MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS
ROČNÍK 16 1966 ČÍSLO 2

ÜBER DAS SCHNELLSTE SUCHEN EINES PUNKTES AUF EINER LINIE

PAVOL BRUNOVSKÝ, Bratislava

Das Problem, das hier untersucht wird, hat seinen Ursprung im Orientierungslauf, und zwar in folgender Aufgabe:

Es seien ein Punkt auf einer im Gelände leicht und genau identifizierbarer Linie p (zB. auf einem Bach, Weg usw.) und ein auf der Linie nicht liegender Ausgangspunkt Q, von dem der Punkt P zu finden ist, gegeben.

Nehmen wir an, dass wir imstande sind, vom Punkt Q in beliebiger bestimmter vorher gewählter Richtung fortzuschreiten, aber mit einer gewissen Ungenauigkeit, deren Wahrscheinlichkeitsverteilung bekannt ist. Setzen wir ferner voraus, dass wir der Linie p genau folgen, die Entfernung genau messen und die Richtung des Fortschreitens entlang der Linie p augenblicklich ändern können. Dann kann man den Punkt P folgendermassen suchen:

Man wählt, von Q ausgehend, eine gewisse Richtung φ, entlang welcher man (ungenau) fortschreitet, bis man die Linie p in einem gewissen Punkt R erreicht. Weiter geht man von R entlang der Linie p wechselweise nach rechts und nach links wachsende Strecken, bis man P erreicht.

Nun taucht das Problem der Wahl einer Richtung φ und einer Strategie des Suchens des Punktes P der Linie p entlang auf, womit man P in durchschnittlich kürzester Zeit erreicht.

In diesem Artikel wird ein Problem untersucht, das dem Fall einer festgewählten Richtung φ entspricht. In diesem Fall kann man voraussetzen, dass man sich an der Linie p befindet, wobei die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Ortes bekannt ist.

Es sei also eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $F(x)$, $x \in (-\infty, \infty)$ an einer Geraden gegeben, die angibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit wir uns im Intervall $(-\infty, x)$ befinden. Unsere Aufgabe sei es, den Nullpunkt der Koordinaten P in kürzester Zeit zu erreichen.

Der Prozess des Suchens des Punktes P sieht folgendermassen aus:

Vom Ausgangspunkt mit der Koordinate x gehen wir eine Strecke $x_1 \geqslant 0$ nach rechts.

Wenn wir den punkt P nicht finden, kommen wir in den Ausgangspunkt zurück und gehen eine Strecke $y_1 \geqslant 0$ nach links. Wenn wir den Punkt P wieder nicht finden, kehren wir in den Ausgangspunkt zurück und gehen eine Strecke $x_2 \geqslant 0$ wieder nach rechts. In solcher weise setzen wir unser Suchen fort, bis wir den Punkt P finden. Die Strategie (X, Y) des Suchens ist also durch zwei nicht Fallende Folgen $X = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $Y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ (x_n, y_n sind nicht negative Zahlen oder ∞) gegeben, wo $x_n(y_n)$ die Strecke ist, die wir vom Ausgangspunkt der Linie p entlang nach rechts (links) gehen, wenn sich der Punkt P nicht im Interwall $\langle x - y_{n-1},\ x + x_{n-1}\rangle$ $(\langle x - y_{n-1},\ x + x_n\rangle)$ befindet. Die Geschwindigkeit unseres Fortschreitens sei 1.

Bemerkungen 1. Es ist klar, dass wir das Suchen nicht nach rechts anfangen müssen. Im Fall, dass wir das Suchen nach links anfangen, setzen wir $x_1 = 0$.

