ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ИЮНЬ 1966 г., ТОМ II, № 6

УДК 517.925

О СТАБИЛИЗАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ПРИ ОПРЕДЕЛЕННОМ КЛАССЕ ПОСТОЯННО ДЕЙСТВУЮЩИХ ВОЗМУЩЕНИЙ

П. БРУНОВСКИ

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + Bu + p, \tag{1}$$

где x — n-мерный вектор, характеризующий состояние системы; u — m-мерный вектор, характеризующий действие управляющих сил; p — n-мерный вектор постоянно действующих возмущений; A, B соответственно $n \times n$ и $n \times m$-мерные постоянные матрицы.

Известно [1], что если $m = n$, матрица B не вырожденная и возмущения $p(t)$ достаточно малы, то существует управление $u(x)$ такое, что всякое решение системы (1) при $u = u(x)$, начинающееся в достаточно малой окрестности начала координат, входит в него в конечное время. Управление $u(x)$, в частности, делает систему (1) асимптотически устойчивой при постоянно действующих возмущениях.

В случае $m < n$ при постоянно действующих возмущениях с помощью управления $u(x)$ асимптотической устойчивости, вообще говоря, добиться нельзя (случай $m = 1$, $n = 2$ подробно рассмотрен в [2, 3]).

В настоящей статье рассматривается задача стабилизации системы (1) в случае, когда возмущения $p(t)$ действуют только в некотором m-мерном подпространстве E_m n-мерного евклидова пространства E_n, и управление действует в том же подпространстве. В таком случае систему (1) можно записать в виде

$$\dot{x} = Ax + B(u + p), \tag{2}$$

где x, A, B — такие же, как и в (1), и p — m-мерный вектор постоянно действующих возмущений.

Пусть P — выпуклый компакт в E_m, $u(x)$ — некоторое управление, т. е. измеримая ограниченная функция x, определенная в некоторой области $D \subset E_n$. Абсолютно непрерывную функцию $x(t)$ назовем решением управления (2) на интервале (t_1, t_2), если $(t, x(t)) \in D$ для $t \in (t_1, t_2)$ и если существует такая измеримая функция $p(t)$, что $p(t) \in P$ для $t \in (t_1, t_2)$ и

$$\dot{x}(t) \in Ax(t) + B\Big(\bigcap_{\delta>0}\ \bigcap_{\operatorname{mes} N=0} \operatorname{konv}\big(u(S(x(t), \delta) - N) + p(t)\big)\Big) \tag{3}$$

для почти всех $t \in (t_1, t_2)$*).

*) Пусть $\|x\| = \sum_{i=1}^{k} |x_i|$ для $x \in E_k$. Обозначим $S(x, \delta) = \{x' : \|x' - x\| < \delta\}$. Дальше обозначим $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$, $X + Y = \{x + y : x \in X,\ y \in Y\}$ и konv X — выпуклое замыкание X для $X \subset E_k$, $Y \subset E_k$.

Причина того, что решения (2) определяются не в классическом, а в некотором расширенном смысле, состоит в том, что в качестве управления допускаются разрывные функции x. В случае непрерывной функции $u(x)$ решение в расширенном смысле совпадает с решением в классическом смысле (см. [4, 5]).

Обозначим

$$\mathrm{U}(x) = \bigcap_{\delta>0} \bigcap_{\mathrm{mes} N=0} \mathrm{konv}\, u(S(x(t),\ \delta) - N),$$

$\mathrm{U}(x)$ является многозначной полунепрерывной сверху в смысле включения (короче β-непрерывной) функцией x и множества $\mathrm{U}(x)$ выпуклы (см. [2], лемма 3, 1). $x(t)$ является решением уравнения (2) в принятом нами смысле тогда и только тогда, если оно является решением уравнения в контингенциях ([2, 5, 6]) $\dot{x} = Ax + B(\mathrm{U}(x) + P)$.

Пусть $u(x)$ — некоторое управление. Систему (2) назовем асимптотически устойчивой, если для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всякого решения $x(t)$, начинающегося в $S(0,\ \delta)$ при $t = t_0$, выполняется $\|x(t)\| < \varepsilon$ при $t > t_0$ и $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$.

