Nech $\Phi(u) = \int_0^1 (x(u')^2 + u^2/x) dx$, $u(0) = 0$, $u(1) = 1$. Ukážte, že $u_0(x) = x$ je globálny minimizér v triede $\mathcal{A}_2$.

Príklad 13.31. Nech $\Phi(u) = \int_1^2 \frac{1}{x} \sqrt{1 + (u')^2} dx$ pre u spĺňajúce okrajové podmienky $u(1) = \sqrt{3}$, $u(2) = 0$. Funkcionál Φ je koercívny v $\mathcal{A}_p$ len pre $p = 1$; priestor $W^{1,1}$ nie je reflexívny. Funkcia $f(x,u,s) = \frac{1}{x} \sqrt{1 + s^2}$ je pre dané x triedy C^2 s ohraničenými deriváciami, takže Φ je triedy C^1 vo $W^{1,p}$ pre každé $p > 1$. Integráciou (13.7) dostaneme pri hľadaní minima Φ jedinú podozrivú funkciu $u_0(x) = \sqrt{4 - x^2}$. Zrejme u_0 nie je triedy C^1 , $u_0 \in W^{1,p}$ práve keď $p < 2$. Platí $f_{ss}(x,u,s) = \frac{1}{x}(1 + s^2)^{-3/2} > 0$, ale Φ nie je triedy C^2 vo $W^{1,p}$ pre $p < 2$. Pretože je však Φ konvexný a v priestore $W^{1,p}$ pre $1 < p < 2$ platí $\Phi'(u_0)h = 0$ pre $h \in W_0^{1,p}$, je u_0 globálny minimizér Φ v $\mathcal{A}_p$. Zo spojitosti Φ vo $W^{1,1}$ plynie, že ide aj o globálny minimizér v $\mathcal{A}_1$. Toto sa dá dokázať aj priamo, pretože Φ je konvexný vo $W^{1,1}$ a v tomto priestore platí $\delta\Phi(u_0; h) = 0$ pre každú $h \in W_0^{1,1}$. Ktorý z predpokladov Vety 13.11 nie je splnený?

Príklad 13.32. Nech $\Phi(u) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{u^2 + (u')^2} dx$, $u(0) = u(\pi/2) = 1$. Funkcionál Φ je zrejme konvexný; jeho prípadný kritický bod teda bude globálnym minimizérom. Eulerova rovnica pre $u \neq 0$ má tvar $u''u - 2(u')^2 = u^2$, t.j. $(1/u)'' = -(1/u)$; jej riešením sú funkcie tvaru $u = C_1/\sin(x + C_2)$. Z okrajových podmienok dostaneme extrémnu $u_0(x) = 1/[\sqrt{2}\sin(x + \pi/4)]$, ktorá je teda globálnym minimizérom. Funkcionál Φ síce nie je striktnie konvexný vo $W^{1,1}(0, \pi/2)$ (uvažujte funkcie s disjunktnými nosičmi), ale funkcia $\varphi(t) = \Phi(u_0 + th)$ je striktnie konvexná pre každé $h \in C_0^1$ (dokážte), takže u_0 je jediný minimizér Φ v $\mathcal{A}_1$. Pre funkcionál Φ na intervale $[0,1]$ s okrajovými podmienkami $u(0) = 0$, $u(1) = 1$ pritom minimizér v $\mathcal{A}_1$ neexistuje (viď Cvičenie 4.11).

Príklad 13.33. Nech $\Phi(u) = \int_1^2 u'(1 + x^2 u') dx$ pre $u \in W^{1,2}(1,2)$ a vyšetrujme extrémny Φ pre okrajové podmienky $u(1) = -1$, $u(2) = 1$. Pretože $\Phi''(u)(h,h) = \int_1^2 2x^2(h'(x))^2 dx \geq c\|h\|^2$ pre vhodné $C > 0$ a pre všetky $h \in W_0^{1,2}(1,2)$, existuje jediný lokálny minimizér Φ v $\mathcal{A}_2$ a súčasne ide o minimizér globálny. Vzhľadom k Vete 13.11 je toto minimum C^1 -funkcia. Eulerova rovnica má tvar $1 + 2x^2 u' = C$. Riešením tejto rovnice s danými okrajovými podmienkami je jediná funkcia $u_0(x) = 3 - \frac{4}{x}$, takže ide o hľadaný globálny minimizér. Všimnite si, že pre u spĺňajúce dané okrajové podmienky platí $\Phi(u) = \int_1^2 x^2(u')^2 dx + 2$, takže stačilo vyšetřovať funkcionál $\tilde{\Phi}(u) = \int_1^2 x^2(u')^2 dx$.

Cvičenie 13.34. Nájdite globálne minimizéry nasledujúcich funkcionálov na množine funkcií $u \in W^{1,2}(0,1)$, ktoré spĺňajú zadané okrajové podmienky. (Najprv dokážte existenciu a regularitu týchto minimizérov.)

- (i) $\Phi(u) = \int_0^1 [1 + (1+x^2)(u')^2] dx$, $u(0) = 0$, $u(1) = \frac{\pi}{4}$;
- (ii) $\Phi(u) = \int_0^1 ((u')^2 - 6x^2u + u^3u') dx$, $u(0) = 1$, $u(1) = 2$;
- (iii) $\Phi(u) = \int_0^1 [(u')^2 - 2xu - 3u'u^2] dx$, $u(0) = 0$, $u(1) = -1$;
- (iv) $\Phi(u) = \int_1^2 x^3(u')^2 dx$, $u(1) = 5$, $u(2) = 2$;
- (v) $\Phi(u) = \int_0^\pi [4(u')^2 + 2uu' - u^2] dx$, $u(0) = 2$, $u(\pi) = 0$.

Cvičenie 13.35. Nájdite globálny minimizér funkcionálu $\Phi(u) = \int_0^1 \sqrt[4]{1+u'^2} dx$ na množine $M = \{u \in C^1 : u(0) = 0, u(1) = 1, |u'| < \sqrt{2}\}$. Ide o globálny minimizér v $X = \{u \in C^1 : u(0) = 0, u(1) = 1\}$?

Veta 13.36. (Regularita C^1 -minimizéra) *Nech $f \in C^{0,1}$ a $f_s \in C^1$. Nech je u_0 slabý lokálny minimizér Φ v $\mathcal{A}_C$. Ak $x_0 \in (a,b)$, $f_{ss}(x_0, u_0(x_0), u'_0(x_0)) \neq 0$, potom existuje $\delta > 0$ tak, že $u_0 \in C^2((x_0 - \delta, x_0 + \delta))$. Ak $f_{ss}(x, u_0(x), u'_0(x)) \neq 0$ pre žiadne $x \in [a,b]$, potom $u_0 \in C^2([a,b])$. Ak navyše $f \in C^k$, $k \geq 3$, potom $u_0 \in C^k$.*

Dôkaz. Definujme funkciu F vzt'ahom (13.4) (kde C je konštanta z (13.6)). Z dôkazu Vety 13.16 plynie $F(x, u'_0(x)) = 0$. Z vety o implicitnej funkcii plynie, že rovnica $F(x, s) = 0$ má pre x blízke k x_0 a s blízke k $u'_0(x_0)$ jediné riešenie $s = s(x)$ a navyše $s \in C^1$. Z lokálnej jednoznačnosti a spojitosti u'_0 plynie $s(x) = u'_0(x)$ pre x blízko x_0 , takže $u_0 \in C^2((x_0 - \delta, x_0 + \delta))$.

Označme ďalej $f^0(x) := f(x, u_0(x), u'_0(x))$ (a podobne f_s^0, f_{ss}^0 atď.) a predpokladajme $f_{ss}^0 \neq 0$ v $[a,b]$. Podľa vyššieho platí $u_0 \in C^2((a,b))$. Rozderivovaním v Eulerovej rovnici dostaneme

$$f_u^0 - f_{sx}^0 - f_{su}^0 u'_0 - f_{ss}^0 u''_0 = 0 \quad \text{v } (a,b),$$

takže v intervale (a,b) platí

$$u''_0 = \frac{1}{f_{ss}^0} [f_u^0 - f_{sx}^0 - f_{su}^0 u'_0]. \quad (13.8)$$

Pretože pravá strana v (13.8) je spojitá funkcia v $[a,b]$, je aj $u_0 \in C^2([a,b])$. Ak je f triedy C^k , potom derivovaním (13.8) dostaneme $u_0 \in C^k$. $\square$

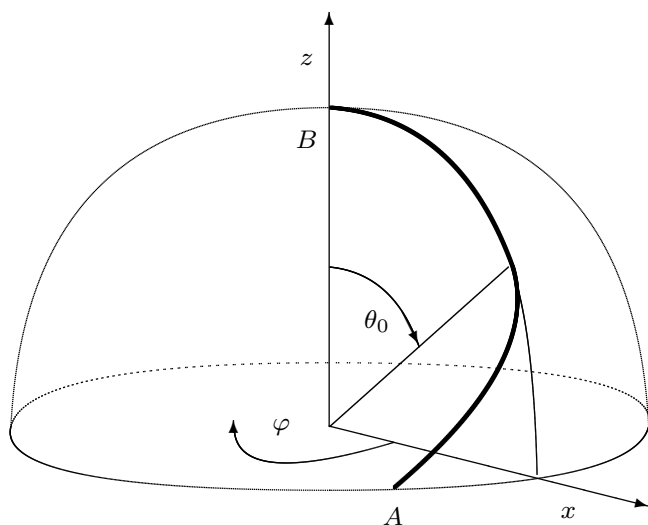
Poznámka 13.37. (i) Vo Vete 13.36 je napr. predpoklad existencie f_{sx} nutný (viď Cvičenie 13.39). Uvedenú vetu pritom budeme v ďalšom potrebovať pre funkcionály s funkciou f tvaru $f(x, u, s) = P(x)s^2 + Q(x)u^2$, kde $P \in C^1([a,b])$ a $Q \in C([a,b])$, takže sme (z dôvodov jednoduchosti) nemohli predpokladať napr. $f \in C^2$.

(ii) Podobne ako v Poznámke 13.17(i) dostaneme, že Veta 13.36 platí nielen pre slabé lokálne minimizéry, ale všetky kritické body funkcionálu Φ .

Príklad 13.38. Zrejme existuje globálny minimizér funkcionálu $\Phi(u) = \int_0^1 [(u')^4 - 4u] dx$ vo $W^{1,4}$ s okrajovými podmienkami $u(0) = 1$, $u(1) = \frac{1}{4}$ (funkcionál je konvexný, spojitý a koercívny). Funkcionál Φ je diferencovateľný, takže každý jeho slabý minimizér musí spĺňať (13.7). Odtiaľ integráciou dostaneme, že jeho jediný minimizér je funkcia $u_0(x) = 1 - \frac{3}{4}x^{4/3}$. Funkcia u_0 je triedy C^1 , ale nie je triedy C^2 , príslušná funkcia f spĺňa $f_{ss}(x, u, s) = 12s^2 > 0$ pre $s \neq 0$.

Cvičenie 13.39. Nech $\Phi(u) = \int_{-1}^1 (u' - 2|x|)^2 dx$ pre $u \in W^{1,2}(-1,1)$ spĺňajúce okrajové podmienky $u(\pm 1) = \pm 1$. Ukážte, že $u_0(x) = x|x|$ je globálny minimizér, $u_0 \in C^1 \setminus C^2$, pričom $f(x, s) = (s - 2|x|)^2$ je triedy $C^{0,2}$, $f_{ss} = 2 > 0$.

Príklad 13.40. Uvažujme vozidlo, ktoré je schopné na ceste s uhlom stúpania ϑ vyvinúť maximálnu rýchlosť $v = v(\vartheta) = \cos \vartheta$, a kopec v tvare hemisféry, na ktorý treba postaviť cestu tak, aby po nej uvažované vozidlo vyšlo na vrchol v čo najkratšom čase.



Pokiaľ je uhol stúpania hľadanej cesty v danom bode ϑ , potom vertikálna zložka (maximálnej) rýchlosti vozidla bude

$$g(\vartheta) = v(\vartheta) \sin \vartheta = \cos \vartheta \sin \vartheta = \frac{1}{2} \sin(2\vartheta).$$

Funkcia $g : [0, \pi/2] \rightarrow [0, 1/2]$ je rastúca na intervale $[0, \pi/4]$ a klesajúca na intervale $[\pi/4, \pi/2]$. Pre optimálnu cestu bude teda uhol stúpania rovný $\pi/4$ (pokiaľ sme na tej časti kopca, kde maximálne stúpanie je aspoň $\pi/4$), resp. bude rovný maximálnemu možnému stúpaniu ak je toto menšie než $\pi/4$. Predpokladajme, že uvažovaná hemisféra má polomer 1 a zavedme si sférické súradnice $\theta \in [0, \pi/2]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, t.j.

$$x = \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \cos \theta,$$

viď obrázok. Ak si optimálnu cestu parametrizujeme parametrom θ , potom pre $\theta < \pi/4$ musí táto cesta viesť po „poludníku“ (bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať $\varphi(\theta) = 0$) a pre $\theta > \pi/4$ musí pre uhol stúpania platiť $\vartheta = \pi/4$, t.j. v príslušnom bode $(\theta, \varphi(\theta))$ platí

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin \vartheta = \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 + \varphi'(\theta)^2}}, \quad \text{odkiaľ} \quad |\varphi'(\theta)| = \sqrt{2 \sin^2 \theta - 1}.$$

Všimnime si, že funkcia φ pre optimálnu cestu v bode $\theta_0 := \pi/4$ je C^1 , ale nie je C^2 .

Pre všeobecnú C^1 funkciu $\varphi = \varphi(\theta)$ popisujúcu hladkú klesajúcu cestu z vrcholu B do bodu $A = (\pi/2, \varphi(\pi/2))$ je pritom čas potrebný na jej prekonanie v opačnom smere rovný

$$T(\varphi) = \int_A^B \frac{1}{v} ds = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos \vartheta} \sqrt{1 + \varphi'(\theta)^2} d\theta = \int_0^{\pi/2} f(\theta, \varphi'(\theta)) d\theta, \quad \text{kde} \quad f(\theta, s) = \frac{1 + s^2}{(1 + s^2 - \sin^2 \theta)^{1/2}}.$$

Kedže

$$f_s(\theta, s) = \frac{s(1 + s^2 - 2 \sin^2 \theta)}{(1 + s^2 - \sin^2 \theta)^{3/2}}, \quad f_{ss}(\theta, s) = \frac{s^2(1 + \sin^2 \theta) + (1 - 2 \sin^2 \theta)(1 - \sin^2 \theta)}{(1 + s^2 - \sin^2 \theta)^{5/2}},$$

je vidno, že nami nájdená optimálna cesta rieši Eulerovu rovnicu $f_s(\theta, \varphi'(\theta)) = C$ a tiež platí $f_{ss}(\theta, \varphi'(\theta)) > 0$ pre $\theta \in [0, \pi/2) \setminus \{\pi/4\}$, $f_{ss}(\theta, \varphi'(\theta)) = 0$ pre $\theta = \pi/4$.

Zistite, ako sa situácia zmení, ak pre maximálnu rýchlosť platí $v(\vartheta) = \cos^3(\vartheta)$ (takýto príklad skúmal Maxwell v r. 1876).

Cvičenie 13.41. Nech $\Phi(u) = \int_{-1}^1 u^2(2x - u')^2 dx$ pre $u \in W^{1,2}(-1, 1)$, $u(-1) = 0$, $u(1) = 1$. Ukážte (priamo z definície), že $u_0(x) = 0$ pre $x \leq 0$, $u_0(x) = x^2$ pre $x \geq 0$, je jediný globálny minimizér, $u_0 \notin C^2$. Funkcia $f(x, u, s) = u^2(2x - s)^2$ je pritom hladká, $f_{ss} \geq 0$.

Cvičenie 13.42. Ukážte, že ak $0 < \alpha < 1$, potom je kvadratický funkcionál $\Phi(u) = \int_0^1 (u')^2 x^{-\alpha} dx$ triedy C^2 v $C^1([0, 1])$ a jeho globálnym minimizérom pre okrajové podmienky $u(0) = 0$, $u(1) = 1$ je funkcia $u_0(x) = x^{\alpha+1}$, ktorá nie je triedy C^2 .

Cvičenie 13.43. Ukážte, že funkcionál $\Phi(u) = \int_0^1 [(u')^2 + (u/x)^2] dx$ je definovaný (a triedy C^2) v $X = \{u \in W^{1,2} : u(0) = 0\}$ a že jeho globálny minimizér na množine $\{u \in X : u(1) = 1\}$ je funkcia $u_0(x) = x^\alpha$, kde $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$.

Veta 13.44. (du Bois-Reymondova nutná podmienka) *Nech $f \in C^1$, $u_0 \in C^2$ je slabý lokálny minimizér Φ v $\mathcal{A}_C$, $g^0(x) := g(x, u_0(x), u'_0(x))$ pre $g \in \{f, f_x, f_s, \dots\}$. Potom je funkcia $f^0 - u'_0 f_s^0$ triedy C^1 a u_0 spĺňa du Bois-Reymondovu (druhú Euler-Lagrangeovu) rovnicu*

$$\frac{d}{dx}(f^0 - u'_0 f_s^0) = f_x^0.$$

Dôkaz. Hladkosť funkcie $f^0 - u'_0 f_s^0$ plynie z Vety 13.16 a predpokladov $f \in C^1$ a $u_0 \in C^2$. Ďalej s využitím Eulerovej rovnice $\frac{d}{dx} f_s^0 = f_u^0$ dostaneme

$$\frac{d}{dx}(f^0 - u'_0 f_s^0) = f_x^0 + f_u^0 u'_0 + f_s^0 u''_0 - u''_0 f_s^0 - u'_0 \frac{d}{dx} f_s^0 = f_x^0. \quad \square$$

Poznámky 13.45. (i) Ak $f \in C^2$, $u_0 \in C^2$ je riešením du Bois-Reymondovej rovnice a $u'_0 \neq 0$ s.v., potom otočením postupu v dôkaze Vety 13.44 dostaneme, že u_0 je tiež riešením Eulerovej rovnice, t.j. ide o kritický bod funkcionálu Φ .

(ii) Du Bois-Reymondovu rovnicu možno odvodiť aj za slabších predpokladov, napr. $u_0 \in C^1$. Použitím substitúcie $x = y + \varepsilon v$, $u = v$ (kde ε je malé) prejdú funkcie $u \in \mathcal{A}_C$ v C^1 -okolí minimizéru u_0 na funkcie $v(y) = u(y + \varepsilon v(y))$ triedy $C^1([\alpha, \beta])$ (kde $\alpha = a - \varepsilon A$, $\beta = b - \varepsilon B$) spĺňajúce podmienky $v(\alpha) = A$, $v(\beta) = B$ a minimizér u_0 prejde na minimizér v_0 pre funkcionál

$$\tilde{\Phi}(v) = \int_{\alpha}^{\beta} \tilde{f}(y, v(y), v'(y)) dy, \quad \text{kde } \tilde{f}(y, v, z) := f(y + \varepsilon v, v, z/(1 + \varepsilon z))(1 + \varepsilon z).$$

Z integrovaného tvaru Eulerovej rovnice pre $\tilde{\Phi}(v_0)$ a Eulerovej rovnice pre $\Phi(u_0)$ sa ľahko odvodí integrovaný tvar du Bois-Reymondovej rovnice

$$f(x, u_0(x), u'_0(x)) - u'_0(x) f_s(x, u_0(x), u'_0(x)) = \int_a^x f_x(\xi, u_0(\xi), u'_0(\xi)) d\xi + C, \quad (13.9)$$

odkiaľ zderivovaním dostaneme du Bois-Reymondovu rovnicu (pravá strana v (13.9) je C^1 -funkcia). Pri tomto odvodení sa skutočne využije to, že u_0 je lokálny minimizér (uvedený dôkaz sa nedá zovšeobecniť tak, aby sme dostali (13.9) pre ľubovoľný kritický bod Φ ; viď tiež (iv)).

(iii) V prípade kritických bodov sme miesto $u_0 \in C^2$ vo Vete 13.44 mohli vzhľadom k Vete 13.36 predpokladať napr. $u_0 \in C^1$, $f_s \in C^1$ a $f_{ss}^0 \neq 0$; viď tiež Cvičenie 13.46.

(iv) Analógia Vety 13.44 platí aj pre kritické body Φ v prípade $N > 1$. Pre takéto N ale existuje $f = f(s) \in C^{N-1}(\mathbb{R}^N)$ a C^1 funkcia $u_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^N$ tak, že $f_s^0 \equiv 0$ (t.j. u_0 je extrémála), ale f^0 nie je konštantná (viď [58]); t.j. tvrdenie vyžaduje vyššiu hladkosť u_0 než C^1 (napr. $u_0 \in W^{2,1}$).

Cvičenie 13.46. Nech $f, f_s \in C^1$, $f = f(u, s)$, $K \subset \mathbb{R}$ je konečná, $G_i \subset \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, m$, sú otvorené, $g_i \in C^1(G_i)$, $\lim_{t \rightarrow t_0} |g_i(t)| = \infty$ pre každé i a $t_0 \in \partial G_i$. Nech platí $f_{ss}(u, s) = 0 \Rightarrow [u \in K \text{ alebo } (\exists i)(u \in G_i, s = g_i(u))]$. Ak je u_0 C^1 -extrémála, potom je $F := f^0 - u'_0 f_s^0$ konštantná v $[a, b]$. Dokážte.

Príklad 13.47. Nech $\Phi(u) = \int_0^1 u(u')^2 dx$, $u(0) = u(1) = 1$. Nech je $u_0 \in \mathcal{A}_C$ extrémála. Z Cvičenia 13.46 plynie $u(u')^2 = C$ na $[0, 1]$. Keďže $u'_0(x_0) = 0$ pre vhodné x_0 , musí $C = 0$. Jediným C^1 riešením rovnice $u(u')^2 = 0$ s počiatočnou podmienkou $u(0) = 1$ je funkcia $u_0(x) \equiv 1$; táto funkcia rieši aj Eulerovu rovnicu, takže je to extrémála. Priamo z definície plynie, že u_0 je silný lokálny minimizér ($\Phi(u) \geq \Phi(u_0) = 0$ pre $u \geq 0$). Ľahko sa zistí, že u_0 nie je globálny minimizér Φ v $\mathcal{A}_C$.

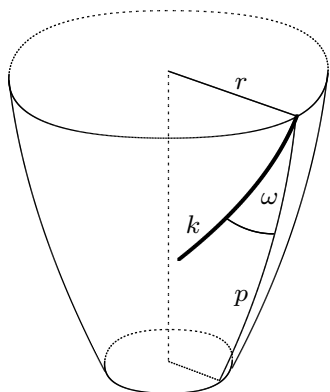
Príklad 13.48. Nech $\Phi(u) = \int_{-2}^2 f(u, u') dx$, $u(\pm 2) = \pm 1$, $f(u, s) = s^4 + 3u^2$. Z du Bois-Reymondovej rovnice dostaneme podmienku $(u - u'^2)(u + u'^2) = C$, odkiaľ nájdeme podozrivú funkciu $u_0(x) = |x|x/4$. Funkcia u_0 nie je triedy C^2 , ale je riešením Eulerovej rovnice. Pretože Φ je striktnie konvexný, ide o globálny minimizér.

Cvičenie 13.49. (Poincarého geometria) Ak hornú polrovinu $[y > 0]$ v $\mathbb{R}^2$ chápeme ako Riemannovu varietu s metrikou $ds = \frac{1}{y} \sqrt{dx^2 + dy^2}$, potom vzdialenosť dvoch bodov $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ($x_1 < x_2, y_1, y_2 > 0$) môžeme zrejme nájsť minimalizáciou funkcionálu $\Phi(u) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{u} \sqrt{1 + u'^2} dx$ pre funkcie u spĺňajúce podmienky $u(x_1) = y_1, u(x_2) = y_2$. Nájdite kritické body Φ triedy C^2 a určte príslušnú hodnotu Φ . Ak $y_1 = y_2 = C$, ukážte priamo, že takto vypočítaná hodnota je menšia ako hodnota $\Phi(u_1)$, kde $u_1 \equiv C$.

Cvičenie 13.50. (Izoperimetrická úloha, Dido) Aká najväčšia plocha v $\mathbb{R}^2$ sa dá ohraničiť osou x a hladkou krivkou dĺžky l ? Prepokladajte, že hľadaná krivka existuje a je grafom funkcie $u : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}^+, u(0) = u(b) = 0$.

Cvičenie 13.51. (Fermatov princíp) Nech $\Phi(u) = \int_a^b \varphi(u) \sqrt{1 + u'^2} dx$, kde $\varphi \in C^2, C_0 \geq \varphi(t) \geq c_0 > 0$ pre všetky $t, u(a) = A, u(b) = B$. Ukážte, že prípadný (C^1) -minimizér rieši diferenciálnu rovnicu $\varphi(u) = C \sqrt{1 + u'^2}$.

Príklad 13.52. (Geodetické krivky na rotačnej ploche)



Majme rotačnú plochu zadanú cylindrickými súradnicami

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = g(r)$$

a na nej geodetickú krivku k zadanú funkciou $r = r(\varphi)$ (viď obrázok). Tá musí byť kritickým bodom funkcionálu

$$\Phi(r) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} ds = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + (1 + g'(r)^2)(r')^2} d\varphi,$$

kde ds je diferenciál dĺžky. Z du-Bois Reymondovej rovnice dostaneme

$$\frac{r^2}{\sqrt{r^2 + (1 + g'(r)^2)(r')^2}} = C, \quad \text{t.j.} \quad r^2 \frac{d\varphi}{ds} = C.$$

Keďže $\frac{rd\varphi}{ds} = \sin \omega$, kde ω je uhol medzi krivkou k a príslušným poludníkom p (viď obrázok), platí $r \sin \omega = C$. Tento vzťah medzi r a ω odvodil A.C. de Clairaut v 18. storočí.

Príklad 13.53. Uvažujme funkcionál $\Phi(u) = \int_0^1 (u')^2 u^2 dx$ s okrajovými podmienkami $u(0) = -1, u(1) = 1$. Ukážeme, že Φ nadobúda svoje infimum v $\mathcal{A}_1$ ale nie v $\mathcal{A}_2$.

Z viet o regularite $W^{1,p}$ -minimizéra a C^1 minimizéra dostaneme, že každý lokálny $\mathcal{A}_2$ -minimizér u_0 musí byť triedy C^2 tam, kde $u_0 \neq 0$ (a u_0 tam rieši Eulerovu a du Bois-Reymondovu rovnicu). Ak označíme x_0 najmenší nulový bod u_0 , potom riešením du Bois-Reymondovej rovnice $(u'u)^2 = C$ na $[0, x_0]$ dostaneme $u_0(x) = -\sqrt{1 - x/x_0}$ pre $x \leq x_0$, ale $u_0 \notin W^{1,2}(0, x_0)$, takže neexistuje lokálny minimizér v $\mathcal{A}_2$. Pre funkciu $u_0 \in \mathcal{A}_1$ definovanú predpisom $u_0(x) = -\sqrt{1 - 2x}$ pre $x \leq 1/2, u_0(x) = \sqrt{2x - 1}$ pre $x \geq 1/2$ platí $\Phi(u_0) = 1$. Nech $u \in \mathcal{A}_1$. Ak $u'u \notin L^2(0, 1)$, potom $\Phi(u) = \infty > \Phi(u_0)$. Ak $u'u \in L^2(0, 1)$, potom existuje $x_0 \in (0, 1)$ tak, že $u(x_0) = 0$ a

$$\Phi(u) = \int_0^{x_0} (u'u)^2 dx + \int_{x_0}^1 (u'u)^2 dx \geq \frac{1}{x_0} \left(\int_0^{x_0} u'u dx \right)^2 + \frac{1}{1 - x_0} \left(\int_{x_0}^1 u'u dx \right)^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x_0} + \frac{1}{1 - x_0} \right) \geq 1,$$

takže u_0 je globálny minimizér.

Cvičenie 13.54. Uvažujme funkcionál $\Phi(u) = \int_0^1 u'^2 (u - 1/2)^2 dx$ s okrajovými podmienkami $u(0) = 0, u(1) = 1$. Ukážte, že $\inf_{\mathcal{A}_2} \Phi = 1/16$.

14. Nutné podmienky pre lokálny minimizér

V tomto paragrafe budeme pre jednoduchosť predpokladať, že f je triedy C^2 , u_0 je extrémála triedy C^1 a budeme hľadať nutné podmienky pre to, aby u_0 mohla byť lokálnym minimizérom funkcionálu Φ .

Veta 14.1. (Legendreova nutná podmienka) *Nech je u_0 slabý lokálny minimizér Φ v $\mathcal{A}_C$. Potom platí $f_{ss}(x, u_0(x), u'_0(x)) \geq 0$ pre všetky $x \in [a, b]$.*

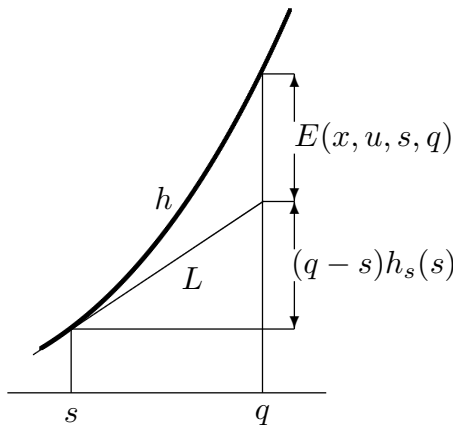
Dôkaz. Dokazovanú nerovnosť stačí zrejme dokázať pre $x \in (a, b)$, pretože funkcia $x \mapsto f_{ss}^0(x) := f_{ss}(x, u_0(x), u'_0(x))$ je spojitá. Zvoľme teda $x_0 \in (a, b)$. Pretože u_0 je slabý minimizér, musí $\Phi''(u_0)(\varphi, \varphi) \geq 0$ pre všetky $\varphi \in C_0^1$. Pre $h \in W_0^{1,2}(a, b)$ označme

$$\Psi(h) = \int_a^b [f_{ss}^0 h'^2 + 2f_{us}^0 h h' + f_{uu}^0 h^2] dx.$$

Funkcionál $\Psi : W_0^{1,2}(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ je zrejme spojitý a $\Psi(\varphi) = \Phi''(u_0)(\varphi, \varphi) \geq 0$ pre $\varphi \in C_0^1$, takže z hustoty C_0^1 vo $W_0^{1,2}(a, b)$ plynie $\Psi(h) \geq 0$ pre každé $h \in W_0^{1,2}(a, b)$. Voľbou $h(x) = (\varepsilon - |x - x_0|)^+$, vydelením nerovnosti $\Psi(h) \geq 0$ číslom 2ε a limitným prechodom $\varepsilon \rightarrow 0+$ dostaneme požadované tvrdenie. $\square$

Poznámka 14.2. Pre $N > 1$ dostaneme ako Legendrovu nutnú podmienku nezápornosť všetkých hlavných minorov matice $(f_{s_i s_j})$.

Cvičenie 14.3. Zistite, či pre funkcionál $\Phi(u) = \int_{-1}^1 (u')^2 (u' - x) dx$ v množine $\{u \in C^1([-1, 1]) : u(-1) = u(1) = 0\}$ existujú slabé lokálne minimizéry.



Weierstrassova funkcia E je pre $x \in [a, b]$ a $u, s, q \in \mathbb{R}$ definovaná nasledovne

$$E(x, u, s, q) = f(x, u, q) - f(x, u, s) - (q - s)f_s(x, u, s).$$

Ak teda pre pevné x, u označíme $h = f(x, u, \cdot)$ a L bude afinná funkcia, ktorá sa dotýka grafu h v bode $[s, h(s)]$, potom $E(x, u, s, q)$ meria rozdiel funkčných hodnôt h a L v bode q . Ak je h konvexná, potom je zrejme $E(x, u, \cdot, \cdot)$ nezáporná.

Veta 14.4. (Weierstrassova nutná podmienka) *Ak je u_0 slabý lokálny minimizér Φ v $\mathcal{A}_C$, potom existuje $\delta > 0$ tak, že $E(x, u_0(x), u'_0(x), q) \geq 0$ pre všetky $x \in [a, b]$ a $q \in [u'_0(x) - \delta, u'_0(x) + \delta]$. Ak je u_0 silný lokálny minimizér Φ v $\mathcal{A}_C$, potom platí $E(x, u_0(x), u'_0(x), q) \geq 0$ pre všetky $x \in [a, b]$ a $q \in \mathbb{R}$.*

Dôkaz. Podobne ako vo Vete 14.1 stačí dokázať tvrdenie pre $x \in (a, b)$. Pre $h \in W_0^{1,\infty}$ označme

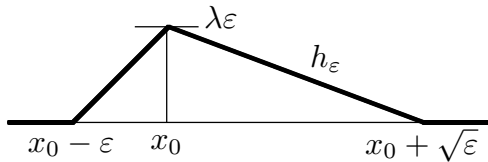
$$\Psi(h) = \int_a^b [f(x, u_0(x) + h(x), u'_0(x) + h'(x)) - f^0(x) - f_u^0(x)h(x) - f_s^0(x)h'(x)] dx.$$

Ak je u_0 slabý (resp. silný) minimizér Φ , potom existuje $\delta > 0$ tak, že

$$\Psi(\varphi) = \Phi(u_0 + \varphi) - \Phi(u_0) - \Phi'(u_0)\varphi \geq 0 \quad (14.1)$$

pre každé $\varphi \in C_0^1$, ktorého C^1 (resp. C) norma je menšia než δ .

Zvoľme $x_0 \in (a, b)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ a pre $\varepsilon > 0$ malé ($\varepsilon < \min(1, x_0 - a, (b - x_0)^2)$) položíme



$$h_\varepsilon(x) := \begin{cases} \lambda(x + \varepsilon - x_0) & \text{pre } x \in [x_0 - \varepsilon, x_0], \\ \lambda\sqrt{\varepsilon}(\sqrt{\varepsilon} - x + x_0) & \text{pre } x \in [x_0, x_0 + \sqrt{\varepsilon}], \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Pre pevné ε môžeme zhladením funkcie h_ε v okolí bodov $x_0 - \varepsilon, x_0, x_0 + \sqrt{\varepsilon}$ nájsť funkcie $\varphi_n \in C_0^1$ tak, že $\varphi_n \rightarrow h_\varepsilon$ vo $W^{1,1}(a, b)$, pričom $\|\varphi_n'\|_C \leq |\lambda|$ a $\|\varphi_n\|_C \leq \varepsilon|\lambda|$. Ak je u_0 slabý lokálny minimizér, potom pre $|\lambda| < \delta$ použitím (14.1) dostávame $\Psi(\varphi_n) \geq 0$ a limitným prechodom $\Psi(h_\varepsilon) \geq 0$. Ak je u_0 silný lokálny minimizér, potom túto nerovnosť dostaneme pre ľubovoľné $\lambda \in \mathbb{R}$ a ε dostatočne malé ($\varepsilon|\lambda| < \delta$).

Vydelením nerovnosti $\Psi(h_\varepsilon) \geq 0$ číslom ε a limitným prechodom $\varepsilon \rightarrow 0+$ dostaneme požadované tvrdenie. Reškálované integrály od $(x_0 - \varepsilon)$ po x_0 konvergujú totiž k $E(x_0, u_0(x_0), u_0'(x_0), u_0'(x_0) + \lambda)$ a integrály od x_0 po $(x_0 + \sqrt{\varepsilon})$ k nule (na intervale $(x_0, x_0 + \sqrt{\varepsilon})$ možno pomocou Taylorovej vety integrand odhadnúť zhora číslom $C \sup_x [h'^2(x) + h^2(x)] \leq C\varepsilon$). $\square$

Cvičenie 14.5. Ukážte, že pre slabý lokálny minimizér $u_0 = 0$ z Príkladu 13.3 nie je splnená Weierstrassova nutná podmienka pre silný lokálny minimizér.

Príklad 14.6. Uvažujme funkcionál $\int_{-1}^1 (x^2(u')^2 + x(u')^3) dx$ s okrajovými podmienkami $u(-1) = u(1) = 0$. Eulerova rovnica má tvar $xu'(2x + 3u') = C$, voľbou $x = 0$ dostávame $C = 0$ a extrémaly $u_0(x) = 0$ a $u_1(x) = (1 - x^2)/3$. Platí $f_{ss}(x, u_0(x), u_0'(x)) \geq 0$ a $f_{ss}(x, u_1(x), u_1'(x)) \leq 0$, pričom rovnosť nastáva len pre $x = 0$, takže v oboch prípadoch je splnená Legendrova nutná podmienka. Ďalej dostávame $E(x, u, s, q) = (q - s)^2 x(q + x + 2s)$, takže $E(x, u_0(x), u_0'(x), q) = xq^2(x + q)$. Pre každé x existuje okolie $\delta(x) > 0$ tak, že $E(x, u_0(x), u_0'(x), q) \geq 0$ pre $|q - u_0'(x)| < \delta(x)$, ale δ sa nedá zvoliť rovnomerne vzhľadom k x , takže nie je splnená Weierstrassova nutná podmienka pre slabý lokálny extrém. Taký istý výsledok dostaneme aj pre $E(x, u_1(x), u_1'(x), q) = x^2 q^2 + xq^3 - 4x^4/27$. Tvrdenie sa dá dokázať priamo, napr. pre u_ε definovanú predpismi $u_\varepsilon(x) = 0$ pre $|x| > \varepsilon$, $u_\varepsilon(x) = \varepsilon^{1/2}(\varepsilon - |x|)$ pre $|x| \leq \varepsilon$ platí $\Phi(u_\varepsilon) < 0$. Ak funkciu u_ε aproximujeme C^1 funkciou, vidíme, že $u_0 = 0$ nie je slabý lokálny minimizér.

Cvičenie 14.7. Nech $\Phi(u) = \int_0^1 (\sin(u')^2 + (u')^4/3) dx$. Vyšetrite C^1 -extrémaly Φ spĺňajúce okrajové podmienky $u(0) = 0$ a $u(1) = \sqrt{\pi/2}$.

Konjugované body

V tomto odstavci budeme predpokladať, že f je triedy C^3 , $u_0 \in C^2$ a

$$f_{ss}^0(x) := f_{ss}(x, u_0(x), u_0'(x)) > 0 \quad \text{pre } x \in [a, b].$$

Označíme

$$P(x) = f_{ss}^0(x), \quad Q(x) = f_{uu}^0(x) - \frac{d}{dx} f_{us}^0(x),$$

$$\Psi(h) = \int_a^b [P(x)h'^2(x) + Q(x)h^2(x)] dx \quad \text{pre } h \in W_0^{1,2}(a, b).$$

Funkcie P, Q sú ohraničené a spojité (P je triedy C^1), $P(x) \geq p_0 > 0$ pre $x \in [a, b]$. Pre $h \in C_0^1$ integráciou per partes dostávame

$$\Psi(h) = \int_a^b [f_{ss}^0 h'^2 + f_{uu}^0 h^2 - \frac{d}{dx} f_{us}^0 h^2] dx = \int_a^b [f_{ss}^0 h'^2 + f_{uu}^0 h^2 + 2f_{us}^0 h h'] dx = \Phi''(u_0)(h, h),$$

takže nezápornosť resp. kladnosť funkcionálu Ψ hrá významnú úlohu pri skúmaní, či je bod u_0 lokálnym minimizérom funkcionálu Φ (viď Vetu 5.5). Eulerova rovnica pre kvadratický funkcionál Ψ má tvar

$$-\frac{d}{dx}[Ph'] + Qh = 0$$

a nazýva sa **Jacobiho rovnica** (pre funkcionál Φ a funkciu u_0). Ak $y \in (a, b]$ a Jacobiho rovnica má netriviálne (klasické) riešenie h na intervale $[a, y]$ spĺňajúce okrajové podmienky $h(a) = h(y) = 0$, potom sa bod y nazýva **konjugovaný bod**.

Cvičenie 14.8. Nech $f(x, u, s) = \varphi(x)s^2 + \psi(x)us + \eta(x)u^2$, kde $\varphi, \psi, \eta \in C^1$, a nech $\Phi(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x)) dx$. Ukážte, že funkcie P, Q a funkcionál Ψ nezávisia od voľby u_0 a $D^2\Phi(u)(h, h) = \Psi(h)$ pre každé $u \in \mathcal{A}_C$ a $h \in C_0^1$. Eulerova rovnica pre Φ má rovnaký tvar ako Jacobiho rovnica.

Význam konjugovaných bodov plyní z nasledujúcej vety.