2. Offensichtlich ist es im Fall, wenn die Ungleichungen

$$0 < F(x) < 1 \tag{1}$$

für jedes x gelten, nur so möglich den Punkt P in jedem Falle in endlicher Zeit zu finden, wenn wir unendlichmal nach der endlichen Entfernung umkehren, d. h. alle x_n, y_n endlich sind. Wenn aber eine von den Ungleichungen (1) (zB. die erste) für irgendein $\bar{x}$ nicht erfüllt ist, kann man den Punkt P so suchen, dass man nach der Umkehrung in dem Punkt $x + x_N = x + \bar{x}$ nur noch nach links geht. Im solchen Fall setzen wir $x_n = \infty$ für $n \geqslant N + 1$ und $y_n = \infty$ für $n \geqslant N$.

Für eine gewisse Strategie (X, Y) können wir den Mittelwert $\tau(X, Y)$ der Zeit, die zum Finden des Punktes P notwendig ist, berechnen. Bezeichnen wir durch $T(x, X, Y)$ die Zeit, die bei der gewählten Strategie (X, Y) notwendig ist, um vom Punkte x in den Punkt P zu kommen. Es gilt

$$T(x, X, Y) = \begin{cases} |x| + 2\sum_{i=0}^{n}(x_i + y_i) & \text{für} \quad x \in \langle -x_{n+1},\ -x_n) \\ |x| + 2\sum_{i=0}^{n}(x_{i+1} + y_i) & \text{für} \quad x \in (y_n,\ y_{n+1}\rangle \end{cases}$$

(wir setzen für weiteres $x_0 = y_0 = 0$) und

$$\tau(X, Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} T(x, X, Y)\mathrm{d}F(x) = \sum_{i=0}^{\infty}\Big[\int_{-x_{i+1}}^{-x_i} T(x, X, Y)\mathrm{d}F(x) + \int_{y_i}^{y_{i+1}} T(x, X, Y)\mathrm{d}F(x)\Big] =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\Big\{\int_{-x_{i+1}}^{-x_i}\Big[|x| + 2\sum_{n=0}^{i}(x_n + y_n)\Big]\mathrm{d}F(x) + \int_{y_i}^{y_{i+1}}\Big[|x| + 2\sum_{n=0}^{i}(x_{n+1} + y_n)\Big]\mathrm{d}F(x)\Big\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \, \mathrm{d}F(x) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} [(x_n + y_n) \sum_{i=n}^{\infty} (F(-x_i) - F(-x_{i+1})) +$$

$$+ (x_{n+1} + y_n) \sum_{i=n}^{\infty} (F(y_{i+1}) - F(y_i))] =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \, \mathrm{d}F(x) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} [(x_n + y_n) \mathrm{F}(-x_n) + (x_{n+1} + y_n) (1 - F(y_n))].$$

Offensichtlich kann $\tau(X, Y)$ auch unendlich sein.

Die Menge der Mittelwerte, die sämtlichen Strategien entsprechen, hat ein Infimum τ^*, das endlich oder unendlich sein kann. Ist das Infimum τ^* endlich, und existiert eine Strategie (X^*, Y^*) für die $\tau(X^*, Y^*) = \tau^*$ gilt, so bezeichnen wir sie als optimal.

Satz. *Die Funktion $F(x)$ sei stetig und genüge den Bedingungen*

$$\lim_{x,\, y \to 0+} \sup \left| \frac{F(y) - F(-x)}{x + y} \right| < \infty, \tag{2}$$

$$F(-x) = o(x^{-2-\mu}), \quad 1 - F(x) = o(x^{-2-\mu}), \quad \mu > 0 \quad \textit{für} \quad x \to \infty. \tag{3}$$

Dann ist τ^* endlich und es existiert eine optimale Strategie (X^*, Y^*).