Так как в понятии решения фигурирует произвольная возмущающая функция $p(t)$, то определенное нами понятие устойчивости есть некоторая модификация понятия устойчивости при постоянно действующих возмущениях.

Обозначим через $b_1, \ldots, b_m$ векторы-столбцы матрицы B.

Теорема. *Пусть система (2) управляема, т. е. из векторов* $b_1, \ldots, b_m, Ab_1, \ldots, Ab_m, \ldots, A^{n-1}b_1, \ldots, A^{n-1}b_m$ *можно выбрать n линейно независимых. Пусть* $\rho_i \geqslant \max\limits_{p \in P} |p_i|$ $(i = 1, \ldots, m)$. *Тогда существует такое кусочно-постоянное управление* $u(x)$, *компоненты* $u_i(x)$ *которого принимают только значения* $\rho_{i_1} - \rho_i$ *соответственно, что система (2) асимптотически устойчива. Поверхности разрыва управления* $u(x)$ *суть гиперплоскости.*

Доказательство. Из теоремы 2.6 в [2] вытекает

Предложение 1. Пусть $F(t,\ x)$ — многозначная β-непрерывная функция, определенная для $(t,\ x) \in (t_1, t_2) \times V$ (V — некоторая открытая область в E_n), и $F(t,\ x)$ — выпуклые компакты в E_n. Пусть $s_i(x)$ $(i = 1, \ldots, r)$ — непрерывно дифференцируемые функции в E_n. Обозначим через $S_i^+,\ S_i^0,\ S_i^-$ множества точек $x \in V$, для которых выполняется $s_i(x) > 0$, $s_i(x) = 0$, $s_i(x) < 0$ соответственно. Пусть для произвольного $z \in F(t,\ x)$ выполняется

$$\left(\frac{\partial s_i(x)}{\partial x},\ z\right) < 0, \quad \text{если} \quad (t,\ x) \in (t_1,\ t_2) \times S_i^+,$$

$$\left(\frac{\partial s_i(x)}{\partial x},\ z\right) > 0, \quad \text{если} \quad (t,\ x) \in (t_1,\ t_2) \times S_i^-,$$

где $\dfrac{\partial s_i}{\partial x}$ — вектор с компонентами $\dfrac{\partial s_i}{\partial x_j}$ и скобки в левой части неравенства обозначают скалярные производные. Пусть $x(t)$ — решение уравнения в контингенциях

$$\dot{x} \in F(t,\ x), \tag{4}$$

такое, что $x(t_0) \in \bigcap\limits_{i=1}^{r} S_i^0$ для некоторого $t_0 \in (t_1,\ t_2)$. Тогда если $x(t)$ не покидает области V, то выполняется $x(t) \in \bigcap\limits_{i=1}^{r} S_i^0$ для $t \in (t_0,\ t_2)$ и $x(t)$

удовлетворяет для $t \in (t_0, t_2)$ уравнению в контингенциях

$$\dot{x} \in \bigcap_{i=1}^{r} \left(F(t, x) \cap T_i(x)\right),$$

где $T_i(x)$ — касательная плоскость к поверхности $s_i(x) = 0$ в точке x. Как частный случай этого предложения получается

Предложение 2. Пусть для $(t, x) \in (t_1, t_2) \times V$ $F(t, x)$ — сегмент, параллельный оси x_n, т. е.

$$F(t, x) = \left(f_1(t, x), \ldots, f_{n-1}(t, x), F_n(t, x)\right),$$

где $f_i(t, x)$ — непрерывные однозначные скалярные функции x; $F_n(t, x)$ — β-непрерывный сегмент числовой оси. Пусть для каждого $z \in F_n(t, x)$ выполняется

$$-\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} f_i(t, x) + z > 0, \text{ если } x_n < \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} f_i(t, x) + z < 0, \text{ если } x_n > \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

где $\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ — непрерывная дифференцируемая функция переменных $x_1, \ldots, x_{n-1}$ в некоторой области $W \subset E_{n-1}$, такой, что $(x_1, \ldots, x_{n-1}, \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})) \in V$ для $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in W$. Пусть $x(t)$ — решение уравнения (4) и $x_n(t_0) = \varphi\left(x_1(t_0), \ldots, x_{n-1}(t_0)\right)$ для некоторого $t_0 \in (t_1, t_2)$.