Veta 14.9. (O konjugovaných bodoch) *Funkcionál Ψ je pozitívne definitný resp. pozitívne semi-definitný vo $W_0^{1,2}(a, b)$ práve vtedy, keď v intervale $(a, b]$ resp. (a, b) neexistuje konjugovaný bod.*

Tvrdenie práve uvedenej vety o konjugovaných bodoch bude plynúť z nasledujúcej vety, pre formuláciu ktorej potrebujeme zaviesť dodatočné pomocné pojmy:

Pre $y \in (a, b]$ v priestore $X_y := W_0^{1,2}(a, y)$ uvažujme skalárny súčin $(u, v)_y := \int_a^y Pu'v' dx$. Z vlastností P plyní, že tento skalárny súčin definuje v X_y normu $\|\cdot\|_y$, ktorá je ekvivalentná štandardnej norme v tomto Sobolevovom priestore. Ak $y < z \leq b$ a funkciu $h \in X_y$ dodefinujeme na intervale $(y, z]$ nulou, potom $h \in X_z$, takže X_y môžeme chápať ako podmnožinu X_z (špeciálne $X_y \subset W_0^{1,2}(a, b)$). Nech je ďalej S_y jednotková sféra v X_y a

$$\lambda_1(y) := 1 + \inf_{h \in S_y} \int_a^y Qh^2 dx = \inf_{h \in S_y} \int_a^y (P(h')^2 + Qh^2) dx = \inf_{h \in S_y} \Psi(h) = \inf_{0 \neq h \in X_y} R_y(h),$$

kde $R_y : X_y \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} : h \mapsto \Psi(h)/\|h\|_y^2$. Funkcionál $g(h) = \int_a^y Qh^2 dx$ je zrejme slabo sekvenciálne spojitý, takže existuje jeho minimum na jednotkovej guli v X_y . Pokiaľ je toto minimum záporné, musí sa nadobúdať na sfére S_y , takže $\lambda_1(y) = \Psi(h_y)$ pre vhodné $h_y \in S_y$.

Nasledujúca veta dáva do súvislosti kladnosť (resp. nezápornosť) $\lambda_1(b)$ s existenciou konjugovaných bodov v intervale $(a, b]$ (resp. (a, b)).

Veta 14.10. *Funkcia $\lambda_1 : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je nerastúca a spojitá, $\lim_{y \rightarrow a+} \lambda_1(y) = 1$. Ak $\lambda_1(y) = 0$, potom je y konjugovaný bod a $\lambda_1(z) < 0$ pre $z > y$. Ak je $y \in (a, b]$ konjugovaný bod, potom $\lambda_1(y) \leq 0$.*

Pre $h \in W_0^{1,2}(a, b)$ platí $\Psi(h) \geq \lambda_1(b)\|h\|_b^2$. Ak je $\lambda_1(b) < 0$, potom existuje $h \in W_0^{1,2}(a, b)$ tak, že $\Psi(h) < 0$.

Dôkaz. Pretože $S_y \subset S_z$ pre $y < z$, je monotónnosť λ_1 zrejmá z definície.

Ak $y \in (a, b]$ a $\varepsilon > 0$, potom $\lambda_1(y) + \varepsilon > \Psi(h_y)$ pre vhodné $h_y \in S_y$. Pre $\delta \in (0, y - a)$ ležia funkcie $h^\delta(x) := h_y(a + (x - a)(y - a)/(y - a - \delta))$ v $X_{y-\delta}$ a

$$\lambda_1(y - \delta) \leq R_{y-\delta}(h^\delta) \rightarrow R_y(h_y) = \Psi(h_y) < \lambda_1(y) + \varepsilon \quad \text{pre } \delta \rightarrow 0+,$$

takže λ_1 je spojitá v bode y zľava.

Ak $y \in (a, b)$, $\varepsilon > 0$ a $\delta \in (0, b - y)$, potom existuje $h_{y+\delta} \in S_{y+\delta}$ tak, že $\lambda_1(y + \delta) + \varepsilon > \Psi(h_{y+\delta}) = R_{y+\delta}(h_{y+\delta})$. Pre funkcie $h^\delta(x) = h_{y+\delta}(a + (x - a)(y - a + \delta)/(y - a))$ potom platí $h^\delta \in S_y$ a $(R_{y+\delta}(h_{y+\delta}) - R_y(h^\delta)) \rightarrow 0$, takže z odhadu $\lambda_1(y) \leq R_y(h^\delta)$ a monotónnosti λ_1 plynie spojitost' λ_1 v bode y sprava.

Z Poincarého nerovnosti (6.8) pre každé $h \in S_y$ plynie

$$\left| \int_a^y Q(x) h^2(x) dx \right| \leq \|Q\|_\infty \int_a^y h^2(x) dx \leq \|Q\|_\infty \left(\frac{y-a}{\pi} \right)^2 \int_a^y (h')^2(x) dx \leq \frac{\|Q\|_\infty}{p_0} \left(\frac{y-a}{\pi} \right)^2 \rightarrow 0$$

pre $y \rightarrow a+$, takže $\lambda_1(y) \rightarrow 1$ pre $y \rightarrow a+$.

Nech $\lambda_1(y) = 0$ a nech h_y je príslušný minimizér Ψ na S_y . Pretože Ψ je kvadratický funkcionál a $\Psi(h_y) = 0$, je h_y globálny minimizér Ψ vo $W_0^{1,2}(a, y)$ a z vyššie dokázaných viet o regularite plynie $h_y \in C^2$. Funkcia h_y ako minimizér Ψ spĺňa príslušnú Eulerovu rovnicu, a teda ide o netriviálne riešenie Jacobiho rovnice na $[a, y]$ s podmienkami $h_y(a) = h_y(y) = 0$. Bod y je teda konjugovaný. Nech teraz navyše $z > y$ a prepokladajme $\lambda_1(z) = 0$. Potom je funkcia h_y (dodefinovaná nulou pre $x \in (y, z]$) globálny minimizér Ψ na S_z , takže musí byť triedy C^2 na $[a, z]$. Pretože $h_y(x) = 0$ pre $x \geq y$, musí $h_y(y) = h'_y(y) = 0$, z jednoznačnosti riešenia počiatočnej úlohy pre Jacobiho rovnicu dostávame $h_y \equiv 0$, spor. Musí teda $\lambda_1(z) < 0$.

Nech je $y \in (a, b]$ konjugovaný bod a nech h je príslušné netriviálne riešenie Jacobiho rovnice na $[a, y]$ s okrajovými podmienkami $h(a) = h(y) = 0$. Potom platí

$$\Psi(h) = \int_a^y [Ph'^2 + Qh^2] dx = \int_a^y \left[-\frac{d}{dx} [Ph'] + Qh \right] h dx = 0,$$

takže $\lambda_1(y) \leq \Psi(h)/\|h\|_y^2 = 0$.

Zvyšné tvrdenia vety sú zrejmé. $\square$

Poznámka 14.11. Analógie predošlých viet platia aj pre $N > 1$. V tomto prípade zvolíme fundamentálny systém riešení $(u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(N)})$ príslušného Jacobiho systému rovníc $(u^{(i)} = (u_1^{(i)}, \dots, u_N^{(i)}))$ s počiatočnou podmienkou $u^{(i)}(a) = 0$, $\frac{d}{dx} u^{(i)}(a) = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ a položíme $U(x) = (u_j^{(i)}(x))$. Bod $y \in (a, b]$ sa nazýva konjugovaný, ak $\det U(y) = 0$. Najmenší konjugovaný bod opäť zodpovedá prípadu, keď príslušný funkcionál Ψ prestáva byť pozitívne definitný. Defekt matice $U(y)$ pritom zodpovedá násobnosti príslušného nulového vlastného čísla.

Poznámka 14.12. Uvedme si užitočnú podmienku zaručujúcu existenciu konjugovaných bodov v intervale (a, b) . Predpokladajme, že f je triedy C^3 a existuje $\varepsilon > 0$ a funkcia $u : [a, b] \times [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$ tak, že $u(\cdot, \alpha) \in C^2([a, b])$ a je to extrémála (t.j. riešenie Eulerovej rovnice) pre každé $\alpha \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, $u(\cdot, 0) = u_0 \in \mathcal{A}_C$, existuje spojitá $\frac{\partial u}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial u}{\partial \alpha}(\cdot, \alpha) \in C^2([a, b])$. Derivovaním Eulerovej rovnice pre $u(\cdot, \alpha)$ podľa α zistíme, že funkcia $w(x) = \frac{\partial u}{\partial \alpha}(x, 0)$ je riešením Jacobiho rovnice pre extrémálu u_0 . Ak $w \not\equiv 0$, ale existujú $a \leq x_1 < x_2 < b$ tak, že $w(x_1) = w(x_2) = 0$, a zvolíme $h(x) = w(x)$ pre $x \in (x_1, x_2)$, $h(x) = 0$ pre $x \notin (x_1, x_2)$, potom podobne ako v závere dôkazu Vety 14.10 dostávame

$$\Psi(h) = \int_a^b [Ph'^2 + Qh^2] dx = \int_{x_1}^{x_2} [Ph'^2 + Qh^2] dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[-\frac{d}{dx} [Ph'] + Qh \right] h dx = 0,$$

takže $\lambda_1(x_2) \leq 0$ a pre prvý konjugovaný bod y musí platiť $y \leq x_2$.

Veta 14.13. (Jacobiho nutná podmienka) Nech je f triedy C^3 , $u_0 \in C^1([a, b])$ a $f_{ss}^0(x) > 0$ pre $x \in [a, b]$. Ak je u_0 slabý lokálny minimizér Φ v $\mathcal{A}_C$, potom v intervale (a, b) neexistuje konjugovaný bod.

Dôkaz. Podľa vety o regularite C^1 -minimizéra je u_0 triedy C^3 . Pretože u_0 je slabý lokálny minimizér, musí $\Phi''(u_0)(h, h) \geq 0$ pre každé $h \in C_0^1$, odkiaľ $\Psi(h) \geq 0$ pre $h \in W_0^{1,2}$. Tvrdenie je teraz dôsledkom vety o konjugovaných bodoch. $\square$

Príklad 14.14. (Mayer) Skúmame C^1 extrémaly funkcionálu $\Phi(u) = \int_0^b ((u')^2 - u^2) dx$ spĺňajúce okrajové podmienky $u(0) = 0$, $u(b) = \sin b$, kde $b \in (0, 2\pi)$. Keďže Eulerova rovnica má tvar $u'' + u = 0$, pre $b \neq \pi$ je jedinou takouto extrémalou funkcia $u_0(x) = \sin x$ a pre $b = \pi$ je takouto extrémalou každá funkcia tvaru $u_0(x) = \alpha \sin x$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Podľa Cvičenia 14.8 je Jacobiho rovnica (pre ľubovoľnú extrémalu) rovnaká ako Eulerova rovnica.

Ak $b > \pi$, potom v $(0, b)$ existuje konjugovaný bod $y = \pi$, takže u_0 nie je ani slabý lokálny minimizér, pričom Legendrova aj Weierstrassova podmienka pre slabý lokálny minimizér sú splnené.

Ak $b \leq \pi$, potom v $(0, b)$ neexistujú konjugované body, takže z Cvičenia 14.8 a Vety 14.9 plynie $D^2\Phi(u)(h, h) = \Psi(h) \geq 0$ pre každé $u \in \mathcal{A}_C$ a $h \in C_0^1$ a z vety o strednej hodnote a rovnosti $\Phi'(u_0)h = 0$ dostaneme $\Phi(u) \geq \Phi(u_0)$ pre každé $u \in \mathcal{A}_C$. Extrémaly u_0 sú teda globálne minimizéry Φ v $\mathcal{A}_C$.

Ak $b = \pi$, potom dokázané tvrdenie plynie aj z Príkladu 6.16, kde bolo dokázané, že nájdené extrémaly sú globálne minimizéry vo $W_0^{1,2}(0, \pi)$. Tvrdenie pre $b < \pi$ môžeme teraz dokázať aj nasledovne: Pre $v \in \mathcal{A}_C$ definujeme $v(x) = \sin x$ pre $x \in (b, \pi]$ a $C_b := \int_b^\pi ((v')^2 - v^2) dx$. Potom $v \in W_0^{1,2}(0, \pi)$ a

$$\Phi(v) + C_b = \int_0^\pi ((v')^2 - v^2) dx \geq 0 = \int_0^\pi ((u_0')^2 - u_0^2) dx = \Phi(u_0) + C_b,$$

takže u_0 je globálny minimizér v $\mathcal{A}_C$.

Cvičenie 14.15. Nech $\Phi(u) = \int_0^b ((u')^2 + 2uu' - 16u^2) dx$, kde $0 < b < \pi/2$. Vyšetrite C^1 extrémaly spĺňajúce okrajové podmienky $u(0) = u(b) = 0$.

Cvičenie 14.16. Vyšetrite C^1 extrémaly funkcionálu $\Phi(u) = \int_0^{\pi/4} ((u')^2 - 4u^2 - 8u) dx$ s okrajovými podmienkami $u(0) = -1$, $u(\pi/4) = 0$.

Cvičenie 14.17. Nech $b \in (0, 2\pi)$, Vyšetrite C^1 extrémaly funkcionálu $\Phi(u) = \int_0^b (2(u')^2 + uu' - 2u^2) dx$ s okrajovými podmienkami $u(0) = 1$, $u(b) = 0$.

Cvičenie 14.18. Vyšetrite C^1 extrémaly funkcionálu $\Phi(u) = \int_1^4 (u'^2 - u^2/(4x^2)) dx$ s podmienkami $u(1) = 1$, $u(4) = 6$. Návod: Riešenia Eulerovej rovnice hľadajte najprv v tvare $u_1(x) = x^\alpha$, potom $u(x) = z(x)u_1(x)$.

15. Postačujúce podmienky pre lokálny minimizér

Veta 15.1. (Klasická postačujúca podmienka pre slabý extrém) *Nech je f triedy C^3 , $u_0 \in C^1([a, b])$ je extrémala a $f_{ss}^0(x) > 0$ pre $x \in [a, b]$. Ak v intervale (a, b) neexistuje konjugovaný bod, potom je u_0 slabý lokálny minimizér v $\mathcal{A}_C$.*

Dôkaz. Z Vety 13.36 a Poznámky 13.37(ii) plynie $u_0 \in C^3([a, b])$. Z vety o konjugovaných bodoch plynie, že pre príslušný funkcionál Ψ existuje $\alpha > 0$ tak, že $\Psi(h) \geq \alpha \|h\|_{1,2}^2$ pre $h \in W_0^{1,2}(a, b)$, takže tiež $\Phi''(u_0)(h, h) \geq \alpha \|h\|_{1,2}^2$ pre $h \in C_0^1$. Funkcionál $\Phi : C^1([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ je triedy C^2 (dokonca C^3), a pre $u_1 \in \mathcal{A}_C$, $h \in C_0^1$ platí

$$\Phi''(u_1)(h, h) = \int_a^b [f_{ss}^1 h'^2 + f_{uu}^1 h^2 + 2f_{us}^1 h h'] dx,$$

kde $f_{ss}^1(x) = f_{ss}(x, u_1(x), u_1'(x))$ a podobne pre f_{uu}^1 a f_{us}^1 . Ak je u_1 blízke k u_0 v C^1 , potom je zrejmé $\sup_{[a,b]} |f_{ss}^1 - f_{ss}^0|$ malé (a podobne pre f_{uu}^1, f_{us}^1), takže z tvaru Φ'' plynie $|\Phi''(u_0)(h, h) - \Phi''(u_1)(h, h)| < \frac{\alpha}{2} \|h\|_{1,2}^2$, a teda $\Phi''(u_1)(h, h) \geq \frac{\alpha}{2} \|h\|_{1,2}^2$. Ak teda zvolíme $h \in C_0^1$ malé v C^1 -norme, potom pre funkciu $\varphi(t) = \Phi(u_0 + th)$ dostávame z vety o strednej hodnote

$$\Phi(u_0 + h) - \Phi(u_0) = \varphi(1) - \varphi(0) = \frac{1}{2} \varphi''(\theta) = \frac{1}{2} \Phi''(u_0 + \theta h)(h, h) \geq \frac{\alpha}{4} \|h\|_{1,2}^2,$$

takže u_0 je slabý lokálny minimizér. $\square$

Príklad 15.2. Nech $\Phi(u) = \int_0^1 (u')^3 dx$, $u(0) = 0$, $u(1) = B > 0$.

Z Eulerovej rovnice $3(u')^2 = C$ plynie, že jedinou C^1 extrémálou je $u_0(x) = Bx$. Jacobiho rovnica je ekvivalentná s rovnicou $h'' = 0$ ($P \equiv 6B$, $Q \equiv 0$), takže neexistuje konjugovaný bod. Pretože $f_{ss}^0 > 0$, je u_0 slabý lokálny minimizér. Weierstrassova funkcia $E(x, u_0(x), u'_0(x), q) = (q - B)^2(q + 2B)$ mení znamienko, takže u_0 nie je silný lokálny minimizér.

Dokážte priamo z definície, že u_0 nie je silný lokálny minimizér: voľte u afinnú na $[0, \varepsilon]$ aj $[\varepsilon, 1]$, $u(\varepsilon) = -\delta$, $u(0) = 0$, $u(1) = B$ a ukážte, že $\Phi(u) \rightarrow -\infty$ pre $\varepsilon \rightarrow 0$ a $\delta \ll 1$ pevné; potom aproximujte u C^1 -funkciou. Voľbou $\delta = \varepsilon^{3/4}$ tiež ukážte, že u_0 nie je lokálny minimizér v $\mathcal{A}_3$.

Pomocou Poznámky 13.17(ii) ukážte, že keby existoval slabý lokálny minimizér u_1 v $\mathcal{A}_3$, $u_1 \neq u_0$, potom by existovala konštanta $C > B$ tak, že $|u'_1| = C$ s.v. a body $x_1 < x_2$ tak, že $u_1(x_1) > u_1(x_2)$. Voľbou $h \in W_0^{1,3}(0, 1)$ takou, že $|h'| = 1$ s.v. na (x_1, x_2) , $h = 0$ na $[0, 1] \setminus (x_1, x_2)$ dostaneme $\Phi''(u_1)(h, h) < 0$, spor.

Ukážte tiež, že pre $B = 0$ v priestore $\mathcal{A}_3 = W_0^{1,3}(0, 1)$ neexistuje žiaden slabý lokálny minimizér a že pre každé $\varepsilon > 0$ a pre každú $v \in \mathcal{D}(0, 1)$ (a teda aj každú $v \in W_0^{1,3}(0, 1)$) existuje kritický bod $u \in W_0^{1,3}(0, 1)$ funkcionálu Φ tak, že $\max_{[0,1]} |v(x) - u(x)| < \varepsilon$.

Cvičenie 15.3. Vyšetrite C^1 -minimizéry funkcionálu $\Phi(u) = \int_1^2 (u')^2(u' - x) dx$ s okrajovými podmienkami $u(1) = 1$, $u(2) = 2$ a porovnajte výsledok s výsledkom Cvičenia 14.3.

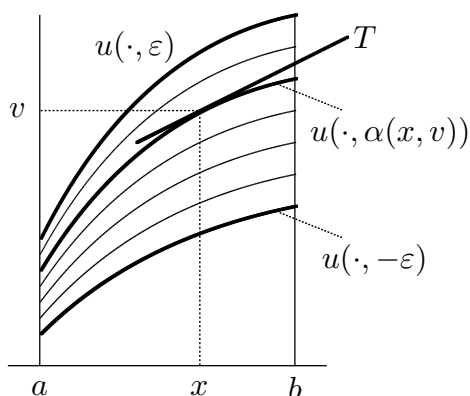
Cvičenie 15.4. Nech $\Phi(u) = \int_0^b (((u')^2 - 1)^2 + u^2) dx$, $u(0) = u(b) = 0$ a $b \in \{1, 5\}$. Vyšetrite extrémalu $u_0 = 0$. Ukážte tiež, že Φ je koercívny vo $W_0^{1,4}(0, b)$, ale nenadobúda tam svoje infimum.

Cvičenie 15.5. Vyšetrite C^1 -extrémaly funkcionálu $\Phi(u) = \int_0^1 (u')^2 u(u' - 2) dx$ spĺňajúce okrajové podmienky $u(0) = 1$, $u(1) = 2$. Vyšetrite tiež príslušnú úlohu na intervale $(-1, 1)$ pre okrajové podmienky $u(-1) = u(1) = 1$ a $u(\pm 1) = \pm 1$.

Cvičenie 15.6. Vyšetrite C^1 -extrémaly funkcionálu $\Phi(u) = \int_0^1 (u')^2 u(u' - 4) dx$ spĺňajúce okrajové podmienky $u(0) = -1$, $u(1) = 1$ resp. $u(0) = u(1) = 1$.

Cvičenie 15.7. Vyšetrite C^1 -extrémaly pre $\Phi(u) = \int_1^2 (u')^3 x^4 dx$, $u(1) = 1$, $u(2) = 0$.

Pole extrémál a Hilbertov invariantný integrál



$$T(y) = v + \psi(x, v)(y - x)$$

Nech $u_0 \in C^2([a, b]) \cap \mathcal{A}_C$ je extrémála Φ a $\varepsilon > 0$. Zobrazenie

$$u : [a, b] \times [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R} : (x, \alpha) \mapsto u(x, \alpha)$$

sa nazýva **pole extrémál** pre u_0 , ak u aj $\frac{\partial u}{\partial \alpha}$ sú triedy C^1 , $\frac{\partial u}{\partial \alpha} > 0$ a pre každé $\alpha \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ platí

- (i) $u(\cdot, \alpha)$ je extrémála, $u(\cdot, 0) = u_0$,
- (ii) $\frac{\partial u}{\partial \alpha}(\cdot, \alpha) \in C^2([a, b])$.

Ak je u pole extrémál, potom pre každé

$$(x, v) \in \mathcal{P} := \{(x, u(x, \alpha)) : x \in [a, b], \alpha \in [-\varepsilon, \varepsilon]\}$$

existuje jediné $\alpha = \alpha(x, v) \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ tak, že $u(x, \alpha) = v$.

Funkcia $\psi : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R} : (x, v) \mapsto \frac{\partial u}{\partial \alpha}(x, \alpha(x, v))$ sa nazýva **sklon poľa extrémál**.

Ak existuje pole extrémál, $f \in C^3$ a $f_{ss}^0 > 0$, potom je funkcia $w(x) = \frac{\partial u}{\partial \alpha}(x, 0)$ kladným riešením Jacobiho rovnice pre extrémálu u_0 (viď tiež Poznámku 14.12), takže v intervale $(a, b]$ neexistuje konjugovaný bod (v opačnom prípade by sa vhodný násobok riešenia Jacobiho rovnice s okrajovými podmienkami $h(a) = h(y) = 0$ dotkol zospodu kladného riešenia w , čo by bol spor s jednoznačnosťou riešenia príslušnej počiatočnej úlohy). Naopak možno dokázať nasledujúce tvrdenie (viď [27],[26] alebo [24] pre $f \in C^4$).

Tvrdenie 15.8. *Nech je f triedy C^3 , $u_0 \in C^2([a, b])$ je extrémála Φ , $f_{ss}^0 > 0$ v $[a, b]$ a v intervale $(a, b]$ neexistuje konjugovaný bod. Potom pre extrémálu u_0 existuje pole extrémál.*

Pretože dôkaz Tvrdenia 15.8 nie je jednoduchý a pri konkrétnych príkladoch budeme aj tak väčšinou potrebovať explicitný tvar poľa extrémál (odkiaľ bude jeho existencia zrejmá), spomínané tvrdenie dokazovať nebudeme.

Dôležitú úlohu v dôkaze postačujúcej podmienky pre silný extrém bude hrať **Hilbertov invariantný integrál**. Pre funkciu $v \in C^1([a, b])$, ktorej graf leží v poli extrémál $\mathcal{P}$, je definovaný nasledovne:

$$I(v) = \int_a^b [f(x, v(x), \psi(x, v(x))) + (v'(x) - \psi(x, v(x)))f_s(x, v(x), \psi(x, v(x)))] dx.$$

Lema 15.9. *Nech $f \in C^2$. Hilbertov invariantný integrál nezávisí na ceste, t.j. $I(v_1) = I(v_2)$ pre ľubovoľné $v_1, v_2 \in C^1([a, b])$, ktorých grafy ležia v $\mathcal{P}$ a $v_1(a) = v_2(a)$, $v_1(b) = v_2(b)$.*

Dôkaz. Zderivovaním identity $u_x(x, \alpha) = \psi(x, u(x, \alpha))$ dostaneme (bez písania príslušných argumentov)

$$u_{xx} = \psi_x + \psi_v u_x = \psi_x + \psi_v \psi.$$

Ak tento vzťah dosadíme do Eulerovej rovnice

$$f_{ss}u_{xx} + f_{su}u_x + f_{sx} - f_u = 0,$$

(kde argumenty derivácií funkcie f sú $(x, u(x, \alpha), u_x(x, \alpha))$), dostaneme

$$f_{ss}(\psi_x + \psi_v \psi) + f_{su}\psi + f_{sx} - f_u = 0. \quad (15.1)$$

Pre $(x, v) \in \mathcal{P}$ označme ďalej

$$\begin{aligned} M_1(x, v) &:= f(x, v, \psi(x, v)) - f_s(x, v, \psi(x, v))\psi(x, v), \\ M_2(x, v) &:= f_s(x, v, \psi(x, v)). \end{aligned} \quad (15.2)$$

Potom z rovnosti (15.1) plynie $\frac{\partial M_1}{\partial v} = \frac{\partial M_2}{\partial x}$, takže z jednoduchej súvislosti $\mathcal{P}$ plynie existencia $S \in C^2(\mathcal{P})$ tak, že $S_x = M_1$ a $S_v = M_2$. Pre $v \in C^1([a, b])$, ktorej graf leží v $\mathcal{P}$, potom dostávame

$$I(v) = \int_a^b [M_1 + M_2 v'] dx = \int_a^b [S_x + S_v v'] dx = \int_a^b \frac{d}{dx} S(x, v(x)) dx = S(b, v(b)) - S(a, v(a)). \quad \square$$

Poznámky 15.10. (i) Pre $N > 1$ je pole extrémál definované pre $\alpha \in \mathbb{R}^N$ a miesto podmienky $\frac{\partial u}{\partial \alpha} > 0$ musí platiť $\det(\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_j}) \neq 0$. Hilbertov invariantný integrál má tvar

$$I(u) = \int_a^b [f(x, u, \psi) + (u' - \psi) \cdot f_s(x, u, \psi)] dx.$$

Položme $M_1 := f - f_s \cdot \psi$, $M_2 := (f_{s_1}, \dots, f_{s_N})$, kde argumenty funkcií f, f_s sú $(x, v, \psi(x, v))$. Ak platí

$$\frac{\partial M_{2,i}}{\partial v_j}(a, v) = \frac{\partial M_{2,j}}{\partial v_i}(a, v),$$

potom z Eulerových rovníc $\frac{d}{dx}(f_{s_i}) = f_{u_i}$ plynie, že M_1, M_2 opäť spĺňajú podmienky na existenciu potenciálu S : $\frac{\partial M_{2,i}}{\partial x} = \frac{\partial M_1}{\partial v_i}$, $\frac{\partial M_{2,i}}{\partial v_j} = \frac{\partial M_{2,j}}{\partial v_i}$.

(ii) Označme

$$F(x, v, s) := M_1(x, v) + M_2(x, v)s, \quad (15.3)$$

kde M_1, M_2 sú definované predpismi (15.2). Potom sa Hilbertov invariantný integrál dá napísať v tvare $I(v) = \int_a^b F(x, v(x), v'(x)) dx$. Zvoľme $v \in C^1$ tak, aby graf $v|_{(a,b)}$ ležal vo vnútri poľa extrémál $\mathcal{P}$. Ak je $\varphi \in \mathcal{D}(a, b)$, potom pre dostatočne malé t spĺňajú funkcie $v_1 := v$ a $v_2 := v + t\varphi$ predpoklady Lemy 15.9, takže $I(v) = I(v + t\varphi)$, a teda $I'(v)\varphi = 0$, t.j. v je extrémála pre I . Ak teda označíme L_F Eulerov operátor pre F a predpokladáme $F, v \in C^2$, potom $L_F v = 0$. Lagrangián F s takouto vlastnosťou sa nazýva **null Lagrangián**. Presnejšie, ak uvažujeme variačný integrál tvaru $\Phi(u) = \int_{\Omega} F(x, u, \nabla u) dx$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a $F \in C^2$ je Lagrangián definovaný na otvorenej množine $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN}$, potom F sa nazýva null Lagrangián, ak $L_F(v) = 0$ pre každú C^2 funkciu v s vlastnosťou $\{(x, v(x), \nabla v(x)) : x \in \Omega\} \subset \mathcal{U}$.

Ak sú $M_i = M_i(x, v)$, $i = 1, 2$, ľubovoľné hladké funkcie definované na jednoducho súvislej oblasti v $\mathbb{R}^2$ a spĺňajú podmienku $\frac{\partial M_1}{\partial v} = \frac{\partial M_2}{\partial x}$ (napr. konštantné funkcie), potom z dôkazu Lemy 15.9 plynie, že funkcia F definovaná v (15.3) je null Lagrangián. Typickými príkladmi viacrozmerných null Lagrangiánov (pre $n = N > 1$ a $F = F(s)$, kde gradientnú premennú $s \in \mathbb{R}^{n^2}$ chápeme často ako maticu typu $n \times n$) sú Lagrangiány $F(s) = \sum_i s_{ii}$ (t.j. $F(\nabla v) = \operatorname{div} v$) alebo $F(s) = \det s$: viď napr. ich použitie v Príklade 11.3 alebo Vete 11.7. Null Lagrangiány sa používajú aj pri definícii rôznych invariantov (napr. Brouwerovho stupňa zobrazenia) a nájdeme ich aj v komplexnej analýze (pre $n = 1$ a $N = 2$): Nech H je holomorfná funkcia v oblasti $D \subset \mathbb{C}$, $H(z) = H_1(u, v) + iH_2(u, v)$, kde H_1 resp. H_2 označuje reálnu resp. imaginárnu zložku H , u resp. v označuje reálnu resp. imaginárnu zložku komplexného čísla z a $z = u + iv \in \mathbb{C}$ stotožňujeme s dvojicou $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Definujeme

$$F(u, v, s, t) := H_1(u, v)s - H_2(u, v)t, \quad G(u, v, s, t) := H_2(u, v)s + H_1(u, v)t$$

a pre C^1 krivku $\varphi : [a, b] \rightarrow D : \xi \mapsto (u(\xi), v(\xi))$

$$\mathcal{F}(\varphi) := \int_a^b F(u(\xi), v(\xi), u'(\xi), v'(\xi)) d\xi, \quad \mathcal{G}(\varphi) := \int_a^b G(u(\xi), v(\xi), u'(\xi), v'(\xi)) d\xi.$$

Potom z Cauchy-Riemannových podmienok $\frac{\partial H_1}{\partial u} = \frac{\partial H_2}{\partial v}$ a $\frac{\partial H_1}{\partial v} = -\frac{\partial H_2}{\partial u}$ plynie, že F, G sú null Lagrangiány a ako dôsledok dostávame Cauchyho vetu (nezávislosť krivkového integrálu $\int_{\varphi} H(z) dz = \int_a^b H(\varphi(\xi))\varphi'(\xi) d\xi = \mathcal{F}(\varphi) + i\mathcal{G}(\varphi)$ od krivky φ).

Veta 15.11. (Postačujúca podmienka pre silný extrém) *Nech je f triedy C^2 a $u_0 \in C^2([a, b]) \cap \mathcal{A}_C$ je extrémála. Ak existuje pole extrémál a*

$$E(x, v, \psi(x, v), s) \geq 0 \quad \text{pre každé } (x, v, s) \in \mathcal{P} \times \mathbb{R}, \quad (15.4)$$

potom je u_0 silný lokálny minimizér Φ v $\mathcal{A}_C$. Podmienka (15.4) je napr. splnená, ak

$$f_{ss}(x, v, s) \geq 0 \quad \text{pre každé } (x, v, s) \in \mathcal{P} \times \mathbb{R}.$$

Dôkaz. Nech graf $u \in \mathcal{A}_C$ leží v poli extrémál $\mathcal{P}$. Potom platí

$$\Phi(u) - \Phi(u_0) = \Phi(u) - I(u_0) = \Phi(u) - I(u) = \int_a^b E(x, u(x), \psi(x, u(x)), u'(x)) dx \geq 0.$$

Ak je $f_{ss} \geq 0$, potom (15.4) plynie z vety o strednej hodnote. $\square$

Poznámky 15.12. (i) Z dôkazu Vety 15.11 plynie, že ak je pole extrémál $\mathcal{P}$ globálne (t.j. $\mathcal{P} = [a, b] \times \mathbb{R}$) a platí (15.4), potom je u_0 globálny minimizér v $\mathcal{A}_C$.
(ii) Z dôkazu Vety 15.11 tiež plynie, že pokiaľ je podmienka (15.4) splnená len pre všetky $(x, v, s) \in \mathcal{P} \times \mathbb{R}$ spĺňajúce $|s - u'_0(x)| \leq \delta$ pre nejaké $\delta > 0$, potom je u_0 slabý lokálny minimizér.
(iii) Nech $f \in C^2$, $u_0 \in C^2((a, b)) \cap C([a, b])$ je extrémála, $u_0(a) = A$, $u_0(b) = B$ a funkcia $u = u(x, \alpha)$ je definovaná a spĺňa vlastnosti poľa extrémál len pre $x \in (a, b)$ a $\alpha \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Potom je funkcia $S = S(x, v)$ z dôkazu Lemy 15.9 definovaná len pre

$$(x, v) \in \tilde{\mathcal{P}} := \{(x, u(x, \alpha)) : x \in (a, b), \alpha \in [-\varepsilon, \varepsilon]\}.$$

Predpokladajme, že platí (15.4) (s $\tilde{\mathcal{P}}$ miesto $\mathcal{P}$) a že existujú konečné

$$S_a(u_0) := \lim_{x \rightarrow a+} S(x, u_0(x)) \quad \text{a} \quad S_b(u_0) := \lim_{x \rightarrow b-} S(x, u_0(x)). \quad (15.5)$$

Označme $\Phi_\varepsilon(u) = \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x, u(x), u'(x)) dx$ a podobne $I_\varepsilon(u)$. Potom z (15.5) plynie existencia limity

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \Phi_\varepsilon(u_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} I_\varepsilon(u_0) = S_b(u_0) - S_a(u_0)$$

(takže pokiaľ Lebesgueov integrál $\Phi(u_0)$ neexistuje, môžeme definovať $\Phi(u_0) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \Phi_\varepsilon(u_0)$). Nech $v \in \mathcal{A}_C$ a predpokladajme tiež, že graf $v|_{(a,b)}$ leží v $\tilde{\mathcal{P}}$ a platí

$$S_a(v) = S_a(u_0), \quad S_b(v) = S_b(u_0). \quad (15.6)$$

Potom z rovností (15.6) plynie, že rozdiel

$$I_\varepsilon(v) - I_\varepsilon(u_0) = S(b - \varepsilon, v(b - \varepsilon)) - S(a + \varepsilon, v(a + \varepsilon)) - S(b - \varepsilon, u_0(b - \varepsilon)) + S(a + \varepsilon, u_0(a + \varepsilon))$$

konverguje k nule pre $\varepsilon \rightarrow 0+$, takže podobne ako v dôkaze Vety 15.11 dostaneme

$$\begin{aligned} \Phi(v) - \Phi(u_0) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (\Phi_\varepsilon(v) - \Phi_\varepsilon(u_0)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (\Phi_\varepsilon(v) - I_\varepsilon(u_0)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (\Phi_\varepsilon(v) - I_\varepsilon(v)) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} E(x, v(x), \psi(x, v(x)), v'(x)) dx \geq 0. \end{aligned}$$

Pomocou takto zovšeobecneného poľa extrémál je teda opäť možno dokázať, že u_0 je minimizér. Príkladmi takýchto polí sú $u(x, \alpha) = \alpha \sin x$ pre funkcionál $\Phi(u) = \int_0^\pi ((u')^2 - u^2) dx$ (vid' Príklad 14.14) alebo $u(x, \alpha) = x^3 + \alpha x^{-4}$ pre $\Phi(u) = \int_0^1 (x^2(u')^2 + 12u^2) dx$ (vid' Cvičenie 13.29): sklon poľa $\psi(x, v)$ a teda aj $\nabla S(x, v)$ sú v oboch prípadoch ohraničené funkcie pre $|v| \leq Cx$, $a = A = 0$, takže napr. $S_a(v)$ existuje pre každé $v \in \mathcal{A}_C$ a nezávisí od v . Keďže polia sú globálne ($\tilde{\mathcal{P}} = (a, b) \times \mathbb{R}$) a $f_{ss} \geq 0$, príslušné extrémály $u_0 = 0$ resp. $u_0(x) = x^3$ sú globálnymi minimizérmi v triede $\mathcal{A}_C$.

Podobne pre funkcionál $\Phi(u) = \int_0^1 (u')^2 u dx$, extrémálu $u_0(x) = x^{2/3}$ a pole $u(x, \alpha) = (\alpha + 1)x^{2/3}$ platí odhad $|\nabla S(x, v)| \leq \tilde{C}x^{-2/3}$ pre $|v| \leq Cx^{2/3}$, takže $S_a(u_0) = S_a(v)$ pre každé $v \in \mathcal{A}_C$. Keďže $f_{ss} \geq 0$ pre $u \geq 0$, platí $\Phi(u_0) \leq \Phi(v)$ pre všetky $v \in \mathcal{A}_C$, $v \geq 0$. Odtiaľ vďaka spojitosti Φ vo $W^{1,2}$ plynie, že u_0 je globálny minimizér Φ v množine $\{u \in \mathcal{A}_2 : u \geq 0\}$. Tieto úvahy použijeme pri riešení Cvičenia 15.29.

Príklad 15.13. (Bolza) Nech $\Phi(u) = \int_0^1 (u')^2 (1 + u')^2 dx$, $u(0) = 0$, $u(1) = B$.

Nájďme najprv extrémály triedy C^1 . Eulerova rovnica $2u'(1 + u')(1 + 2u') = C$ má pre pevné x ako kubická rovnica neznámej $u'(x)$ nanajvýš tri riešenia s_1, s_2, s_3 (ktoré nezávisia od x). Pretože $u_0 \in C^1$, musí byť $u'_0 \equiv c$, kde $c \in \{s_1, s_2, s_3\}$. Z okrajových podmienok plynie $c = B$, $u_0(x) = Bx$.

Platí $f_{uu} = f_{us} = 0$, $f_{ss}^0 = 2(1 + 6B + 6B^2)$. Rovnica $1 + 6B + 6B^2 = 0$ má dva korene $-1 < B_1 < B_2 < 0$, pričom $f_{ss}^0 > 0$ pre $B \in (-\infty, B_1) \cup (B_2, \infty)$, $f_{ss}^0 < 0$ pre $B \in (B_1, B_2)$. Pretože Jacobiho rovnica je pre $B \notin \{B_1, B_2\}$ ekvivalentná s $h'' = 0$, neexistuje v tomto prípade konjugovaný bod v $(0, 1]$, takže u_0 je slabý lokálny minimizér pre $B \notin [B_1, B_2]$ a slabý lokálny maximizér pre $B \in (B_1, B_2)$.

Pre $B \in \{B_1, B_2\}$ platí $D^2\Phi(u_0) \equiv 0$, $D^3\Phi(u_0)(v, v, v) = \int_0^1 12(2B + 1)(v'(x))^3 dx \neq 0$ pre vhodné $v \in C_0^1$. Odtiaľ plynie, že pre $B \in \{B_1, B_2\}$ nemá Φ lokálny extrém na množine $\mathcal{A}_C$.

Pole extrémál má tvar $u(x, \alpha) = Bx + \alpha$, jeho sklon $\psi(x, u) = u'_0(x) = B$. Weierstrassova funkcia $E(x, u, B, q) = (q - B)^2(q^2 + 2(1 + B)q + (1 + B)(1 + 3B))$ nemení znamienko pre $q \in \mathbb{R}$ práve vtedy, keď je diskriminant kvadratickej rovnice $q^2 + 2(1 + B)q + (1 + B)(1 + 3B) = 0$ nekladný, t.j. keď $-2B(1 + B) \leq 0$. Odtiaľ plynie, že pre $B \in (-1, 0)$ nemá Φ v u_0 silný lokálny extrém (podľa Weierstrassovej nutnej podmienky), zatiaľčo pre $B \in (-\infty, -1] \cup [0, \infty)$ je u_0 silný lokálny minimizér.

Vzhľadom k tomu, že nájdené pole extrémál je globálne, je pre $B \in (-\infty, -1] \cup [0, \infty)$ nájdený minimizér u_0 dokonca globálny minimizér v $\mathcal{A}_C$; z hustoty $\mathcal{A}_C$ v $\mathcal{A}_4$ a spojitosti Φ vo $W^{1,4}(0, 1)$ plynie, že ide tiež o globálny minimizér v $\mathcal{A}_4$. Funkcionál $\tilde{\Phi}(u) = \Phi(u + u_0)$ je pritom koercívny vo $W_0^{1,4}(0, 1)$, ale nie je slabo sekvenciálne zdola polospojité vo $W^{1,4}(0, 1)$, pretože funkcia $\tilde{f}(s) = f(s + B)$ nie je konvexná. Ukážte, že $\tilde{\Phi}$ nie je slabo sekvenciálne zdola polospojité ani vo $W_0^{1,4}(0, 1)$. (Návod: funkcia $\tilde{f}$ je kladná pre $s \in (-B - 1, -B)$ a nulová pre $s \in \{-B - 1, -B\}$. Zvoľte $s_0 \in (-B - 1, -B)$, definujte $u(x) = s_0x$ pre $x \in [0, 1/2]$, $u(x) = s_0(1 - x)$ pre $x \in [1/2, 1]$, a funkcie $u_k \in W_0^{1,4}(0, 1)$ také, že $u_k = u$ na $[1/2, 1]$, $u'_k(x) \in \{-B, -B - 1\}$ pre s.v. $x \in [0, 1/2]$ a $u_k \rightarrow u$ v slabej topológii $W^{1,4}$.) Pre $B \in (-1, 0)$ je u globálnym minimizérom v $\mathcal{A}_4$ práve vtedy, keď $u'(x) \in \{0, -1\}$ pre s.v. x .