Beweis. Wir beweisen zuerst, dass es eine Strategie gibt, für die τ endlich ist. Setzen wir $x_n = y_n = n$. Dann ist

$$\tau(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| \, \mathrm{d}F(x) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} [2nF(-n) + (2n + 1) (1 - F(n))].$$

Nach (3) gilt

$$\int_{0}^{\infty} |x| \, \mathrm{d}F(x) = - \int_{-\infty}^{0} x \, \mathrm{d}F(x) + \int_{0}^{\infty} x \mathrm{d}F(x) = - \left[x \int_{-\infty}^{x} \mathrm{d}F(\xi) \right]_{-\infty}^{0} +$$

$$+ \int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{x} \mathrm{d}F(\xi) - \left[x \int_{x}^{\infty} \mathrm{d}F(\xi) \right]_{0}^{\infty} + \int_{0}^{\infty} \mathrm{d}x \int_{x}^{\infty} \mathrm{d}F(\xi) = \int_{-\infty}^{o} o(|x|^{-2-\mu}) \, \mathrm{d}x +$$

$$+ \int_{0}^{\infty} o(|x|^{-2-\mu}) \, \mathrm{d}x$$

und

$$\sum_{n=0}^{\infty} [2F(-n) + (2n + 1) (1 - F(n))] = \sum_{n=0}^{\infty} (4n + 1) \, o(n^{-2-\mu}) < \infty$$

woraus folgt, dass $\tau(X, Y)$ endlich ist.

Hieraus folgt, dass τ^* endlich ist. Es existiert so eine Folge $\{(X^{(k)}, Y^{(k)})\}$ von Strategien, dass

$$\lim_{k\to\infty} \tau(X^{(k)}, Y^{(k)}) = \tau^*$$

gilt.

Wenn $F(0) = 0$ oder $F(0) = 1$ ist, dann ist die optimale Strategie offensichtlich $x_1 = 0, x_n = \infty, n = 2, 3, \ldots; y_n = 0, n = 1, 2, \ldots$ bzw. $x_n = y_n = \infty$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Darum werden wir im Weiteren voraussetzen, dass

$$0 < F(0) < 1 \tag{4}$$

gilt.

Wenn wir von den Folgen $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ die Elemente x_1, y_1 auslassen, bekommen wir neue Folgen $\{x'_n\}$, $\{y'_n\}$ wo $x'_n = x_{n+1}$, $y'_n = y_{n+1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ ist, die eine neue Strategie (X', Y') definieren. Ähnlich erhalten wir durch Auslassen der Elemente y_1, x_2 eine neue Strategie (X'', Y'') mit $x''_1 = x_1$, $x''_n = x_{n+1}$, $n = 2, 3, \ldots$; $y''_n = y_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$. Wir beweisen, dass es so eine Konstante $\lambda > 0$ gibt, wobei — wenn wenigstens eine von den Zahlen x_2, y_2 kleiner als λ ist — wenigstens eine von den Ungleichungen

$$\tau(X', Y') \leqslant \tau(X, Y), \quad \tau(X'', Y'') \leqslant \tau(X, Y) \tag{5}$$

gilt.

Zum Beweis nehmen wir an, dass keine von den Ungleichungen (5) erfüllt ist, d. h. es gilt

$$\tau(X, Y) \leqslant \tau(X', Y'), \quad \tau(X, Y) < \tau(X'', Y'') \tag{6}$$

Es ist

$$\begin{aligned}(7)\quad \tau(X, Y) - \tau(X', Y') &= 2\sum_{n=0}^{\infty} [(x_n + y_n)F(-x_n) + (x_{n+1} + y_n)(1 - F(-y_n))] - \\ &- 2\sum_{n=2}^{\infty} (x_n + y_n)F(-x_n) - 2\sum_{n=2}^{\infty} (x_{n+1} + y_n)[1 - F(y_n)] - 2x_2(1 - F(0)) = \\ &= 2(x_1 + y_1)F(-x_1) + 2(x_2 + y_1)(1 - F(y_1)) + 2x_1(1 - F(0)) - \\ &- 2x_2(1 - F(0)) = 2\{(x_1 + y_1)[1 - F(y_1) + F(-x_1)] + (x_1 - x_2)(F(y_1) - \\ &- F(0))\}.\end{aligned}$$