Тогда $x_n(t) = \varphi\left(x_1(t), \ldots, x_{n-1}(t)\right)$ и $\left(x_1(t), \ldots, x_{n-1}(t)\right)$ является решением дифференциальной системы

$$\dot{x}_i = f_i\left(t, x_1, \ldots, x_{n-1}, \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})\right)$$

для $t \in (t_0, t_3)$, где $t_3 \in (t_0, t_2)$ такое, что $\left(x_1(t), \ldots, x_{n-1}(t)\right) \in W$ для $t \in (t_0, t_3)$.

Заметим, что нашу задачу всегда можно свести к случаю линейно независимых векторов $b_1, \ldots, b_m$. В самом деле, предположим, например, что вектор b_m является линейной комбинацией линейно независимых векторов $b_1, \ldots, b_{m-1}$, $(b_m = \gamma_1 b_1 + \ldots + \gamma_{m-1} b_{m-1})$. Тогда имеем

$$B(u+p) = b_1(u_1 + p_1) + \ldots + b_m(u_m + p_m) =$$
$$= b_1(u_1 + p_1) + \ldots + [\gamma_1 b_1 + \ldots + \gamma_{m-1} b_{m-1}](u_m + p_m) =$$
$$= b_1(v_1 + r_1) + \ldots + b_{m-1}(v_{m-1} + r_{m-1}),$$

где $r \in R = \{r: r_i = p_i + \gamma_i p_m;\ i = 1, \ldots, m-1;\ p \in P\}$, $v_i = u_i + \gamma_i u_m$. Следовательно, получаем систему $\dot{x} = Ax + \tilde{B}(v + r)$, где матрица $\tilde{B}$ — $n \times (m-1)$-мерная матрица со столбцами $b_1, \ldots, b_{m-1}$. Эта система, очевидно, управляема, R — выпуклый компакт, и если $v(x)$ — кусочно-постоянное управление, то $u(x)$ тоже является кусочно-постоянным управлением.

Итак, предположим в дальнейшем, что векторы $b_1, \ldots, b_m$ линейно независимы. Выберем теперь подсистему Σ из системы векторов $b_1, \ldots, b_m, Ab_1, \ldots, Ab_m, \ldots, A^{n-1}b_1, \ldots, A^{n-1}b_m$ следующим образом. Вектор $A^i b_s$ включим в систему Σ тогда и только тогда, если он не является линейной комбинацией векторов $A^j b_s$ $(j=0, \ldots, i-1, \sigma = 1, \ldots, m$ и $j=i$, $\sigma=1, \ldots, s-1)$. Система Σ, очевидно, будет состоять из n линейно независимых векторов и будет обладать следующим свойством: если $A^i b_s \in \Sigma$, то

$$A^j b_s \in \Sigma \quad (j=1, \ldots, i-1).$$

Для доказательства достаточно заметить, что в обратном случае существовал бы вектор $A^k b_s \, (k \leqslant i)$ и постоянные $c_{j\sigma}$ такие, что

$$A^k b_s = \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{\sigma=1}^{m} c_{j\sigma} A^j b_\sigma + \sum_{\sigma=1}^{s-1} c_{k\sigma} A^k b_\sigma,$$

откуда

$$A^i b_s = \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{\sigma=1}^{m} c_{j\sigma} A^{j+i-k} b_\sigma + \sum_{\sigma=1}^{s-1} c_{k\sigma} A^i b_\sigma,$$

что несовместно с $A^i b_s \in \Sigma$.

Итак, Σ состоит из векторов

$$\begin{gathered} b_1, \ldots, A^{l_1-1} b_1, \\ b_2, \ldots, A^{l_2-1} b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ b_m, \ldots, A^{l_m-1} b_m \\ (l_1 + l_2 + \ldots + l_m = n; \ \ l_i \geqslant 1; \ \ i=1, \ldots, m). \end{gathered}$$

Из алгорифма выбора векторов системы Σ получается, что вектор $A^{l_s} b_s$ является линейной комбинацией векторов $A^j b_\sigma \, (j=0, \ldots, l_s - 1;$ $\sigma = 1, \ldots, m$ и $j = l_s$, $\sigma=1, \ldots, s-1)$, входящих в Σ.