Cvičenie 15.14. Vyšetrite C^1 extrémaly funkcionálu $\Phi(u) = \int_0^1 (u')^4(1 + u')^2 dx$ s okrajovými podmienkami $u(0) = 0$, $u(1) = B$ pre hodnoty $B = 1, -1/2, -2$.

Cvičenie 15.15. Vyšetrite C^1 extrémaly funkcionálu $\Phi(u) = \int_0^1 ((u')^2 - 1)((u')^2 - M) dx$, $M \geq 1$, spĺňajúce okrajové podmienky $u(0) = 0$, $u(1) = 1$.

Cvičenie 15.16. Vyšetrite C^1 extrémaly funkcionálu $\Phi(u) = \int_0^1 ((u')^2 - 1)^2 dx$ spĺňajúce okrajové podmienky $u(0) = 0$, $u(1) = B$. Zistite tiež, či Φ nadobúda globálne infimum v $\mathcal{A}_4$.

Cvičenie 15.17. Vyšetrite C^1 -extrémaly funkcionálu $\Phi(u) = \int_0^1 (u')^2 u(u' - 2) dx$ spĺňajúce okrajové podmienky $u(0) = 0$, $u(1) = 1$.

Príklad 15.18. Uvažujme funkcionál $\Phi(u) = \int_{-2}^2 ((u')^4 - 2x^2(u')^2) dx$ s okrajovými podmienkami $u(-2) = 0$ a $u(2) = 2$ resp. $u(2) = 0$. Skúmame najprv C^1 extrémaly. Eulerova rovnica je $u'(u' - x)(u' + x) = C$. Pre $u(2) = 2$ dostávame extrémaly $u_0(x) = 0$ pre $x < 0$, $u_0(x) = x^2/2$ pre $x \geq 0$ a $u_1(x) = (4 - x^2)/2$ pre $x < 0$, $u_1(x) = 2$ pre $x \geq 0$. Keďže $f_{ss} = 12s^2 - 4x^2$, funkcie $P = f_{ss}^0$ resp. $P = f_{ss}^1$ menia znamienko, takže u_0, u_1 nie sú minimizéry ani maximizéry.

Pre $u(2) = 0$ dostávame extrémaly $u_0 \equiv 0$, $u_1(x) = (x^2 - 4)/2$, $u_2 = -u_1$. Platí $f_{ss}^0(x) = -4x^2 \leq 0$, ale $E(x, u_0(x), u'_0(x), q) = q^4 - 2q^2x^2$ nespĺňa Weierstrassovu nutnú podmienku pre slabý extrém, takže u_0 nie je maximizér ani minimizér. Pre polia extrémál $u_i(x, \alpha) = u_i(x) + \alpha$, $i = 1, 2$ platí $E(x, u, \psi(x, u), q) = (q^2 - x^2)^2 \geq 0$, takže u_1, u_2 sú globálne minimizéry. To plynie aj priamo z vyjadrenia $\Phi(u) = \int_{-2}^2 ((u')^2 - x^2)^2 dx + C$.

Pre $u(2) = 0$ sú extrémaly u_1, u_2 zrejme striktnými lokálnymi minimizérmi Φ v $C_0^1([-2, 2])$, takže pokiaľ by boli splnené predpoklady Vety 7.3, bol by u_0 kritický bod, ktorého existenciu zaručuje Veta 7.3. Ukážeme, že tomu tak nie je. Uvažujme Φ najprv v priestore $X := W_0^{1,4}(-2, 2)$. Potom u_1, u_2 sú opäť globálnymi minimizérmi, ale nie striktnými: v tomto prípade je globálnym minimizérom totiž aj každá funkcia $u \in X$, pre ktorú $|u'(x)| = |x|$ s.v. Pre $\alpha \in (1, 2)$ zvoľme funkciu $u_\alpha \in X$ tak, aby $u'_\alpha(x) = x$ pre $|x| > 2(\alpha - 1)$, $u'_\alpha(x) = -x$ pre $|x| < 2(\alpha - 1)$. Funkcie u_α sú globálne minimizéry a zobrazenie $p : [0, 1] \rightarrow X : t \mapsto u_{t+1}$ je spojité, takže hodnota β vo Vete 7.3 je rovná globálnemu minimu Φ : $\beta = \Phi(u_1) < \Phi(u_0)$. Pomocou vhodnej C^1 aproximácie funkcií u_α sa ľahko ukáže, že hodnota β vo Vete 7.3 sa nezmení, ak miesto priestoru X uvažujeme priestor C_0^1 . Ukážte tiež, že Φ nespĺňa v priestore C_0^1 Palais-Smaleovu podmienku.

Cvičenie 15.19. Vyšetrite C^1 -extrémaly funkcionálu $\Phi(u) = \int_0^1 ((u')^4 + 12x^2u) dx$ s okrajovými podmienkami $u(0) = u(1) = 0$.

Cvičenie 15.20. Vyšetrite C^1 extrémaly funkcionálu $\Phi(u) = \int_1^4 [(u')^4 - (u')^2/(2x)] dx$ s okrajovými podmienkami $u(1) = 0$, $u(4) = 1$ resp. $u(1) = u(4) = 0$.

Cvičenie 15.21. Vyšetrite C^1 extrémaly funkcionálu $\Phi(u) = \int_{-1}^1 (3(u')^4 - 4x(u')^3) dx$ s okrajovými podmienkami $u(-1) = u(1) = 0$.

Cvičenie 15.22. Vyšetrite C^1 extrémaly funkcionálu $\Phi(u) = \int_0^1 (3(u')^4 - 4x(u')^3 + 144x^2u) dx$ s okrajovými podmienkami $u(0) = 0$, $u(1) = B$, kde $B \in [0, 1]$.

Cvičenie 15.23. Vyšetrite C^1 extrémaly funkcionálu $\Phi(u) = \int_0^2 ((u')^4 - 2x(u')^3) dx$ s okrajovými podmienkami $u(0) = 0$, $u(2) = 3$, resp. $u(0) = u(2) = 0$.

Cvičenie 15.24. Vyšetrite C^1 extrémaly funkcionálu Nech $\Phi(u) = \int_1^2 (x(u')^4 - 2u(u')^3) dx$ spĺňajúce okrajové podmienky $u(1) = 0$, $u(2) = 1$.

Cvičenie 15.25. Nech $a, b > 0$, $c \in \mathbb{R}$. Vyšetrite C^1 extrémaly funkcionálu $\Phi(u) = \int_0^1 (au'^2 - 4buu'^3 + 2bxu'^4) dx$ spĺňajúce okrajové podmienky $u(0) = u(1) = c$.

Príklad 15.26. Uvažujme funkcionál $\Phi(u) = \int_0^1 (u')^2(u+1) dx$ s okrajovými podmienkami $u(0) = 0$, $u(1) = -3/4$. Podľa Poznámky 13.45(ii) rieši každý C^1 -minimizér (a podľa Cvičenia 13.46 aj každá C^1 -extremála) u_0 du Bois-Reymondovu rovnicu $(u')^2(u+1) = C$, odkiaľ $u_0(x) = -1 + (1 - 7x/8)^{2/3}$. Pretože $u_0 \in C^2$ a $u'_0 \neq 0$, je u_0 extrémala. Platí $P(x) = 2(1 - 7x/8)^{2/3} > 0$, $Q(x) = (7/12)^2(1 - 7x/8)^{-4/3} > 0$, takže v $(0, 1]$ neexistuje konjugovaný bod a u_0 je slabý lokálny minimizér. Pre pole extrémál $u(x, \alpha) = -1 + (1 + \alpha - 7x/8)^{2/3}$, $\alpha > -1/8$, platí $f_{ss}(x, u, s) = 2(u+1) \geq 0$ (a $E(x, u, \psi(x, u), q) = (q - \psi)^2(u+1) = [q(1 + \alpha - 7x/8)^{1/3} + 7/12]^2 \geq 0$), takže u_0 je silný lokálny minimizér (nie však globálny: Φ je zdola neohraničený).

Lahko sa overí, že spojitie funkcie u , ktoré sú tvaru $-1 + (C_2 - C_1x)^{2/3}$ na intervaloch $[0, y_1]$ aj $[y_2, 1]$ ($0 < y_1 \leq y_2 < 1$), $u(x) = -1$ pre $x \in [y_1, y_2]$ a ktoré spĺňajú okrajové podmienky, sú kritické body Φ v $\mathcal{A}_2$. Ukážme teraz priamo (bez využitia Poznámky 13.45(ii) alebo Cvičenia 13.46), že jedinou extrémalou v $\mathcal{A}_C$ je funkcia u_0 .

Ak u_1 je C^1 -extremála, potom v okolí bodu $x = 0$ platí $u_1(x) > -1$, $f_{ss}^1 = 2(u_1 + 1) > 0$, takže u_1 je tam triedy C^2 a rieši du Bois-Reymondovu rovnicu $(u')^2(u+1) = C$. Platí $C \geq 0$, pričom nemôže $C = 0$ (inak $u_1 \equiv 0$), takže $C > 0$. Riešením uvedenej rovnice (v okolí $x = 0$, kde $u_1(x) > -1$) dostaneme $u_1(x) = -1 + (1 - C_1x)^{2/3}$. Táto funkcia nemôže dosiahnuť hodnotu $u_1(x) = -1$, lebo by v tomto bode nemala konečnú deriváciu. Hľadaná extrémala teda rieši du Bois-Reymondovu rovnicu na celom $[0, 1]$, $u_1 = u_0$.

Cvičenie 15.27. Vyšetrite C^1 extrémaly pre $\Phi(u) = \int_0^1 (u')^2(1 + uu') dx$, $u(0) = 0$, $u(1) = 0$.

Cvičenie 15.28. Vyšetrite C^1 extrémaly funkcionálu $\Phi(u) = \int_0^1 (u')^2 u^2 dx$, $u(0) = 1$, $u(1) = 2$. Ukážte, že Φ nie je koercívny ani konvexný v $\mathcal{A}_2$, ale existuje jeho globálne minimum v $\mathcal{A}_2$. Porovnajzte tento výsledok s Príkladom 13.53.

Cvičenie 15.29. Nech $\Phi : W^{1,2}(0, 1) \rightarrow \mathbb{R} : u \mapsto \int_0^1 (u')^2 u dx$, $\mathcal{A}_2 = \{u \in W^{1,2}(0, 1) : u(0) = 1, u(1) = 2^{2/3}\}$, $\mathcal{A}_2^+ = \{u \in \mathcal{A}_2 : u \geq 0\}$, $\mathcal{A}_2^0 = \{u \in \mathcal{A}_2^+ : u(x_0) = 0 \text{ pre nejaké } x_0 \in (0, 1)\}$, $v_0(x) = (x+1)^{2/3}$, $w_0(x) = (3x-1)^{2/3}$. Ukážte, že v_0 je globálny minimizér Φ v $\mathcal{A}_2^+$, w_0 je kritický bod Φ v $\mathcal{A}_2$ a globálny minimizér Φ v $\mathcal{A}_2^0$, ale nie je ani slabý lokálny minimizér Φ v $\mathcal{A}_2$: ide o kritický bod typu horského sedla.

Cvičenie 15.30. Vyšetrite C^1 extrémaly funkcionálu $\Phi(u) = \int_0^1 (u')^2 u dx$ s okrajovými podmienkami $u(0) = u(1) = 1$ resp. $u(0) = u(1) = 0$ resp. $u(0) = 1$, $u(1) = 4$.

Cvičenie 15.31. Vyšetrite C^1 extrémaly pre $\Phi(u) = \int_0^1 (u')^2/(1 + u^2) dx$, $u(0) = 0$, $u(1) = 1$.

Cvičenie 15.32. Nech $\Phi(u) = \int_0^1 (\sin(u')^2 + k(u')^2) dx$, kde $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Vyšetrite C^1 extrémaly Φ spĺňajúce okrajové podmienky $u(0) = 0$ a $u(1) = 0$ resp. $u(1) = \sqrt{\pi}$ a zistite tiež, či ide o lokálne extrémy v triede $\mathcal{A}_2$. Ďalej skúmajte funkcionál Φ pre $k \geq 0$ vo $W_0^{1,2}$: Je koercívny resp. zdola ohraničený resp. slabo sekvenciálne zdola polospojité? Existuje jeho globálny minimizér? V prípade $k = 0$ tiež zistite, čomu sa rovná $D^2\Phi(0)(h, h)$.

Cvičenie 15.33. Ukážte, že $u_0(x) = \sqrt{\pi}x$ je slabý ale nie silný lokálny minimizér funkcionálov

$$\Phi_1(u) = \int_0^1 (x(\sin(u')^2 + 2(u')^2) + 2\sqrt{\pi}u) dx \quad \text{a} \quad \Phi_2(u) = \int_0^1 (2\sqrt{\pi}u - x \sin(u')^2) dx$$

v triede C^1 funkcií u spĺňajúcich okrajové podmienky $u(0) = 0$, $u(1) = \sqrt{\pi}$. Ukážte tiež, že u_0 je globálny minimizér funkcionálu $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ a $\Phi(u) = C + \int_0^1 2x(u' - \sqrt{\pi})^2 dx$ pre u spĺňajúce uvažované okrajové podmienky.

Cvičenie 15.34. Nájdite chybu v nasledujúcej úvahe. Nech $K \in \mathbb{R}$ a $\Phi_K(u) = \int_0^1 ((u')^4 + (u')^2 - Ku^3) dx$. Funkcionál Φ_K je vo $W_0^{1,4}(0,1)$ koercívny a slabo sekvenciálne zdola polospojité, takže existuje jeho globálny minimizér (pričom ide zrejme o funkciu $u \equiv 0$ ak napr. $K = 0$). Z Viet 13.11 a 13.36 plynie, že tento minimizér musí byť triedy C^2 . Riešením du Bois-Reymondovej rovnice $3(u')^4 + (u')^2 + Ku^3 = C$ nájdeme extrémalu $u_0 \equiv 0$. Globálne pole extrémál $u(x, \alpha) = \alpha$ má sklon $\psi \equiv 0$ a $E(x, u, 0, q) = q^4 + q^2 \geq 0$, takže u_0 je globálny minimizér. Uvažujme teraz ľubovoľnú hladkú funkciu $w \in W_0^{1,4}(0,1)$, $w > 0$ v $(0,1)$. Potom zrejme existuje $K > 0$ tak, že $\Phi_K(w) < 0$, čo je v spore s tým, že $u_0 = 0$ je globálny minimizér pre Φ_K .

Cvičenie 15.35. Nech $(k, m) \in \{(4, 24), (8, 70)\}$. Ukážte, že $u_0 \equiv 0$ je silný lokálny ale nie globálny minimizér pre funkcionál $\Phi(u) = \int_0^1 (2(u')^6 - 5(u')^4 + k(u')^2 - mu^2) dx$ s okrajovými podmienkami $u(0) = u(1) = 0$.

Cvičenie 15.36. Uvažujte funkcionál $\Phi(u) = \int_0^1 ((u')^3 - 108xu'u') dx$ s okrajovými podmienkami $u(0) = 0$, $u(1) = B$. Ukážte, že Φ nemá silné lokálne extrémy v $\mathcal{A}_C$ a že existuje $B_1 < 0$ s nasledujúcou vlastnosťou: C^2 -extrémala v $\mathcal{A}_C$ existuje len ak $B \notin [B_1, 0)$, kde $B_1 < 0$. Táto extrémala je slabý lokálny minimizér ak $B > 1$, nie je minimizér ani maximizér ak $B \in [0, 1]$ a je slabý lokálny maximizér ak $B < B_1$.

Príklad 15.37. Nech $\varepsilon \geq 0$ a $k > 0$. Vyšetrujme C^2 -extrémaly funkcionálu $\Phi(u) = \int_0^1 (u')^2((u')^2 + \varepsilon - ku^2) dx$ spĺňajúce okrajové podmienky $u(0) = u(1) = 0$. Vzhľadom k tomu, že pre $u \in \mathcal{A}_C$ platí $u'(x_0) = 0$ pre vhodné x_0 , musí byť konštanta C v du Bois-Reymondovej rovnici $(u')^2(3(u')^2 + \varepsilon - ku^2) = C$ rovná nule a takáto rovnica (spolu s okrajovými podmienkami) má jediné C^1 riešenie $u_0 \equiv 0$. Ide o extrémalu a $u(x, \alpha) \equiv \alpha$ je pole extrémál so sklonom $\psi \equiv 0$. Weierstrassova funkcia $E(x, u, \psi, q) = q^2(q^2 + \varepsilon - ku^2)$ je nezáporná pre $u \leq \sqrt{\varepsilon/k}$ a každé $q \in \mathbb{R}$, takže v prípade $\varepsilon > 0$ je u_0 silný lokálny minimizér. V prípade $\varepsilon = 0$ nám lokálna teória nedáva žiadnu odpoveď. Priamym výpočtom ukážeme, že ak $\varepsilon \geq 0$ a $k \leq 8$, potom je u_0 globálny minimizér. Na druhú stranu pre $k > 12$ ukážeme, že u_0 nie je globálny (a pre $\varepsilon = 0$ ani slabý lokálny) minimizér.

Nech $k \leq 8$ a $u \in \mathcal{A}_C$. Pre $x \in [0, 1/2]$ s využitím Hölderovej nerovnosti dostávame $|u(x)| \leq \int_0^x |u'(t)| \cdot 1 dt \leq (\int_0^{1/2} |u'(t)|^4 dt)^{1/4} x^{3/4}$, čo spolu s analogickým odhadom na intervale $[1/2, 1]$ dokazuje Poincarého nerovnosť $\int_0^1 u^4(t) dt \leq C_4 \int_0^1 u'(t)^4 dt$ s konštantou $C_4 = 1/64$ (optimálna konštanta C_4 je $4/(3\pi^4) \doteq 1/73$). Voľbou $C := \sqrt{C_4}$ potom s pomocou tejto nerovnosti dostávame odhad $\int_0^1 (u')^2 u^2 dt \leq \frac{C}{2} \int_0^1 (u')^4 dt + \frac{1}{2C} \int_0^1 u^4 dt \leq \sqrt{C_4} \int_0^1 (u')^4 dt$. Keďže $k\sqrt{C_4} \leq 1$, platí $\Phi(u) \geq 0 = \Phi(u_0)$.

Nech je ďalej $k > 12$ a $u(x) := M \min(x, 1-x)$, kde $M > 0$ je veľké ak $\varepsilon > 0$ a malé ak $\varepsilon = 0$. Potom platí $\Phi(u) = M^4 \int_0^1 (1 + \frac{\varepsilon}{M^2} - k \min(x, 1-x)^2) dx < 0$, pretože $\int_0^1 k \min(x, 1-x)^2 dx > 1$. Ak aproximujeme u vo $W_0^{1,4}$ hladkou funkciou $v \in \mathcal{A}_C$ s vlastnosťou $|v'| \leq M$, dostávame $\Phi(v) < 0$.

Príklad 15.38. (Minimálna rotačná plocha; Euler 1744) Uvažujme funkcionál $\Phi(u) = \int_0^1 u \sqrt{1 + (u')^2} dx$ s okrajovými podmienkami $u(0) = u(1) = A > 0$. Ak graf $\mathcal{G} := \{(x, u(x)) : x \in [0, 1]\}$ funkcie u chápeme ako krivku v nadrovine $\{(x, y, z) : z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$, potom funkcionál Φ až na multiplikatívnu konštantu vyjadruje veľkosť rotačnej plochy, ktorú dostaneme rotáciou $\mathcal{G}$ okolo osi x .

Nájdime najprv C^2 extrémaly funkcionálu Φ . Riešeniami du Bois-Reymondovej rovnice $u = C\sqrt{1 + (u')^2}$ s uvedenými okrajovými podmienkami sú konštanta A (to však nie je extrémala) a funkcie tvaru $v_k(x) := k \cosh t$, kde $t = t(x, k) := (x - 1/2)/k$ a k je určené podmienkou $2A = 2k \cosh(1/(2k))$. Funkcia $f(z) = z \cosh(1/z)$, $z > 0$, je rýdzo konvexná, $\lim_{z \rightarrow 0+} f(z) = \lim_{z \rightarrow +\infty} f(z) = +\infty$, takže nadobúda minimum v bode z_0 spĺňajúcom $f'(z_0) = 0$, t.j. $z_0 = \tanh(1/z_0)$, $z_0 \doteq 0.8335$. Označme si $A_0 := f(z_0)/2 \doteq 0.745$. Všimnime si tiež, že pre $k \geq k_0 := z_0/2$ je funkcia $k \mapsto v_k(x)$ rastúca pre každé $x \in [0, 1]$, takže extrémaly v_k pre $k \geq k_0$ tvoria pole extrémál. Na druhú stranu, funkcia $w_k = \frac{d}{dk} v_k$ mení pre $k < k_0$ v intervale $(0, 1)$ dvakrát znamienko a $w_{k_0} > 0$ v $(0, 1)$, $w_{k_0}(0) = w_{k_0}(1) = 0$. Pre dané $A > A_0$ zrejme existujú $k_1 < k_0 < k_2$ tak, že $f(2k_1) = f(2k_2) = 2A$, pričom extrémaly v_{k_1}, v_{k_2} sú jediné, ktoré vyhovujú okrajovým podmienkam $v_k(0) = v_k(1) = A$. Podobne pre $A = A_0$ dostávame jediné extrémalu v_{k_0} , pre $A < A_0$ extrémaly spĺňajúce dané okrajové podmienky neexistujú.

Nech ďalej $A > A_0$. Pre v_{k_2} existuje pole extrémál tvorené extrémalami $v_k = k \cosh t$, $k \geq k_0$, pričom sklon tohto poľa je $\psi = \sinh t$, takže pre Weierstrassovu funkciu dostávame $E = u(\sqrt{1 + q^2} - q \tanh t - 1/\cosh t) \geq 0$ pre každé $q, t \in \mathbb{R}$. Extrémala v_{k_2} je teda globálny minimizér v triede funkcií $v \in \mathcal{A}_C$ spĺňajúcich $v \geq v_{k_0}$, a špeciálne tiež silný lokálny minimizér. Pre extrémalu v_{k_1} naopak z Poznámky 14.12 (a vlastností funkcie w_{k_1}) plynie existencia

konjugovaného bodu v $(0, 1)$, takže v_{k_1} nie je minimizér ani maximizér.

V prípade $A = A_0$ platí $w_{k_0} \in C_0^1(0, 1)$, $\Phi''(v_{k_0})(w_{k_0}, w_{k_0}) = 0$ (keďže w_{k_0} je riešením Jacobiho rovnice pre v_{k_0}) a priamy výpočet dáva $\Phi'''(v_{k_0})(w_{k_0}, w_{k_0}, w_{k_0}) > 0$, takže v_{k_0} nie je minimizér ani maximizér.

Označme ďalej $\mathcal{A}_C^+ := \{u \in \mathcal{A}_C : u > 0\}$. Ukážte, že pre A dostatočne veľké (napr. $A > 3/2$) je v_{k_2} globálnym minimizérom v $\mathcal{A}_C^+$, ale pre A blízke A_0 ($A > A_0$) extrémala v_{k_2} nie je globálnym minimizérom v $\mathcal{A}_C^+$.

(Návod: Pre funkcie u_n definované predpisom $u_n(x) = A - nx$ pre $x < A/n$, $u_n(x) = A - n(1 - x)$ pre $1 - x < A/n$, $u_n(x) = 0$ pre $x \in [A/n, 1 - A/n]$ zrejme platí $\Phi(u_n) \rightarrow A^2$ pre $n \rightarrow \infty$. Ukážte, že $\Phi(v_{k_2}) > A^2$ pre A blízke A_0 a aproximujte vhodné u_n funkciou z $\mathcal{A}_C^+$. Nech ďalej $A > 3/2$. Ak $u \in \mathcal{A}_C^+$ spĺňa $u \geq A_0$, potom u leží v poli extrémál v_k , $k \geq k_0$ (pretože $v_{k_0} \leq A_0$), takže $\Phi(u) \geq \Phi(v_{k_2})$. Pre každú funkciu $u \in \mathcal{A}_C^+$ s vlastnosťou $\min u < A_0$ pritom existujú $0 < x_1 < x_2 < 1$ tak, že $u(x_1) = u(x_2) = A_0$, takže $\Phi(u) \geq \int_0^{x_1} -uu' dx + \int_{x_2}^1 uu' dx = A^2 - A_0^2 > A = \Phi(A) \geq \Phi(v_{k_2})$.)

Dá sa ukázať, že pre $A > A_0$ je $\inf_{\mathcal{A}_C} \Phi = \min(A^2, \Phi(v_{k_2}))$ (a $\inf_{\mathcal{A}_C} \Phi = A^2$ pre $A \leq A_0$). Ukážte, že funkcia $D : (A_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : A \mapsto \Phi(v_{k_2}) - A^2$ má jediný nulový bod A_1 ($D(A) = \frac{1}{2}k_2^2(-1 - e^{-1/k_2} + 1/k_2)$; $A_1 \doteq 0.9475$). Podobné výsledky platia aj na ľubovoľnom intervale $[0, b]$, pričom kritické hodnoty $A_1 = A_1(b)$ a $A_0 = A_0(b)$ sú rastúce v b , $A_1(b) > A_0(b)$ a $\lim_{b \rightarrow \infty} A_0(b) = \infty$. Zvoľme si $A > A_1(1)$ pevne. Z vlastností funkcií A_i plynie, že existujú $1 < b_1 < b_0$ tak, že $A = A_1(b_1) = A_0(b_0)$. Pre $b \in [1, b_0)$ platí $A > A_0(b)$ a príslušný silný lokálny minimizér si označme ako u_b . Minimálnu rotačnú plochu popísanú funkciou $u_1 = v_{k_2}$ si môžeme predstaviť ako mydlový film natiahnutý medzi kruhovými obručami s polomerom A a so stredmi v bodoch $x = 0$ a $x = b = 1$ (ktorých roviny sú kolmé na os x). Postupným zväčšovaním hodnoty b (t.j. vzdialenosti medzi obručami) dosiahneme hodnotu b_0 . Vtedy sa film roztrhne a zaujme vnútra oboch obručí: to zodpovedá singulárnemu tzv. Goldschmidtovmu riešeniu u_G (s hodnotou $\Phi(u_G) = A^2$). Pre $b \in (b_1, b_0)$ síce platí $\Phi(u_G) < \Phi(u_b)$, ale u_b je stále silný lokálny minimizér, takže pri pomalom zväčšovaní hodnoty b k roztrhnutiu filmu pri takýchto b nedôjde.

Príklad 15.39. (Minimálne plochy) Nech $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : B < |x| < A\}$ a predpokladajme, že existuje minimizér v_0 funkcionálu $\Psi(v) := \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla v|^2} dx$ na množine

$$W := \{v \in W^{1,1}(\Omega) : v(x) = 1 \text{ pre } |x| = B, v(x) = 0 \text{ pre } |x| = A\}.$$

Keďže Ψ je konvexný a invariantný vzhľadom na rotácie funkcie v , z regularity v_0 (viď [29]) plynie, že pre funkciu $w_0(r) := \frac{1}{2\pi r} \int_{|y|=r} v_0(y) dS_y$ je $\tilde{v}_0(x) := w_0(|x|)$ radiálne symetrický minimizér Ψ . Funkcia w_0 rieši príslušnú Eulerovu rovnicu $w'(r)r = c\sqrt{1 + w'(r)^2}$, takže musí byť klesajúca. Inverzná funkcia $u_0 : [0, 1] \rightarrow [A, B]$ je potom minimizérom funkcionálu $\Phi(u) = \int_0^1 u\sqrt{1 + (u')^2} dx$ s okrajovými podmienkami $u(0) = A$, $u(1) = B$. Ak je $A > 0$ pevné a $0 < B \ll 1$, potom podobne ako v Príklade 15.38 dostaneme, že Φ nenadobúda svoje infimum, takže pre takéto A, B nenadobúda svoje infimum ani konvexný spojitý koercívny funkcionál Ψ vo W . (Neexistencia w_0 sa dá dokázať aj priamo, viď [29, Example 12.15].) Na druhú stranu, pre konvexnú ohraničenú oblasť Ω s lipschitzovskou hranicou a „rozumné“ okrajové podmienky funkcionál Ψ svoje infimum nadobúda, viď napr. [24, 29].

Príklad 15.40. Uvažujme funkcionál

$$\Phi(u, v) = \int_{-1}^1 f(u(x), v(x), u'(x), v'(x)) dx, \quad f(u, v, s, t) = \sqrt{u^2 + v^2} \sqrt{1 + s^2 + t^2},$$

ktorý zodpovedá momentu krivky $\{(x, u(x), v(x)) : x \in [-1, 1]\}$ vzhľadom k osi x (a v špeciálnom prípade $v = 0$ ide o funkcionál vyšetrovaný v Príklade 15.38). Eulerove rovnice majú tvar

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u' \sqrt{u^2 + v^2}}{\sqrt{1 + (u')^2 + (v')^2}} \right) = \frac{u \sqrt{1 + (u')^2 + (v')^2}}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{v' \sqrt{u^2 + v^2}}{\sqrt{1 + (u')^2 + (v')^2}} \right) = \frac{v \sqrt{1 + (u')^2 + (v')^2}}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

a du Bois-Reymondova rovnica $f - u'f_s - v'f_t = f_x$ má po zintegrování tvar $\sqrt{u^2 + v^2} = c\sqrt{1 + (u')^2 + (v')^2}$. Ak túto rovnosť dosadíme do Eulerových rovníc, dostávame rovnice $u = c^2 u''$, $v = c^2 v''$, odkiaľ

$$u = c_1 \cosh(x/c) + c_2 \sinh(x/c), \quad v = c_3 \cosh(x/c) + c_4 \sinh(x/c).$$

Po dosadení do rovnosti $\sqrt{u^2 + v^2} = c\sqrt{1 + (u')^2 + (v')^2}$ dostávame podmienku $c_1^2 + c_3^2 = c_2^2 + c_4^2 + c^2$. Ak si zvolíme c_i v tvare

$$\begin{aligned} c_1 &= c \cos \alpha \cosh(\beta/c), & c_2 &= c \cos \alpha \sinh(\beta/c), \\ c_3 &= c \sin \alpha \cosh(\gamma/c), & c_4 &= c \sin \alpha \sinh(\gamma/c), \end{aligned}$$

potom je uvedená podmienka splnená a dostávame extrémaly v tvare

$$u = c \cos \alpha \cosh \frac{x + \beta}{c}, \quad v = c \sin \alpha \cosh \frac{x + \gamma}{c}, \quad (15.7)$$

kde α, β, γ, c sú nezávislé parametre.

Keďže $f_{ss} \geq 0$, $f_{tt} \geq 0$ aj $f_{ss}f_{tt} \geq (f_{st})^2$, je pre každú extrémalu splnená Legendrova nutná podmienka (viď Poznámku 14.2). Podobne Weierstrassova funkcia

$$E(u, v, s, t, q, r) = f(u, v, q, r) - f(u, v, s, t) - (q - s)f_s(u, v, s, t) - (r - t)f_t(u, v, s, t)$$

je nezáporná, takže je splnená Weierstrassova nutná podmienka pre silný extrém a extrémala bude silným lokálnym minimizérom, pokiaľ pre ňu bude existovať pole extrémál (viď Poznámku 15.10(i)). Podobne ako v Príklade 15.38 (viď tiež Tvrdenie 15.8, Poznámky 14.12 a 14.11), existencia poľa extrémál je úzko spojená s neexistenciou konjugovaných bodov. Výpočet konjugovaných bodov pre všeobecné extrémaly tvaru (15.7) možno nájsť v [22, str. 199–202], my sa pre jednoduchosť obmedzíme na jeden špeciálny prípad $\alpha = \pi/4$, $\beta = 0$ a $\gamma = 1$. Budeme teda skúmať extrémaly

$$u = \frac{c}{\sqrt{2}} \cosh \frac{x}{c}, \quad v = \frac{c}{\sqrt{2}} \cosh \frac{x+1}{c}.$$

Derivovaním extrémál v (15.7) podľa parametrov α, β, γ a c dostávame nasledujúce riešenia (w, z) Jacobiho rovníc

$$\begin{aligned} w_1 &= -\cosh \frac{x}{c}, & w_2 &= \sinh \frac{x}{c}, & w_3 &= 0, & w_4 &= \cosh \frac{x}{c} - \frac{x}{c} \sinh \frac{x}{c}, \\ z_1 &= \cosh \frac{x+1}{c}, & z_2 &= 0, & z_3 &= \sinh \frac{x+1}{c}, & z_4 &= \cosh \frac{x+1}{c} - \frac{x+1}{c} \sinh \frac{x+1}{c}. \end{aligned}$$

Podľa Poznámky 14.11 hľadáme riešenia (w, z) a $(\tilde{w}, \tilde{z})$, pre ktoré bude platiť $w'(-1) \neq 0$, $w(-1) = z(-1) = z'(-1) = 0$, $\tilde{z}'(-1) \neq 0$ a $\tilde{w}(-1) = \tilde{w}'(-1) = \tilde{z}(-1) = 0$. Stačí zrejme položiť $(\tilde{w}, \tilde{z}) = (w_3, z_3) = (0, z_3)$ a riešenie (w, z) hľadať v tvare $w = \sum_i C_i w_i$, $z = \sum_i C_i z_i$. Podmienky v bode $x = -1$ vyžadujú $C_4 = -C_1$, $C_3 = 0$ a $C_2 = C_4(2 \coth(1/c) - 1/c)$, takže voľbou $C_1 = -1$ dostávame riešenie $w(x) = 2 \cosh \frac{x}{c} + (2 \coth \frac{1}{c} - \frac{1}{c} - \frac{x}{c}) \sinh \frac{x}{c}$. Keďže $\det \begin{pmatrix} w & z \\ \tilde{w} & \tilde{z} \end{pmatrix} = w\tilde{z} - \tilde{w}z \neq 0$ pre $y > -1$, stačí skúmať nulové body funkcie w . Všimnime si, že $w(0) > 0$ a $w(1) = 4 \cosh \frac{1}{c} - \frac{2}{c} \sinh \frac{1}{c}$, takže napr. pre c dostatočne malé bude $w(1) < 0$ a v intervale $(-1, 1)$ musí existovať konjugovaný bod.

Cvičenie 15.41. (Priehyb reťaze) Za predpokladu existencie nájdite minimizér funkcionálu

$$\Phi(u) := \int_0^b u \sqrt{1 + (u')^2} dx, \quad b = 2 \ln(\sqrt{2} + 1),$$

splňajúci okrajové podmienky $u(0) = u(b) = 0$ a väzbovú podmienku $\Psi(u) := \int_0^b \sqrt{1 + (u')^2} dx = 2$.

Príklad 15.42. (Problém z balistiky) Uvažujme dráhu strely hmotnosti m , ktorá je vystrelená z bodu $(0, 0)$ rýchlosťou $v_0 > 0$ a trafi cieľ umiestnený v bode (b, B) ($b, B > 0$), pričom zanedbáme odpor vzduchu. Podľa Maupertuisovho princípu pôjde o kritický bod funkcionálu

$$\Phi(u) = \int_{t_0}^{t_1} 2T dt = \int_{t_0}^{t_1} mv^2 dt = m \int_{t_0}^{t_1} v \frac{ds}{dt} dt = m \int_0^b v \frac{ds}{dx} dx = m\sqrt{2g} \int_0^b \sqrt{h-u} \sqrt{1+u'^2} dx,$$

kde $h = v_0^2/(2g)$ je maximálna výška, ktorú by strela dosiahla pri vystrelení smerom kolmo hore, a $u(x)$ označuje výšku strely v bode $x \in [0, b]$ (takže $u(0) = 0$, $u(b) = B$, $\frac{1}{2}mv^2 + mgu = mgh$).

Predpokladajme, že hľadané kritické body budú C^2 -funkcie. Z du Bois-Reymondovej rovnice dostávame $f - u'f_s = C_1$, takže $\sqrt{h-u} = C_1\sqrt{1+u'^2}$, odkiaľ $4C_1^2(h - C_1^2 - u) = (x - C_2)^2$. Z podmienky $u(0) = 0$ dostaneme $C_2^2 = 4C_1^2(h - C_1^2)$ a $-4C_1^2u = x^2 - 2C_2x$. Voľbou parametra $\alpha = u'(0) = \frac{C_2}{2C_1^2}$ dostávame extrémaly $u_\alpha(x) = \alpha x - \frac{1+\alpha^2}{4h}x^2$,

kde α sa určí z podmienky $u(b) = B$. Špeciálne pre $b = h$ a $B = h/2$ dostaneme dve riešenia splňajúce obe okrajové podmienky: $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 3$, $u_1(x) = x - x^2/(2h)$, $u_3(x) = 3x - 5x^2/(2h)$. Platí $\max_{[0,h]} u_i < h$, $i = 1, 3$.

Funkcia $w_\alpha(x) = \frac{d}{d\alpha} u_\alpha(x) = x(1 - \frac{\alpha}{2h}x)$ je riešením Jacobiho rovnice pre extrémalu u_α . Keďže $w_1(0) = 0$, $w_1 > 0$ v $(0, h]$, pre u_1 neexistuje konjugovaný bod v $(0, h]$. Podobne $w_3(0) = w_3(2h/3) = 0$, takže pre u_3 je $x = 2h/3$ konjugovaný bod a u_3 nie je (slabý) lokálny minimizér.

Keďže pre u_1 neexistuje konjugovaný bod v $(0, h]$ a $f_{ss} > 0$ v C -okolí u_1 , pre u_1 existuje pole extrémál a u_1 je silný lokálny minimizér.

Cvičenie 15.43. (Fermatov princíp) Vyšterite kladné C^2 extrémaly funkcionálu $\Phi(u) = \int_0^1 \sqrt{u(1+u'^2)} dx$ s okrajovými podmienkami $u(0) = u(1) = 1/\sqrt{2}$.

Príklad 15.44. (Úloha o minimálnom odpore) Uvažujme funkcionál

$$\Phi(u) = \int_0^1 f(x, u'(x)) dx, \quad f(x, s) = \frac{x}{1+s^2},$$

definovaný na množine $M := \{u \in W^{1,1}(0,1) : u(0) = A, u(1) = 0, u' \leq 0\}$ (viď Príklad 2.7). Chceme dokázať, že pre Φ existuje v M jediný minimizér u_0 a navyše je to konkávna funkcia, $a := \sup\{x : u_0(x) = A\} \in (0,1)$, $u_0|_{[a,1]} \in C^2$ a $(u_0|_{[a,1]})' \leq -1$ na intervale $[a,1]$.

Ak miesto funkcie $u \in M$ uvažujeme funkciu $\tilde{u} \in M$ s nerastúcou deriváciou (t.j. $\tilde{u}$ je konkávna) a s vlastnosťou $|\{x : u'(x) > \alpha\}| = |\{x : \tilde{u}'(x) > \alpha\}|$ pre každé α , potom $\Phi(\tilde{u}) \leq \Phi(u)$ (a $\Phi(\tilde{u}) < \Phi(u)$ ak u nie je konkávna); viď [40, Theorem 3.4]. Ak teda existuje minimizér Φ v M , musí to byť konkávna funkcia a preto stačí hľadať minimum Φ v triede

$$N := \{u \in M : u \text{ je konkávna}\}.$$

Všimnime si, že z konkávnosti a okrajových podmienok plynie pre každé $u \in N$ odhad

$$|u'(x)| \leq A/(1-x) \quad \text{pre s.v. } x. \quad (15.8)$$

Nech $\{u_k\} \subset N$ je minimizujúca postupnosť pre Φ . Zvoľme si $p \in (1, \infty)$. Z odhadu (15.8) plynie pre každé $\varepsilon > 0$ rovnomerný odhad u_k v priestore $W^{1,p}(0,1-\varepsilon)$ a z reflexívnosti tohto priestoru plynie, že (postupným vyberaním a voľbou diagonálnej postupnosti) vieme nájsť podpostupnosť (ktorú opäť označíme $\{u_k\}$), ktorá konverguje slabok limitnej funkcii u vo $W^{1,p}(0,1-\varepsilon)$ pre každé $\varepsilon > 0$. Z kompaktnosti vnorenia $W^{1,p}(0,1-\varepsilon) \hookrightarrow C([0,1-\varepsilon])$ dostávame $u \in C([0,1]) \cap W^{1,p}(0,1-\varepsilon)$ pre každé $\varepsilon > 0$ a $u_k(x) \rightarrow u(x)$ pre každé $x \in [0,1]$, odkiaľ plynie $u(0) = A$, u je nerastúca a konkávna, a teda tiež existuje $u(1) := \lim_{x \rightarrow 1-} u(x) \geq 0$. Pre s.v. $x \in (0,1)$, s.v. $\varepsilon < \min(x, 1-x)$ a $k \rightarrow \infty$ platí

$$u'_k(x) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{x-\varepsilon}^x u'_k \rightarrow \frac{1}{\varepsilon} \int_{x-\varepsilon}^x u' \leq u'(x-\varepsilon),$$

takže $\limsup_{k \rightarrow \infty} u'_k(x) \leq u'(x-\varepsilon)$ a podobne $\liminf_{k \rightarrow \infty} u'_k(x) \geq u'(x+\varepsilon)$. Keďže funkcia u' je monotónna, pre s.v. x je spojitá v bode x , takže $u'_k \rightarrow u'$ s.v. Z Lebesgueovej vety teraz dostávame $\Phi(u) = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(u_k) = \inf_N \Phi$. Keby $u(1) > 0$, potom pre funkciu $v(x) := u(x) - u(1)x$ zrejme platí $v \in N$, $\Phi(v) < \Phi(u) = \inf_N \Phi$, čo je spor. Platí teda $u(1) = 0$, $u \in N$, čiže ide o globálny minimizér Φ v N , a teda aj v M .