Aus (6) und (7) ergibt sich für genügend kleine x_1, y_1

$$\frac{1}{x_2} \leqslant \frac{F(y_1) - F(0)}{x_1(F(y_1) - F(0)) + (x_1 + y_1)[1 - F(y_1) + F(-x_1)]} \leqslant 2\frac{F(y_1) - F(-x_1)}{x_1 + y_1},$$

woraus nach (2) folgt, dass x_2^{-1} für genügend kleine x_1, y_1 beschränkt ist. Daraus ergibt sich die Existenz eines solchen $\varepsilon_1 > 0$ dass für genügend kleine δ_1 aus $x_1 < \delta_1$, $y_1 < \delta_1$ und (6) $x_2 \geqslant \varepsilon_1$ folgt. Wenn aber $y_1 \geqslant \delta_1$, $x_1 < \delta_1$ ist, dann ergibt sich aus (6) und (7) $x_2 \geqslant x_2 [F(y_1) - F(0)] \geqslant y_1 [1 - F(y_1) + F(-x_1)] \geqslant y_1 F(-x_1) \geqslant \delta_1 F(-\delta_1)$. Da F stetig ist und (4) gilt, kann δ_1 so klein gewählt werden, dass $F(-\delta_1) > 0$ ist. Setzen wir $\varkappa_1 = \min\{\varepsilon_1, \delta_1 F(-\delta_1)\}$. Dann ist $\varkappa_1$ positiv und es gilt $x_2 \geqslant \varkappa_1$, sobald $x_1 < \delta_1$ ist und die Ungleichungen (6) erfüllt sind.

Ähnlich bekommen wir

$$(8)\quad \tau(X, Y) - \tau(X'', Y'') = 2\{\sum_{n=0}^{\infty} [(x_n + y_n)F(-x_n) + (x_{n+1} + y_n)(1 - F(y_n))] -$$

$$- (x_1 + y_2)F(-x_1) - \sum_{n=3}^{\infty} (x_n + y_n)F(-x_n) - x_1(1 - F(0)) -$$

$$- \sum_{n=2}^{\infty} (x_{n+1} + y_n)(1 - F(y_n)) = 2\{(x_1 + y_1)F(-x_1) + (x_2 + y_2)F(-x_2) +$$

$$+ (x_2 + y_1)(1 - F(y_1)) - (x_1 + y_2)F(-x_1)\} =$$

$$= (x_2 + y_1)[1 - F(y_1) + F(-x_2)] + (y_1 - y_2)(F(-x_1) - F(-x_2)).$$

Aus (6) und (8) ergibt sich

$$(9)\quad y_2(F(-x_1) - F(-x_2)) \geqslant$$

$$\geqslant y_2(F(-x_1) - F(-x_2)) \geqslant y_1(F(-x_1) - F(-x_2)) + (x_2 + y_1)[1 - F(-x_1) + F(-x_2)],$$

woraus

$$(10)\quad \frac{1}{y_2} \leqslant \frac{F(-x_1) - F(-x_2)}{(x_2 + y_2)[1 - F(-x_1) + F(-x_2)]} \leqslant \frac{F(y_1) - F(-x_2)}{(x_2 + y_2) 1 [-F(-x_1) + F(-x_2)]}$$

folgt.

Aus (2) und (10) erhalten wir, dass so eine positive Zahl ε_2 existiert, dass für ein genügend kleines δ_2 aus $x_2 < \delta_2$, $y_1 < \delta_2$ und (4) $x_2 \geqslant \varepsilon_2$ folgt. Wenn aber $y_1 < \delta_2$, $x_2 \geqslant \delta_2$ ist, dann folgt aus (9)

$$y_2 \geqslant y_2(F(-x_1) - F(-x_2)) \geqslant$$

$$\geqslant x_2 [1 - F(y_1) + F(-x_2)] \geqslant \delta_2 [1 - F(\delta_2)].$$

Da (4) gilt und F stetig ist, können wir $\delta_2 > 0$ so klein wählen, dass $1 - F(\delta_2) > 0$ ist. Wenn wir jetzt $\varkappa_2 = \min\{\varepsilon_2, \delta_2(1 - F(\delta_2))\}$ wählen, dann ist $\varkappa_2$ positiv und für $y_1 < \delta_2$ folgt aus (8) $y_2 \geqslant \varkappa_2$.