Докажем, что систему (2) можно при помощи невырожденной линейной подстановки $x = Cy$ преобразовать к виду

$$\begin{gathered} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = y_3, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dot{y}_{k_1-1} = y_{k_1}, \\ \dot{y}_{k_1} = \alpha_{11} y_1 + \ldots + \alpha_{1n} y_n + u_1 + p_1 + \sum_{j=2}^{m} g_{1j} (u_j + p_j), \qquad (5) \\ \dot{y}_{k_1+1} = y_{k_1+2}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dot{y}_{k_2-1} = y_{k_2}, \\ \dot{y}_{k_2} = \alpha_{21} y_1 + \ldots + \alpha_{2n} y_n + u_2 + p_2 + \sum_{j=3}^{m} g_{2j} (u_j + p_j), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{gathered}$$

$$\dot{y}_{k_{m-1}+1} = y_{k_{m-1}+2},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\dot{y}_{n-1} = y_n, \tag{5}$$
$$\dot{y}_n = \alpha_{m1}y_1 + \ldots + \alpha_{mn}y_n + u_m + p_m,$$

где $k_s = \sum_{j=1}^{s} l_s$, в том смысле, что $y(t)$ — решение системы (5) тогда и только тогда, если $x(t) = Cy(t)$ является решением системы (2) (см. [5], теорема 6).

Обозначим через D матрицу системы (5), через G — $m \times m$-мерную матрицу, имеющую элементы на главной диагонали равными единице, элементы под ней g_{ij} и остальные равны нулю, и через C_0 — матрицу, составленную из k_s-ых ($s = 1, \ldots, m$) столбцов матрицы C. Тогда для матриц C, D, G, C_0 получаем уравнения

$$AC = CD, \; B = C_0G. \tag{6}$$

Так как матрица G^{-1} тоже треугольная с единицами на главной диагонали и нулями под ней, то, обозначив через γ_{ij} остальные ее элементы и через c_j столбцы матрицы C, из второго равенства (6) получаем

$$c_{k_s} = b_s + \sum_{\sigma=1}^{s-1} \gamma_{\sigma s} b_\sigma. \tag{7}$$

Положим $-\gamma_{\sigma s}$ равными коэффициентам при $A^{l_s} b_s$ в разложении вектора $A^{l_s} b_s$ по векторам системы Σ. Нетрудно убедиться, что тогда система Σ' тех векторов $A^i c_{k_s}$, для которых $A^i b_s \in \Sigma$, состоит из n линейно независимых векторов и что $A^{l_s} c_{k_s}$ является линейной комбинацией векторов $A^i c_{k_\sigma}$ ($i = 1, \ldots, m$; $\sigma = 1, \ldots, l_s - 1$). Если γ_{si} определены, то, конечно, однозначно определена и матрица G. Расписав первое уравнение (6) по столбцам, получаем для всех $s = 1, \ldots, m$

$$Ac_{k_{s-1}+1} = \sum_{\sigma=1}^{m} \alpha_{\sigma k_{s-1}+1} c_{k_\sigma},$$

$$Ac_{k_{s-1}+2} = c_{k_{s-1}+1} + \sum_{\sigma=1}^{m} \alpha_{\sigma k_{s-1}+2} c_{k_\sigma},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Ac_{k_s} = c_{k_s-1} + \sum_{\sigma=1}^{m} \alpha_\sigma k_s c_{k_\sigma}$$

или

$$c_{k_s-1} = Ac_{k_s} - \sum_{\sigma=1}^{m} \alpha_{\sigma k_s} c_{k_\sigma},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_{k_{s-1}+1} = Ac_{k_{s-1}+1} - \sum_{\sigma=1}^{m} \alpha_{\sigma k_{s-1}+2} c_{k_\sigma} \quad (s = 1, \ldots, m),$$

$$0 = Ac_{k_{s-1}+1} - \sum_{\sigma=1}^{m} \alpha_{\sigma k_{s-1}+1} c_{k_\sigma}.$$