Nech je teraz u_0 ľubovoľný globálny minimizér Φ v M . Podľa vyššie uvedeného musí $u_0 \in N$. Označme $a := \sup\{x \geq 0 : u(x) = A\}$ a všimnime si, že $u'_0 < 0$ s.v. v $(a,1)$, takže z konkávnosti u plynie, že pre každý kompaktný interval $K \subset (a,1)$ existuje $C_K > 0$ tak, že $u'_0 \leq -C_K$ s.v. v K . Pre ľubovoľnú hladkú funkciu h s kompaktným nosičom v $(a,1)$ teda platí $u_0 + th \in M$ pre dostatočne malé $t \in \mathbb{R}$, a teda

$$\int_a^1 f_s(x, u'_0(x)) h'(x) dx = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi(u_0 + th) - \Phi(u_0)}{t} = 0.$$

Z du Bois-Reymondovej lemy (Lema 17.12) plynie existencia konštanty C tak, že $f_s(x, u'_0(x)) = C$ s.v. v $(a,1)$, t.j. $h(u'_0(x)) = C/x$ s.v., kde $h(s) = -2s/(1+s^2)^2$ je rastúca na $(-\infty, -1/\sqrt{3}]$ a klesajúca na $[-1/\sqrt{3}, 0]$, $\lim_{s \rightarrow -\infty} h(s) = h(0) = 0$. Musí teda $C > 0$, $a > 0$ a $C/a \leq h(-1/\sqrt{3})$. Ak $x > a$ a $h(u'_0(x)) = C/x$, potom pre $s = u'_0(x)$ existujú dve riešenia rovnice $h(s) = C/x$: jedno v intervale $(-\infty, -1/\sqrt{3})$ a druhé v intervale $(-1/\sqrt{3}, 0)$. Keby pre nejaké $x_0 > a$ platilo $u'_0(x_0) \in (-1/\sqrt{3}, 0)$, potom z monotónnosti u'_0 plynie, že pre s.v. $x \in (a, x_0)$ musí tiež platiť $u'_0(x) \in (-1/\sqrt{3}, 0)$. Funkcia u'_0 je na (a, x_0) nerastúca, funkcia h je na intervale $(-1/\sqrt{3}, 0)$ klesajúca, takže $h(u'_0)$ je neklesajúca, čo je spor s $h(u'_0(x)) = C/x$. Pre s.v. $x \in (a,1)$ teda platí $u'_0(x) = h_1^{-1}(C/x)$ kde $h_1 : (-\infty, -1/\sqrt{3}) \rightarrow (0, h(-1/\sqrt{3})) : s \mapsto h(s)$ je hladká rastúca funkcia. Keďže u_0 je absolútne spojitá, platí $u'_0(x) = h_1^{-1}(C/x)$ pre všetky $x \in [a,1]$ a $u_0 \in C^2([a,1])$. Z dôkazu Weierstrassovej nutnej podmienky navyše plynie $E(x, u_0(x), u'_0(x), q) \geq 0$ pre každé $x \in (a,1)$ a $q \leq 0$. Keďže $E(x, u, s, q)(1+q^2)(1+s^2)^2 = x(q-s)^2(2qs+s^2-1)$, voľba $q = 0$ dáva $|s| = |u'_0(x)| \geq 1$, a teda $u'_0(x) \leq -1$. Z Príkladu 2.7 dostávame $u'_0(a+) = -1$, takže $C/a = h(-1) = 1/2$, $C = a/2$. K dôkazu jednoznačnosti u_0 teda stačí dokázať jednoznačnosť hodnoty a .

Predpokladajme, že existujú dva globálne minimizéry $u_0, \tilde{u}_0$ s hodnotami $a < \tilde{a}$. Uvažujme funkcionál

$$\Phi_a(u) = \int_a^1 f(x, u'(x)) dx, \quad f(x, s) = \frac{x}{1+s^2}$$

na množine $M_a := \{u : u(a) = A, u(1) = 0, u' \leq 0\}$. Funkcia $U(x, \alpha) = u_0(x) + \alpha$ je globálne pole extrémál so sklonom $\psi(x, u) = u'_0(x)$ a $E(x, u, s, q) \geq 0$ pre $q \leq 0$, $E(x, u, s, q) > 0$ ak $s < -1$ a $0 \geq q \neq s$. Ak funkciu $u := \tilde{u}_0|_{[a,1]}$ aproximujeme C^1 funkciami u_k spĺňajúcimi rovnaké okrajové podmienky, potom z dôkazu postačujúcej podmienky pre silný extrém a limitným prechodom pre $k \rightarrow \infty$ dostaneme

$$\Phi(u) - \Phi(u_0) = \int_a^1 E(x, u(x), u'_0(x), u'(x)) dx > 0, \quad \text{čo je spor.}$$

Cvičenie 15.45. Uvažujte funkcionál Φ z Príkladu 15.44. Ukážte, že pre ľubovoľné $A > 0$ a množiny $M_1 = \{u \in C^1([0, 1]) : u(0) = A, u(1) = 0\}$, $M_2 = \{u \in C^1([0, 1]) : u(1) = 0, u' \leq 0\}$ platí $\inf_{M_1} \Phi = \inf_{M_2} \Phi = 0$ a že nájdený minimizér u_0 funkcionálu Φ z prvej časti príkladu nie je ani slabý lokálny minimizér v triede všetkých (nie nutne nerastúcich) po častiach C^1 -funkcií.

Cvičenie 15.46. Nájdite globálny minimizér funkcionálu $\Phi(u) = \int_0^1 (1+u^2)/(u')^2 dx$ v triede C^2 funkcií spĺňajúcich podmienky $u(0) = 0$, $u(1) = 1$, $u' > 0$ a ukážte, že nejde o lokálny minimizér v triede $\mathcal{A}_p$ pre žiadne $p < \infty$.

Cvičenie 15.47. Uvažujte funkcionál $\Phi(u) = \int_0^1 (uu')^{-1} dx$ definovaný pre C^1 funkcie spĺňajúce $u, u' > 0$. Ukážte, že $u_0(x) = \sqrt{3x+1}$ je globálnym minimizérom Φ pre okrajové podmienky $u(0) = 1$, $u(1) = 2$.

Cvičenie 15.48. Vyšetrite kladné C^2 extrémály funkcionálu $\Phi(u) = \int_0^\pi -u\sqrt{1-(u')^2} dx$ spĺňajúce podmienky $u(0) = u(\pi) = \sqrt{2}$ a $|u'| < 1$.

Cvičenie 15.49. Vyšetrite C^2 extrémály funkcionálu $\Phi(u) = \int_0^1 \sqrt{u}\sqrt{1-u'^2} dx$ pre funkcie u spĺňajúce podmienky $u(0) = u(1) = 1$, $u > 0$, $|u'| < 1$. Táto úloha sa vyskytuje pri riešení izoperimetrickej úlohy (viď riešenie Cvičenia 13.50).

Cvičenie 15.50. (Guldborg) Vyšetrite extrémálu $u_0(x) = -1/x$ pre funkcionál $\Phi(u) = \int_1^2 \sqrt{u'}/(x-u) dx$ v triede funkcií spĺňajúcich podmienky $u(1) = -1$, $u(2) = -1/2$ a $u' > 0$.

Cvičenie 15.51. Vyšetrite C^1 extrémály funkcionálu $\Phi(u) = \int_1^2 \sqrt{1+u'^2}/x dx$ spĺňajúce okrajové podmienky $u(1) = -2$, $u(2) = -1$. Nájdite tiež pole extrémál pre extrémálu $u_0 \equiv 0$.

Cvičenie 15.52. Vyšetrite C^1 extrémály funkcionálu $\Phi(u) = \int_0^1 ((u')^2 - 1)^3 dx$ spĺňajúce okrajové podmienky $u(0) = 0$, $u(1) = B$, kde $B \in \{0, 1/2, 1, 1+\varepsilon, 2\}$, $0 < \varepsilon \ll 1$.

Cvičenie 15.53. Vyšetrite C^2 extrémály funkcionálu $\Phi(u) = \int_0^1 u^3(u')^4 dx$ s okrajovými podmienkami $u(0) = u(1) = 1$ resp. $u(0) = 1$ a $u(1) = 16$.

Hamilton-Jacobiho rovnica

Predpokladajme, že f je triedy C^3 a že pre extrémálu u_0 funkcionálu $\Phi(u) = \int_a^b f(x, u, u') dx$ existuje pole extrémál $\mathcal{P}$ so sklonom $\psi(x, u)$. V dôkaze invariantnosti Hilbertovho integrálu sme ukázali, že existuje funkcia $S \in C^2(\mathcal{P})$ tak, že

$$\begin{aligned} S_x(x, u) &= f(x, u, \psi(x, u)) - f_s(x, u, \psi(x, u))\psi(x, u), \\ S_u(x, u) &= f_s(x, u, \psi(x, u)), \end{aligned}$$

takže $S_x(x, u) - f(x, u, \psi(x, u)) + \psi(x, u)S_u(x, u) = 0$. Ak teda definujeme funkciu

$$\tilde{H}(x, u, s, \lambda) = \lambda s - f(x, u, s),$$

potom

$$S_x(x, u) + \tilde{H}(x, u, \psi(x, u), S_u(x, u)) = 0.$$

Ak predpokladáme $f_{ss} \neq 0$, potom sa z rovnice $\lambda = f_s(x, u, s)$ dá (lokálne) vypočítať $s = \xi(x, u, \lambda)$, pričom $\xi(x, u, S_u) = \psi(x, u)$. Ak teda definujeme **Hamiltonovu funkciu** (Hamiltonián)

$$H(x, u, \lambda) = \tilde{H}(x, u, \xi(x, u, \lambda), \lambda) = \lambda \xi(x, u, \lambda) - f(x, u, \xi(x, u, \lambda)),$$

potom dostávame **Hamilton-Jacobiho** parciálnu diferenciálnu rovnicu

$$S_x + H(x, u, S_u) = 0.$$

Takú istú rovnicu dostaneme aj pre $N > 1$; potom však nová nezávislá premenná $\lambda \in \mathbb{R}^N$ a napr.

$$H(x, u, \lambda) = \sum_i \lambda_i \xi_i(x, u, \lambda) - f(x, u, \xi(x, u, \lambda)).$$

Príklad 15.54. Nech $\Phi(u) = \int_a^b \sqrt{1 + u'^2} dx$, $d > b$ a $D \in \mathbb{R}$ sú pevné. Priamky prechádzajúce bodom $[d, D]$ majú tvar $u(x, \alpha) = D - \alpha(x - d)$ a tvoria globálne pole extrémál so sklonom $\psi(x, u) = (D - u)/(d - x)$. Pretože

$$f_s = \frac{s}{\sqrt{1 + s^2}} = \frac{D - u}{\sqrt{(d - x)^2 + (D - u)^2}}, \quad f - sf_s = \frac{1}{\sqrt{1 + s^2}} = \frac{d - x}{\sqrt{(d - x)^2 + (D - u)^2}},$$

funkciu S môžeme definovať nasledovne

$$S = -\sqrt{(d - x)^2 + (D - u)^2}.$$

Z rovnice $\lambda = s/\sqrt{1 + s^2}$ môžeme vypočítať $s = \xi(x, u, \lambda) = \lambda/\sqrt{1 - \lambda^2}$, odkiaľ

$$H = \lambda \xi - f = -\sqrt{1 - \lambda^2},$$

takže Hamilton-Jacobiho rovnica má tvar $S_x - \sqrt{1 - S_u^2} = 0$ alebo tiež

$$S_x^2 + S_u^2 = 1.$$

Cvičenie 15.55. Hamiltonova funkcia sa tiež často definuje ako Legendrova transformácia f

$$H(x, u, \lambda) := \sup_{\xi \in \mathbb{R}} (\lambda \xi - f(x, u, \xi)).$$

Ukážte, že ak $f \in C^2$, $f_{ss} > 0$ a $\lim_{|s| \rightarrow \infty} f(x, u, s)/|s| = +\infty$ pre všetky x, u , potom pri tejto definícii pre každé x, u, λ existuje $\xi = \xi(x, u, \lambda)$ tak, že

$$H(x, u, \lambda) = \lambda \xi - f(x, u, \xi), \quad \lambda = f_s(x, u, \xi). \quad (15.9)$$

Za uvedených predpokladov sa dá tiež dokázať $\xi \in C^1$ a $H \in C^2$ (viď [19, Lemma 4.27]). Ukážte, že zderivovaním prvej rovnice v (15.9) a využitím druhej dostaneme

$$H_x(x, u, \lambda) = -f_x(x, u, \xi), \quad H_u(x, u, \lambda) = -f_u(x, u, \xi), \quad H_\lambda(x, u, \lambda) = \xi.$$

Ďalej ukážte, že pre hladký konvexný koercívny Lagrangián $f(s) = \frac{1}{4}s^4$ je $\xi(\lambda) = \lambda^{1/3} \notin C^1$ a $H(\lambda) = \frac{3}{4}\lambda^{4/3} \notin C^2$.

V klasickej mechanike sa vyšetrujú funkcionály $\Phi(q) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, q, \dot{q})$, kde q sú zovšeobecnené polohové súradnice a L je Lagrangeova funkcia (viď príklady za Eulerovou rovnicou). Nové premenné λ_i sa tu označujú ako p_i , t.j. $p_i = L_{\dot{q}_i}(t, q, \dot{q})$ (konjugované momenty) a táto rovnosť spolu s Eulerovou rovnicou sa teraz dá skrátene zapísať ako

$$p_i = L_{\dot{q}_i}, \quad \dot{p}_i = L_{q_i}.$$

Ak položíme v nových premenných $g_i(t, q, p) = L_{q_i}(t, q, \xi(t, q, p))$, potom dostávame pohybové rovnice

$$\dot{q}_i(t) = \xi_i(t, q(t), p(t)), \quad \dot{p}_i(t) = g_i(t, q(t), p(t)),$$

alebo pri vyjadrení pomocou Hamiltonovej funkcie

$$\dot{q}_i(t) = H_{p_i}(t, q(t), p(t)), \quad \dot{p}_i(t) = -H_{q_i}(t, q(t), p(t)). \quad (15.10)$$

Odtiaľ tiež plynie, že pre extrémaly platí

$$\frac{d}{dt}H(t, q(t), p(t)) = H_t(t, q(t), p(t)). \quad (15.11)$$

Pretože $L = p \cdot \dot{q} - H$, dá sa funkcionál účinku písať v tvare

$$J(p, q) = \int_a^b [p(t) \cdot \dot{q}(t) - H(t, q(t), p(t))] dt. \quad (15.12)$$

Špeciálne, ak $H_t = 0$, potom z (15.11) plynie že H je konštantná pozdĺž extrémál a miesto funkcionálu (15.12) sa minimalizuje Jacobiho funkcionál $\int_a^b p(t) \cdot \dot{q}(t) dt$ s okrajovými podmienkami pre q a s väzbovou podmienkou $H(q(t), p(t)) = \text{const}$.

Všimnime si tiež, že rovnice (15.10) sú Euler-Lagrangeove rovnice funkcionálu J v (15.12).

16. Zovšeobecnenia a modifikácie

Minimizéry triedy po častiach C^1

V tomto odstavci budeme uvažovať funkcie z priestorov

$$\begin{aligned} \hat{C}^1([a, b]) &:= \{u \in C([a, b]) : \text{existujú } a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k = b \text{ tak, že} \\ &\quad u|_{[x_{i-1}, x_i]} \in C^1([x_{i-1}, x_i]), \quad i = 1, 2, \dots, k\} \\ \hat{C}_0^1 &:= \hat{C}_0^1([a, b]) := \{u \in \hat{C}^1([a, b]) : u(a) = u(b) = 0\}. \end{aligned}$$

a položíme

$$\mathcal{A}_{\hat{C}} = \mathcal{A} \cap \hat{C}^1([a, b]) = \{u \in \hat{C}^1([a, b]) : u(a) = A, \quad u(b) = B\}.$$

Pre funkciu $u \in \hat{C}^1([a, b])$ položíme $Z = Z(u) = \{x \in (a, b) : \text{neexistuje } u'(x)\}$.

Analógiou Eulerovej nutnej podmienky pre slabý lokálny minimizér v triede $\mathcal{A}_{\hat{C}}$ je nasledujúca veta.

Veta 16.1. Nech $f \in C^1 : [a, b] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, nech je $u_0 \in \hat{C}^1([a, b])$ slabý lokálny minimizér Φ na množine $\mathcal{A}_{\hat{C}}$. Potom je funkcia $x \mapsto f_s^0(x) := f_s(x, u_0(x), u'_0(x))$ triedy $\hat{C}^1([a, b])$ a pre každé $x \in [a, b] \setminus Z(u_0)$ platí

$$-\frac{d}{dx} f_s(x, u_0(x), u'_0(x)) + f_u(x, u_0(x), u'_0(x)) = 0.$$

Platia tiež integrované tvary Eulerovej a du Bois-Reymondovej rovnice (vid' dôkaz) a naviac pre každé $c \in Z(u_0)$ platia nasledujúce **Weierstrass-Erdmannove podmienky**:

- (i) $f_s^0(c-) = f_s^0(c+)$,
- (ii) $(f^0 - u'_0 f_s^0)(c-) = (f^0 - u'_0 f_s^0)(c+)$.

Dôkaz. Dôkaz platnosti rovníc je analogický dôkazom v prípade $u_0 \in C^1$. Weierstrass-Erdmannove podmienky plynú z integrovaného tvaru Eulerovej a du Bois-Reymondovej rovnice

$$\begin{aligned} f_s(x, u_0(x), u'_0(x)) &= \int_a^x f_u(\xi, u_0(\xi), u'_0(\xi)) d\xi + C \quad \text{s.v. v } [a, b], \\ f(x, u_0(x), u'_0(x)) - u'_0(x) f_s(x, u_0(x), u'_0(x)) &= \int_a^x f_x(\xi, u_0(\xi), u'_0(\xi)) d\xi + C \quad \text{s.v. v } [a, b] \end{aligned}$$

a zo spojitosti pravých strán v týchto rovniciach. $\square$

Poznámka 16.2. Ako dôsledok podmienky (i) vo Vete 16.1 dostávame, že ak je pre $c \in Z(u_0)$ definovaná $f_{ss}(c, u_0(c), s)$, potom sa pre nejaké $s \in \mathbb{R}$ rovná 0. To plynie z vety o strednej hodnote pre funkciu $s \mapsto f_s(c, u_0(c), s)$, ktorá nadobúda v dvoch rôznych bodoch $\gamma := u'_0(c-)$ a $\delta := u'_0(c+)$ tú istú hodnotu.

Ak $f = f(s) \in C^1$, potom Weierstrass-Erdmannove podmienky znamenajú, že graf f má spoločnú dotyčnicu v bodoch γ a δ , vid' obrázok pri (11.1). Ukážte, že ak je u_0 silný lokálny minimizér, potom graf f medzi bodmi γ a δ nemôže ležať pod touto dotyčnicou.

Cvičenie 16.3. Za predpokladov Vety 16.1 ukážte, že pre Weierstrassovu funkciu E a každé $c \in Z(u_0)$ platí

$$E(c, u_0(c), u'_0(c-), u'_0(c+)) = E(c, u_0(c), u'_0(c+), u'_0(c-)) = 0.$$

Príklad 16.4. Nech $\Phi(u) = \int_0^2 (u')^2 (1 + u')^2 dx$, $u(0) = 1$, $u(2) = 0$. V triede C^1 je $u_0(x) = 1 - \frac{x}{2}$ slabý lokálny maximizér (vid' Príklad 15.13), v triede funkcií $\hat{C}^1$ je globálny minimizér každá $\hat{C}^1$ -funkcia, ktorej derivácia nadobúda len hodnoty 0 a -1 a ktorá spĺňa okrajové podmienky, napr. $u(x) = \min(1, 2 - x)$.

Príklad 16.5. Nech $\Phi(u) = \int_0^3 [u'^4 - 8u'^2] dx$, $u(0) = 0$ a $u(3) = 2$ resp. $u(3) = 8$. Z Eulerovej rovnice $4u'^3 - 16u' = C$ dostávame, že u' môže nadobúdať len jednu z (nanajvýš) troch hodnôt $\{s_1, s_2, s_3\}$, kde $4s_i^3 - 16s_i = C$ pre $i = 1, 2, 3$. Ak $c \in Z(u)$, potom $u'(c+) = s_i$ a $u'(c-) = s_j$ pre vodné i, j , $s_i \neq s_j$. Z Weierstrass-Erdmannových podmienok plynie, že

$$4s_i(s_i^2 - 4) = 4s_j(s_j^2 - 4) \quad \text{a} \quad s_i^2(s_i^2 - 8/3) = s_j^2(s_j^2 - 8/3),$$

odkiaľ nie je ťažké ukázať $\{s_i, s_j\} = \{-2, 2\}$, takže $|u'| = 2$ v $[0, 3]$. Pre okrajovú podmienku $u(3) = 2$ existuje nekonečne veľa extrémál u takéhoto typu (pričom pre dve z nich je množina $Z(u)$ jednobodová). Pretože pre tieto extrémály je $f(s) = s^4 - 8s^2 = -16 = \inf f$, ide o globálne minimizéry. Pre extrémálu $u(x) = (2/3)x$ je $f_{ss} < 0$ a ide o slabý (ale nie silný) lokálny maximizér (neexistujú konjugované body, Weierstrassova funkcia mení znamienko).

Pre okrajovú podmienku $u(3) = 8$ existuje len C^1 extrémála $u(x) = (8/3)x$. Pretože pole extrémál je globálne a Weierstrassova funkcia nezáporná, ide o globálny minimizér v $\mathcal{A}_C$, a teda aj v $\mathcal{A}_4$.

Príklad 16.6. Nech $\Phi(u) = \int_0^2 u^2 (1 - u')^2 dx$, $u(0) = A$, $u(2) = B$. Uvažujme najprv slabé lokálne minimizéry u_0 triedy $\mathcal{A}_{\hat{C}} \setminus \mathcal{A}_C$. Ak $c \in Z(u_0)$, potom z Poznámky 16.2 plynie $u_0(c) = 0$. Keďže pre $x \notin Z(u_0)$ platí $(f^0 - u'_0 f_s^0)(x) = u_0^2(x)(1 - (u'_0(x))^2) = C$, musí $C = 0$ a $u'_0(x) \in \{-1, 0, 1\}$.

V ďalšom budeme hľadať globálny minimizér Φ v $\mathcal{A}_2$ resp. $\mathcal{A}_1$. Ak napr. $A = 0$ a $B = 1$, potom pre $u_0(x) := \max(0, x - 1)$ platí $\Phi(u_0) = 0 \leq \Phi$, takže u_0 je globálny minimizér.

Zvoľme ďalej $A = 0$, $B = -1$ a ukážme, že $u_0(x) := \min(0, 1 - x)$ je globálny minimizér Φ v $\mathcal{A}_2$. Funkcia u_0 rieši Eulerovu rovnicu na $(0, 1)$ aj $(1, 2)$ a spĺňa prvú Weierstrass-Erdmannovu podmienku v bode $c = 1$, takže rieši tiež Eulerovu rovnicu v integrovanom tvare na celom intervale $(0, 2)$. Z diferencovateľnosti $\Phi : W^{1,2}(0, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ plynie $\Phi'(u_0)h = 0$ pre $h \in W_0^{1,2}(0, 2)$. Keby bol Φ konvexný, bolo by tvrdenie zrejmé. Funkcia f je separátne konvexná v u aj s ; použitím integrácie per partes dostávame

$$\frac{1}{2} D^2 \Phi(u)(h, h) = \int_0^2 ((hu' + uh')^2 + 2uu'hh' + h^2) dx$$

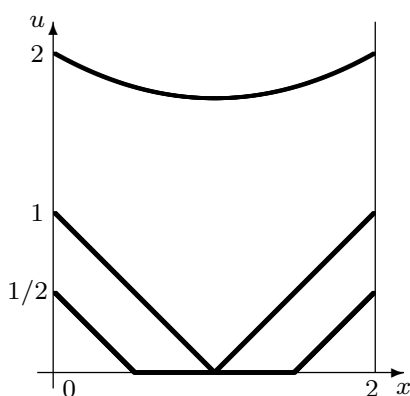
(odkiaľ opäť integráciou per partes $\frac{1}{2} D^2 \Phi(u_0)(h, h) = \int_0^1 h^2 dx + \int_1^2 (x-1)^2 (h')^2 dx > 0$ pre $h \neq 0$), ale jednoduchá modifikácia argumentov v Cvičení 15.28 ukazuje, že pre ľubovoľné okrajové podmienky vieme nájsť $u \in \mathcal{A}_2$ a $h \in W_0^{1,2}$ tak, že $D^2 \Phi(u)(h, h) < 0$, takže Φ konvexný nie je. Vďaka konvexite f v premennej s je Φ slabo sekvenciálne zdola polospojité, ale nie je koercívny v $\mathcal{A}_2$, takže existencia globálneho minimizéra Φ v $\mathcal{A}_2$ tiež nie je jasná. To, že Φ nadobúda globálne minimum v u_0 ukážeme teda inak.

Pole extremál $u(x, \alpha) = 1 + \alpha - x$ je globálne, $f_{ss} \geq 0$, a keďže Lema 15.9 o Hilbertovom invariantnom integráli $I(u)$ platí aj pre funkcie $u \in \hat{C}^1$ a $\Phi(u_0) = I(u_0)$, z dôkazu Vety 15.11 plynie $\Phi(u) \geq \Phi(u_0)$ pre každé $u \in \mathcal{A}_C$. Z hustoty $\mathcal{A}_C$ v $\mathcal{A}_2$ a spojitosti Φ vo $W^{1,2}$ plynie, že u_0 je globálny minimizér v $\mathcal{A}_2$.

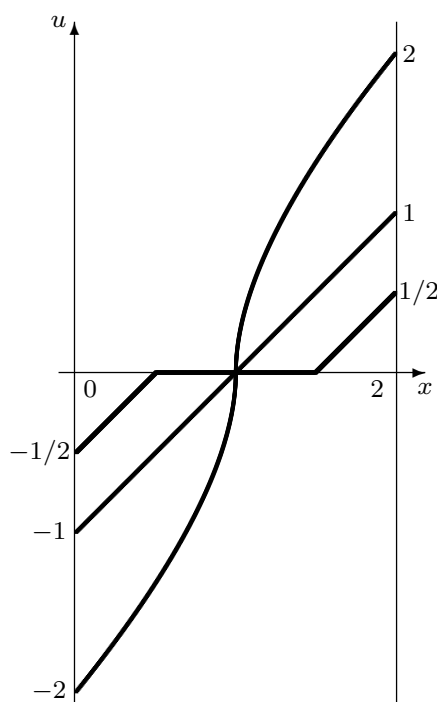
Uveďme si ešte iný argument, ktorý bude užitočný aj pre iné okrajové podmienky a umožní nám tiež dokázať, že u_0 je globálny minimizér v $\mathcal{A}_1$. Keďže $\Phi(u) \geq \Phi(u^-)$, kde $u^-(x) = \min(u(x), 0)$, stačí vyšetrovať funkcie $u \leq 0$. Pre takéto $u \in \mathcal{A}_1$ môžeme použiť substitúciu $v = u^2$, $u = -\sqrt{v}$. Pre každé $u \in \mathcal{A}_1$ s vlastnosťou $\Phi(u) < \infty$ platí

$$v = u^2 \in \mathcal{B} := \{v \in W^{1,2}(0, 2) : v \geq 0, v(0) = 0, v(2) = 1\}, \quad \Phi(u) = \Psi(v) := \int_0^2 \left(\frac{1}{2} v' + \sqrt{v} \right)^2 dx.$$

Funkcionál Ψ je na konvexnej množine $\mathcal{B}$ koercívny a slabo sekvenciálne zdola polospojité, takže existuje jeho globálny minimizér v^* . Označme $c = \max\{x : v^*(x) = 0\}$. Zrejme $v^* \equiv 0$ na $[0, c]$. Ukážme najprv, že v^* je triedy C^2 na intervale $(c, 2]$. Pre $d \in (c, 2)$ položíme $\eta := \frac{1}{2} \min\{v^*(x) : x \in [d, 2]\} > 0$ a zvolíme C^2 funkciu g takú, že $g(v) = \sqrt{v}$ pre $v > \eta$, $g \in BC^2$ na intervale $(-\infty, \eta]$. Funkcia $v^*|_{[d, 2]}$ je potom lokálnym minimizérom $\tilde{\Psi}_d(v) := \int_d^2 \left(\frac{1}{2} v' + g(v) \right)^2 dx$ na množine $\mathcal{B}_d := \{v \in W^{1,2}(d, 2) : v(d) = v^*(d), v(2) = 1\}$, takže z Viet 13.11 a 13.36 plynie $v^*|_{[d, 2]} \in C^2$, a teda $v^* \in C^2$ na intervale $(c, 2]$ a rieši tam du Bois-Reymondovu rovnicu $(v')^2 = 4v + C$. Riešením tejto rovnice a okrajových podmienok dostaneme $c \geq 1$ a $v^*(x) = (x-c)^2 + D(x-c)$ pre $x > c$, kde $D \geq 0$ je dané vzťahom $(2-c)^2 + D(2-c) = 1$. Ukážeme, že $\Psi(u_0^2) \leq \Psi(v^*)$, odkiaľ plynie, že u_0^2 je globálnym minimizérom Ψ v $\mathcal{B}$, a teda u_0 je globálnym minimizérom Φ v $\mathcal{A}_1$.



Globálne minimizéry pre $|A| = |B|$.



Položme $v_1 = u_0^2$. Keby $\Psi(v^*) < \Psi(v_1)$, potom môžeme v^* aproximovať funkciou $\tilde{v} \in C^1([0, 2]) \cap \mathcal{B}$ tak, že $\Psi(\tilde{v}) < \Psi(v_1)$, $\tilde{v} = v_1$ na intervale $[0, 1 + \varepsilon]$ pre vhodné $\varepsilon > 0$, $\tilde{v} > 0$ na $[1 + \varepsilon, 2]$. Položme $\Psi_\varepsilon(v) := \int_{1+\varepsilon}^2 (\frac{1}{2}v' + \sqrt{v})^2 dx$. Potom $\Psi_\varepsilon(\tilde{v}|_{[1+\varepsilon, 2]}) < \Psi_\varepsilon(v_1|_{[1+\varepsilon, 2]})$, čo je však spor, pretože pre príslušný Lagrangián platí $f_{ss} \geq 0$ a pre extrémalu $v_1|_{[1+\varepsilon, 2]}$ vieme skonštruovať zovšeobecnené pole extrémál $v(x, \alpha) = v_1(x) + \alpha(2 - x)$ (definované pre každé $\alpha \in \mathbb{R}$ a pre x také, že $v(x, \alpha) > 0$) pokrývajúce graf $\tilde{v}|_{[1+\varepsilon, 2]}$.

Podobnými úvahami ako vyššie je teraz jednoduché ukázať, že pre $A = B \geq 1$ je globálnym minimizérom v $\mathcal{A}_1$ funkcia $u_0(x) = \sqrt{(x-1)^2 + A^2} - 1$ a pre $0 < A = B < 1$ funkcia $u_0(x) = \max(A - x, 0, x + A - 2)$ (viď obrázok).

Nech ďalej $A = -2$ a $B = 2$. Použitím substitúcie $v = u^2$ nájdeme pre dané $0 < c_1 \leq c_2 < 2$ podobne ako vyššie minimizér u_1 funkcionálu $\Phi_1(u) = \int_0^{c_1} u^2(1 - u')^2 dx$ s okrajovými podmienkami $u(0) = -2$, $u(c_1) = 0$ a minimizér u_2 funkcionálu $\Phi_2(u) = \int_{c_2}^2 u^2(1 - u')^2 dx$ s okrajovými podmienkami $u(c_2) = 0$, $u(2) = 2$. Pre tieto minimizéry platí $u_1, u_2 \in W^{1,1} \setminus W^{1,2}$ a funkcia u definovaná predpismi $u(x) = u_1(x)$ pre $x \leq c_1$, $u(x) = 0$ pre $x \in (c_1, c_2)$, $u(x) = u_2(x)$ pre $x \geq c_2$ je zjavne minimizér Φ v triede $\{u \in \mathcal{A}_1 : u(c_1) = u(c_2) = 0\}$, $\Phi(u) = \Phi_1(u_1) + \Phi_2(u_2)$. Ľahko sa overí, že funkcia $F(c_1, c_2) = \Phi_1(u_1) + \Phi_2(u_2)$ nadobúda svoje minimum pre $c_1 = c_2 = 1$ a hľadaný minimizér Φ na množine $\mathcal{A}_1$ je teda funkcia $u_0(x) = \sqrt{(x-1)(x+2)}$ pre $x \geq 1$, $u_0(x) = -\sqrt{(1-x)(4-x)}$ pre $x \leq 1$. Minimizéry pre $-A = B = 1$ a $-A = B = 1/2$ sú naznačené na obrázku.

Cvičenie 16.7. Nájdite globálny minimizér funkcionálu Φ z Príkladu 16.6 pre $A = -2$ a $B = 1$ resp. $B = 5/6$.

Cvičenie 16.8. Nech $\Phi(u) = \int_0^1 ((u')^2 - 1)^2 dx$, $u(0) = u(1) = 0$. Vyšetrite lokálne minimizéry.

Cvičenie 16.9. Nech $\Phi(u) = \int_0^2 u'^2(1 - u')^2 dx$, $u(0) = 0$, $u(2) = 1$. Vyšetrite lokálne minimizéry.

Príklad 16.10. Pre minimizéry u triedy $\hat{C}^1 \setminus C^1$ vo vyššie uvedených cvičeniach a príkladoch (ako aj v (11.1)) nadobúda u' len konečne veľa hodnôt. Toto vo všeobecnosti nemusí byť pravda. Uvažujme napr. nezáporný funkcionál $\Phi(u) = \int_0^2 (u' - 1)^2(u' - u)^2 dx$ s okrajovými podmienkami $u(0) = 0$ a $u(2) = B \in \{1, 2, e^{3/2}/2, e\}$. Pre okrajovú podmienku $B = 1$ je zrejme funkcia $u_1(x) = \max(0, x - 1)$ globálnym minimizérom Φ , pretože $\Phi(u_1) = 0$. Podobne pre $B = 2$ je globálnym minimizérom funkcia $u_2(x) = x$, pre $B = e^{3/2}/2$ funkcia $u_3(x) = x$ pre $x \leq 1/2$, $u_3(x) = e^{x-1/2}/2$ pre $x \geq 1/2$ a pre $B = e$ funkcia $u_4(x) = x$ pre $x \leq 1$, $u_4(x) = e^{x-1}$ pre $x \geq 1$. Derivácie funkcií $u_4 \in C^1 \setminus C^2$ a $u_3 \in \hat{C}^1 \setminus C^1$ nadobúdajú pritom nekonečne veľa hodnôt.

Cvičenie 16.11. Vysvetlite, prečo minimizér v Príklade 15.44 nespĺňa 1. Weierstrass-Erdmannovu podmienku.

Cvičenie 16.12. Vyšetrite C^2 -extremály pre $\Phi(u) = \int_1^4 3(u')^2 - 4u(u')^3 + 2x(u')^4 dx$, $u(1) = 1$, $u(4) = 2$, a nájdite tiež po častiach afinné extrémaly $u_0 \in \hat{C}^1$ s vlatnosťou $|Z(u_0)| = 1$. Ukážte $\inf_{\mathcal{A}_4} \Phi < -1$.

Úlohy s voľným koncom

Ak hľadáme extrémny funkcionálu $\Phi(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x)) dx$ napr. na množine $\mathcal{B} = \{u \in C^1([a, b]) : u(a) = A\}$ a $f \in C^{0,1}([a, b] \times \mathbb{R}^2)$, potom podobne ako v dôkaze Eulerovej nutnej podmienky dostaneme pre každý slabý lokálny minimizér $u_0 \in \mathcal{B}$ splnenie Eulerovej rovnice a navyše v bode b dostaneme podmienku $f_s(b, u_0(b), u'_0(b)) = 0$. Špeciálne, ak napr. $f(x, u, s) = g(x, u) + P(x, u)s^2$, kde $P(x, u) \neq 0$, potom je nájdená podmienka v bode b ekvivalentná požiadavke $u'_0(b) = 0$ (Neumannova okrajová podmienka).

Ak je f triedy C^3 , $u_0 \in C^2$ je extrémála, $f_s(b, u_0(b), u'_0(b)) = 0$, $f_{ss}(x, u_0(x), u'_0(x)) > 0$ a definujeme funkcie P, Q a funkcionál Ψ ako v odstavci o konjugovaných bodoch, potom zrejme platí

$$\Phi''(u_0)(h, h) = \Psi(h) + f_{us}(b, u_0(b), u'_0(b))h^2(b)$$

pre každé $h \in C^1([a, b])$, $h(a) = 0$. Ak teda budeme pre jednoduchosť predpokladať $f_{us}^0(b) = 0$, potom zrejme môžeme zopakovať úvahy o pozitívnej definitnosti funkcionálu Ψ , pričom bod $y \in [a, b)$ bude konjugovaný, ak existuje netriviálne riešenie h Jacobiho rovnice na $[y, b]$ s okrajovými podmienkami $h(y) = 0$, $h'(b) = 0$. Ak $c_b := f_{us}^0(b) \neq 0$, potom musíme uvažovať funkcionál

$$\tilde{\Psi}(h) = \int_a^b [Ph'^2 + Qh^2] dx + c_b h^2(b) = \int_a^b [Ph'^2 + Qh^2 + c_b 2hh'] dx.$$

Jacobiho rovnica sa teda nezmení, ale okrajové podmienky majú tvar $h(y) = 0$, $Ph'(b) + c_b h(b) = 0$.

Pri poli extrémál $u(x, \alpha)$ pre u_0 musíme zase požadovať $f_s(b, u(b, \alpha), u_x(b, \alpha)) = 0$; rovnosť $S(b, u(b)) = S(b, u_0(b))$ v Leme o Hilbertovom invariantnom integráli potom dostaneme z vety o strednej hodnote.

Príklad 16.13. Hľadáme minimizéry pre $\Phi(u) = \int_0^1 (u'^2 - 2\beta uu') dx$ ($\beta \neq 0$) na množine $\mathcal{B} = \{u \in C^1([0, 1]) : u(0) = 0\}$. Extrémály v $\mathcal{B}$ sú $u_0 \equiv 0$ a pre $\beta = 1$ tiež $u_1(x) = Cx$. Pre u_0 dostávame $P \equiv 2$, $Q \equiv 0$, $c_b = -2\beta$, takže Jacobiho rovnica s okrajovými podmienkami $h(y) = 0$, $h'(1) - \beta h(1) = 0$, má netriviálne riešenie $u(x) = C(x - y)$ pre vhodné $y \in [0, 1)$ len ak $\beta \geq 1$. Pre $\beta < 1$ je teda u_0 slabý lokálny minimizér. Pre $\beta < 1$ máme tiež globálne pole extrémál $u(x, \alpha) = \alpha(\beta x / (1 - \beta) + 1)$ a $f_{ss} > 0$, takže u_0 je vtedy tiež silný a súčasne globálny minimizér.

Podobné analógie možno samozrejme robiť aj pre tvrdenia o extrémoch v priestoroch $W^{1,p}$ či $\hat{C}^1$. Vo vektorovom prípade $N > 1$ pritom pre niektoré z funkcií u_i (kde $u = (u_1, u_2, \dots, u_N)$) môžeme požadovať splnenie pevnej okrajovej podmienky $u_i(a) = A_i$ resp. $u_i(b) = B_i$, pre iné nie.

Cvičenie 16.14. Ak $s(t), p(t), v(t)$ označujú postupne stav tovaru na sklade, rýchlosť jeho predaja a rýchlosť jeho výroby (všetko v čase t) a koeficient $\alpha \geq 0$ určuje znehodnocovanie skladových zásob, potom

$$s'(t) = v(t) - p(t) - \alpha s(t).$$

Predpokladajme, že v minulom období $[-T, 0]$ (napr. roku) dosiahli hodnoty $v(t)$ a $s(t)$ optimálnu úroveň a že pre nasledujúce obdobie $[0, T]$ sa predpokladá rovnaká rýchlosť predaja ako v minulom období (t.j. $p(t) = p(t - T)$ pre $t \in (0, T]$), avšak pre hodnotu skladových zásob platí $s(0) \neq s(-T)$. Úlohou je určiť rýchlosť výroby $v(t)$ pre $t \in (0, T]$ tak, aby sa minimalizoval funkcionál $\int_0^T [\beta^2 (s(t) - s(t - T))^2 + (v(t) - v(t - T))^2] dt$, kde $\beta > 0$ (chceme teda, aby skladové zásoby aj rýchlosť výroby boli v nasledujúcom období v istom zmysle čo najbližšie k ich optimálnym hodnotám z minulého obdobia). Ak označíme $u(t) := s(t) - s(t - T)$ pre $t \in [0, T]$ a $A := s(0) - s(-T)$, potom $v(t) - v(t - T) = u'(t) + \alpha u(t)$, takže budeme minimalizovať kvadratický funkcionál

$$\Phi(u) = \int_0^T [\beta^2 u^2 + (u' + \alpha u)^2](t) dt \quad \text{na množine } \{u \in C^1([0, T]) : u(0) = A\}.$$

Riešením Eulerovej rovnice s okrajovými podmienkami $u(0) = A$, $u'(T) + \alpha u(T) = 0$ dostaneme jediné riešenie $u(t) = A(e^{\gamma t} + \rho e^{-\gamma t}) / (1 + \rho)$, kde $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$ a $\rho = e^{2\gamma T}(\gamma + \alpha) / (\gamma - \alpha)$. Optimálne skladové zásoby potom vypočítame zo vzťahu $s(t) = u(t) + s(t - T)$ a optimálnu rýchlosť výroby zo vzťahu $v(t) = s'(t) + \alpha s(t) + p(t)$.

Uvedené riešenie možno nájsť napr. v [55]. Zistíte, prečo sa nájdené riešenie nemusí dať vždy aj zrealizovať (t.j. na čo sa pri zostavení optimalizačnej úlohy zabudlo).

Cvičenie 16.15. Nech $f \in C^1$ a $u \in C^1([a, b])$ je silný lokálny minimizér $\Phi(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x)) dx$ v triede $\mathcal{B} := \{u \in C^1([a, b]) : u(b) = B\}$. Ukážte, že $u'(a)$ je globálny minimizér funkcie $s \mapsto f(a, u(a), s)$.

Cvičenie 16.16. Vyšetrite C^1 extrémaly funkcionálu $\Phi(u) = \int_0^1 ((u')^2 - 1)^2 + 4(3x^2 - 1)u dx$ s okrajovou podmienkou $u(0) = 0$.

Cvičenie 16.17. Vyšetrite C^1 extrémaly pre $\Phi(u) = \int_0^1 ((u')^4 + 12x^2u) dx$ s okrajovou podmienkou $u(0) = 0$.

Cvičenie 16.18. Vyšetrite C^1 -minimizéry pre $\Phi(u) = \int_{-1}^1 ((u')^4/12 - (u')^2u) dx$ s okrajovými podmienkami $u(-1) = u(1) = 0$ a ukážte tiež, že existuje globálny minimizér Φ vo $W_0^{1,4}(-1, 1)$ aj $\hat{C}_0^1([-1, 1])$. To isté pre $\Phi(u) = \int_{-1}^1 (u')^2((u')^2 + 12u - 12) dx$.

Návod: Skúmajte funkcionál Φ na intervale $[-1, 0]$ s okrajovou podmienkou $u(-1) = 0$.

Úlohy s vyššími deriváciami

Uvažujme funkcionál $\Phi(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x), u''(x)) dx$ na množine

$$\mathcal{B} = \{u \in C^2([a, b]) : u(a) = A, u(b) = B, u'(a) = \alpha, u'(b) = \beta\},$$

kde $f = f(x, u, s, z)$ je spojitá v x a triedy C^1 v premenných u, s, z . Položme ďalej

$$C_0^2 := \{\varphi \in C^2([a, b]) : \varphi(a) = \varphi(b) = \varphi'(a) = \varphi'(b) = 0\}.$$

Ak je u_0 lokálny minimizér Φ na $\mathcal{B}$ (v topológii C^2), potom musí zrejme $\Phi'(u_0)\varphi = 0$ pre všetky $\varphi \in C_0^2$, odkiaľ

$$\int_a^b [f_u^0(x)\varphi(x) + f_s^0(x)\varphi'(x) + f_z^0(x)\varphi''(x)] dx = 0. \quad (16.1)$$

Ak definujeme

$$g(x) = \int_a^x f_u^0(\xi) d\xi \quad \text{a} \quad h(x) = \int_a^x [f_s^0(\xi) - g(\xi)] d\xi,$$

potom dvojnásobnou integráciou per partes v (16.1) dostaneme

$$\int_a^b [f_z^0(x) - h(x)]\varphi''(x) dx = 0 \quad \text{pre všetky } \varphi \in C_0^2.$$

Odtiaľ sa dá podobne ako v prípade du Bois-Reymondovej lemy (Lema 17.12) dokázať existencia C_1, C_2 takých, že $f_z^0(x) - h(x) = C_1x + C_2$, t.j.

$$f_z^0(x) = \int_a^x [f_s^0(\xi) - g(\xi)] d\xi + C_1x + C_2.$$

Funkcia f_z^0 je teda triedy C^1 a zderivovaním dostaneme

$$\frac{d}{dx} f_z^0(x) - f_s^0(x) = - \int_a^x f_u^0(\xi) d\xi + C_1.$$

Funkcia na ľavej strane v poslednej rovnosti opäť musí byť C^1 a jej zderivovaním dostávame Eulerovu rovnicu

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{d}{dx} f_z^0(x) - f_s^0(x) \right] = -f_u^0(x). \quad (16.2)$$

Jej riešenia sa nazývajú extrémaly.

Podobne ako v prípade úloh, v ktorých sa vyskytuje len prvá derivácia u , možno aj pre úlohy s vyššími deriváciami odvodiť rôzne nutné podmienky pre lokálne minimizéry, napr. Legendrovu (vyžadujúcu nezápornosť f_{zz}^0) alebo Jacobiho, vid' [22]. V [22, §129] možno nájsť aj zaujímavú geometrickú úlohu s Lagrangiánom $f(x, u, s, z) = (1+s^2)^2/z$, v ktorej sú uvedené nutné podmienky pre lokálny minimizér splnené, ale príslušná funkcia nie je silným lokálnym minimizérom.

Cvičenie 16.19. Ukážte, že v prípade hľadania extrémov Φ na množinách

$$\mathcal{B}_1 = \{u \in C^2([a, b]) : u(a) = A, u(b) = B, u'(a) = \alpha\},$$

$$\mathcal{B}_2 = \{u \in C^2([a, b]) : u(a) = A, u(b) = B\},$$

$$\mathcal{B}_3 = \{u \in C^2([a, b]) : u(a) = A, u'(a) = \alpha\}$$

dostaneme opäť rovnicu (16.2) a navyše podmienku

$$(i) f_z^0(b) = 0,$$

$$(ii) f_z^0(a) = f_z^0(b) = 0,$$

$$(iii) f_z^0(b) = 0 \text{ a } \frac{d}{dx} f_z^0(x)|_{x=b} = f_s^0(b).$$

Nájdite analogické podmienky aj pre množinu

$$\mathcal{B}_1 = \{u \in C^2([a, b]) : u'(a) = \alpha, u'(b) = \beta\}.$$

Cvičenie 16.20. Nech $\Phi(u) = \int_1^2 [x^3 u''^2 - 12xu] dx$. Nájdite globálny minimizér Φ na množine $\{u \in W^{2,2}(1, 2) : u(1) = 1/2, u(2) = 2, u'(1) = 1, u'(2) = 2\}$.

Cvičenie 16.21. Nech $\Phi(u) = \int_0^1 [u''^2 - 360x^2 u] dx$. Ukážte, že globálny minimizér Φ na množine $\{u \in W^{2,2}(0, 1) : u(0) = 0, u'(0) = 1, u(1) = 0, u'(1) = 5/2\}$ je funkcia $u_0(x) = (x^6 + 3x^3 - 6x^2 + 2x)/2$.

Cvičenie 16.22. Ukážte, že ak má Lagrangián tvar $f(x, u, s, z) = zg(x, u, s) + h(x, u, s)$, potom je Eulerova rovnica rovnica druhého rádu. Ďalej ukážte, že ak má Lagrangián tvar $f(x, u, s, z) = zg_s + sg_u + g_x$, kde $g = g(x, u, s)$ je hladká funkcia, potom je Eulerova rovnica splnená pre každú hladkú funkciu u .

Cvičenie 16.23. Nech $f \in C^3$ a nech je $u_0 \in C^3$ extrémom. Ukážte, že u_0 je riešením (druhej Euler-Lagrangeovej) rovnice

$$f^0(x) - u'_0(x) \left[f_s^0(x) - \frac{d}{dx} f_z^0(x) \right] - u''_0(x) f_z^0(x) = \int_a^x f_x^0(\xi) d\xi + C.$$

Cvičenie 16.24. Nájdite Eulerovu rovnicu pre funkcionál $\Phi(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x), u''(x), u'''(x)) dx$, kde $f = f(x, u, s, z, t)$ a ukážte, že v prípade hladkosti f aj u_0 ide o rovnicu

$$f_u^0(x) - \frac{d}{dx} f_s^0(x) + \frac{d^2}{dx^2} f_z^0(x) - \frac{d^3}{dx^3} f_t^0(x) = 0.$$

Podobne pre funkcionál $\Phi(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(m)}(x)) dx$ s Lagrangiánom $f = f(x, u, s_1, s_2, \dots, s_m)$ dostávame tzv. Euler-Poissonovu rovnicu

$$f_u^0(x) - \frac{d}{dx} f_{s_1}^0(x) + \frac{d^2}{dx^2} f_{s_2}^0(x) - \dots + (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} f_{s_m}^0(x) = 0.$$

Cvičenie 16.25. Uvažujme funkcionál $\tilde{\Phi}(u) = \int_a^b \tilde{f}(x, u(x), u'(x), u''(x)) dx$ so skalárnou funkciou u a položíme $u_1 := u$, $u_2 = u'$, $f(x, u_1, u_2, s_1, s_2) = \tilde{f}(x, u_1, u_2, s_2)$ a $h(x, u_1, u_2, s_1, s_2) = s_1 - u_2$. Úlohu minimalizovať $\tilde{\Phi}$ môžeme zrejme previesť na úlohu minimalizovať funkcionál $\Phi(u_1, u_2) = \int_a^b f(x, u_1(x), u_2(x), u'_1(x), u'_2(x)) dx$ s väzbovou podmienkou $h(x, u_1(x), u_2(x), u'_1(x), u'_2(x)) = 0$. Táto úloha vedie k Eulerovým rovniciam pre Lagrangián

$$F(x, u_1, u_2, s_1, s_2) = \lambda_0 f(x, u_1, u_2, s_1, s_2) + \lambda_1(x) h(x, u_1, u_2, s_1, s_2),$$

vid' (6.6). Ukážte, že voľbou $\lambda_0 = 1$ dostaneme z týchto rovníc rovnicu (16.2).

Úlohy v parametrickom tvare

Veľa variačných úloh vedie k hľadaniu (v nejakom zmysle optimálnych) kriviek spájajúcich v rovine xy dva zadané body, pričom nie je jasné, či optimálna krivka bude grafom funkcie premennej x (prípadne y), vid' napr. Cvičenie 2.6.

Predpokladajme, že $G_1 \subset \mathbb{R}^2$ je otvorená, obsahuje body (a, A) , (b, B) a položme

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \{(x, y) \in C^1([\alpha, \beta], G_1) : \alpha < \beta, (x')^2 + (y')^2 > 0, \\ &\quad x(\alpha) = a, y(\alpha) = A, x(\beta) = b, y(\beta) = B\}. \end{aligned} \quad (16.3)$$

Prvky $\mathcal{K}$ budeme označovať K (každý taký prvok je daný funkciami x, y a implicitne tiež číslami α, β) a budeme vyšetrovať funkcionál $\Phi(K) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t, x(t), y(t), x'(t), y'(t)) dt$, kde $K \in \mathcal{K}$. Ľahko sa zistí, že pokiaľ funkcionál Φ nemá závisieť od konkrétnej parametrizácie danej krivky, musí byť funkcia $f = f(t, x, y, u, v)$ nezávislá od premennej t a navyše pre každé $\lambda > 0$ a x, y, u, v musí platiť

$$f(x, y, \lambda u, \lambda v) = \lambda f(x, y, u, v). \quad (16.4)$$

Nech teda funkcia $f = f(x, y, u, v)$ spĺňa (16.4) a

$$f \in C^1(G), \quad \text{kde } G := \{(x, y, u, v) \in G_1 \times \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 > 0\}. \quad (16.5)$$

Predpokladajme tiež, že $K_0 = (x_0, y_0) : [\alpha, \beta] \rightarrow G_1$ je globálny minimizér Φ na množine $\mathcal{K}$ a označme $f_u^0(t) = f_u(x_0(t), y_0(t), x'_0(t), y'_0(t))$, podobne pre f_v, f_x, f_y . Za týchto predpokladov sa ľahko ukáže (vid' napr. [24]), že funkcie f_u^0 a f_v^0 sú triedy C^1 na $[\alpha, \beta]$ a platia Eulerove rovnice

$$\frac{d}{dt} f_u^0 = f_x, \quad \frac{d}{dt} f_v^0 = f_y. \quad (16.6)$$

Cvičenie 16.26. Ukážte, že Lagrangián $f(x, y, u, v) = \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{\sqrt{y}}$ z Príkladu 2.5 (vid' (2.9)) spĺňa predpoklady (16.4) a (16.5) pre $G_1 = \{(x, y) : y > 0\}$, ale $f \notin C^1(G_1 \times \mathbb{R}^2)$. Ukážte tiež, že ak $f \in C^1(\mathbb{R}^4)$ spĺňa (16.4), potom f_u, f_v nezávisia od u ani od v .

Nech ďalej $f \in C^2(G)$ spĺňa (16.4). Derivovaním tejto rovnice podľa λ dostávame $f_u u + f_v v = f$ a ďalším derivovaním

$$f_{ux}u + f_{vx}v = f_x, \quad f_{uy}u + f_{vy}v = f_y, \quad f_{uu}u + f_{vu}v = f_{vv}v + f_{vu}u = 0. \quad (16.7)$$

Pre $(x, y, u, v) \in G$ definujeme

$$f_1(x, y, u, v) := -\frac{1}{(u^2 + v^2)^2} \det \begin{pmatrix} f_{uu} & f_{uv} & u \\ f_{vu} & f_{vv} & v \\ u & v & 0 \end{pmatrix} = \frac{f_{uu} + f_{vv}}{u^2 + v^2},$$

kde argumenty derivácií funkcie f sú (x, y, u, v) . Potom zrejme platí

$$f_{uu} = v^2 f_1, \quad f_{vv} = u^2 f_1, \quad f_{uv} = -uv f_1. \quad (16.8)$$

Ak predpokladáme $x_0, y_0 \in C^2$, potom sa prvá z Eulerových rovníc (16.6) dá napísať v tvare

$$f_{ux}^0 x'_0 + f_{uy}^0 y'_0 + f_{uu}^0 x''_0 + f_{uv}^0 y''_0 - f_x^0 = 0.$$

Ak od tejto rovnice odpočítame prvú rovnicu v (16.7) a využijeme (16.8), dostaneme

$$y'_0 [f_{uy}^0 - f_{vx}^0 + f_1^0 (x''_0 y'_0 - x'_0 y''_0)] = 0$$

a analogicky

$$x'_0 [f_{vx}^0 - f_{uy}^0 + f_1^0 (y''_0 x'_0 - y'_0 x''_0)] = 0.$$

Kedže $(x'_0)^2 + (y'_0)^2 > 0$, plynie odtiaľ **Euler-Weierstrassova rovnica**

$$f_{uy}^0 - f_{vx}^0 + f_1^0(x''_0 y'_0 - x'_0 y''_0) = 0,$$

a teda tiež

$$\frac{f_{uy}^0 - f_{vx}^0}{f_1^0((x'_0)^2 + (y'_0)^2)^{3/2}} = \frac{x'_0 y''_0 - x''_0 y'_0}{((x'_0)^2 + (y'_0)^2)^{3/2}} = \kappa_0, \quad (16.9)$$

kde κ_0 označuje krivosť extrémaly (x_0, y_0) .

Ak k vyššie uvedeným predpokladom o funkcii f pridáme predpoklad, že minimizujúca krivka K_0 je parametrizovaná svojou dĺžkou a $f_1^0(t_0) \neq 0$, potom sa dá ukázať, že x_0, y_0 sú triedy C^2 v okolí t_0 (viď [24]), takže ide o riešenie Euler-Weierstrassovej rovnice. Všeobecné tvrdenie o existencii minimizéra funkcionálu Φ (v triede zovšeobecnených riešení) možno tiež nájsť napr. v [24].

Príklad 16.27. Nech $f(x, y, u, v) = \sqrt{u^2 + v^2} + a(xv - yu)$, kde $a > 0$. Potom $f_{uy} = -a$, $f_{vx} = a$, $f_1 = f_{uu}/v^2 = (u^2 + v^2)^{-3/2}$, viď (16.8). C^2 extrémaly funkcionálu $\int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), x'(t), y'(t)) dt$ musia riešiť (16.9), takže ich krivosť $\kappa_0 = -2a$ je konštantná, a teda extrémaly ležia na kružniciach.

Príklad 16.28. (Kelvin) Nech je rovina xy pokrytá hmotou s hladkou hustotou $\rho(x, y)$ a majme danú hladkú krivku $K_1 \in \mathcal{K}$, viď (16.3). Úlohou je nájsť krivku $K \in \mathcal{K}$ predpísanej dĺžky l , ktorá spolu s krivkou K_1 ohraničuje oblasť D s maximálnou hmotou (porovnajme s izoperimetrickou úlohou v Cvičeniach 6.18 a 13.50).

Položme $V(x, y) := \int_0^x \rho(\xi, y) d\xi$. Potom z Greenovej vety plynie $\int_D \rho dx dy = \int_D V_x dx dy = \int_{\Gamma} V dy$, kde $\Gamma = \partial D$ je tvorená krivkami K a K_1 , symbolicky $\Gamma = K \cup K_1$. Hodnota $M := \int_{K_1} V dy$ je daná, stačí teda maximalizovať funkcionál $\int_K V dy = \int_{\alpha}^{\beta} V(x(t), y(t)) y'(t) dt$ s väzbovou podmienkou $\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = l$. Keďže tvrdenia o Lagrangeových multiplikátoroch platia aj pre úlohy v parametrickom tvare, uvažujme Lagrangián

$$f(x, y, u, v) := V(x, y)v + \lambda \sqrt{u^2 + v^2}.$$

Potom $f_{uy} = 0$, $f_{vx} = V_x = \rho$, $f_1 = f_{uu}/v^2 = \lambda(u^2 + v^2)^{-3/2}$, takže z rovnice (16.9) dostávame, že krivosť extrémaly spĺňa rovnicu $\kappa_0 = -\rho/\lambda$. V špeciálnom prípade konštantnej hustoty ρ musí byť krivosť konštantná, takže extrémaly ležia na kružniciach.

Príklad 16.29. (Geodetické krivky) Nech $G_1 \subset \mathbb{R}^2$ je otvorená a $w = w(\xi_1, \xi_2) : G_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je triedy C^2 , pričom vektory derivácií w_{ξ_1} a w_{ξ_2} sú lineárne nezávislé v každom bode $(\xi_1, \xi_2) \in G_1$. Tzv. metrický tenzor $g_{ij} = g_{ij}(\xi_1, \xi_2)$, $i, j = 1, 2$ je definovaný ako skalárny súčin $w_{\xi_i} \cdot w_{\xi_j}$. Ak je $K = (\xi_1, \xi_2) \in C^1([\alpha, \beta], G_1)$ krivka, potom výraz

$$\Phi(K) = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(\xi_1(t), \xi_2(t)) \xi'_i(t) \xi'_j(t) \right)^{1/2} dt$$

určuje dĺžku krivky $w(K)$ ležiacej na ploche popísanej zobrazením w . Eulerove rovnice pre Φ majú tvar

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\sum_{j=1}^2 g_{kj}(\xi_1(t), \xi_2(t)) \xi'_j(t)}{\left(\sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(\xi_1(t), \xi_2(t)) \xi'_i(t) \xi'_j(t) \right)^{1/2}} \right) = \frac{1}{2} \frac{\sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial g_{ij}}{\partial \xi_k}(\xi_1(t), \xi_2(t)) \xi'_i(t) \xi'_j(t)}{\left(\sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(\xi_1(t), \xi_2(t)) \xi'_i(t) \xi'_j(t) \right)^{1/2}}, \quad k = 1, 2$$

a ich riešenia sa nazývajú geodetické krivky.

Zvoľme $r > 0$ pevne a funkcia w nech popisuje valec s polomerom r : $w(\xi_1, \xi_2) = (r \cos \xi_1, r \sin \xi_1, \xi_2)$, kde $(\xi_1, \xi_2) \in G_1 = \mathbb{R}^2$. Potom $g_{11} = r^2$, $g_{12} = g_{21} = 0$ a $g_{22} = 1$, takže rovnice pre geodetické krivky majú tvar

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{r^2 \xi'_1(t)}{r^2 \xi'_1(t)^2 + \xi'_2(t)^2} \right) = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\xi'_2(t)}{r^2 \xi'_1(t)^2 + \xi'_2(t)^2} \right) = 0.$$

Pre $\xi'_1 = 0$ dostávame zvislé priamky, pre $\xi'_1 \neq 0$ skrutkovice. Porovnajme tento výsledok s Príkladom 13.52.

17. Dodatok

V tomto dodatku uvedieme (často bez dôkazu) niektoré často používané tvrdenia z reálnej a funkcionálnej analýzy.

Nerovnosti

Veta 17.1. (Jensenova nerovnosť) *Nech $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ je integrovateľná, $\int \varphi(x) dx = 1$, nech $G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ je konvexná a zdola polospojité a nech $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je taká, že funkcie $(G \circ u)\varphi, u\varphi$ sú integrovateľné (v $\mathbb{R}^n$). Potom platí $G(\int u\varphi dx) \leq \int G(u)\varphi dx$ (kde všetky integrály sú integrály cez $\mathbb{R}^n$).*

Dôkaz. Nech navyše $G \in C^1$ a označme $t = \int u\varphi dx$. Potom pre každé x platí $G(u(x)) - G(t) \geq G'(t)[u(x) - t]$. Ak túto nerovnosť vynásobíme $\varphi(x)$ a zintegrujeme pre $x \in \mathbb{R}^n$, dostaneme dokazované tvrdenie.

Ak $G \notin C^1$, potom treba miesto $G'(t)$ uvažovať opornú nadrovinu konvexnej množiny $\text{epi}(G) = \{(u, y) : y \geq G(u)\}$ v bode $(t, G(t))$. $\square$

Z Jensenovej nerovnosti a Fubiniho vety ľahko plynú nasledujúce tvrdenie.

Veta 17.2. *Nech $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $K \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktná a $1 \leq p < \infty$. Potom konvolučné zobrazenie $L^p(K) \rightarrow L^p(K) : \varphi \mapsto (f * \varphi)$ definované predpisom $(f * \varphi)(x) = \int_K f(x - y)\varphi(y) dy$ je lineárne a spojité, a teda tiež slabospojité. Navyše $\|f * \varphi\|_{p,K} \leq \|\varphi\|_{p,K} \|f\|_{1,K-K}$, kde $\|\cdot\|_{q,A}$ označuje normu v $L^q(A)$.*

Veta 17.3. (Sobolevova nerovnosť) *Nech $1 < p, q < \infty$, $0 < r < n$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{r}{n} = 2$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Potom platí*

$$\iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{f(x)g(y)}{|x - y|^r} dx dy \leq C \|f\|_p \|g\|_q. \quad (17.1)$$

Špeciálne pre $n = 3$, $r = 1$ a $p = q = 6/5$ dostaneme

$$\iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{f(x)g(y)}{|x - y|} dx dy \leq C \|f\|_{6/5} \|g\|_{6/5}. \quad (17.2)$$

Dôkaz. Tvrdenie plynú z nerovnosti (17.6) a Hölderovej nerovnosti. $\square$

Veta 17.4. (Interpoláčná nerovnosť) *Nech $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$, $t \in [0, 1]$, $1/p = (1 - t)/p_0 + t/p_1$ a $f \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$. Potom $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ a*

$$\|f\|_p \leq \|f\|_{p_0}^{(1-t)} \|f\|_{p_1}^t. \quad (17.3)$$

Dôkaz. Pre $p_1 = \infty$ je tvrdenie zrejmé. Pre $p_1 < \infty$ z Hölderovej nerovnosti plynú

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{(1-t)p} |f(x)|^{tp} dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p_0} dx \right)^{(1-t)p/p_0} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p_1} dx \right)^{tp/p_1}. \quad \square$$

Veta 17.5. (Hardyho nerovnosť) *Nech $a < b$, $p > 1$ a $u \in L^p(a, b)$. Potom*

$$\int_a^b \left(\frac{1}{x-a} \int_a^x |u(\xi)| d\xi \right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_a^b |u(x)|^p dx.$$

Dôkaz. Zrejme môžeme predpokladať $a = 0$. Pre prirodzené $k > 1/b$ položíme $u_k = u\chi_{(1/k, b)}$. Integrovaním per partes a použitím Hölderovej nerovnosti dostaneme

$$\begin{aligned} \int_0^b \frac{1}{x^p} \left(\int_0^x |u_k(\xi)| d\xi \right)^p dx &= \underbrace{\frac{1}{(1-p)b^{p-1}} \left(\int_0^b |u_k(\xi)| d\xi \right)^p}_{\leq 0} + \frac{p}{p-1} \int_0^b \frac{1}{x^{p-1}} \left(\int_0^x |u_k(\xi)| d\xi \right)^{p-1} |u_k(x)| dx \\ &\leq \frac{p}{p-1} \left(\int_0^b \frac{1}{x^p} \left(\int_0^x |u_k(\xi)| d\xi \right)^p dx \right)^{(p-1)/p} \left(\int_0^b |u_k(x)|^p dx \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Odtiaľ a z definície u_k plynú

$$\int_0^b \left(\frac{1}{x} \int_0^x |u_k(\xi)| d\xi \right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^b |u(x)|^p dx.$$

Dokazovaná nerovnosť teraz plynú z Fatouovej lemy. $\square$

Veta 17.6. (Poincarého nerovnosť) *Nech je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ohraničená oblasť s lipschitzovskou hranicou a $1 \leq p < \infty$. Potom existuje konštanta $C = C(\Omega, p) > 0$ tak, že pre každé $u \in W^{1,p}(\Omega)$ platí*

$$\left\| u - \frac{1}{|\partial\Omega|} \int_{\partial\Omega} u \, dS \right\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Výraz $\frac{1}{|\partial\Omega|} \int_{\partial\Omega} u \, dS$ v tejto nerovnosti možno nahradiť výrazom Au , kde A je ľubovoľný spojitý lineárny funkcionál vo $W^{1,p}(\Omega)$ s vlastnosťou $A(1) = 1$.

Teória miery a integrálu

Veta 17.7. (Jegorov) *Nech (X, μ) je priestor s konečnou mierou a $f_j, f : X \rightarrow \mathbb{R}$ sú merateľné, $f_j(x) \rightarrow f(x)$ pre každé $x \in X$. Potom f_j konverguje k f μ -skoro rovnomerne, t.j. pre každé $\delta > 0$ existuje merateľná množina A tak, že $\mu(X \setminus A) < \delta$ a f_j konverguje k f na množine A rovnomerne.*

Dôkaz. Návod: Najprv dokážte, že pre každé $\varepsilon, \eta > 0$ existuje prirodzené číslo k a merateľná množina A tak, že $\mu(X \setminus A) < \eta$ a $|f_j(x) - f(x)| < \varepsilon$ pre každé $x \in A$ a $j \geq k$ (dokážte, že pre pevné $\varepsilon > 0$ a $X_k := \{x \in X : |f_j(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ pre } j \geq k\}$ platí $X_k \subset X_{k+1}$ a $X = \bigcup_k X_k$, takže $\lim \mu(X_k) = \mu(X)$ a $\lim(X \setminus X_k) = 0$). Potom zvolte $\varepsilon = 1/j$ a $\eta = \delta 2^{-j}$, aby ste dostali množinu A_j , a potom položte $A = \bigcap_j A_j$. $\square$

Nech $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Funkcia $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sa nazýva **absolútne spojitá**, ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pre každé $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_k, b_k$ s vlastnosťou $a \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \dots \leq a_k < b_k \leq b$ platí

$$\text{ak } \sum_{i=1}^k (b_i - a_i) < \delta, \quad \text{potom } \sum_{i=1}^k |u(b_i) - u(a_i)| < \varepsilon.$$

Veta 17.8. *Ak je $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ absolútne spojitá, potom s.v. v (a, b) existuje derivácia u' a platí $u' \in L^1(a, b)$, $u(b) - u(a) = \int_a^b u'(x) \, dx$.*

Ak $v \in L^1(a, b)$, potom je funkcia $u(x) := \int_a^x v(t) \, dt$ absolútne spojitá a $u' = v$ s.v. v (a, b) .

Lebesgueove priestory

Budeme predpokladať, že Ω je otvorená množina v $\mathbb{R}^n$ a označíme $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq r\}$. Symbolom $\mathcal{D}(\Omega)$ budeme označovať priestor hladkých (C^∞) funkcií $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, pre ktoré je ich nosič $\text{supp } f := \{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$ kompaktná podmnožina Ω .

Operátor regularizácie (regularizátor). Nech $\omega \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ je nezáporná, má nosič v B_1 a $\int_{\mathbb{R}^n} \omega(x) \, dx = 1$. Pre $\varepsilon > 0$ položíme $\omega_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \omega\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$; potom má ω_ε nosič v B_ε a $\int_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(x) \, dx = 1$. Pre $u \in L^p(\Omega)$ (kde $1 \leq p < \infty$ a Ω je otvorená v $\mathbb{R}^n$) definujeme

$$(R_\varepsilon u)(x) := (\omega_\varepsilon * u)(x) = \int_{\Omega} \omega_\varepsilon(x - y) u(y) \, dy, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (17.4)$$

Ak dodefinujeme u nulou mimo Ω , potom zrejme platí tiež $(R_\varepsilon u)(x) = \int_{B_\varepsilon} u(x - z) \omega_\varepsilon(z) \, dz$. Z vety o derivovaní Lebesgueovho integrálu závislého na parametri dostaneme, že $R_\varepsilon u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Veta 17.9. *Ak $u \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, potom $R_\varepsilon u \in L^p(\Omega)$ a $R_\varepsilon u \rightarrow u$ v $L^p(\Omega)$ pre $\varepsilon \rightarrow 0+$. Navyše $R_\varepsilon u(x) \rightarrow u(x)$ pre s.v. x .*

Jednoduchým dôsledkom Vety 17.9 je nasledujúce tvrdenie.

Veta 17.10. *Nech $1 \leq p < \infty$. Potom je $\mathcal{D}(\Omega)$ hustá podmnožina $L^p(\Omega)$.*

Pomocou Arzelà-Ascoliho vety a operátora regularizácie je tiež jednoduché dokázať nasledujúce kritérium relatívnej kompaktnosti v $L^p(\Omega)$.

Veta 17.11. *Nech je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvorená a $1 \leq p < \infty$. Množina $M \subset L^p(\Omega)$ je relatívne kompaktná práve vtedy, keď je ohraničená a platia nasledujúce dve podmienky:*

- (i) $\|u\|_{p, \Omega \setminus B_k} \rightarrow 0$ pre $k \rightarrow \infty$, rovnomerne pre $u \in M$;
- (ii) $\|u(\cdot + h) - u\|_p \rightarrow 0$ pre $h \rightarrow 0$, rovnomerne pre $u \in M$.

Lema 17.12. (du Bois-Reymond; základná lema variačného počtu) *Nech je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvorená a $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.*

(i) *Ak*

$$\int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx = 0 \quad (17.5)$$

pre všetky $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, potom $u = 0$ s.v.

(ii) *Ak (17.5) platí pre všetky $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ s vlastnosťou $\int_{\Omega} \varphi(x) dx = 0$, potom existuje konštanta C tak, že $u = C$ s.v.*

Dôkaz. (i) Nech je $K \subset \Omega$ kompaktná a $\varphi(x) := \text{sign}(u(x))\chi_K(x)$. Potom pre $\varepsilon > 0$ malé platí $\varphi_\varepsilon := R_\varepsilon \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, takže $\int_{\Omega} u \varphi_\varepsilon dx = 0$, odkiaľ limitným prechodom (vďaka Lebesgueovej vete) dostaneme $\int_K |u| dx = \int_{\Omega} u \varphi dx = 0$, t.j. $u = 0$ s.v. v K .

(ii) Zvoľme $\varphi_1 \in \mathcal{D}(\Omega)$ tak, aby $\int_{\Omega} \varphi_1(x) dx = 1$ a označme $C = \int_{\Omega} u(x) \varphi_1(x) dx$. Pre $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ položme

$$\varphi^*(x) = \varphi(x) - \varphi_1(x) \int_{\Omega} \varphi(y) dy.$$

Potom platí $\int_{\Omega} \varphi^*(x) dx = 0$, takže

$$\int_{\Omega} (u(x) - C) \varphi(x) dx = \underbrace{\int_{\Omega} u(x) \varphi^*(x) dx}_{=0} + \underbrace{\left(\int_{\Omega} u(x) \varphi_1(x) dx - C \right)}_{=0} \int_{\Omega} \varphi(y) dy = 0,$$

odkiaľ na základe prvej časti tvrdenia plynie $u = C$ s.v. $\square$

Pre $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < n/p$ a $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ definujme **Rieszov potenciál**

$$(I_\alpha f)(x) = \left(\frac{1}{|\cdot|^{n-\alpha}} * f \right)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy.$$

Ak položíme $p_\# = np/(n - \alpha p)$, potom platí $I_\alpha \in L^{p_\#}(\mathbb{R}^n)$ a

$$\|I_\alpha f\|_{p_\#} \leq C \|f\|_p; \quad (17.6)$$

vid' napr. [42, Veta 1.33]. Ak $\alpha = 2$, $n \geq 3$ (a $p < n/2$), potom ide o Newtonov potenciál a $u = I_2 f$ je riešením rovnice $\Delta u = -c_n f$ pre vhodné $c_n > 0$ ($c_3 = 4\pi$). V tomto prípade platí

$$\|D^2 u\|_p \leq C \|f\|_p, \quad (17.7)$$

a ak navyše $f \in L^q(B_{2R})$ pre nejaké $1 < q < \infty$, potom

$$u \in W^{2,q}(B_R), \quad \|u\|_{2,q,B_R} \leq C(\|u\|_{q,2R} + \|f\|_{q,2R}), \quad (17.8)$$

kde $\|\cdot\|_{2,q,B_R}$ označuje normu v Sobolevovom priestore $W^{2,q}(B_R)$; vid' [28, Theorem 9.9 a 9.11].

Z nerovností (17.3), (17.6) a (17.8) plynie, že ak $f \in L^1 \cap L^q(\mathbb{R}^3)$, $1 < q < \infty$, a $u = I_2 f$, potom pre každé $R > 0$ platí

$$u \in W^{2,q}(B_R), \quad \|u\|_{2,q,B_R} \leq C(\|f\|_1, \|f\|_q, R). \quad (17.9)$$

Sobolevove priestory

Nech je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otvorená oblasť s (rovnomerne) lipschitzovskou hranicou, vid' napr. [1, Definition 4.5]. Nech k je prirodzené a $p \in [1, \infty]$. Sobolevov priestor $W^{k,p}(\Omega)$ je priestor funkcií $u \in L^p(\Omega)$, ktorých všetky distributívne derivácie $D^\alpha u$ rádu $|\alpha| \leq k$ sú v $L^p(\Omega)$. V tomto priestore uvažujeme normu

$$\|u\|_{k,p} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_p,$$

kde $\|\cdot\|_p$ je norma v $L^p(\Omega)$. Priestory $W^{k,p}(\Omega)$ sú reflexívne pre $1 < p < \infty$ a sú separabilné pre $p < \infty$ (pre $p < \infty$ a Ω ohraničenú je priestor $C^k(\bar{\Omega})$ hustý vo $W^{k,p}(\Omega)$). Priestor $W^{k,2}(\Omega)$ je Hilbertov priestor.

Pre Sobolevove priestory platia nasledujúce vety o vnorení:

Ak $kp < n$ a $p \leq q \leq np/(n - kp)$, potom $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, pričom ide o kompaktné vnorenie, ak $q < np/(n - kp)$ a Ω je ohraničená. Ak $kp = n$, potom toto vnorenie platí pre každé $q \in [p, \infty)$.

Ak $kp > n$, potom $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow BUC^\lambda(\Omega)$ pre $0 < \lambda \leq k - n/p$, $\lambda < 1$, pričom opäť ide o kompaktné vnorenie, ak $\lambda < k - n/p$ a Ω je ohraničená.

Ak $W_r^{1,2}(\mathbb{R}^n) = \{u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n) : u \text{ je radiálne symetrická}\}$, potom

$$\text{pre } n \geq 2 \text{ a } 2 < q < 2n/(n - 2) \text{ je vnorenie } W_r^{1,2}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n) \text{ kompaktné.} \quad (17.10)$$

Idea dôkazu (17.10) je založená na odhade $|u(|x|)| \leq C\|u\|_{W^{1,2}}|x|^{-(n-1)/2}$ pre $|x| \geq 1$ a $u \in \mathcal{D}$, z ktorého plyní splnenie podmienky (i) vo Vete 17.11 pre vhodné $p \in (2n/(n - 1), 2n/(n - 2))$, $p \geq q$, a teda kompaktnosť pre vnorenie $W_r^{1,2}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ (a interpoláciou tiež pre $W_r^{1,2}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$). Ak označíme $m = (n - 1)/2$ a $r = |x|$, uvedený odhad plyní integrovaním (na $[0, |x|]$ resp. $[|x|, \infty)$ pre $n \geq 3$ resp. $n = 2$) nerovnosti

$$|(r^{2m}u^2)_r| = |2(r^m u)_r r^m u| \leq ((r^m u)_r)^2 + (r^m u)^2 = r^{n-1}(u_r^2 + u^2) + m(r^{n-2}u^2)_r - \frac{1}{4}(n-1)(n-3)r^{n-3}u^2.$$

Pre ohraničené oblasti s lipschitzovskou hranicou platí tiež nasledujúce tvrdenie o stopách: Nech $p, q \geq 1$, $q \leq p(n - 1)/(n - p)$ ak $p < n$. Potom existuje jediné spojité lineárne zobrazenie $T : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^q(\partial\Omega)$ tak, že $Tu = u|_{\partial\Omega}$ pre $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$, pričom toto zobrazenie je kompaktné ak $q(n - p) < p(n - 1)$.

V priestore $W_0^{1,p}(\Omega) := \{u \in W^{1,p}(\Omega) : Tu = 0\}$ je $\|u\| := \sum_{|\alpha|=1} \|D^\alpha u\|_p$ norma ekvivalentná norme $\|\cdot\|_{1,p}$, vid' Vetu 17.6. Oveľa všeobecnejšie tvrdenie o ekvivalentných normách možno nájsť napríklad v knihách [44] alebo [37].

Lineárna funkcionálna analýza

Nech je X Banachov priestor, X' jeho duál, $B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ a $B' = \{f \in X' : \|f\| \leq 1\}$.

Veta 17.13. (a) Ak je $M \subset X$ slabo ohraničená, potom je ohraničená v norme.

(b) Ak je $M \subset X$ konvexná a uzavretá, potom je slabo uzavretá.

(c) Ak je X reflexívny, potom sú ohraničené množiny v X slabo relatívne kompaktné a z každej ohraničenej postupnosti v X sa dá vybrať slabo konvergentná podpostupnosť.

(d) (B, w) je metrizovateľný topologický priestor práve vtedy, keď je priestor X' separabilný.

(e) (B', w^*) je metrizovateľný topologický priestor práve vtedy, keď je priestor X separabilný.

(f) Ak je X' separabilný, potom je aj X separabilný.

Poznámky 17.14. (i) Ak je X' separabilný a $M \subset X$ ohraničená, potom je (M, w) metrizovateľný topologický priestor. To plyní z tvrdenia (d) Vety 17.13 a analogický dôsledok platí aj pre tvrdenie (e). Ak je $\dim(X) = \infty$, potom (X', w^*) nie je metrizovateľný.

(ii) Ak je X reflexívny, potom je (B, w) kompaktný topologický priestor. Ak je navyše X separabilný, ide o kompaktný metrický priestor. Množinu B možno pritom nahradiť ľubovoľnou uzavretou ohraničenou konvexnou množinou.

(iii) Ak je X reflexívny, $A \subset X$ ohraničená a x patrí do slabého uzáveru A , potom existujú $x_n \in A$, $x_n \rightharpoonup x$. Bez ohraničenosti A takéto tvrdenie neplatí.

(iv) Ak je X **uniformne konvexný** (t.j. pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pre každé x, y z jednotkovej sféry S_1 platí $\|x - y\| > \varepsilon \implies \|x + y\| < 2(1 - \delta)$), $u_n \rightharpoonup u$ v X a $\|u_n\| \rightarrow \|u\|$, potom $u_n \rightarrow u$.

Bochnerov integrál

Nech X je (reálny) Banachov priestor a T je σ -kompaktný metrický priestor s nezápornou úplnou Radonovou mierou μ (špeciálne $T \subset \mathbb{R}^n$ je otvorená a μ je Lebesgueova miera). Funkcia $u : T \rightarrow X$ sa nazýva **jednoduchá**, ak nadobúda len konečne veľa nenulových hodnôt $x_1, x_2, \dots, x_k$, pričom množiny $u^{-1}(x_j)$, $j = 1, 2, \dots, k$, sú merateľné a majú konečnú mieru. Funkcia $u : T \rightarrow X$ sa nazýva **merateľná**, ak existuje postupnosť jednoduchých funkcií u_k tak, že $u_k(t) \rightarrow u(t)$ pre s.v. $t \in T$. Ak je X separabilný, potom je u merateľná práve vtedy, keď je **slabo merateľná**, t.j. $fu : T \rightarrow \mathbb{R}$ je merateľná pre každé $f \in X'$ (dôsledok Pettisovej vety).