Отсюда

$$c_{k_{s-1}+i} = A^{l_s-i} c_{k_s} - \sum_{j=1}^{l_s-i} A^{l_s-i-j} \sum_{\sigma=1}^{m} \alpha_{\sigma k_s-j+1} c_{k_\sigma}, \tag{8}$$

$$0 = A^{l_s} c_{k_s} - \sum_{j=1}^{l_s} A^{l_s-j} \sum_{\sigma=1}^{m} \alpha_{\sigma k_s-j+1} c_{k_\sigma}. \tag{9}$$

Из сказанного выше следует, что, полагая $\alpha_{\sigma,\, k_s-j+1}$ равными нулю, если A^{l_s-j} не входит в Σ', из (9) однозначно определяются постоянные $\alpha_{\sigma\tau}$ $(\sigma = 1, \ldots, m;\ \ \tau = 1, \ldots, n)$. Векторы c_i $(i \neq k_s;\ \ s = 1, \ldots, m)$ определяются при помощи равенств (8). Из свойств системы Σ' следует, что в выражениях (8) коэффициенты при векторах $A^{l_s-i-j} c_{k_\sigma}$, не входящих в Σ', тоже равны нулю. Тем самым матрицы C, D определены и, очевидно, удовлетворяют уравнениям (6). Остается показать, что матрица C не вырожденная.

Пусть $L_1, \ldots, L_n$ такие n постоянных, что $L_1 c_1 + \ldots + L_n c_n = 0$. Подставив в это неравенство (8), получаем

$$\sum_{s=1}^{m} \sum_{i=1}^{l_s} L_{k_{s-1}+i} \left(A^{l_s-i} c_{k_s} - \sum_{j=1}^{l_s-i} A^{l_s-i-j} \sum_{\sigma=1}^{m} \alpha_{\sigma k_s-j+1} c_{k_\sigma} \right) = 0. \tag{10}$$

Так как коэффициенты при векторах $A^{l_s-i-j} c_{k_\sigma}$, не входящих в Σ', тождественно равны нулю и векторы системы Σ' линейно независимы, то (10) может иметь место только в том случае, когда коэффициенты при векторах системы Σ' равны нулю. Отсюда получаем систему линейных однородных уравнений треугольного вида для L_i, которая имеет только тривиальное решение. Это доказывает невырожденность матрицы C.

Возьмем теперь любой многочлен

$$\lambda^{l_s-1} + \beta_{k_s-1} \lambda^{l_s-2} + \ldots + \beta_{k_{s-1}+1} \quad (s = 1, \ldots, m),$$

все корни которого имеют отрицательные вещественные части, и положим

$$u_s(y) = \begin{cases} +\rho_s \text{ если } y_{k_s} < -(\beta_{k_{s-1}+1} y_{k_{s-1}+1} + \ldots + \beta_{k_s-1} y_{k_s-1}) + \sum\limits_{\sigma=s+1}^{m} h_{s\sigma} y_{k_\sigma}, \\ -\rho_s \text{ если } y_{k_s} > -(\beta_{k_{s-1}+1} y_{k_{s-1}+1} + \ldots + \beta_{k_s-1} y_{k_s-1}) + \sum\limits_{\sigma=s+1}^{m} h_{s\sigma} y_{k_\sigma}, \end{cases}$$

где $h_{s\sigma}$ — решение треугольной системы линейных уравнений

$$g_{s\sigma}=h_{s\sigma}+\sum_{\tau=s+1}^{\sigma-1} h_{s\tau}g_{\tau\sigma} \quad (\sigma=s+1, \ldots, m). \tag{11}$$

Докажем, что $u(y)$ и есть искомое стабилизирующее управление.