Pre u jednoduchú definujeme Bochnerov integrál

$$\int_T u \, d\mu = \sum_{0 \neq x_j \in u(T)} x_j \mu(u^{-1}(x_j)).$$

Povieme, že funkcia $u : T \rightarrow X$ je **bochnerovsky integrovateľná**, ak existuje postupnosť jednoduchých funkcií u_k tak, že $u_k \rightarrow u$ s.v. a $\int_T \|u_k - u\| \, d\mu \rightarrow 0$. V tomto prípade definujeme **Bochnerov integrál** $\int_T u \, d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_T u_k \, d\mu$, pričom sa dá ľahko dokázať, že uvedená limita existuje a nezávisí na bližšej voľbe u_k . Navyiac platí nasledujúce tvrdenie:

Funkcia $u : T \rightarrow X$ je bochnerovsky integrovateľná práve vtedy, keď je merateľná a funkcia $\|u\| : T \rightarrow \mathbb{R}$ je lebesgueovsky integrovateľná. Potom platí $\|\int_T u \, d\mu\| \leq \int_T \|u\| \, d\mu$ a pre každé spojité lineárne zobrazenie $A : X \rightarrow Y$ je funkcia $Au : T \rightarrow Y$ bochnerovsky integrovateľná, pričom $\int_T Au \, d\mu = A(\int_T u \, d\mu)$.

Nelineárna funkcionálna analýza

Nech sú X, Y reálne Banachove priestory a $\Omega \subset X$ je otvorená. Povieme, že zobrazenie $F : \Omega \rightarrow Y$ je **triedy** C^1 , ak pre každé $a \in \Omega$ existuje Fréchetova derivácia $F'(a)$ a zobrazenie $a \mapsto F'(a)$ je spojité (ako zobrazenie z Ω do priestoru $\mathcal{L}(X, Y)$ spojitých lineárnych zobrazení X do Y). Zobrazenie $F : \Omega \rightarrow X'$ sa nazýva **potenciálne**, ak existuje funkcia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ triedy C^1 (**potenciál**) tak, že $f' = F$.

Ak je X Hilbertov priestor so skalárnym súčinom $(\cdot, \cdot)$, $Y = \mathbb{R}$ a existuje $F'(a) \in H'$, potom podľa Rieszovej vety o reprezentácii existuje práve jeden prvok $\nabla F(a) \in H$ tak, že $F'(a)x = (x, \nabla F(a))$ pre každé $x \in H$, a navyiac platí $\|\nabla F(a)\| = \|F'(a)\|$. Prvok $\nabla F(a)$ sa nazýva **gradient** (zobrazenia F v bode a).

Veta 17.15. Ak má $F : X \rightarrow Y$ n -tú deriváciu v smere $h, \dots, h$ v každom bode úsečky $[a, a + h]$ a zobrazenie $t \mapsto \delta^n F(a + th; h, \dots, h)$ je spojité na $[0, 1]$, potom

$$F(a + h) = F(a) + \delta F(a; h) + \dots + \frac{\delta^{n-1} F(a; h, \dots, h)}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 (1-t)^{n-1} \delta^n F(a + th; h, \dots, h) \, dt.$$

Veta 17.16. Nech je $\Omega \subset X$ otvorená a jednoducho súvislá a nech $F : \Omega \rightarrow X'$ je triedy C^1 . Zobrazenie F je potenciálne práve vtedy, keď pre každé $x \in \Omega$ platí

$$(F'(x)h)k = (F'(x)k)h \quad \text{pre každé } h, k \in X.$$

Ak je $F : X \times Y \rightarrow Z$ a pre $a \in X$ existuje Fréchetova derivácia zobrazenia $F(a, \cdot) : Y \rightarrow Z$ v bode $b \in Y$, budeme túto (parciálnu Fréchetovu) deriváciu značiť symbolom $F'_Y(a, b)$ (ide o spojité lineárne zobrazenie Y do Z). Ďalej označíme $U_X(a, \delta) := \{x \in X : \|x - a\| < \delta\}$.

Veta 17.17. (O implicitnej funkcii) Nech je zobrazenie $F : X \times Y \rightarrow Z$ spojité v bode (a, b) a $F(a, b) = 0$. Nech v okolí bodu (a, b) existuje parciálna derivácia F'_Y a nech je spojitá v bode (a, b) (ako zobrazenie $X \times Y \rightarrow \mathcal{L}(Y, Z)$). Ak je $F'_Y(a, b)$ izomorfizmus priestoru Y na Z , potom existujú $\varepsilon, \delta > 0$ tak, že platí

$$(\forall x \in U_X(a, \delta)) (\exists! y \in U_Y(b, \varepsilon)) \quad F(x, y) = 0.$$

Zobrazenie $x \mapsto y$ je pritom spojité v bode a . Ak je navyiac F triedy C^n v okolí bodu (a, b) , potom je zobrazenie $x \mapsto y$ triedy C^n v okolí bodu a a platí

$$y'(x) = -[F'_Y(x, y(x))]^{-1} F'_X(x, y(x)).$$

Riešenia a návody k cvičeniam

Cvičenie 2.10. Ak $\Psi(u) < \infty$, potom existujú $x_k \rightarrow \infty$ tak, že $u^2(x_k)x_k \rightarrow 0$. Z nerovnosti $(xu')^2 + (2u)^2 - 2u^2 \geq -4xu'u - 2u^2 = (-2u^2x)'$ plynie $\Psi(u) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_1^{x_k} ((xu')^2 + 2u^2) dx \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_1^{x_k} (-2u^2x)' dx = 2u^2(1) = 2 = \Psi(u_1)$. Označme $\Theta_1(u) = \int_{-1}^0 ((xu')^2 + 2u^2) dx$. Z nerovnosti (2.17) plynie, že $u_2(x) = x$ je (jediným) minimizérom Θ_1 na množine funkcií $\{u|_{[-1,0]} : u \in Z\}$. Ak definujeme $u_3(x) = x$ pre $x \leq 0$ a $u_3(x) = 0$ pre $x \geq 0$, potom pre $u \in Z$ platí $\Theta(u) \geq \Theta_1(u|_{[-1,0]}) \geq \Theta_1(u_2) = \Theta(u_3)$. Odtiaľ a z vhodnej aproximácie u_3 funkciami zo Z dostaneme $\inf_Z \Theta = \Theta(u_3)$. Vzhľadom k jednoznačnosti minimizéra u_2 sa toto infimum nenadobúda.

Cvičenie 3.7. Zobrazenie $A_u : h \mapsto \cos(u) \cdot h$ je zrejme prvkom $\mathcal{L}(L^2(0,1), L^2(0,1))$. K existencii Gâteauxovej derivácie stačí teda dokázať, že $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(f^\sharp(u+th) - f^\sharp(u)) = A_u h$ v $L^2(0,1)$, čo plynie z Lebesgueovej vety. K dôkazu neexistencie Fréchetovej derivácie stačí uvažovať funkcie $h_\varepsilon(x) = \pi\chi_{(0,\varepsilon)}$.

Cvičenie 3.8. Použite poznámky za vetami o spojitosti a diferencovateľnosti Nemyckého zobrazenia v L^p -priestoroch. Podmienky pre $F \in C^2$ ak má Ω konečnú mieru a $p > n$: $f \in CAR^2$, $p > 2q$, $f_u(\cdot, 0, 0) \in L^{r_0}(\Omega)$, $f_s(\cdot, 0, 0) \in L^{r_1}(\Omega)$,

$$|f_{uu}(x, u, s)| \leq M(|u|)(a_0(x) + |s|^{p/r_0}),$$

$$|f_{us}(x, u, s)| \leq M(|u|)(a_1(x) + |s|^{p/r_1}),$$

$$|f_{ss}(x, u, s)| \leq M(|u|)(a_2(x) + |s|^{p/r_2}),$$

kde $a_j \in L^{r_j}(\Omega)$ a $r_j := 1/q - j/p$, $j = 0, 1, 2$.

Podmienka $p > 2q$ samozrejme nie je nutná ak je napr. $q = 1$, $p = 2$ a f je kvadratická funkcia v premenných u a s .

Cvičenie 3.14. Na dôkaz nespojitosti resp. neohraničenosti $f^\sharp$ pre $\alpha \leq 2$ resp. $\alpha < 2$ zvolte postupnosť $u_k(x) \equiv 1/k$ a odhadnite $\|f^\sharp(u_k)\|_1 \geq \int_0^{1/k^2} \frac{1/k^\alpha}{x^2+1/k^4} dx = ck^{2-\alpha}$.

Cvičenie 4.2. Využite to, že uniformne konvexný priestor je reflexívny a že zo slabej konvergenencie $u_n \rightharpoonup u$ a konvergenencie $\|u_n\| \rightarrow \|u\|$ v takomto priestore plynie $u_n \rightarrow u$.

Cvičenie 4.10. Pre $k = 3$ použite Poincarého nerovnosť (6.8). Φ je na M_5 koercívny a slabo sekvenciálne zdola polospojité (viď Cvičenie 4.1), takže existuje globálny minimizér u_0 . Pre $u_1(x) = \min(20x, 5, 20(1-x))$ platí $\Phi(u_0) \leq \Phi(u_1) < 0$, takže $u_0 \neq 0$. Keby $m := \max |u_0| < 5$, potom $\frac{5}{m}u_0 \in M_5$, $\Phi(\frac{5}{m}u_0) < \Phi(u_0)$, spor.

Cvičenie 4.11. Pre $u_k(x) = (1 + k(x-1))^+$ platí $\Phi(u_k) \rightarrow 1$, ale $\Phi(u) > 1$ pre každé u v uvažovaných množinách.

Cvičenie 4.13. Nech $u_k(x) = \min(1, -\frac{\ln x}{\ln k})$ pre $x > 0$. Potom $\Phi(u_k) \rightarrow 0$, ale $\Phi(u) > 0$ pre každé u .

Cvičenie 4.14. Φ je koercívny a slabo sekvenciálne zdola polospojité (použite vnorenie $W_0^{1,2}(0,1) \hookrightarrow C([0,1])$, merateľnosť zdola polospojité funkcií a Fatouovu lemu). Pre $g = \chi_{[0,\infty)}$ minimizér neexistuje, $\inf \Phi = 0$ (uvažujte funkcie $u_\varepsilon(x) = \varepsilon \max(-x, x-1)$).

Cvičenie 4.15. Globálnym minimizérom v X_1 je ľubovoľná funkcia $u \in X_1$, pre ktorú $|u'| = 1$ s.v., napr. $u_0(x) = 1 - |x|$. Vhodnou C^1 aproximáciou u_0 zistíme, že $\inf_{X_2} \Phi = 0$, ale toto infimum sa zrejme v X_2 nenadobúda. Ak u_k konverguje slabo k u v X_2 , potom sú u'_k rovnako okraňované a $u'_k(x) \rightarrow u'(x)$ pre každé x , takže z Lebesgueovej vety $\Phi(u_k) \rightarrow \Phi(u)$. Ak zvolíme $u_k \in X_1$ tak, aby $|u'_k| = 1$ s.v. a $|u_k| \leq 1/k$, potom u_k konverguje slabo k $u \equiv 0$ v X_1 , ale $\Phi(0) > \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(u_k) = 0$. Φ je koercívny v X_1 ale nie v X_2 .

Cvičenie 4.16. $\Phi \in C^2$ pre $n = 5, 6$; Φ je koercívny, striktnie konvexný a slabo sekvenciálne zdola polospojité.

Cvičenie 4.17. Keďže $W^{1,2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^6(\mathbb{R}^3)$ a s.v. platí

$$\frac{u^2}{|x|} \leq C \left(\frac{\chi_{|x| \leq 1}}{|x|^{3/2}} + u^2 + u^6 \right), \quad \frac{|u|}{|x|^2} \leq C \left(\frac{\chi_{|x| > 1}}{|x|^4} + \frac{\chi_{|x| \leq 1}}{|x|^{12/5}} + u^2 + u^6 \right),$$

je splnená rastová podmienka (3.2) s $p_1 = 2$, $\tilde{p}_1 = 6$ a $q = 1$. Pre $\varepsilon > 0$ je funkcionál Φ koercívny, pretože

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|u|}{|x|^2} dx \leq \left(\int_{|x| > 1} \frac{1}{|x|^4} dx \right)^{1/2} \left(\int_{|x| > 1} u^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_{|x| < 1} \frac{1}{|x|^{12/5}} dx \right)^{5/6} \left(\int_{|x| < 1} u^6 dx \right)^{1/6} \leq C\|u\|.$$

Naviac Φ je aj striktnie konvexný a spojitý, a teda slabo zdola polospojité. Ak $\varepsilon = 0$, voľte $u_R(|x|) := 1/3$ pre $|x| < 1$, $u_R(|x|) := 1/(3|x|)$ pre $1 \leq |x| < R$, $u_R(|x|) := (R+1-|x|)/(3R)$ pre $R \leq |x| < R+1$, $u(|x|) := 0$ pre $|x| \geq R+1$ a ukážte $\Phi(u_R) \rightarrow -\infty$ pre $R \rightarrow \infty$.

Cvičenie 5.3. Keby $\Phi(x) < \Phi(w)$, zvolte $h \in M$ blízko $x - w$ tak, aby $\Phi(w+h) < \Phi(w)$. Funkcia $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \Phi(w+th)$ je konvexná, $\varphi'(0) = 0$, takže musí byť nezáporná, spor.

Cvičenie 5.4. Zvoľme $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tak, aby $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi(x) = 1$ pre $|x| \leq 1$, $\varphi(x) = 0$ pre $|x| \geq 2$. Nech $u_k(x) = \pm \varphi(x/k)$, kde znamienko zvolíme tak, aby $\int_{\mathbb{R}} f u_k dx \geq 0$. Potom $\|u_k\| \rightarrow \infty$ a $\limsup \Phi(u_k) \leq 0$. Pre $f \in M_1 := \{g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} g dx \neq 0\}$ a $v_k(x) = k^{1/4} \varphi(x/k) \operatorname{sign}(\int_{\mathbb{R}} f dx)$ platí $\Phi(v_k) \rightarrow -\infty$. Pretože nula patrí do spojitého spektra realizácie diferenciálneho operátora $-u'' \in L^2(\mathbb{R})$, má rovnica $-u'' = f$ riešenie $u = u_f \in W^{2,2}(\mathbb{R})$ pre f z hustej množiny $M_2 \subset L^2(\mathbb{R})$. Pre $f \in M_2$ ukážte $\Phi'(u_f)h = 0$ pre $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ a použite Cvičenie 5.3.

Cvičenie 5.7. Uvažujte funkcie $u_\varepsilon(x) = (\varepsilon - x)_+$. Vyšetrite tiež kritický bod $u(x) = 2x/3$.

Cvičenie 5.8. Pre $m = 4$ použite nerovnosť $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Nech ďalej $m > 4$, $u_\varepsilon(x) = \varepsilon(\varepsilon + x)$ pre $x \in [-\varepsilon, 0]$, $u_\varepsilon(x) = \varepsilon(\varepsilon - x)$ pre $x \in [0, \varepsilon]$, $u_\varepsilon(x) = 0$ pre $|x| > \varepsilon$. Potom $\Phi(u_\varepsilon) < 0$ pre $\varepsilon > 0$ malé. Zvoľte také ε pevne a nájdite $u_k \in C_0^1$ tak, že $\Phi(u_k) \rightarrow \Phi(u_\varepsilon)$ a $\|u_k\|_{C^1} \leq \varepsilon$.

Cvičenie 5.9. Uvažujte $u = \sqrt{3\pi/2} \chi_{(0,\varepsilon)}$, resp. $u \in W_0^{1,2}$ spĺňajúce $|u'| = \sqrt{3\pi/2}$ s.v. v $(0, \varepsilon)$, $u(x) = 0$ pre $x > \varepsilon$.

Cvičenie 5.10. Ak $X = C(\overline{\Omega})$, potom $\Phi \in C^\infty$, $\Phi''(0)(h, h) = \int_{\Omega} 2h^2 dx > 0$ pre $h \neq 0$. Lagrangeova postačujúca podmienka sa nedá použiť, ale u_0 je lokálny minimizér, lebo $|\sin t| \geq |t|/\sqrt{2}$ pre $|t|$ malé.

Ak $X = L^2(\Omega)$, potom $\delta^2 \Phi(0; h, h) = 2\|h\|^2$, ale $\Phi \notin C^2$. Pre $u_\varepsilon := \sqrt{\pi} \chi_{(0,\varepsilon)}$ platí $u_\varepsilon \rightarrow u_0$ pre $\varepsilon \rightarrow 0+$, $\Phi(u_\varepsilon) < \Phi(u_0)$, takže u_0 nie je lokálny minimizér.

Nech je ďalej $X = W^{1,2}(\Omega)$. Potom $\Phi \in C^2$ len ak $W^{1,2} \hookrightarrow L^4$, t.j. $n \leq 4$. Pre $n = 1$ je $W^{1,2} \hookrightarrow C$, takže $u_0 \equiv 0$ je lokálny minimizér. Pre $n > 2$ zvoľme $x_0 \in \Omega$, $0 < \varepsilon \ll \delta \ll 1$ tak, aby $\delta^n \ll \varepsilon^2$ a $u(x) = \left(\frac{\delta - |x - x_0|}{\varepsilon}\right)^+$. Potom $\|u\|_{1,2} \ll 1$ a $\Phi(u) < 0$, takže $u_0 \equiv 0$ nie je lokálny minimizér. Pre $n = 2$ skúmajte funkcie definované predpisom $u(x) = [\ln(\delta/|x - x_0|)]^\alpha$ ($\alpha < 1/2$) pre $|x - x_0| < \varepsilon$, $u(x) = C(2\varepsilon - |x - x_0|)^+$ inak.

Cvičenie 5.11. $\Phi \in C^2$ pre $n \leq 3$, $u_0 \equiv 0$ je lokálny minimizér vo $W_0^{1,2}(\Omega)$ ale nie vo $W^{1,2}(\Omega)$. ($\Phi(u_\varepsilon) < 0$ pre $u_\varepsilon \equiv \varepsilon$; ak $n \leq 3$ potom $\Phi''(0)(h, h) \geq c\|h\|^2$ pre $h \in W_0^{1,2}(\Omega)$). Ak $n > 3$, nájdite $f \in BC^2(\mathbb{R})$ tak, že $\sin u^3 \leq f(u)$, $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ a využite to, že $\Phi(u) \geq \Psi(u) := \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - f(u)) dx$, $\Psi \in C^2$, $\Psi''(0)(h, h) \geq c\|h\|^2$ pre $h \in W_0^{1,2}(\Omega)$). Funkcionál Φ je koercívny a slabo sekvenciálne zdola polospojité vo $W_0^{1,2}(\Omega)$ (pre každé n), takže existuje jeho globálne minimum v tomto priestore. V priestore $W^{1,2}(\Omega)$ je zrejme $u \equiv (\pi/2 + 2k\pi)^{1/3}$ globálny minimizér pre každé celé k . Nech $n = 1$, $\Omega = (0, \omega)$ a $X = W_0^{1,2}(\Omega)$. Ak $u \in X$ a $\tilde{u} := \min((\pi/2)^{1/3}, \max(-(3\pi/2)^{1/3}, u))$, potom zrejme $\Phi(\tilde{u}) \leq \Phi(u)$ a $|\tilde{u}| \leq (3\pi/2)^{1/3}$. Pre každé $v \in X$ spĺňajúce $|v| \leq (3\pi/2)^{1/3}$ pritom vďaka Poincarého nerovnosti a odhadu $|\sin v^3| \leq |v^3| \leq (3\pi/2)^{1/3} v^2$ platí

$$\Phi(v) = \int_0^\omega [(v')^2 - \sin v^3] dx \geq \int_0^\omega [(\pi/\omega)^2 - (3\pi/2)^{1/3}] v^2 dx \geq 0$$

pre ω malé, takže tiež $\Phi(u) \geq \Phi(\tilde{u}) \geq 0$. Ukážte, že pre ω veľké a $u(x) = \min(x, \omega - x, (\pi/2)^{1/3})$ platí $\Phi(u) < 0$.

Cvičenie 5.12. Φ je koercívny a slabo sekvenciálne zdola polospojité; existuje globálne minimum. Ak $\int_{\Omega} |\nabla h|^2 dx \geq \int_{\Omega} h^2 dx$ pre každé $h \in X$ (čo platí pre dostatočne „malé“ oblasti Ω), potom

$$\Phi''(u)(h, h) = 2 \int_{\Omega} (|\nabla h|^2 + \frac{-1 + 3u^2}{(1 + u^2)^3} h^2) dx \geq 0$$

pre každé $u, h \in X$, takže Φ je konvexný a $u = 0$ je globálny minimizér. V opačnom prípade Φ nie je konvexný a $u = 0$ nie je lokálny minimizér ($\Phi''(0)(h, h) < 0$ pre vhodné h).

Cvičenie 5.13. $\Phi \in C^2$ pre $n = 2, 3, 4$. $u_0 \equiv 0$ je kritický bod, ktorý nie je minimizérom ($D^2 \Phi(0)(h, h) = -h^2/|x|$ pre h konštantnú). Φ je koercívny a slabo sekvenciálne zdola polospojité takže existuje globálny minimizér u_1 . Pretože $\Phi(-u_1) = \Phi(u_1)$, je aj $-u_1$ minimizér.

Cvičenie 5.14. Zvoľte $u, h \in X$, $h \not\equiv 0$, tak, aby nosič h ležal v množine $\{x : u(x) = 1\}$ a ukážte, že $\Phi''(u)(h, h) < 0$. Odtiaľ plyní, že Φ nie je konvexný. Na dôkaz slabšej sekvenciálnej zdola polospojitosti využite Cvičenie 4.1.

Cvičenie 5.15. Nech $X = C(\overline{\Omega})$. Eulerovu nutnú podmienku spĺňajú funkcie $u_0 = 0$ a $u_{\pm 1} = \pm 1$. Keďže 0 je lokálnym maximizérom a ± 1 sú globálnymi minimizérmi funkcie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : u \mapsto u^2 + \frac{4}{1+u^2}$, je u_0 lokálnym maximizérom a $u_{\pm 1}$ sú globálnymi minimizérmi funkcionálu Φ v $C(\overline{\Omega})$.

V prípade $X = L^2(\Omega)$ sú funkcie u spĺňajúce podmienku $|u| = 1$ s.v. globálnymi minimizérmi. Funkcia $u_0 = 0$ nie je lokálny minimizér (pretože je striktný lokálny maximizér v $C(\overline{\Omega})$) ani maximizér (pretože pre množiny $A_\varepsilon \subset \Omega$ s mierou $|A_\varepsilon| = \varepsilon > 0$ a funkcie $u_\varepsilon = 2\chi_{A_\varepsilon}$ platí $\Phi(u_\varepsilon) > \Phi(u_0)$ a $u_\varepsilon \rightarrow u_0$ pre $\varepsilon \rightarrow 0+$). Platí pritom $D^2 \Phi(0)(h, h) = -6\|h\|^2$. Merateľné funkcie u s vlastnosťami $|u(x)| \in \{0, 1\}$ pre s.v. x a $0 < |\{x : u(x) = 0\}| < |\Omega|$ sú tiež kritickými bodmi, v ktorých Φ nenadobúda extrém.

Cvičenie 5.16. $\Phi \in C^2$, $\Phi''(0)(h, h) = 2 \int_0^\pi ((h')^2 - (\ln a) h^2) dx$.

Cvičenie 5.17. $\Phi'(u_0)u_0 < 2\Phi(u_0) < 0$, $\Phi''(u_1)(u_1, u_1) < \Phi'(u_1)u_1 = 0$.

Cvičenie 5.18. Použite Vetu 17.15 a $\Phi''(u, v)(H, H) = 2\Phi(H) > 0$ pre $H \in \{(h, 0), (0, h), (h, h), (h, -h)\}$, $h \neq 0$.

Cvičenie 6.8. Ukážte najprv, že sa jedná o globálny minimizér Φ na množine $\{u \in W_0^{1,2}(0, 1) : \int_0^1 (u')^2 dx \leq 1\}$, ktorého existencia je zrejmá. Výsledok: $u(x) = \frac{\sqrt{5}}{2}(x^3 - x)$.

Cvičenie 6.9. Nech g je gravitačné zrýchlenie a ρ hustota kávy. Potenciálna energia nekonečne tenkej vertikálnej vrstvy vo vzdialenosti r od stredu šálky je $2\pi r \rho g \int_0^{u(r)} y dy = \pi \rho g r u^2(r)$, kde $u(r)$ je výška uvažovanej vrstvy. Podobne kinetická energia tejto vrstvy sa rovná $(2\pi r u(r) \rho)(\omega^2 r^2)/2$. Jedná sa teda o nájdenie kritických bodov funkcionálu $\Phi(u) = \rho \pi \int_0^R [gu^2 - \omega^2 r^2 u] r dr$ s podmienkou $\Psi(u) := 2\pi \int_0^R r u dr = V$. Φ je konvexný, spojitý a koercívny v Hilbertovom priestore $L^2(0, R)$ s mierou $\mu = r dr$, Ψ je spojitý a lineárny, Φ je súčtom násobku funkcionálu $F(u) = \|u\|^2$ a spojitého lineárneho funkcionálu, a teda triedy C^k pre ľubovoľné k . Výsledok: $u(r) = \frac{1}{2g}(\omega^2 r^2 - \lambda)$. Výsledok pre $\omega = 0$: $\operatorname{div} Tu = \kappa u + \lambda$ v Ω , $\frac{x}{|x|} \cdot Tu = \cos \gamma$ na $\partial\Omega$, kde $Tu = \nabla u / \sqrt{1 + |\nabla u|^2}$.

Cvičenie 6.10. Väzbová podmienka definuje slabo sekvenciálne uzavretú množinu, funkcionál je konvexný, spojitý a koercívny, priestor reflexívny. Minimizér: $u = \frac{18x}{\pi^3}(\pi - x) - \sin x$.

Cvičenie 6.11. (i) $u(x) = -\sqrt[5]{7/2}\sqrt{x}$, (ii) $u = 5x^3 + x^2/4 + 3x + 1$, (iii) $u = 3x^2 + 2x$, (iv) $u = 12x^2 - 10x + 2$, (v) $u = C/b$, (vi) $u = -3$, (vii) $u = 1 - x$.

Cvičenie 6.17. Postupujte ako v Príklade 6.16: Z Poincarého nerovnosti plyní, že skalárny súčin $(u, v) = \int_a^b u'v' dx$ generuje v $X \subset W^{1,2}(a, b)$ ekvivalentnú normu. S pomocou du Bois-Reymondovej lemy (Lema 17.12) ukážte, že každá vlastná funkcia operátora $A : X \rightarrow X$ definovaného predpisom $(Au, v) = \int_a^b uv dx$ je klasickým periodickým riešením rovnice $\lambda u'' + u = C$, kde nutne $C = 0$. Ukážte tiež, že prvé vlastné číslo A má násobnosť dva a príslušné vlastné funkcie sú napr. $\sin(2\pi(x - a)/(b - a))$ a $\cos(2\pi(x - a)/(b - a))$. V dôkaze dôsledku najprv ukážte, že pripočítaním vhodných konštánt k u, v môžeme predpokladať $u, v \in X$. Z Wirtingerovej nerovnosti potom plyní

$$\int_{-1}^1 (u'^2 + v'^2 - 2\pi uv') dx = \int_{-1}^1 (v' - \pi u)^2 dx + \int_{-1}^1 (u'^2 - \pi^2 u^2) dx \geq 0.$$

V prípade rovnosti musí platiť $v' = \pi u$ a u musí byť vlastnou funkciou A príslušnou prvému vlastnému číslu, t.j. $u(x) = C_1 \cos(\pi x) + C_2 \sin(\pi x)$.

Cvičenie 6.18. Po vhodnej reparametrizácii môžeme predpokladať $\sqrt{u'^2 + v'^2} = \text{const} = L(\partial A)/2$. Potom $L(\partial A)^2 = 2 \int_{-1}^1 (u'^2 + v'^2) dx$ a stačí použiť nerovnosť z Cvičenia 6.17.

Cvičenie 6.20. Nech $\|F(u_t)\|^2 = \delta > \psi'(t) \geq 0$ a $a := \frac{1}{2}(\delta + \psi'(t))$. Sporom ukážte, že existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $\|F(u)\|^2 \geq a$ pre $u \in S$ také, že $\Phi(u) \leq \psi(t) + \varepsilon$ a $\operatorname{dist}(u, S^j(t)) \leq \varepsilon$. Pre dostatočne malé $h > 0$ potom $S^j(t + h)$ leží v ε -okolí množiny $S^j(t)$, čo sa dá využiť k dôkazu $\psi(t + h) \geq \min(\psi(t) + \varepsilon, \psi(t) + ah)$, odkiaľ $\psi'(0) \geq a$, spor.

Cvičenie 6.21. $P^* = EI/4$, $w_0(x) = C \sin(x/2)$ resp. $P^* = EI/16$, $w_0(x) = C(1 - \cos(x/4))$ resp. $P^* = EI$, $w_0(x) = C(1 - \cos x)$.

Cvičenie 7.2. Postupnosť $\{x_n\}$ v podmienke (PS) musí byť ohraničená.

Cvičenie 7.7. Miesto nelinearity $g(u) = |u|^{p-2}u$ uvažujte funkciu $\tilde{g}(u) = \max(g(u), 0)$ a pre takto modifikovanú úlohu pomocou princípu maxima ukážte, že každé jej netriviálne riešenie je kladné, a teda je aj kladným riešením pôvodnej úlohy.

Cvičenie 7.9. Pomocou sférických súradníc ukážte, že priestor X je izomorfný s $W_0^{1,2}(1, 2)$ a priestor radiálne symetrických funkcií v $L^p(\Omega)$ je izomorfný s $L^p(1, 2)$.

Cvičenie 8.4. Pre funkciu g platí $g''(u) = 2 + 2(1 - c)(3u^2 - 1)/(1 + u^2)^3 \in [2c, (5 - c)/2]$. Funkcionál $\Phi''(u)(h, h)$ bude rovnomerne pozitívne definitný vo $W^{1,2}(\Omega)$ pre $c > 0$ a vo $W_0^{1,2}(\Omega)$ pre $c > -\lambda_1$, kde λ_1 je prvé vlastné číslo $(-\Delta)$ na Ω s nulovými Dirichletovými podmienkami. Pre $X = W^{1,2}(\Omega)$ ďalej platí $\|\Phi''(u)\| \leq (5 - c)/2$ (takže pre $c > 0$ stačí zvoliť $\varepsilon \leq 2/(5 - c)$), pre $X = W_0^{1,2}(\Omega)$ platí $\|\Phi''(u)\| \leq 2 + (5 - c)/2\lambda_1 =: M$ ($\varepsilon \leq 1/M$). Pre $X = W^{1,2}(\Omega)$ resp. $X = W_0^{1,2}(\Omega)$ je $\nabla \Phi(u) = 2u - (\Delta_N - I)^{-1}(g'(u) - 2u - f)$ resp. $\nabla \Phi(u) = 2u - \Delta_D^{-1}(g'(u) - f)$, kde Δ_N resp. Δ_D je Laplaceov operátor na Ω s nulovými Neumannovými resp. Dirichletovými podmienkami.

Cvičenie 8.6. Ak $\|u_{n_k}\| \leq C$, potom pre vybranú postupnosť platí $u_{n_{k_j}} \rightharpoonup u_0$ a $\Phi(u_0) \leq \inf_{X_n} \Phi = \inf_X \Phi$. $U_0 \equiv U_{1/2} \equiv \infty$, $U_1 \equiv 1$, $U_2 \equiv 0$, $L_0 = -\infty$, $L_{1/2} = -1$, $L_1 = L_2 = 0$ ($\tilde{u}'_n(x) = n^{-\kappa} \operatorname{sign}(-x)$ pre $n > |x| > 1$).

Cvičenie 9.3. Predpokladajte naopak $\|u_k\| \rightarrow \infty$, $\Phi(u_k) \leq A$. V Ekelandovom variačnom princípe zvoľte $\varepsilon := A - \inf \Phi$, $\bar{u} := u_k$ a $\lambda = \lambda_k := \|u_k\|/2$. Ukážte, že pre postupnosť $\{u_{\lambda_k}\}$ neplatí Palais-Smaleova podmienka.

Cvičenie 10.1. Funkcia $f(u, s) = \frac{1}{2}(u^2 - 1)^2 + s^2$ nie je konvexná, ale Φ konvexný je:

$$D^2\Phi(u)(v, v) = \int_0^1 ((6u^2 - 2)v^2 + 2(v')^2) dx \geq 2 \int_0^1 (-v^2 + v'^2) dx \geq c\|v\|_{1,2}^2.$$

Pre $f(u, s) = g(u) + h(s)$ označme $g_0 := \inf g''$, $h_0 := \inf h''$. Postačujúca podmienka je $\min(h_0, \pi^2 h_0 + g_0) \geq 0$.

Cvičenie 10.2. Uvažujte funkcie $u(x) = Ce^{-x}$.

Cvičenie 10.9. Uvažujte funkcionál $\tilde{\Phi}(u) = \int_{\Omega} \tilde{f}(x, u(x), \nabla u(x))$ v priestore $X = \{u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^N) : u = 0 \text{ na } \partial\Omega\}$, kde $\tilde{f}(x, u, s) = f(x, u + u_0(x), s + \nabla u_0(x))$.

Cvičenie 13.9. Pre funkciu v_k zvolte čísla α_k, β_k ako v Príklade 13.8, ukážte $\beta_k \rightarrow 0$ a využite odhad $\Phi(v_k) \geq C/\beta_k$. Ak $p = 3/2$, tak podobne ako v Príklade 13.8 ukážte, že predpoklad $u(x) \geq \frac{1}{4}x^{1/3}$ pre všetky x implikuje $\|u\|_{W^{1,p}(0,x)}^p \geq \frac{1}{4^p}$ pre každé $x > 0$, čo nie je možné.

Cvičenie 13.15. Ak $g''(0) > -2$, potom z nerovnosti (6.8) plynie $\Phi''(u_0)(h, h) = \int_0^\pi (2(h')^2 + g''(0)h^2) dx \geq (2 + \min(0, g''(0))) \int_0^\pi (h')^2 dx$, takže podľa Vety 5.5 je u_0 lokálny minimizér Φ vo $W_0^{1,2}$ a podľa Príkladu 13.14 je u_0 silný lokálny minimizér.

Ak $g''(0) < -2$, potom pre funkciu $h(x) = \sin x$ dostávame $\Phi''(0)(h, h) < 0$, takže u_0 nie je lokálny minimizér. Pre dostatočne veľké prirodzené k a funkciu $h_k(x) = \sin(kx)$ zase platí $\Phi''(0)(h_k, h_k) = \int_0^\pi (2k^2 + g''(0))h_k^2 dx > 0$, takže u_0 nie je lokálny maximizér.

Ak $g(u) = -u^2 + u^4$, potom z nerovnosti (6.8) plynie $\Phi(u) \geq \int_0^\pi ((u')^2 - u^2) dx \geq 0$ pre každé $u \in W_0^{1,2}(a, b)$, takže u_0 je globálny minimizér vo $W_0^{1,2}$.

Ak $g(u) = -u^2 - u^4$, potom pre $u_\varepsilon(x) = \varepsilon \sin x$ ($\varepsilon > 0$) platí $\Phi(u_\varepsilon) < \int_0^\pi ((u'_\varepsilon)^2 - (u_\varepsilon)^2) dx = 0$, takže u_0 nie je lokálny minimizér a podobne ako vyššie dostaneme, že u_0 nie je ani lokálny maximizér.

Cvičenie 13.18. Nech $g = -K^2\chi_{[1,\infty)}$ a u_0 je globálny minimizér Φ , ktorého existencia plynie z Cvičenia 4.14. Keďže $\Phi(u_0) \leq \Phi(u_K) < 0$, platí $\max u_0 \geq 1$, a teda existujú $0 < x_1 \leq x_2 < 1$ tak, že $u_0(x_1) = u_0(x_2) = 1$ a $u_0 < 1$ na $[0, x_1] \cup (x_2, 1]$. Keďže u_0 je globálny minimizér, platí $u_0 = 1$ na $[x_1, x_2]$. Funkcia $u_0|_{[0,x_1]}$ je globálny minimizér pre funkcionál $\Psi(u) = \int_0^{x_1} (u')^2 dx$ v triede $\mathcal{A}_2$, takže je triedy C^1 a rieši Eulerovu rovnicu. Odtiaľ $u_0(x) = x/x_1$ pre $x < x_1$ a podobne $u_0(x) = (1-x)/(1-x_2)$ pre $x > x_2$. Hodnota Φ je pre takéto funkcie minimálna ak $x_1 = 1 - x_2 = 1/K$, t.j. pre $u_0 = u_K$.

Cvičenie 13.20. Pre kinetickú a potenciálnu energiu platí $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = ma^2\dot{\varphi}^2(1 + \cos \varphi)$, $U = mgy = mga(1 - \cos \varphi)$. Z Hamiltonovho princípu dostaneme Eulerovu rovnicu

$$\frac{d}{dt}(2a\dot{\varphi}(1 + \cos \varphi)) = -a\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - g \sin \varphi.$$

Tam, kde $\cos \varphi > -1$, musí zrejme $\varphi \in C^2$, a teda

$$2(1 + \cos \varphi)\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi + (g/a) \sin \varphi = 0.$$

S využitím $(1 + \cos \varphi) = 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}$, $\sin \varphi = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}$, po skrátaní $\cos \frac{\varphi}{2}$ a substitúcií $\eta = \sin \frac{\varphi}{2}$ dostávame rovnicu $\ddot{\eta} + \lambda^2 \eta = 0$, kde $\lambda = \sqrt{\frac{g}{4a}}$. Ak $\eta(0) = 0$, potom odtiaľ plynie $\eta(t) = C \sin \lambda t$, $|C| \leq 1$. Všimnite si, že pre $|C| = 1$ príslušné riešenie $\varphi(t)$ nebude C^1 -funkcia (a tiež $L_{\dot{\varphi}\dot{\varphi}} = 0$ pre príslušné t), ale funkcie $x(t)$ a $y(t)$ budú C^1 .

Cvičenie 13.27. Postupujte podobne ako v Príklade 13.26.

Cvičenie 13.29. Eulerova rovnica $(x^2 u')' = 12u$ má pre kladné x riešenia tvaru $u(x) = C_1 x^{-4} + C_2 x^3$. Ak $A = 0$, potom funkcia $u_0(x) = x^3$ je extrémala, takže $\Phi'(u_0)h = 0$ pre každé $h \in W_0^{1,2}(0, 1)$. Keďže $\Phi''(u)(h, h) \geq 0$ pre každé $u \in W^{1,2}(0, 1)$, je u_0 globálny minimizér. Alternatívny dôkaz: z nerovnosti $(xu')^2 + (3u)^2 + 3u^2 \geq 6xu'u + 3u^2 = (3u^2x)'$ dostaneme

$$\Phi(u) \geq \int_0^1 (3u^2x)' dx = 3u^2(1) = 3 = \Phi(u_0). \quad (*)$$

Nech teraz $A \neq 0$. Keby existoval globálny minimizér v_0 pre Φ v $\mathcal{A}_2$, potom pre každé $\delta \in (0, 1)$ je $v_\delta = v_0|_{[\delta, 1]}$ globálny minimizér $\Phi_\delta(u) := \int_\delta^1 (x^2(u')^2 + 12u^2) dx$ v $\mathcal{A}_{2,\delta} := \{u \in W^{1,2}(\delta, 1) : u(\delta) = v_0(\delta), u(1) = 1\}$. Vďaka Vete 13.11 platí $v_\delta \in C^1([\delta, 1])$, takže $v_0 \in C^1((0, 1]) \cap C([0, 1])$ a v_0 musí byť riešením Eulerovej rovnice v $(0, 1]$. Jediné ohraničené riešenie spĺňajúce podmienku $u(1) = 1$ je však funkcia $u_0(x) = x^3$.

Nech je ďalej $A \neq 0$, $u_0(x) = x^3$ (takže $I_0 = \Phi(u_0)$) a Φ_δ je definované rovnako ako vyššie. Pre $\delta > 0$ malé položíme $u_\delta(x) = A - (A - \delta^3)x/\delta$ pre $x \leq \delta$, $u_\delta(x) = u_0(x)$ pre $x \geq \delta$. Potom z nerovnosti $\Phi_\delta(u_0) < I_0$ plynie $\Phi(u_\delta) < \int_0^\delta (x^2(u'_\delta)^2 + 12u_\delta^2) dx + I_0 \rightarrow I_0$ pre $\delta \rightarrow 0$, takže $I_A \leq I_0$. Nerovnosť $I_A \geq I_0$ plynie z odhadu (*).

Cvičenie 13.30. Postupujte podobne ako v Cvičení 13.29. Eulerova rovnica $(xu')' = u/x$ má pre kladné x riešenia tvaru $u(x) = C_1x + C_2/x$. Diferencovateľnosť Φ v priestore $\{u \in W^{1,2}(0,1) : u(0) = 0\}$ dokážte priamo z definície s použitím Hardyho nerovnosti. Alternatívny (elementárny) dôkaz: Z nerovnosti $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta$ pre $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ plyníe $x(u')^2 + u^2/x \geq 2uu'$ pre $x > 0$, takže $\Phi(u) \geq \int_0^1 2uu' dx = u^2(1) - u^2(0) = 1 = \Phi(u_0)$ pre každé $u \in \mathcal{A}_2$.