Обозначим

$$d=\min_{1\leqslant i\leqslant m}(\rho_i-\max_{p\in P}|p_i|).$$

Пусть $\eta>0$ — некоторое число. Покажем, что если η достаточно мало, то существует такое $\delta(\eta)>0$, что если решение $y(t)$ удовлетворяет при $t=t_0$ условиям $\|y(t)\|<\delta(\eta)$,

$$y_{k_s}(t)=-\sum_{j=1}^{l_s-1}\beta_{k_{s-1}+j}y_{k_{s-1}+j}(t)+\sum_{\sigma=s+1}^{m} h_{s\sigma}y_{k_\sigma}(t) \tag{12}$$

для всех s из некоторого собственного подмножества S множества индексов $\{1, \ldots, m\}$, то существует $t_1>t_0$ такое, что $y(t)$ удовлетворяет условиям (12) и

$$\|y(t)\|<\eta \tag{13}$$

для всех $t\in(t_0, t_1)$ и $s\in S$ и в точке $t=t_1$ (12) выполняется для некоторого дальнейшего $s\overline{\in} S$. Иначе говоря, решение $y(t)$ лежит для $t\in(t_0, t_1)$ в плоскости

$$y_{k_s}=-\sum_{j=1}^{l_s-1}\beta_{k_{s-1}+j}y_{k_{s-1}+j}+\sum_{\sigma=s+1}^{m} h_{s\sigma}y_{k_\sigma} \tag{14}$$

для $s\in S$ и при $t=t_1$ пересечет некоторую дальнейшую гиперплоскость (14). $\delta(\eta)$ не зависит от S.

Для доказательства предположим обратное. Пусть S — некоторое подмножество индексов и пусть $t_1'>t_0$ — наименьшее число, в котором нарушается (13) (если оно вовсе не нарушается, то положим $t_1'=\infty$). Пусть $\eta>0$ настолько мало, что для $\|y\|<\eta$ выполняется

$$\left|\sum_{j=1}^{l_s-1}\beta_{k_{s-1}+j}y_{k_{s-1}+j+1}+\sum_{j=1}^{n}\alpha_{sj}y_j-\sum_{\sigma=s+1}^{m} h_{s\sigma}\sum_{j=1}^{m}\alpha_{\sigma j}y_j\right|<\frac{d}{2} \tag{15}$$

$$(s=1, \ldots, m).$$

Тогда в силу (11) имеем

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(y_{k_s}+\sum_{j=1}^{l_s-1}\beta_{k_{s-1}+j}y_{k_{s-1}+j}-\sum_{\sigma=s+1}^{m} h_{s\sigma}y_{k_\sigma}\right), Dy+G(u+p)\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{sj}y_j+u_s+p_s+\sum_{j=1}^{l_s-1}\beta_{k_{s-1}+j}y_{k_{s-1}+j+1}+\sum_{\sigma=s+1}^{m} g_{s\sigma}(u_\sigma+p_\sigma)-$$

$$-\sum_{\sigma=s+1}^{m} h_{s\sigma}\left[\sum_{j=1}^{n}\alpha_{\sigma j}y_j+u_\sigma+p_\sigma+\sum_{\tau=\sigma+1}^{m} g_{\sigma\tau}(u_\tau+p_\tau)\right]=$$

$$=\sum_{j=1}^{l_s-1}\beta_{k_{s-1}+j}y_{k_{s-1}+j+1}+\sum_{j=1}^{n}\alpha_{k_s j}y_j-\sum_{\sigma=s+1}^{m}h_{s\sigma}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{\sigma j}y_j+u_s+ \tag{16}$$

$$+p_s\begin{cases}\geqslant\dfrac{d}{2}, \text{ если } y_{k_s}<-\displaystyle\sum_{j=1}^{l_s-1}\beta_{k_{s-1}+j}y_{k_{s-1}+j}+\sum_{\sigma=s+1}^{m}h_{s\sigma}y_{k_\sigma},\\ \leqslant-\dfrac{d}{2}, \text{ если } y_{k_s}>-\displaystyle\sum_{j=1}^{l_s-1}\beta_{k_{s-1}+j}y_{k_{s-1}+j}+\sum_{\sigma=s+1}^{m}h_{s\sigma}y_{k_\sigma}\end{cases}$$

($s=1, \ldots, m$). Отсюда в силу предложения 2 следует, что решение $y(t)$ для $t\in(t_0, t_1')$ не может покинуть плоскость (14) при $s\in S$.