Cvičenie 13.34. (i) $\arctan x$; (ii) $-\frac{x^4}{4} + \frac{5}{4}x + 1$ (využite to, že $\int_0^1 u^3 u' dx = 4 - \frac{1}{4}$); (iii) $-\frac{1}{6}(x^3 + 5x)$ (využite to, že $\int_0^1 -3u'u^2 dx = 1$); (iv) $4x^{-2} + 1$; (v) $2 \cos \frac{x}{2}$.

Cvičenie 13.35. Funkcia $u_0(x) = x$ je extrémala, takže $\Phi'(u_0)h = 0$ pre $h \in C_0^1$. Pretože $f_{ss} = (2 - s^2)(1 + s^2)^{-7/4}/4$, z vety o strednej hodnote plyní, že u_0 je globálny minimizér v M . Pre funkcie $u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}x$ pre $x < \varepsilon$, $u_\varepsilon(x) = 1$ pre $x \geq \varepsilon$, zrejme platí $\Phi(u_\varepsilon) \rightarrow 1 < \Phi(u_0)$. Pre $\tilde{u}_\varepsilon \in C^1$ blízke u_ε v $\mathcal{A}_1$ bude teda tiež $\Phi(\tilde{u}_\varepsilon) < \Phi(u_0)$.

Cvičenie 13.43. Použite Hardyho nerovnosť (Veta 17.5).

Cvičenie 13.46. Označme $S := \{x \in [a, b] : u_0(x) \in K \text{ alebo } (\exists i)(u_0(x) \in G_i, u'_0(x) = g_i(u_0(x)))\}$ a S_h množinu hromadných bodov S . Na množine $[a, b] \setminus S$ platí $f_{ss}^0 \neq 0$, takže $u_0 \in C^2$ a $F' = 0$. Keďže je F spojitá v $[a, b]$, platí tiež $F'(x) = 0$ pre každý izolovaný bod x množiny S . Nech $x \in S_h$. Potom existujú $x_k \in S$, $x_k \rightarrow x$. Ak pre vybranú postupnosť platí $u_0(x_k) \in K$, potom $u_0(x) = u_0(x_k)$ pre dostatočne veľké k , takže $u'_0(x) = 0 = g_0(u_0(x))$, kde $g_0(u) := 0$ pre $u \in G_0 := \mathbb{R}$. Ak existuje $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ tak, že pre vybranú postupnosť platí $u_0(x_k) \in G_j$, $u'_0(x_k) = g_j(u_0(x_k))$, potom $u_0(x) \in G_j$ a $u'_0(x) = g_j(u_0(x))$. Zvoľme ďalej $x_0 \in (a, b) \cap S_h$ pevne. Nech $x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$. Položme $\tilde{x} := \inf\{y \in [x_0, x] : F|_{[y, x]} \equiv F(x)\}$ ak $x > x_0$, $\tilde{x} := \sup\{y \in [x, x_0] : F|_{[x, y]} \equiv F(x)\}$ ak $x < x_0$. Potom nutne $\tilde{x} \in S_h$ (inak by bola F v okolí $\tilde{x}$ konštantná), takže existuje $j = j(x) \in \{0, 1, \dots, m\}$ tak, že $u_0(\tilde{x}) \in G_j$ a $u'_0(\tilde{x}) = g_j(u_0(\tilde{x}))$. Nech J je množina tých indexov j , pre ktoré v každom okolí x_0 existuje x s vlastnosťou $j(x) = j$. Potom pre každé $j \in J$ platí $u_0(x_0) \in G_j$ a $u'_0(x_0) = g_j(u_0(x_0))$. Pre x dostatočne blízko k x_0 platí $j := j(x) \in J$, a teda pre vhodné $\theta \in [x_0, \tilde{x}]$ (alebo $\theta \in [\tilde{x}, x_0]$) dostaneme

$$F(x) - F(x_0) = F(\tilde{x}) - F(x_0) = H_j(\tilde{x}) - H_j(x_0) = H'_j(\theta)(\tilde{x} - x_0) = o(|x - x_0|) \quad \text{pre } x \rightarrow x_0,$$

kde $H_j(y) := f(u_0(y), g_j(u_0(y))) - g_j(u_0(y))f_s(u_0(y), u'_0(y))$ pre $j \in J$ je vďaka Vete 13.16 triedy C^1 v okolí x_0 ,

$$\begin{aligned} H'_j(y) &= f_u(u_0(y), g_j(u_0(y)))u'_0(y) - f_u(u_0(y), u'_0(y))g_j(u_0(y)) \\ &\quad + [f_s(u_0(y), g_j(u_0(y))) - f_s(u_0(y), u'_0(y))]g'_j(u_0(y))u'_0(y) \end{aligned}$$

a $u'_0(y) - g_j(u_0(y)) \rightarrow 0$ pre $y \rightarrow x_0$. Odtiaľ $F'(x_0) = 0$, a teda $F' \equiv 0$ v (a, b) .

Cvičenie 13.49. Riešením du Bois-Reymondovej rovnice dostaneme, že pre hľadané kritické body musí platiť $|u'| = \frac{1}{u}\sqrt{R^2 - u^2}$ pre vhodné $R > 0$. Pretože $u' \equiv 0$ nie je riešením Eulerovej rovnice, dostávame z tejto podmienky, že extrémaly musia ležať na polkružniciach tvaru $u^2 + (x - A)^2 = R^2$. Ak u parametrizujeme ako krivku $\varphi(\theta) = (A + R \cos \theta, R \sin \theta)$ a $\varphi(\theta_i) = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2$, potom z du Bois-Reymondovej rovnice plyní

$$\Phi(u) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{u} \sqrt{1 + u'^2} \frac{dx}{d\theta} d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{R}{u^2} \frac{dx}{d\theta} d\theta = - \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{\sin \theta} d\theta = \ln \frac{\tan(\theta_1/2)}{\tan(\theta_2/2)}.$$

Ak $y_1 = y_2 = C$, $u_1 \equiv C$, označme $2d = x_2 - x_1$, $2\theta = \theta_2 - \theta_1$ a $z = d/C$. Potom $\Phi(u) = \ln \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} = \ln(1 + 2z(\sqrt{1 + z^2} + z))$ a $e^{\Phi(u_1)} = e^{2z} > 1 + 2z + 2z^2 + 4z^3/3 > 1 + 2z(\sqrt{1 + z^2} + z) = e^{\Phi(u)}$.

Cvičenie 13.50. Platí $\int_0^b \sqrt{1 + u'^2} dx = l$. Substitúciou $\tau(x) = \int_0^x \sqrt{1 + u'(\xi)^2} d\xi$, $v(\tau(x)) = u(x)$ dostaneme $S = \int_0^b u(x) dx = \int_0^l v(\tau) \sqrt{1 + v'(\tau)^2} d\tau =: \Phi(v)$. Z du Bois-Reymondovej rovnice pre extrémaly funkcionálu Φ dostaneme $|v'| = \sqrt{1 - v^2/C^2}$ pre vhodné $C > 0$, takže $|u'(x)| = |v'(\tau)|/\sqrt{1 + v'(\tau)^2} = \sqrt{C^2 - u^2}/u$, odkiaľ plyní, že graf u je polkružnica s polomerom l/π a hľadaná plocha je $l^2/(2\pi)$.

Cvičenie 13.54. Zvoľme c tak, aby $u(c) = 1/2$. Potom pre $u \in \mathcal{A}_2$ platí odhad

$$\int_0^c u'^2 (u - 1/2)^2 dx \geq \frac{(\int_0^c u' (u - 1/2) dx)^2}{\int_0^c 1 dx} = \frac{1}{8^2 c},$$

podobne $\int_c^1 u'^2 (u - 1/2)^2 dx \geq 1/(8^2(1 - c))$, takže $\inf_{\mathcal{A}_2} \Phi \geq 1/16$. Funkcia u_0 definovaná predpismi $u_0(x) = (1 - \sqrt{1 - 2x})/2$ pre $x < 1/2$ a $u_0(x) = (1 + \sqrt{2x - 1})/2$ pre $x \geq 1/2$ spĺňa $u'(u - 1/2) = -C$ a rieši Eulerovu (aj du Bois-Reymondovu) rovnicu, $\Phi(u_0) = 1/16$. Platí $u_0 \notin W^{1,2}$, ale ak túto funkciu pre $\varepsilon > 0$ malé predefinujeme na intervale $[(1 - \varepsilon)/2, (1 + \varepsilon)/2]$ tak, aby na tomto intervale bola afinná (a zostala spojitá na $[0, 1]$), potom výsledná funkcia u_ε je v $\mathcal{A}_2$ a $\Phi(u_\varepsilon) \rightarrow \Phi(u_0)$ pre $\varepsilon \rightarrow 0+$.

Cvičenie 14.3. Eulerova rovnica má tvar $u'(3u' - 2x) = C$. Keby $C \neq 0$, potom by funkcia u' musela byť stále kladná alebo stále záporná, čo je v spore s okrajovými podmienkami. Pre $C = 0$ dostávame dve riešenia: $u_1(x) = 0$ a $u_2(x) = (x^2 - 1)/3$. Žiadna z týchto extrémál však nevyhovuje Legendrovej nutnej podmienke, takže Φ nemá slabé lokálne C^1 minimizéry.

Cvičenie 14.7. $u_0(x) = \sqrt{\pi/2x}$ nie je minimizér ani maximizér: $E(x, u_0(x), u'_0(x), q)$ ako funkcia premennej q mení znamienko v bode $q = \sqrt{\pi/2}$. Legendrova nutná podmienka pre slabý lokálny minimizér je pritom splnená.

Cvičenie 14.15. Pretože $\int_0^b 2uu' dx = u^2(b) - u^2(0) = 0$ pre $u \in \mathcal{A}$, stačí vyšetrovať funkcionál $\int_0^b ((u')^2 - 16u^2) dx$. Eulerova rovnica (aj Jacobiho rovnica pre ľubovoľnú extrémálu) má tvar $u'' = -16u$; jej riešením spĺňajúcim dané okrajové podmienky je funkcia $u_0(x) \equiv 0$ a pre $b = \pi/4$ tiež všetky násobky funkcie $u_0(x) = \sin(4x)$. Pre $b > \pi/4$ existuje konjugovaný bod $y = \pi/4$, takže $u_0 \equiv 0$ nie je (slabý) lokálny minimizér (ani maximizér). Pre $b \leq \pi/4$ neexistuje konjugovaný bod v $(0, b)$, takže podobne ako v Príklade 14.14 je $D^2\Phi \geq 0$ a všetky nájdené extrémály sú globálne minimizéry.

Cvičenie 14.16. Eulerova rovnica je $u'' + 4u + 4 = 0$, $u_0(x) = \sin(2x) - 1$ je globálny minimizér, lebo $D^2\Phi \geq 0$.

Cvičenie 14.17. Keďže $\int_0^b uu' dx$ je v $\mathcal{A}_C$ konštantný, ide o násobok funkcionálu z Príkladu 14.14. Extrémála $u_0(x) = \cos x - \cot b \sin x$ (pre $b \neq k\pi$) je globálnym minimizérom ak $b < \pi$ a nie je bodom extrému pre $b > \pi$.

Cvičenie 14.18. Extrémálou je funkcia $u_0(x) = \sqrt{x}(1 + D \ln x)$, kde $D = 2/\ln 4$. Platí $P = 2$, $Q = -1/(2x^2) \geq -1/2$, takže funkcionál $\Psi(h) = \int_1^4 (P(h')^2 + Qh^2) dx$ je pozitívne definitný vo $W_0^{1,2}$ a keďže funkcionál Φ je kvadratický, podobne ako v Príklade 14.14 dostávame, že u_0 je globálny minimizér.

Cvičenie 15.3. Eulerova rovnica má tvar $u'(3u' - 2x) = C$. Ak $C \neq 0$, potom musí stále $u' > 2x/3$ alebo $u' < 2x/3$, čo vedie k sporu s okrajovými podmienkami. Pre $C = 0$ dostávame extrémálu $u_0(x) = (x^2 + 2)/3$. Platí $P = 2x > 0$, $Q = 0$, takže ide o slabý lokálny minimizér. Weierstrassova funkcia mení znamienko, takže nejde o silný lokálny minimizér.

Cvičenie 15.4. $P = -4$, $Q = 2$, $E(x, 0, 0, q) = (q^2 - 1)^2 - 1$. Pre $b = 1$ je $u_0 = 0$ slabý ale nie silný lokálny maximizér, pretože v $(0, 1]$ neexistujú konjugované body a E mení znamienko. Pre $b = 5$ sa nejedná ani o slabý extrém, pretože $\sqrt{2}\pi \in (0, 5)$ je konjugovaný bod. Pre každé $u \in W_0^{1,4}$ zrejme platí $\Phi(u) > 0$ a pre $u_k \in W_0^{1,4}$ s vlastnosťou $|u'_k| = 1$ s.v. a $\sup |u_k| \rightarrow 0$ pre $k \rightarrow \infty$ platí $\Phi(u_k) \rightarrow 0 = \inf \Phi$. Dôkaz koercivity je jednoduchý.

Cvičenie 15.5. V prvej časti úlohy vieme, že pre každú extrémálu u spĺňajúcu dané okrajové podmienky existuje x tak, že $u'(x) = 1$. V du Bois-Reymondovej rovnici $(u')^2 2u(u' - 1) = C$ musí byť teda $C = 0$ a dostávame jediné riešenie $u_0(x) = x + 1$. Platí $P(x) > 0$, $Q(x) = 0$, takže ide o slabý lokálny minimizér. $E(x, u_0(x), u'_0(x), q) = qu_0(x)(q - 1)^2$ mení znamienko, takže u_0 nie je silný minimizér. Pre okrajové podmienky $u(-1) = u(1) = 1$ a $u(\pm 1) = \pm 1$ dostávame extrémály $u_0(x) = 1$ (slabý lokálny maximizér, lebo $P < 0$, $Q = 0$, $E(x, 1, 0, q) = q^2(q - 2)$) a $u_0(x) = x$ (tam nie je extrém, lebo f_{ss}^0 mení znamienko).

Cvičenie 15.6. Du Bois-Reymondova rovnica má tvar $(u')^2 u(u' - 2) = C$; v oboch prípadoch musí $C = 0$. Extrémály sú $u_0(x) = 2x - 1$ resp. $u_0(x) \equiv 1$, $f_{ss} = 6su - 8u$. V prvom prípade $f_{ss}^0 = 4u_0$ mení znamienko, takže u_0 nie je slabý lokálny minimizér ani maximizér. V druhom prípade platí $P = -8$, $Q = 0$, ale $E(x, u_0(x), u'_0(x), q) = q^2(q - 4)$ mení znamienko, takže u_0 je slabý ale nie silný lokálny maximizér.

Cvičenie 15.7. $u_0(x) = 2/x - 1$ je slabý lokálny maximizér; $P = -12x^2 < 0$, $Q = 0$, $E = q^3x^4$.

Cvičenie 15.14. Z Eulerovej rovnice plynie $u_0(x) = Bx$; existuje globálne pole extrémál $u(x, \alpha) = Bx + \alpha$. Platí $f_{ss}^0 > 0$ ak $B \notin (B_1, B_2) \cup \{0\}$, kde $B_{1,2} = (-10 \pm \sqrt{10})/15$. Pre $B \notin \{B_1, B_2, 0\}$ neexistujú konjugované body, takže u_0 je slabý lokálny minimizér resp. maximizér. Ak $B \in (B_1, B_2)$, potom nemôže ísť o silné lokálne maximum, lebo z Weierstrassovej nutnej podmienky by plynulo $E(x, u_0(x), u'_0(x), q) \leq 0$, odkiaľ $E(x, u, \psi(x, u), q) \leq 0$ pre ľubovoľné u , takže u_0 by musel byť globálny maximizér, pričom Φ nie je zhora ohraničený. $E = (q - B)^2[(q^2 + (B + 1)q + B(B + 1))^2 + 2B^2(B + 1)(q + 2B + 1)] \geq 0$ pre $B \in (-\infty, -1] \cup [0, \infty)$ (táto podmienka nie je optimálna), takže v tomto prípade ide o globálny minimizér. Prípady $B = 0, -1$ sú triviálne, lebo $\Phi(u) \geq 0 = \Phi(0) = \Phi(-1)$.

Cvičenie 15.15. Eulerova rovnica je $2u'(2u'^2 - M - 1) = C$, extrémála $u_0(x) = x$. Platí $f_{ss} = 2(6s^2 - M - 1)$, $P = 2(5 - M)$, $Q = 0$, t.j. pre $M < 5$ (resp. $M > 5$) je u_0 slabý lokálny minimizér (resp. maximizér). Pole extrémál má tvar $u(x, \alpha) = x + \alpha$, jeho sklon je $\psi(x, u) = u'_0(x) = 1$. Weierstrassova funkcia $E = (q - 1)^2(q^2 + 2q + 2 - M)$ mení znamienko práve pre $M > 1$, takže Φ nadobúda v u_0 silný extrém len pre $M = 1$. Vtedy ide o globálny extrém.

Pre $M = 5$ funkcionál Φ vo funkcii u_0 nemá extrém: $D^3\Phi(u_0)(h, h, h) = 24 \int (h')^3 dx$.

Cvičenie 15.16. Jediná C^1 -extremála je $u_0(x) = Bx$, pole extremál má tvar $u(x, \alpha) = Bx + \alpha$. Platí $f_{ss} = 4(3s^2 - 1)$, takže pre $|B| \neq 1/\sqrt{3}$ neexistujú konjugované body a u_0 je buď slabý lokálny minimizér (ak $|B| > 1/\sqrt{3}$) alebo maximizér (ak $|B| < 1/\sqrt{3}$). Pre $|B| = 1/\sqrt{3}$ je $\Phi''(u_0) = 0$, ale $\Phi'''(u_0) \neq 0$, takže u_0 nie je minizér ani maximizér. Weierstrassova funkcia $E = (q - B)^2[(q + B)^2 + 2(B^2 - 1)]$ nemení znamienko práve pre $|B| \geq 1$, takže v tomto prípade je u_0 silný lokálny minimizér; pretože pole extremál je globálne, ide tiež o globálny minimizér v $\mathcal{A}_C$; zo spojitosti Φ vo $W^{1,4}$ plynie, že ide tiež o globálny minimizér v $\mathcal{A}_4$. Pre $|B| < 1$ nie je splnená Weierstrassova nutná podmienka, takže u_0 nie je silný minimizér resp. maximizér. V tomto prípade je zrejme každá funkcia $u \in \mathcal{A}_\infty$ s vlastnosťou $|u'| = 1$ s.v. globálnym minimizérom Φ .

Cvičenie 15.17. Pre každú extremálu u spĺňajúcu dané okrajové podmienky existuje x tak, že $u'(x) = 1$. V du Bois-Reymondovej rovnici $(u')^2 2u(u' - 1) = C$ musí byť teda $C = 0$ a dostávame jediné riešenie $u_0(x) = x$. Platí $P \geq 0$ ale $P(0) = 0$, takže nemôžeme použiť Jacobiho postačujúcu podmienku. Existuje pole extremál $u(x, \alpha) = x + \alpha$ a pre Weierstrassovu funkciu platí $E(x, v, \psi(x, v), s) = vs(s - 1)^2$. Pre každú $u \in \mathcal{A}_C$, ktorá je blízko u_0 v C^1 -norme, platí teda $E(x, u(x), \psi(x, u(x)), u'(x)) \geq 0$ a z dôkazu postačujúcej podmienky pre silný extrém plynie, že u_0 je slabý lokálny minimizér. Keďže nie je splnená Weierstrassova nutná podmienka pre silný extrém, nejde o silný lokálny minimizér.

Cvičenie 15.19. Existuje práve jedno $C \in (0, 1)$ tak, že $u'_0(x) = (x^3 - C)^{1/3}$. Funkcia $u_0 \in C^1 \setminus C^2$ je globálny minimizér vo $W_0^{1,4}$ (striktná konvexita a koercivita Φ). Platí tiež $E = (q - s)^2((q + s)^2 + 2s^2) \geq 0$, ale $u(x, \alpha) = u_0(x) + \alpha$ nespĺňa naše predpoklady o hladkosti poľa extremál.

Cvičenie 15.20. Eulerova rovnica má tvar $u'[(u')^2 - 1/(4x)] = C$. Nech najprv $u(1) = 0$, $u(4) = 1$. Keby $C \neq 0$, potom u' nemení znamienko, takže z okrajových podmienok $u' > 0$ a tiež na celom intervale $[1, 4]$ buď $u' > 1/(2\sqrt{x})$ alebo $u' < 1/(2\sqrt{x})$, čo vedie k sporu s okrajovými podmienkami. Musí teda $C = 0$, odkiaľ $u_0(x) = \sqrt{x} - 1$. Existuje globálne pole extremál $u(x, \alpha) = \sqrt{x} - 1 + \alpha$ a $E = (q^2 - 1/(4x))^2 \geq 0$, takže u_0 je globálny minimizér. To plynie aj z vyjadrenia $\Phi(u) = \int_1^4 ((u')^2 - 1/(4x))^2 dx + C$.

Nech teraz $u(1) = u(4) = 0$. Podobne ako vyššie dostávame jedinou extremálu $u_0(x) = 0$. Platí $P = -1/x < 0$, $Q = 0$, takže u_0 je slabý lokálny maximizér. $E(x, 0, 0, q) = q^2(q^2 - 1/(2x))$ mení znamienko, takže u_0 nie je silný maximizér.

Cvičenie 15.21. Eulerova rovnica $(u')^2(u' - x) = C$ dáva extremály $u_0 \equiv 0$ a $u_1(x) = (x^2 - 1)/2$. Platí $f_{ss}^0 = 0$, $f_{ss}^1(x) = 12x^2$. Weierstrassova funkcia $E(x, u_0(x), u'_0(x), q) = 3q^4 - 4q^3x$ mení pre $x \neq 0$ v okolí $q = 0$ znamienko, takže u_0 nie je minimizér ani maximizér. Pre u_1 existuje globálne pole extremál $u(x, \alpha) = u_1(x) + \alpha$ so sklonom $\psi(x, u) = x$ a $E(x, u, \psi(x, u), q) = 3q^4 - 4q^3x + x^4 \geq 0$, takže u_1 je globálny minimizér. To plynie aj priamo z vyjadrenia $\Phi(u) = \int_{-1}^1 (3(u')^4 - 4x(u')^3 + x^4) dx + C$ a z Youngovej nerovnosti.

Cvičenie 15.22. Nech najprv $B = 1$. Keďže $\int_0^1 u'(x) dx = 1 = \int_0^1 2x dx$, existuje x_0 tak, že $u'(x_0) = 2x_0$, a z Eulerovej rovnice $(u')^2(u' - x) = 4x^3 + C$ plynie $C = 0$, a teda $u'(0) = 0$ a $u'(x) > x$ pre $x > 0$. Pre $s > x$ platí $f_{ss} = 12s(3s - 2x) > 0$, takže $u'(x) = 2x$ je jediné riešenie Eulerovej rovnice a $u_0(x) = x^2$ je jediná C^1 extremála (spĺňajúca dané okrajové podmienky). Pre globálne pole extremál $u(x, \alpha) = x^2 + \alpha$ a jeho sklon $\psi(x, u) = 2x$ platí $E(x, u, \psi(x, u), q) = (q - 2x)^2(3q^2 + 8qx + 20x^2) \geq 0$, takže u_0 je globálny minimizér.

Nech ďalej $B \in [0, 1)$. Potom $\int_0^1 u'(x) dx < 1 = \int_0^1 2x dx$, takže existuje x_0 tak, že $u'(x_0) < 2x_0$, a teda v Eulerovej rovnici platí $C < 0$. Odtiaľ $u'(0) < 0$. Funkcia u nadobúda minimum v bode x_1 a z rovnosti $u'(x_1) = 0$ dostaneme $C = -4x_1^3$, takže x_1 je jediný bod, kde $u' = 0$, a nutne $u' > 0$ pre $x > x_1$. Pre $x > x_1$ je pravá strana v Eulerovej rovnici $(u')^2(u' - x) = 4x^3 + C$ kladná, takže $u'(x) > x$ pre $x > x_1$, čo dáva spor pre $x \rightarrow x_1$. Žiadna C^1 extremála spĺňajúca dané okrajové podmienky teda neexistuje.

Cvičenie 15.23. Eulerova rovnica je $(u')^2(2u' - 3x) = C$. V prvom prípade je $u(x, \alpha) = 3x^2/4 + \alpha$ globálne pole extremál a $E(x, u, 3x/2, q) = q^4 - 2xq^3 + (3x/2)^4/3 \geq 0$ (vďaka Youngovej nerovnosti), takže $u_0(x) = 3x^2/4$ je globálny minimizér. Pritom $f_{ss}^0(0) = 0$, takže sa nedá použiť Jacobiho postačujúca podmienka. V druhom prípade extremála $u_0 = 0$ nie je lokálny minimizér ani maximizér, pretože $f_{ss}^0 = 0$, $f_{ss}^0 = -12x < 0$ a $f_u = 0$.

Cvičenie 15.24. Eulerova rovnica pre extremály $u_0 \in C^1$ má tvar $-2(u')^3 = \frac{d}{dx}(4x(u')^3 - 6u(u')^2)$. Ďalej $f_{ss}(x, u, s) = 12s(xs - u)$. Predpokladajme, že aspoň v jednom bode $x \in [1, 2]$ platí

$$u'_0(x) \neq 0, \quad xu'_0(x) - u_0(x) \neq 0. \quad (*)$$

Potom $f_{ss}^0 \neq 0$ v okolí tohto bodu, takže u_0 je v tomto okolí triedy C^2 a Eulerova rovnica je v tomto okolí ekvivalentná s rovnicou $x(u')^2 u'' = uu' u''$. Z predpokladu $(*)$ dostaneme odtiaľ $u'' = 0$, takže $u_0(x) = C_1 x + C_2$, pričom z nerovností $(*)$ plynie $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$. Odtiaľ a zo spojitosti u'_0 plynie, že množina $\{x \in [1, 2] : \text{v bode } x \text{ platí } (*)\}$ je otvorená aj uzavretá v $[1, 2]$, takže $(*)$ platí všade.

Pokiaľ $(*)$ neplatí v žiadnom bode intervalu $[1, 2]$, potom aspoň v jednom bode platí $u'_0(x) \neq 0$ (inak by u musela

byť konštantná, čo nevyhovuje okrajovým podmienkam). V okolí tohto bodu dostávame z negácie $(\star)$ $xu'_0 = u_0$, odkiaľ $u_0(x) = Cx$ pre vhodné $C \neq 0$. Podobne ako vyššie dostaneme, že $\{x : u'_0(x) \neq 0\} = [1, 2]$, takže $u_0(x) = Cx$ pre všetky x , čo však nevyhovuje okrajovým podmienkam.

Každá extrémála je teda tvaru $u_0(x) = C_1x + C_2$, z okrajových podmienok plynie $u_0(x) = x - 1$.

Pretože $f_{ss}^0 \equiv 12$, je Jacobiho rovnica ekvivalentná s $h'' = 0$, takže pre u_0 neexistuje konjugovaný bod. Ďalej $f_{ss}^0 > 0$, takže u_0 je slabý lokálny minimizér.

Pretože funkcia $f_{ss}(x, u, s) = 12(xs^2 - us)$ mení znamienko pre $x = 2, u = 1, s \in \mathbb{R}$, musíme k určeniu toho, či je u_0 silný extrém, použiť Weierstrassovu funkciu. Pole extrémál má tvar $u(x, \alpha) = x - 1 + \alpha$, jeho sklon je $\psi(x, u) = u'_0(x) = 1$. Weierstrassova funkcia $E(x, u, 1, q) = x(q^4 - 1) - 2u(q^3 - 1) + (6u - 4x)(q - 1) = (q - 1)^2[xq^2 + 2(x - u)q + (3x - 4u)]$ je nezáporná pre $u = x - 1 + \alpha$, α malé, pretože príslušný diskriminant $D = (x - u)^2 - (3x - 4u)x < 0$ pre tieto hodnoty. Preto u_0 je silný lokálny minimizér.

Cvičenie 15.25. Nech je $u \in C^1$ extrémála. Platí $f_{ss}(x, u(x), u'(x)) = 2(12bxu'^2 - 12buu' + a)$. Na množine $M := \{x : f_{ss} \neq 0\}$ platí $u \in C^2$ a Eulerova rovnica má tvar $u''f_{ss} = 0$, takže $u''(x) = 0$. Pre $x \notin M$, $x > 0$, platí $u'(x) = \frac{1}{2x} [u \pm \sqrt{u^2 - \frac{ax}{3b}}]$, takže u' má rovnaké znamienko ako u . Funkcia $u_0 \equiv c$ je teda jediná C^1 extrémála spĺňajúca zadané okrajové podmienky.

V $(0, 1]$ neexistuje konjugovaný bod ($P \equiv 2a$, $Q \equiv 0$), takže ide o slabý minimizér. Sklon poľa extrémál $u(x, \alpha) = c + \alpha$ je $\psi \equiv 0$, $E(x, u, \psi, q) = q^2(a - 4buq + 2bxq^2)$ mení znamienko pre $u = c \neq 0$ a $x = 0$, takže $u_0 \equiv c$ nie je silný minimizér pre $c \neq 0$. Ak $c = 0$ potom je splnená nutná ale nie postačujúca podmienka pre silný extrém. V Príklade 13.5 je ukázané, že extrémála $u_0 \equiv 0$ nie je silným lokálnym minimizérom, ale je lokálnym minimizérom vo $W_0^{1,4}$.

Cvičenie 15.27. Z du Bois-Reymondovej rovnice $(u')^2(1 + (u^2)') = C$ plynie $C = 0$ (uvažujte bod, kde $|u|$ nadobúda maximum), takže jediným riešením je $u_0 \equiv 0$ (a táto funkcia je tiež riešením Eulerovej rovnice). Platí $P(x) = 2$, $Q(x) = 0$, takže u_0 je slabý lokálny minimizér. Ďalej je splnená nutná ale nie postačujúca podmienka pre silný extrém. Nech je spojitá funkcia u_ε afinná na intervaloch $[0, 1 - \varepsilon]$, $[1 - \varepsilon, 1]$, $u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(1) = 0$, $u_\varepsilon(1 - \varepsilon) = \varepsilon^\alpha$, kde $\alpha \in (0, 1/2)$. Ukážte, že $\Phi(u_\varepsilon) < 0$ pre malé $\varepsilon > 0$ a tiež $\Phi(\tilde{u}_\varepsilon) < 0$ pre vhodnú $\tilde{u}_\varepsilon \in \mathcal{A}_C$ ležiacu blízko u_ε vo $W^{1,3}(0, 1)$, takže u_0 nie je silný lokálny minimizér.

Cvičenie 15.28. Z du Bois-Reymondovej rovnice $(u'u)^2 = C$ dostaneme $u_0(x) = \sqrt{1 + 3x}$. Platí $P(x) = 2(1 + 3x) > 0$, $Q(x) = 9/(2(1 + 3x)) > 0$, takže u_0 je slabý lokálny minimizér. Pole extrémál $u(x, \alpha) = (1 + \alpha)\sqrt{1 + 3x}$ je globálne, $f_{ss} \geq 0$, takže u_0 je silný lokálny minimizér a súčasne globálny minimizér v $\mathcal{A}_C$. Zo spojitosti Φ vo $W^{1,2}$ plynie, že u_0 je tiež globálny minimizér v $\mathcal{A}_2$. Toto tvrdenie sa dá tiež (jednoduchšie) dostať substitúciou $v = u^2$.

Ak $u_\varepsilon(x) = 1 - 4x$ pre $x \leq 1/4$, $u_\varepsilon(x) = 4x - 2$ pre $x \geq 1/2$, $|u'_\varepsilon(x)| = 1/\varepsilon$ a $|u_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon$ pre s.v. $x \in (1/4, 1/2)$, potom $\|u_\varepsilon\|_{1,2} \rightarrow \infty$ pre $\varepsilon \rightarrow 0$ ale $\Phi(u_\varepsilon) \leq C$, takže Φ nie je korecívny. Zvoľme $d \in (0, 1/3)$ a funkciu $u = u_d \in \mathcal{A}_2$ definovanú predpisom $u(x) = 1$ pre $x \in [0, 2d]$, $u(x) = 1 + (x - 2d)/(1 - 3d)$ pre $x \in [2d, 1 - d]$ a $u(x) = 2$ pre $x \in [1 - d, 1]$. Nech $h \in W_0^{1,2}(0, 1)$ je definovaná predpisom $h(x) = x$ pre $x \in [0, 2d]$, $h(x) = 2d/(1 + (x - 2d)/(1 - 3d))$ pre $x \in [2d, 1 - d]$ a $h(x) = 1 - x$ pre $x \in [1 - d, 1]$. Potom $h'/h = -u'/u$ na $(2d, 1 - d)$ a pre d blízke k $1/3$ platí $D^2\Phi(u)(h, h) = 2 \int_0^1 [(uh' + u'h)^2 + 2uu'h'h'] dx < 0$, takže Φ nie je konvexný.

Cvičenie 15.29. Pre Weierstrassovu funkciu platí $E(x, u, s, q) = u(q - s)^2 \geq 0$ pre $u \geq 0$. V prípade v_0 skonštruujte pole extrémál pokrývajúce $\mathcal{A}_2^+$ a využite hustotu C^1 funkcií vo $W^{1,2}$ a spojitost' Φ vo $W^{1,2}$. V prípade w_0 najprv pomocou zovšeobecneného poľa extrémál (viď Poznámku 15.12(iii)) ukážte, že pre dané $x_0 \in (0, 1)$ je funkcia $u_1(x) = (x/x_0 - 1)^{2/3}$ globálny minimizér $\Psi(u) = \int_0^{x_0} (u')^2 u dx$ na množine $\{u \in W^{1,2}(0, x_0) : u(0) = 1, u(x_0) = 0\}$ a dokážte tiež analogické tvrdenie pre funkciu $u_2(x) = (2(x - x_0)/(1 - x_0))^{2/3}$ na intervale $(x_0, 1)$. Ďalej ukážte, že pre funkciu u_0 definovanú predpisom $u_0(x) = u_1(x)$ pre $x \leq x_0$, $u_0(x) = u_2(x)$ pre $x \geq x_0$, je $\Phi(u_0)$ minimálne v prípade $x_0 = 1/3$, t.j. pre $u_0 = w_0$. Nakoniec položte $h(x) = 2x$ pre $x \leq 1/3$, $h(x) = 1 - x$ pre $x \geq 1/3$ a ukážte $\Phi''(w_0)(h, h) < 0$.

Cvičenie 15.30. $u_0 \equiv 1$ resp. $u_0 \equiv 0$ resp. $u_0(x) = (7x + 1)^{2/3}$. $P = 2u_0$, $Q = -2u_0'' \geq 0$, $E = (q - s)^2 u$.

Cvičenie 15.31. $u_0(x) = \sinh(Cx)$ (kde $\sinh C = 1$) je globálny minimizér: $f_{ss} > 0$, pole $u(x, \alpha) = \sinh(Cx + \alpha)$.

Cvičenie 15.32. Ak $u(1) = 0$, potom $u_0 \equiv 0$ je slabý ale nie silný minimizér pre $k = 0$ ($P = 2$, $Q = 0$, $E = \sin^2 q^2$) resp. globálny minimizér pre $k \geq 1$ ($f(s) = \sin(s^2) + ks^2 \geq 0$). Pre $k = 0$ nie je u_0 ani lokálny minimizér v $\mathcal{A}_2$: uvažujte funkciu $u_\varepsilon \in \mathcal{A}_2$, pre ktorú $|u'_\varepsilon| = \sqrt{3\pi/2}$ s.v. na intervale $[0, \varepsilon]$ a $u_\varepsilon = 0$ na $[\varepsilon, 1]$. Nech ďalej $u(1) = \sqrt{\pi}$. Potom existuje jediná extrémála $u_0(x) = \sqrt{\pi}x$ spĺňajúca dané okrajové podmienky; $u(x, \alpha) = u_0(x) + \alpha$ je pole extrémál so sklonom $\sqrt{\pi}$, $E(x, u, \sqrt{\pi}, q) = \sin^2 q^2 + (q - \sqrt{\pi})(kq - (k - 2)\sqrt{\pi})$, $P = f_{ss}^0 = 2(k - 1)$, $Q = 0$. Ak $k = 0$ potom u_0 je slabý ale nie silný lokálny maximizér (E mení znamienko) a nejde ani o lokálny maximizér v $\mathcal{A}_2$ (uvažujte funkciu $u_\varepsilon \in \mathcal{A}_2$, pre ktorú $|u'_\varepsilon| = \sqrt{5\pi/2}$ s.v. na intervale $[0, \varepsilon]$ a $u_\varepsilon = u_0$ na $[\varepsilon, 1]$). Ak $k = 1$, potom u_0 nie je minimizér ani maximizér, pretože E mení znamienko v bode $q = \sqrt{\pi}$ (až tretia derivácia E podľa q je v bode $\sqrt{\pi}$ nenulová). Ak $k \in \{2, 3\}$, potom u_0 je slabý ale nie silný minimizér (pre $k = 2$ je E je záporná napr. pre malé

kladné q , pre $k = 3$ je E je záporná napr. pre $q = 2\sqrt{\pi}/3$ a nejde ani o lokálny minimizér v $\mathcal{A}_2$ (uvažujte funkciu $u = u_{\varepsilon, \delta} \in \mathcal{A}_2$ takú, že $u(x) = (1 + \varepsilon)\sqrt{\pi}x$ na $[0, \delta]$, $u' = \sqrt{\pi}/2$ na $[\delta, \delta(1 + 2\varepsilon)]$, $u = u_0$ na $[\delta(1 + 2\varepsilon), 1]$). Ak $k \geq 4$, potom u_0 je globálny minimizér ($E = E(q) \geq 0$, pretože $E(-q) \geq E(q)$ pre $q \geq 0$, $E'(q) \geq 0$ pre $q \geq \sqrt{\pi}$, $E(q) \geq 0$ pre $q \in [0, (k - 2)\sqrt{\pi}/k]$, $E(q_k - \varepsilon) \geq E(q_k + \varepsilon)$ pre $q_k = (k - 1)\sqrt{\pi}/k$ a $\varepsilon \in [0, \sqrt{\pi}/k]$ a $E'(\sqrt{\pi}(1 - \varepsilon)) \leq 0$ pre $\varepsilon \in [0, 1/k]$ vďaka odhadu $\cos(\pi(1 - \varepsilon)^2) = -\cos(\pi\varepsilon(2 - \varepsilon)) \leq -1 + (\pi\varepsilon(2 - \varepsilon))^2/2$).

Φ je vo $W_0^{1,2}$ koercívny pre $k > 0$ ale nie pre $k = 0$, je zdola ohraňovaný, nie je slabo sekvenciálne zdola polospojité, pretože f nie je konvexná. Zvoľme $s_0 \geq 0$ tak, aby $f(s_0) = \min f$. Potom každá funkcia spĺňajúca $|u'| = s_0$ s.v. je globálnym minimizérom. Ak $k = 0$, potom $D^2\Phi(0)(h, h) = 2 \int_0^1 (h')^2 dx$, ale $u_0 = 0$ nie je lokálny minimizér.

Cvičenie 15.33. Keďže $P(0) = f_{ss}^0(0) = 0$, nemôžeme použiť klasickú postačujúcu podmienku pre slabý minimizér. Použite Poznámku 15.12(ii): uvažujte pole $u(x, \alpha) = \sqrt{\pi}x + \alpha$ a ukážte $E(x, u, \sqrt{\pi}, q) \geq 0$ pre q blízke $\sqrt{\pi}$.

Cvičenie 15.34. $u(x, \alpha) = \alpha$ nie je pole extrémál, lebo nenulové konštanty nie sú riešením Eulerovej rovnice. Pre $|K|$ veľké bude globálny minimizér funkcia $u_1 \neq u_0$. Keďže $u_1 \in C^2$ je riešením du Bois-Reymondovej rovnice, pre takúto K musí mať du Bois-Reymondova rovnica aj netriviálne riešenie.

Z Tvrdenia 15.8 plynie pre extrémalu $u_0 = 0$ existencia poľa extrémál a keďže $E(x, u, s, q) = (q - s)^2[(q + s)^2 + 2s^2 + 1] \geq 0$, je u_0 silný lokálny minimizér, nemusí však byť globálny (a teda ani pole extrémál nemôže potom existovať globálne). To, že u_0 je silný lokálny minimizér, možno dokázať aj jednoduchým odhadom: ak $v \in \mathcal{A}_C$, $|v| \leq 1/(|K| + 1)$, potom s použitím Poincarého nerovnosti dostávame

$$\left| \int_0^1 K v^3 dx \right| \leq \int_0^1 v^2 dx \leq \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 (v')^2 dx, \quad \text{takže } \Phi(v) \geq 0 = \Phi(u_0).$$

Cvičenie 15.35. Z Tvrdenia 15.8 a nerovnosti (6.8) plynie existencia poľa extrémál pre u_0 . Pre $(k, m) = (4, 24)$ je Weierstrassova funkcia $E(x, u, s, q) = (q - s)^2[2q^4 - 5q^2 + 4 + (q^4 + 1)O(s)] \geq 0$ pre $s \rightarrow 0$, pre $(k, m) = (8, 70)$ je $f_{ss} \geq 1$, takže u_0 je silný lokálny minimizér. Pre $u_1(x) = \min(x, 1 - x)$ platí $\Phi(u_1) < 0$.