Предположим, что (12) не выполняется ни для какого $t\in(t_0, t_1')$ и $s\in S$. Так как $\dot y(t)$ ограничено для $\|y\|<\eta$, скажем, $\|\dot y(t)\|<K$, то для достаточно малого δ получаем

$$t_1'-t_0\geqslant\frac{\eta-\delta}{K}\geqslant 2^{-1}K^{-1}\eta. \tag{17}$$

Для достаточно малого $\delta>0$ максимум расстояний точек $\|y\|<\delta$ от плоскостей (14) при $s\in S$ меньше произвольно малого положительного числа. В силу (16) оно должно уменьшаться, что вместе с (17) ведет к противоречию, если только $\delta>0$ достаточно мало.

Пусть теперь $\varepsilon>0$ настолько мало, что для $\|y\|<\varepsilon$ выполняется (15). Исключив при помощи (12) y_{k_s} из системы уравнений (5), получим линейную однородную дифференциальную систему

$$\begin{gathered}\dot y_{k_{s-1}+1}=y_{k_{s-1}+2},\\ \cdots\cdots\cdots\\ \dot y_{k_s-1}=-\sum_{j=1}^{l_s-1}\beta_{k_{s-1}+j}y_{k_{s-1}+j}+\sum_{\sigma=s+1}^{m}h_{s\sigma}y_{k_\sigma}\\ (s=1, \ldots, m)\end{gathered} \tag{18}$$

для переменных $y_1, \ldots, y_{k_1-1}, y_{k_1+1}, \ldots, y_{k_2-1}, \ldots, y_{k_{m-1}+1}, \ldots, y_{n-1}$, характеристические корни которой имеют отрицательные вещественные части. Поэтому существует $\eta_m>0$ такое, что для каждого решения $\tilde y(t)=(y_1(t), \ldots, y_{k_1-1}(t), \ldots, y_{k_{m-1}+1}(t), \ldots, y_{n-1}(t)$ этой системы с $\|\tilde y(t_1)\|<\eta_m$ выполняется

$$\|\tilde y(t)\|+\sum_{s=1}^{m}\left|-\sum_{j=1}^{l_s-1}\beta_{k_{s-1}+j}y_{k_{s-1}+j}+\sum_{\sigma=s+1}^{m}h_{s\sigma}y_{k_\sigma}\right|<\varepsilon \tag{19}$$

при $t\geqslant t_1$ и $\tilde y(t)\to 0$ при $t\to\infty$.

Начиная с η_m, построим конечную последовательность положительных чисел $\{\eta_i\}_{i=0}^{m}$ такую, что $\eta_{i-1} = \delta(\eta_i)$. Для произвольного решения $y(t)$ такого, что $\|y(t_0)\| < \eta_0$, существует такое $t_1 > t_0$, что $\|y(t)\| < \eta_m$ для $t \in (t_0, t_1)$, и (12) выполняется для всех $s = 1, \ldots, m$ при $t = t_1$. В силу предложения 2 и (19) $y_i(t)$ $(i \neq k_s)$ удовлетворяют дифференциальной системе (18), $y_{k_s}(t)$ $(s = 1, \ldots, m)$—уравнениям (12), $\|y(t)\| < \varepsilon$ при $t \geqslant t_1$; следовательно, имеем $y(t) \to 0$. Тем и завершается доказательство теоремы.

Литература

1. La Salle J. P. Stability and control. RIAS Technical Report, 61-17, 1961.

2. Brunovsky P. On the best stabilizing control under a giver class of perturbations. Czechoslovak mathematical journal 15, No 3, 1965, 329—369.

3. Brunovsky P. A condition of the existence of an universal best ε-stabilizing control. Czech. math. journal, 15, No 3, 1965, 370—377.

4. Филиппов А. Ф. Матем. сб., **51**, № 1, 1960, стр. 99—128.

5. Барбашин Е. А., Алимов Ю. И. Изв. вузов. Математика, № 1, 3—13, 1962.

6. Wazewski T. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser, Sci. Math. Astr. Phys., **9**, No 12, 865—867, 1961.

Поступила в редакцию
11 июня 1965 г.

г. Братислава,
Чехословакия