Poznámka: Z nerovnosti $\Phi(u) \geq \int_0^1 (2(u')^6 - 5(u')^4) dx$ plynie koercivita Φ vo $W_0^{1,6}$. Pre $(k, m) = (8, 70)$ je navyš f konvexná v s , takže existuje globálny minimizér. Vďaka $f_{ss} \geq c_0 > 0$ sa pre Φ dá tiež dokázať Palais-Smaleova podmienka, takže z Vety 7.3 plynie existencia sedlového bodu Φ .

Cvičenie 15.36. Keďže $-108xuu' = -(54xu^2)' + 54u^2$, môžeme miesto Φ vyšetrovať funkcionál $\Psi(u) = \int_0^1 ((u')^3 + 54u^2) dx$. Pretože $E(x, u, s, q) = (q - s)^2(q + 2s)$, Weierstrassova nutná podmienka zaručuje, že žiadna extrémala nie je silný minimizér ani maximizér a žiadna extrémala s vlastnosťou $u'(x_0) = 0$ pre nejaké $x_0 \in [0, 1]$ nie je slabý minimizér ani maximizér. Pre $B > 1$ existuje jediné $C > 0$ tak, že riešenie du Bois-Reymondovej rovnice $u' = 3(u^2 + C)^{1/3}$ s počiatočnou podmienkou $u(0) = 0$ spĺňa podmienku $u(1) = B$. Pre takúto extrémalu platí $P = 6u' > 0$, $Q = 108 > 0$, takže ide o slabý lokálny minimizér. Ak $B \in [0, 1]$, potom má príslušná extrémala tvar $u(x) = 0$ pre $x \leq x_0 := 1 - B^{1/3}$, $u(x) = (x - x_0)^3$ pre $x \geq x_0$. Keďže $u'(0) = 0$, nejde o minimizér ani maximizér. Riešením du Bois-Reymondovej rovnice pre $C < 0$ nájdeme $B_1 < 0$ tak, že pre $B \in [B_1, 0)$ a $C = -B^2$ bude príslušné riešenie spĺňať $u'(1) = 0$ (takže nemôže ísť o minimizér ani maximizér), navyš toto riešenie nie je C^2 a pre $B > B_1$ nejde ani o C^1 -extrémalu (pretože $u(x) \equiv B$ pre x blízko 1, čo nie je riešením Eulerovej rovnice). Na druhú stranu pre $B < B_1$ existuje jediné $C < -B^2$ tak, že príslušné riešenie u je v $\mathcal{A}_C \cap C^2$. Navyš pre $B < B_1$ platí $u'(x) < 0$ pre $x \in [0, 1]$. Keďže $P < 0$ a $Q > 0$, na dôkaz toho, že ide o slabý lokálny maximizér, treba použiť Poznámku 15.12(iii) (riešenia u s podmienkou $u(1) \in (B - \varepsilon, B + \varepsilon)$ tvoria zovšeobecnené pole extrémál).

Cvičenie 15.41. Du Bois-Reymondova rovnica pre $\Phi + \lambda\Psi$ dáva $u + \lambda = C(1 + u'^2)^{1/2}$. Substitúcia $u' = \sinh \chi$ dáva $u + \lambda = C \cosh \chi$, $du/d\chi = C \sinh \chi$ a $dx = (\sinh \chi)^{-1} du = C d\chi$. Odtiaľ $x = C\chi + \tilde{C}$, $u + \lambda = C \cosh \chi$, takže $u + \lambda = C \cosh((x - \tilde{C})/C)$. Z väzbovej a okrajových podmienok dostaneme $u + \sqrt{2} = \cosh(x + \ln(\sqrt{2} - 1))$.

Cvičenie 15.43. Riešením du Bois-Reymondovej rovnice dostávame extrémaly $u_0^\pm = 1/C_2^\pm + C_2^\pm(C_1 - x)^2/4$ kde $C_1 = 1/2$, $C_2 = 4(\sqrt{2} \pm 1)$. Keďže $f_{ss} = \sqrt{u}(1 + s^2)^{-3/2} > 0$ a pre u_0^- existuje pole extrémál $u(x, \alpha) = 1/(C_2^- - \alpha) + (C_2^- - \alpha)(C_1 - x)^2/4$, je u_0^- silný lokálny minimizér. Pre extrémaly $u(x, \alpha) = 1/(C_2^+ - \alpha) + (C_2^+ - \alpha)(C_1 - x)^2/4$ a $w(x) = \partial u(x, \alpha)/\partial \alpha|_{\alpha=0}$ dostávame $w(0), w(1) < 0 < w(1/2)$, takže podľa Poznámky 14.12 v intervale $(0, 1)$ existuje konjugovaný bod pre extrémalu u^+ a táto extrémala teda nie je ani slabým lokálnym minimizérom Φ .

Cvičenie 15.46. Riešením du Bois-Reymondovej rovnice $1 + u^2 = C(u')^2$ dostávame extrémalu $u_0(x) = \sinh kx$ s $k = \operatorname{arcsinh} 1$ ako aj globálne pole $u(x, \alpha) = \sinh(kx + \alpha)$. Pretože $E(x, u, s, q)(1 + u^2)/q^2 s^3 = (q - s)^2(2q + s) \geq 0$ pre $s, q > 0$, je u_0 globálny minimizér v triede C^2 funkcií spĺňajúcich podmienky $u(0) = 0$, $u(1) = 1$, $u' > 0$. Pre funkciu u_ε definovanú predpismi $u_\varepsilon(x) = -u_0(x)$ pre $x < \varepsilon$, $u_\varepsilon(x) = -u_0(\varepsilon) + (u_0(2\varepsilon) + u_0(\varepsilon))(x - \varepsilon)/\varepsilon$ pre $x \in [\varepsilon, 2\varepsilon]$ a $u_\varepsilon(x) = u_0(x)$ pre $x > 2\varepsilon$ zrejme platí $\Phi(u_\varepsilon) < \Phi(u_0)$ a $\|u_\varepsilon - u_0\|_{W^{1,p}} \rightarrow 0$ pre $\varepsilon \rightarrow 0+$ a $p < \infty$.

Cvičenie 15.47. Kladné rastúce riešenia Eulerovej rovnice (ktorá je ekvivalentná s $uu' = C$) majú tvar $u(x) = \sqrt{Cx + D}$; pre extrémalu $u_0(x) = \sqrt{3x + 1}$ existuje globálne pole extrémál $u(x, \alpha) = \sqrt{3(1 + \alpha)x + 1 + \alpha}$, $\alpha > -1$. Pre $u, s, q > 0$ ďalej platí $E(x, u, s, q) = (q - s)^2/(qus^2) \geq 0$, čo zaručuje dokazované tvrdenie.

Cvičenie 15.48. Du Bois-Reymondova rovnica je $(u')^2 = 1 - Cu^2$, $u_0(x) = 2 \sin(x/2 + \pi/4)$ je silný lokálny minimizér v triede funkcií spĺňajúcich $|u'| \leq 1$. Platí $P = 2/\sin^2(\dots) \geq 2$, $Q = -1/\sin^2(\dots) \geq -2$, takže v $(0, \pi]$ neexistujú konjugované body. Pole extrémál má tvar $u(x, \alpha) = 2(1 + \alpha) \sin(x/(2(1 + \alpha))) + \pi/4$ pre α malé, $E(x, u, s, q) \geq 0$ pre $|q| \leq 1$.

Cvičenie 15.49. Du Bois-Reymondova rovnica $u = C_1(1 - (u')^2)$ má riešenia konštanty (ktoré nie sú extrémály) a extrémály tvaru $u(x) = C_1 - (x - C_2)^2/(4C_1)$, z ktorých voľbou $C_2 = 1/2$ a $C_1 = (2 + \sqrt{5})/4$ dostaneme jediná C^2 extrémálu u_0 spĺňajúcu dané okrajové podmienky. Pole extrémál $u(x, \alpha) = (1 + \alpha) - (x - 1/2)^2/(4(1 + \alpha))$ pre $\alpha > -3/4$ pokrýva všetky C^1 funkcie s vlastnosťami $u(0) = u(1) = 1$ a $|u'| < 1$. Keďže $E(x, u, \psi, q) \leq 0$ v tomto poli pre ľubovoľné $|q| < 1$, u_0 je globálny maximizér.

Cvičenie 15.50. Eulerova rovnica $u''(x - u) + 2u'(1 + u') = 0$ má riešenia tvaru $u(x) = -(C_2 + 1/(C_1x + C_2))/C_1$, takže $u(x, \alpha) = -(1 + \alpha)/x$ pre $\alpha > -1$ je pole extrémál pokrývajúce všetky prípustné funkcie. Pretože $E \leq 0$ v tomto poli, je $u_0(x) = 1/x$ globálny maximizér.

Cvičenie 15.51. Z Eulerovej rovnice $u' = Cx\sqrt{1 + (u')^2}$ dostaneme pre $C > 0$ extrémály $u(x) = -\sqrt{1/C^2 - x^2} + D$; $u_0(x) = -\sqrt{5 - x^2}$ je globálny minimizér, lebo Φ je konvexný; viď Príklad 13.31. Pre $u_0 \equiv 0$ je pole extrémál napr. $u(x, \alpha) = \frac{1}{\alpha}(1 - \sqrt{1 - \alpha^2 x^2})$ pre $0 < |\alpha| < 1/2$, $u(x, 0) = 0$.

Cvičenie 15.52. $f_{ss} = 6(5s^2 - 1)(s^2 - 1)$, extrémály $u(x) = C_1x + C_2$. Ak $B = 0$ potom $u_0 \equiv 0$ je globálny minimizér (plynie z odhadu $(u')^2 \geq 0$ alebo $E(x, u, 0, q) = q^2(q^4 - 3q^2 + 3) \geq 0$). Ak $B = 1/2$, potom $u_0(x) = x/2$ je slabý lokálny maximizér ($P < 0$, $Q = 0$, E nie je nekladná). Ak $B = 1$, potom $u_0(x) = x$ nie minimizér ani maximizér ($E(x, u, 1, q) = (q^2 - 1)^3$ mení znamienko v bode $q = 1$). Ak $B = 2$, potom $u_0(x) = 2x$ je globálny minimizér ($E(x, u, 2, q) = (q - 2)^2((q + 1)^4 + 3q^2 + 16q + 46) \geq 0$). Ak $B = 1 + \varepsilon$, potom $u_0(x) = (1 + \varepsilon)x$ je slabý lokálny minimizér ($E(x, u, 1 + \varepsilon, q) < 0$ pre $q = 1 - \sqrt{\varepsilon}$; alternatívny dôkaz sporom: keby $E(x, u, 1 + \varepsilon_k, q) \geq 0$ pre všetky q a $\varepsilon_k \rightarrow 0+$, potom by $E(x, u, 1, q) \geq 0$ pre všetky q , spor).

Cvičenie 15.53. Extrémály $(C_1x + C_2)^{4/7}$, $E(x, u, s, q) = u^3(q - s)^2((q + s)^2 + 2s^2) \geq 0$ pre $u \geq 0$, $u_0 \equiv 1$ a $u_0(x) = (127x + 1)^{4/7}$ sú silné lok. minimizéry; polia $u(x, \alpha) = 1 + \alpha$ resp. $u(x, \alpha) = (127x + 1 + \alpha)^{4/7}$, ale $P = 0$ pre prvú extrémálu.

Cvičenie 16.7. Podobne ako v Príklade 16.6 dostaneme, že globálny minimizér na intervale $[0, 2a]$, $1 < a < 2$, s okrajovými podmienkami $-u(0) = u(2a) = 2$ je funkcia $u_a(x) = \sqrt{(x - a)^2 + C_a(x - a)}$ pre $x \geq a$, $u_a(a - x) = -u_a(a + x)$ pre $0 < x \leq a$, kde $C_a = (4 - a^2)/a > 0$. Reštrikcia u_0 na interval $[0, 2]$ je zrejme globálnym minimizérom Φ na intervale $[0, 2]$ s okrajovými podmienkami $u(0) = -2$, $u(2) = u_a(2)$. Stačí teda nájsť a tak, aby $u_a(2) = 1$ resp. $u_a(2) = 5/6$. V prvom prípade je a jediným riešením rovnice $2a^3 - 6a^2 - a + 8 = 0$ v intervale $(1, 2)$, v druhom prípade $a = 3/2$ (a $C_a = 7/6$).

Cvičenie 16.8. V triede C^1 je $u_0 \equiv 0$ slabý lokálny maximizér ($E = q^2(q^2 - 2)$), v triede funkcií $\hat{C}^1$ sú funkcie tvaru $|u'| = 1$ s.v. globálnymi minimizérmi.

Cvičenie 16.9. $u_0(x) = \frac{1}{2}x$ je slabý lokálny maximizér triedy C^1 . Funkcie $u \in \mathcal{A}_{\hat{C}}$ spĺňajúce $u'(x) \in \{0, 1\}$ s.v. sú globálne minimizéry.

Cvičenie 16.11. Ide o minimizér v triede funkcií spĺňajúcich $u' \leq 0$, takže platí len $\Phi'(u_0)h \geq 0$ pre všetky $h \in \hat{C}^1$ také, že $h'(x) \leq 0$ ak $u'_0(x) = 0$. Špeciálne musí $h(a) \leq 0$, takže dostávame len podmienku $f_s^0(a+) \geq f_s^0(a-)$, ktorá je zrejme splnená.

Cvičenie 16.12. Eulerova rovnica pre C^2 -extrémálu u_0 má tvar $u_0''f_{ss}^0 = 0$ a má práve dve riešenia spĺňajúce dané okrajové podmienky: $u_0^{(1)}(x) = (x + 2)/3$ a $u_0^{(2)}(x) = \sqrt{x}$. Weierstrassova funkcia $E = (q - s)^2(3 - 4u(q + 2s) + 2x(q^2 + 2qs + 3s^2))$ je nezáporná pre pole extrémál $u(x, \alpha) = u_0^{(1)}(x) + \alpha$ ($|\alpha| \ll 1$), takže $u_0^{(1)}$ je silný lokálny minimizér. Pre extrémálu $u_0 := u_0^{(2)}$ platí $8xE(x, u_0(x), u'_0(x), q) = (2\sqrt{x}q - 1)^4 \geq 0$, takže $u_0^{(2)}$ nie je lokálny maximizér, ale tiež $\Phi''(u_0^{(2)})(h, h) = -\int_1^4 (3/x^2)h^2 dx < 0$ pre $h \not\equiv 0$, takže $u_0^{(2)}$ nie je ani lokálny minimizér. Ďalej $\Phi(u_0^{(2)}) > \Phi(u_0^{(1)}) > 1/2$.

Uvažujme ďalej po častiach afinné extrémály $u_0 \in \hat{C}^1$ s vlnosťou $Z(u_0) = \{x_0\}$, $x_0 \in (1, 4)$. Označme $s_1 = u'_0(x)$ pre $x < x_0$, $s_2 = u'_0(x)$ pre $x > x_0$. Potom platí $u_0(x_0) = 1 + s_1(x_0 - 1) = 2 - s_2(4 - x_0)$, odkiaľ

$$u_0(x_0)(s_1 - s_2) = 2s_1 - s_2 - 3s_1s_2, \quad (1)$$

$$x_0(s_1 - s_2) = 1 + s_1 - 4s_2, \quad (2)$$

Naviac platia Weierstrass-Erdmannove podmienky

$$f_s(x_0, u_0(x_0), s_1) = f_s(x_0, u_0(x_0), s_2), \quad (3)$$

$$(f - sf_s)(x_0, u_0(x_0), s_1) = (f - sf_s)(x_0, u_0(x_0), s_2). \quad (4)$$

Z (3) plynie

$$(s_1 - s_2)(3 - 6u_0(x_0)(s_1 + s_2) + 4x_0(s_1^2 + s_1s_2 + s_2^2)) = 0, \quad (5)$$

odkiaľ s využitím (1),(2) a $s_1 \neq s_2$ dostávame

$$3 - (8s_1 + 10s_2) + 4s_1^2 + 10s_1s_2 + 16s_2^2 = 0,$$

t.j.

$$s_1 = \frac{1}{4}(4 - 5s_2 \pm \sqrt{4 - 39s_2^2}). \quad (6)$$

Zo (4) plynie

$$(s_1 - s_2)(-3(s_1 + s_2) + 8u_0(x_0)(s_1^2 + s_1s_2 + s_2^2) - 6x_0(s_1^3 + s_1^2s_2 + s_1s_2^2 + s_2^3)) = 0.$$

Ak k tejto rovnici pripočítame (5) vynásobenú $(s_1 + s_2)$, dostaneme

$$2(s_1 - s_2)^2(u_0(x_0) - x_0(s_1 + s_2)) = 0,$$

takže $u_0(x_0)/x_0 = s_1 + s_2$. S využitím (1),(2) dostaneme

$$(s_1 - 2s_2)(1 - s_1 - 2s_2) = 0,$$

takže buď $s_1 = 2s_2$ alebo $s_1 + 2s_2 = 1$. V oboch prípadoch $x_0 = 2$. S využitím (6) dostávame riešenia $(s_1, s_2) = (1 + 1/\sqrt{3}, -1/2\sqrt{3})$ a $(s_1, s_2) = (1 - 1/\sqrt{3}, 1/2\sqrt{3})$ a príslušné extrémaly $u_0^{(3)}$ a $u_0^{(4)}$;

$$u_0^{(3)}(x) = \begin{cases} (1 + 1/\sqrt{3})x - 1/2\sqrt{3} & x \leq x_0, \\ 2 + 2\sqrt{3} - x/2\sqrt{3} & x \geq x_0. \end{cases}$$

Platí $\Phi(u_0^{(4)}) > 0 > -1 > \Phi(u_0^{(3)})$.

Cvičenie 16.14. Ak napr. $\alpha = 1$, $T = 1$, $p(t) \equiv 2$, $s(t - T) = t^2 - 3t + 2$, $v(t - T) = t^2 - t + 1$, potom $A < 0$, takže $u(t) < 0$ pre $t \in [0, T]$. Keďže $s(0) = 0$, funkcia $s(t) = s(t - T) + u(t)$ bude záporná pre t blízko k T , čo nie je možné. Pri optimalizácii bolo treba požadovať obmedzenia na u zaručujúce nezápornosť funkcií s, v .

Cvičenie 16.15. Predpokladajte sporom $f(a, u(a), u'(a) + K) < f(a, u(a), u'(a))$ pre nejaké K , napr. $K > 0$. Ukážte, že pre $\varepsilon > 0$ malé a $v(x) := u(x) - [\varepsilon - K(x - a)]_+$ bude $\Phi(v) < \Phi(u)$ a aproximujte v vhodnou C^1 -funkciou.

Cvičenie 16.16. Platí $f_s = 4s(s^2 - 1)$, $f_{ss} = 4(3s^2 - 1)$. Z Eulerovej rovnice $4u'((u')^2 - 1) = 4x(x^2 - 1) + C$ a podmienky $f_s(1, u(1), u'(1)) = 0$ dostávame $C = 0$, a teda $(u' - x)((u')^2 + u'x + x^2 - 1) = 0$, odkiaľ $u'(x) \in \{x, -x/2 \pm \sqrt{1 - 3x^2/4}\}$. Máme teda extrémalu u_0 spĺňajúcu $u'_0(x) = -x/2 - \sqrt{1 - 3x^2/4} \leq -1$ pre $x \in [0, 1]$ a ďalšie štyri extrémaly u_1, u_2, u_3, u_4 , ktorých derivácie sa na každom z intervalov $[0, 1/\sqrt{3}]$ a $[1/\sqrt{3}, 1]$ rovnajú buď funkcii x alebo $-x/2 + \sqrt{1 - 3x^2/4}$. Extrémala u_0 je globálny minimizér, pretože pre globálne pole extrémál $u(x, \alpha) = u_0(x) + \alpha$ a Weierstrassovu funkciu E platí $E(x, u, \psi(x, u), q) = (q - u'_0(x))^2((q + u'_0(x))^2 + 2(u'_0(x))^2 - 1)) \geq 0$. Extrémaly u_i pre $i = 1, 2, 3, 4$ nie sú lokálne minimizéry ani maximizéry, pretože pre $x_0 = 1/\sqrt{3}$ platí $u'_i(x_0) = 1/\sqrt{3}$ a $E(x_0, u_i(x_0), u'_i(x_0), q)$ mení znamienko pre q v okolí $1/\sqrt{3}$.

Cvičenie 16.17. Z Eulerovej rovnice $(u')^3 = x^3 + C$ a podmienky $u'(1) = 0$ dostávame $C = -1$, takže $u'_0(x) = -(1 - x^3)^{1/3}$; $u_0 \in C^1 \setminus C^2$. Keďže ide o kritický bod (striktne) konvexného koercívneho funkcionálu v priestore $\{u \in W_0^{1,4} : u(0) = 0\}$, je to globálny minimizér.

Cvičenie 16.18. Nech najprv $\Phi(u) = \int_{-1}^1 ((u')^4/12 - (u')^2u) dx$. Jediným C^1 riešením du Bois-Reymondovej rovnice $(u')^2(4u - (u')^2) = C$ spĺňajúcim podmienky $u(-1) = u(1) = 0$ je $u_0 \equiv 0$. V C_0^1 platí $\Phi'(u_0) = 0$, $\Phi''(u_0) = 0$, $\Phi'''(u_0)(h, h, h) = -6 \int_{-1}^1 (h')^2 h dx \neq 0$ pre vhodné $h \in C_0^1$, takže u_0 nie je ani slabý lokálny minimizér.

Nech $\Psi(u) = \int_{-1}^0 ((u')^4/12 - (u')^2u) dx$ pre $u \in X := \{v \in W^{1,4}(-1, 0); v(-1) = 0\}$. Globálny minimizér funkcionálu Ψ stačí hľadať medzi funkciami spĺňajúcimi $u \geq 0$ a $u' \geq 0$ (platí totiž $\Psi(|u|) \leq \Psi(u)$; pre $u \geq 0$ a $\tilde{u}(x) := \int_{-1}^x |u'(t)| dt$ platí $\Psi(\tilde{u}) \leq \Psi(u)$). Vzhľadom k spojitosti Ψ a hustote C^1 funkcií vo $W^{1,4}$ stačí nájsť globálny minimizér Ψ v množine $M := \{u \in C^1([-1, 0]) : u(0) = 0, u \geq 0, u' \geq 0\}$.

Pre $\alpha > 0$ je funkcia $u = u(\cdot, \alpha)$ definovaná ako riešenie diferenciálnej rovnice $u' = \sqrt{2}\sqrt{u + \sqrt{u^2 + \alpha^2}}$ s podmienkou $u(0) = \alpha/\sqrt{3}$ riešením du Bois-Reymondovej rovnice na intervale $[x_\alpha, 0]$ spĺňajúcim $f_s(u(0), u'(0)) = 0$, kde buď

$x_\alpha = -1$ a $u \geq 0$ na $[-1, 0]$ alebo $x_\alpha \in (-1, 0)$, $u(x_\alpha) = 0$ a $u \geq 0$ na $[x_\alpha, 0]$. Z odhadov $\sqrt{2\alpha} \leq u' \leq 3^{1/4}\sqrt{2\alpha}$ vidno, že $x_\alpha = -1$ pre $\alpha \gg 1$ a $x_\alpha > -1$ pre $\alpha \ll 1$; $|x_\alpha| \leq \sqrt{\alpha/6}$ pre $\alpha \leq 6$. Funkcia $w := du/d\alpha$ spĺňa $w' = \frac{1}{u'} \frac{\alpha}{\sqrt{u'^2 + \alpha^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}$ a $w(0) = 1/\sqrt{3}$, takže w je kladná na $[x_\alpha, 1]$. Odtiaľ plynie, že existuje jediné $\alpha_0 > 0$ ($\alpha_0 \geq 6$), pre ktoré platí $u(-1, \alpha_0) = 0$; označme $u_0 := u(\cdot, \alpha_0)$. Funkcie $u(\cdot, \alpha)$ pre $\alpha > 0$ a $x \in [x_\alpha, 0]$ tvoria pole extrémál pokrývajúce grafy funkcií z množiny M , so sklonom $\psi(x, v) \geq 2\sqrt{v}$. Pre Weierstrassovu funkciu s argumentami $x \in [-1, 0]$ a $v, q \geq 0$ platí $E(x, v, \psi(x, v), q) = (q - \psi)^2(q^2 + 2q\psi + 3\psi^2 - 12v)/12 \geq 0$. Funkcia u_0 je teda globálny minimizér Ψ a po jej rozšírení na párnú funkciu na intervale $[-1, 1]$ ide zrejme o globálny minimizér Φ triedy $\hat{C}^1$. Jednoznačnosť plynie z nerovnosti $E > 0$ pre $q \notin \{0, \psi\}$ a ďalších zrejmých úvah.

Pre $\Phi(u) = \int_{-1}^1 (u')^2(-12 + 12u + (u')^2) dx$ má du Bois-Reymondova rovnica $(u')^2((u')^2 + 4u - 4) = C$ riešenia len pre $C = 0$: $u_0 \equiv 0$ a $u_1(x) = 1 - x^2$. u_0 je slabý, ale nie silný lokálny maximizér ($P < 0 = Q$, $E = q^2(q^2 + 12u - 12)$), v u_1 nie je lokálny extrém ($E^1 = (q + 2x)^2 q(q - 4x)$). Ďalej postupujte ako vyššie: Hľadaný minimizér spĺňa na $[-1, 0]$ aj $[0, 1]$ du Bois-Reymondovu rovnicu (s vhodným $C > 0$) a v bode $x = 0$ podmienku $f_s = 0$, t.j. $(u')^2 = 6 - 6u$; $E = (q - s)^2(q^2 + 2qs + 3(s^2 + 4u - 4)) \geq 0$ pre $qs \geq 0$ a $s^2 + 4u - 4 \geq 0$.

Cvičenie 16.19. Návod pre (iii): Rovnica (16.1) platí pre $\varphi \in C^2([a, b])$ spĺňajúcu podmienku $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$. Ak položíme

$$\tilde{g}(x) = \int_x^b f_u^0(\xi) d\xi \quad \text{a} \quad \tilde{h}(x) = \int_x^b [f_s^0(\xi) + \tilde{g}(\xi)] d\xi,$$

potom integráciou per partes výjde $\int_a^b [f_z^0(x) + \tilde{h}(x)] \varphi''(x) dx = 0$ (takže $f_z^0(x) + \tilde{h}(x) = C_1 x + C_2$). Odtiaľ sa odvodí Eulerova rovnica, ale tiež (integráciou per partes)

$$0 = [f_z^0(x) + \tilde{h}(x)] \Big|_a^b - C_1 \int_a^b \varphi'(x) dx.$$

Musí teda $f_z^0(b) = -\tilde{h}(b) = 0$ a tiež $C_1 = 0$. Zderivovaním rovnice $f_z^0(x) + \tilde{h}(x) = C_2$ v bode b dostaneme $\frac{d}{dx} f_z^0(b) = -\frac{d}{dx} \tilde{h}(b) = f_s^0(b) + \tilde{g}(b) = f_s^0(b)$.

Cvičenie 16.20. Φ je kvadratický a Φ'' je pozitívne definitný na $W_0^{2,2}(1, 2)$. Riešením Eulerovej rovnice $(2x^3 u_0'')'' = 12x$ dostaneme $u_0(x) = x^2/2 + C_1 \ln x + C_2/x + C_3 x + C_4$, z okrajových podmienok plynie $u_0(x) = x^2/2$. Pretože Φ je striktnie konvexný a $\Phi'(u_0) = 0$, je u_0 hľadaný globálny minimizér.

Zoznam literatúry

- [1] R. Adams: Sobolev spaces, Academic Press, New York 1975
- [2] N.I. Akhiezer: The calculus of variations. Harwood Academic Publishers, Chur 1988 (ruský originál vyšiel v r. 1955)
- [3] A. Ambrosetti, P.H. Rabinowitz: Dual variational methods in critical point theory and applications, J. Funct. Anal. 14 (1973), 349–381
- [4] J.M. Ball, V.J. Mizel: One-dimensional variational problems whose minimizers do not satisfy the Euler-Lagrange equation, Archive Rat. Mech. Anal. 90 (1985), 325–388
- [5] K.O. Besov: On the continuity of the generalized Nemytskii operator on spaces of differentiable functions, Mat. Notes 71 (2002), 154–165
- [6] G.A. Bliss: Calculus of variations, Open Court Publ. Co., Chicago 1925
- [7] G.A. Bliss: The problem of Lagrange in the calculus of variations, Amer. J. Math. 52 (1930), 673–744
- [8] O. Bolza: Lectures on the calculus of variations, University of Chicago Press 1904
- [9] M. Brdička, A. Hladík: Teoretická mechanika, Academia, Praha 1987
- [10] H. Brezis, L. Nirenberg: H^1 versus C^1 local minimizers, C. R. Acad. Sci. Paris 317 (1993), 465–472
- [11] F. Brock, V. Ferone, B. Kawohl: A symmetry problem in the calculus of variations, Calc. Var. 4 (1996), 593–599
- [12] G. Buttazzo, V. Ferone, B. Kawohl: Minimum problems over sets of concave functions and related questions, Math. Nachrichten 173 (1993), 71–89
- [13] G. Buttazzo, M. Giaquinta, S. Hildebrandt: One-dimensional variational problems, Clarendon Press, Oxford 1998
- [14] C. Carathéodory: Calculus of variations and partial differential equations of the first order, AMS, Providence 1999 (preklad z nemeckého originálu vydaného vydavateľstvom B.G. Teubner, Berlin 1935)
- [15] L. Cesari: Optimization - theory and applications, Springer, Berlin 1983
- [16] M. Chipot, P. Quittner: Equilibria, connecting orbits and a priori bounds for semilinear parabolic equations with nonlinear boundary conditions, J. Dynamics Differ. Equations 16 (2004), 91–138
- [17] F.H. Clarke, R.B. Vinter: Regularity properties of solutions to the basic problem in the calculus of variations, Trans. Amer. Math. Soc. 289 (1985), 73–98
- [18] M. Csörnyei, B. Kirchheim, T.C. O’Neil, D. Preiss, S. Winter: Universal singular sets in the calculus of variations, Arch. Rat. Mech. Anal. 190 (2008), 371–424
- [19] B. Dacorogna: Direct methods in the calculus of variations, Springer, Berlin 2008 (1. vydanie 1989)
- [20] D.G. Costa: An invitation to variational methods in differential equations, Birkhäuser, Boston 2007
- [21] D.G. de Figueiredo: Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours, Tata Inst. of Fundamental Research, Bombay 1989
- [22] A.R. Forsyth: Calculus of variations, Cambridge University Press 1927
- [23] A. Friedman: Variational principles and free-boundary problems, Wiley, New York 1982
- [24] S. Fučík, J. Nečas, V. Souček: Úvod do variačního počtu, SPN, Praha 1972 (existuje nemecký preklad: Einführung in die Variationsrechnung, Teubner, Leipzig 1977)
- [25] J.P. García Azorero, I. Peral Alonso, J.J. Manfredi: Sobolev versus Hölder local minimizers and global multiplicity for some quasilinear elliptic equations, Commun. Contemp. Math. 2 (2000), 385–404
- [26] I.M. Gelfand, S.V. Fomin: Calculus of Variations, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1963
- [27] M. Giaquinta, S. Hildebrandt: Calculus of variations I, Springer, Berlin - Heidelberg 2004
- [28] D. Gilbarg, N.S. Trudinger: Elliptic partial differential equations of second order, Springer 1983
- [29] E. Giusti: Minimal surfaces and functions of bounded variation, Birkhäuser, Boston 1984

- [30] H.H. Goldstine: A history of the calculus of variations from the 17th through the 19th century, Springer, New York 1980
- [31] M.R. Hestenes: Calculus of variations and optimal control theory, John Wiley & Sons, New York 1966
- [32] H. Hofer: A geometric description of the neighbourhood of a critical point given by the mountain-pass theorem, J. London Math. Soc. (2) 31 (1985), 566–570
- [33] H. Hofer: The topological degree at a critical point of mountain-pass type, Proc. Symp. Pure Math. 45 (1986) Part I, 501–509
- [34] A.D. Ioffe, V.M. Tihomirov: Theory of extremal problems, North-Holland, Amsterdam 1979
- [35] B. Kawohl: Some nonconvex shape optimization problems, Springer Lecture Notes in Mathematics 1740 (2000), 7–46
- [36] M.L. Krasnov, G.I. Makarenko, A.I. Kiselev: Problems and exercises in the calculus of variations, Mir, Moskva 1975 (preklad z ruštiny)
- [37] A. Kufner, O. John, S. Fučík: Function spaces, Academia, Praha, 1977
- [38] M. Lavrentieff: Sur quelques problèmes du calcul des variations, Ann. Mat. Pura Appl. 4 (1927), 7–28
- [39] G. Leitmann: The calculus of variations and optimal control, Plenum Press, New York and London 1981
- [40] E.H. Lieb, M. Loss: Analysis, AMS, 2001
- [41] P.L. Lions: The concentration-compactness principle in the calculus of variations, Ann. Inst. H. Poincaré 1 (1984), 109–145 a 223–282
- [42] J. Malý, W.P. Ziemer: Fine regularity of solutions of elliptic partial differential equations, AMS 1997
- [43] B. Manià: Sopra un esempio di Lavrentieff, Boll. Un. Mat. Ital. 13 (1934), 147–153
- [44] J. Nečas: Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques, Masson, Paris a Academia, Praha, 1967
- [45] J. Nečas: Example of an irregular solution to a nonlinear elliptic system with analytic coefficients and conditions for regularity; v zborníku „Theory of nonlinear operators”, Akademie-Verlag, Berlin, 1977, str. 197–206
- [46] J. Nečas, I. Hlaváček: Mathematical theory of elastic and elasto-plastic bodies: an introduction, Elsevier, Amsterdam, 1981 (česky: Úvod do matematické teorie pružných a pružně plastických těles, SNTL, Praha, 1983)
- [47] I. Newton: Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, Royal Society, London 1686
- [48] E.J. McShane: The Calculus of variations from the beginning through optimal control theory, SIAM J. Control Optimization 27 (1989), 916–939
- [49] S.I. Pohozaev: Eigenfunctions of the equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$, Soviet Math. Dokl. 6 (1965), 1408–1411 (rusky Dokl. Akad. Nauk SSSR 165 (1965), 36–39)
- [50] J. Stará, O. John: Funkcionální analýza (Nelineární úlohy), SPN, Praha 1986
- [51] M. Struwe: Variational methods, Springer, Berlin 2008 (1. vydanie 1990)
- [52] V. Šverák: Nelineární rovnice a slabá konvergence, 14. seminář z parciálních diferenciálních rovnic (Hřensko 1989), JČSMF Praha a KMA VŠSE Plzeň, 1990
- [53] V. Šverák: Rank-1 convexity does not imply quasiconvexity, Proc. Royal Soc. Edinburgh 120 (1992), 185–189
- [54] V. Šverák, X. Yan: Non-Lipschitz minimizers of smooth uniformly convex functionals, Proc. Nat. Acad. Sci. 99 (2002), 15269–15276
- [55] J.L. Troutman: Variational calculus and optimal control, Springer, New York - Heidelberg - Berlin 1996
- [56] L. Tonelli: Sur une méthode directe du calcul des variations, Rend. Circ. Mat. Palermo 39 (1915), 233–264
- [57] L. Tonelli: Sur une question du calcul des variations, Mat. Sb. 33 (1926), 87–98
- [58] H. Whitney: A function not constant on a connected set of critical points, Duke Math. J. 1 (1935), 614–517

Index

- bod
 - konjugovaný, 62
 - kritický, 18
 - typu horského sedla, 27
- brachistochrona, 6, 22
- Eulerov operátor, 3
- extremála, 52
- funkcia
 - bochnerovsky integrovateľná, 90
 - Carathéodoryho, 10
 - Hamiltonova, 76
 - jednoduchá, 90
 - kvazikonvexná, 39
 - merateľná, 90
 - polykonvexná, 39
 - rank-1 konvexná, 39
 - slabo merateľná, 90
 - Weierstrassova, 60
 - zdola polospojité, 15
- funkcionál
 - koercívny, 15
 - konvexný, 15
 - slabo (sekvenciálne) spojitý, 15
 - slabo (sekvenciálne) zdola polospojité, 15
 - striktne konvexný, 15
- geodetické krivky, 53, 59, 85
- gradient, 90
- integrál
 - Bochnerov, 90
 - Hilbertov invariantný, 66
- kritická hodnota, 26
- kritický bod, 18
- kritický Sobolevov exponent, 27
- kritický stav, 3
- Lagrangeove multiplikátory, 20
- Lagrangián, 3
- metóda
 - konečných prvkov, 31
 - najväčšieho spádu, 30
 - Newtonova, 31
 - Ritzova, 31
- minimizér, 15
 - lokálny, 48
 - silný lokálny, 48
 - slabý lokálny, 48
- nerovnosť
 - Hardyho, 86
 - interpolačná, 86
 - Jensenova, 86
 - Kornova, 17
 - Poincarého, 87
 - Sobolevova, 86
- null Lagrangian, 67
- podmienka
 - du Bois-Reymondova nutná, 58
 - Eulerova nutná, 18, 52
 - Jacobiho nutná, 63
 - Lagrangeova postačujúca, 18
 - Legendreova nutná, 60
 - nutná pre viazaný extrém, 20
 - Palais-Smaleova, 25
 - postačujúca pre silný extrém, 67
 - postačujúca pre slabý extrém, 64
 - Weierstrass-Erdmannova, 78
 - Weierstrassova nutná, 60
- pole extrémál, 65
- postupnosť
 - biortogonálna, 20
 - minimizujúca, 15
 - relatívne kompaktná až na translácie, 42
- potenciál, 90
 - Rieszov, 88
- priestor
 - Sobolevov, 89
 - uniformne konvexný, 89
- princíp
 - Courant-Weinsteinov, 23
 - Ekelandov, 32
 - Fermatov, 5, 59
 - Hamiltonov, 5, 53
 - Maupertuisov, 53
- Rayleighov podiel, 23
- Rieszov potenciál, 88
- rovnica
 - du Bois-Reymondova, 58
 - Euler-Lagrangeova druhá, 58
 - Euler-Lagrangeova prvá, 52
 - Euler-Poissonova, 83
 - Euler-Weierstrassova, 85
 - Eulerova, 3, 52
 - Hamilton-Jacobiho, 76
 - Jacobiho, 62
- sklon poľa extrémál, 65

- variácia, 3
- veta
 - o regularite minimizéra vo $W^{1,p}$, 51
 - Ljusternikova, 20
 - Mountain Pass Theorem, 26
 - o diferencovateľnosti Nemyckého zobrazenia v L^p -priestoroch, 11
 - o diferencovateľnosti Nemyckého zobrazenia v priestoroch spojitých funkcií, 13
 - o implicitnej funkcii, 90
- o konjugovaných bodoch, 62
- o regularite C^1 -minimizéra, 56
- o spojitosti Nemyckého zobrazenia v L^p -priestoroch, 10
- o spojitosti Nemyckého zobrazenia v priestoroch spojitých funkcií, 13
- zobrazenie
 - Nemyckého, 10
 - potenciálne, 90
 - triedy C^1 , 90

Často používané symboly

$\delta F(w; h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(w + th) - F(w)}{t}$... derivácia F v bode w v smere h

$DF(w)$ Gâteauxova derivácia F v bode w

$F'(w)$ Fréchetova derivácia F v bode w

$\mathcal{L}(X, Y)$ priestor spojitých lineárnych zobrazení $A : X \rightarrow Y$

$\mathcal{D}(\Omega)$ hladké funkcie s kompaktným nosičom v Ω

CAR Carathéodoryho funkcie

$W_0^{1,p}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega) : u = 0 \text{ na } \partial\Omega\}$

$BC^2(I) = \{u \in C^2(I) : u, u', u'' \text{ sú ohraničené}\}$

$C_0^1([a, b]) = \{u \in C^1([a, b]) : u(a) = u(b) = 0\}$

$\hat{C}_0^1([a, b]) = \{u \in \hat{C}^1([a, b]) : u(a) = u(b) = 0\}$

$\hat{C}^1([a, b]) = \{u \in C([a, b]) : u \text{ je po častiach } C^1\}$

$Z(u) = \{x \in (a, b) : \text{neexistuje } u'(x)\}$

$\mathcal{A}_C = \{u \in C^1([a, b]) : u(a) = A, u(b) = B\}$

$\mathcal{A}_{\hat{C}} = \{u \in \hat{C}^1([a, b]) : u(a) = A, u(b) = B\}$

$\mathcal{A}_p = \{u \in W^{1,p}(a, b) : u(a) = A, u(b) = B\}$

$f_s(x, u, s) = \frac{\partial f}{\partial s}(x, u, s)$

$f^0(x) = f(x, u_0(x), u'_0(x)), f_{ss}^0(x) = f_{ss}(x, u_0(x), u'_0(x)), \dots$

$P(x) = f_{ss}^0(x)$

$Q(x) = f_{uu}^0(x) - \frac{d}{dx} f_{us}^0(x)$

$E(x, u, s, q) = f(x, u, q) - f(x, u, s) - (q - s)f_s(x, u, s) \dots$ Weierstrassova funkcia

$\psi : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R} : (x, v) \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x, \alpha(x, v)) \dots$ sklon poľa extrémál