Setzen wir $\lambda = \min\{\delta_1, \delta_2, \varkappa_1, \varkappa_2\}$. Wenn $x_2 < \lambda$ wäre, dann wäre auch $x_1 \leqslant x_2 < \lambda \leqslant \delta_1$. Wenn aber (6) erfüllt sein soll, dann folgt daraus $x_2 \geqslant \varkappa \geqslant \lambda$, was der Voraussetzung widerspricht. Darum muss $x_2 \geqslant \lambda$ sein. Analogisch beweist man $y_2 \geqslant \lambda$.

Wenn jetzt (X, Y) eine Strategie ist, worin wenigstens eine von den Zahlen x_2, y_2 kleiner als λ ist, können wir durch das Auslassen eines von den Paaren x_1, y_1; x_2, y_1 eine neue Strategie $(\tilde{X}, \tilde{Y})$ bilden, wobei τ nicht grösser wird.

Ist eine von den Zahlen $\tilde{x}_2$, $\tilde{y}_2$ wieder kleiner als λ, so können wir wieder durch Auslassen eines geeignetes Paares eine Strategie bilden, wobei τ nicht grösser wird. Dieses Verfahren können wir, wenn notwendig, weiter fortsetzen. Da aber nur endlich viele von den Zahlen x_n, y_n kleiner als λ sind, bekommen wir nach endlich vielen Schritten eine Strategie $(\bar{X}, \bar{Y})$, für die $\bar{x}_2 \geqslant \lambda$, $\bar{y}_2 \geqslant \lambda$ und $\tau(\bar{X}, \bar{Y}) \leqslant \tau(X, Y)$ gilt.

Durch Umbilden der Strategien $(X^{(k)}, Y^{(k)})$ in der oben beschriebenen weise erhalten wir eine Folge von Strategien

$$(\bar{X}^{(k)}, \bar{Y}^{(k)})$$

für die

$$\bar{x}_2^{(k)} \geqslant \lambda, \bar{y}_2^{(k)} \geqslant \lambda, \tau(\bar{X}^{(k)}, \bar{Y}^{(k)}) \leqslant \tau(X^{(k)}, Y^{(k)})$$

und folglich auch

$$\lim_{k \to \infty} \tau(X^{(k)}, Y^{(k)}) = \tau^*$$

gilt.

Wir können also für Weiteres annehmen, dass schon die ursprüngliche Folge $(X^{(k)}, Y^{(k)})$ so gewählt ist, dass $x_2^{(k)} \geqslant \lambda$, $y_2^{(k)} \geqslant \lambda$, $k = 1, 2, \dots$ gilt.

Es seien jetzt $L_1 \leqslant L_2$ zwei Zahlen. Wir bezeichnen durch $c_{\langle L_1, L_2 \rangle}(X, Y)$ die Zahl derjenigen Elemente x_n, y_n der Folgen $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, die im Intervall $\langle L_1, L_2 \rangle$ liegen. Es gilt

$$\tau(X^{(k)}, Y^{(k)}) \geqslant 2\lambda[\sum_{i \geq 2} F(-x_i^{(k)}) + \sum_{i \geq 2} (1 - F(y_i^{(k)})] \geqslant$$

$$\geqslant 2\lambda[c_{\langle L_1, L_2 \rangle}(X^{(k)}, Y^{(k)}) - 2] \min \{F(L_1), 1 - F(L_2)\},$$

woraus folgt, dass wenn $0 < F(L_1) \leqslant F(L_2) < 1$ gilt, dann ist die Folge $\{c_{\langle L_1, L_2 \rangle}(X,^{(k)} Y^{(k)})\}_{k=1}^{\infty}$ beschränkt.

Wählen wir jetzt eine solche Folge $\{k_\nu^1\}_{\nu=1}^{\infty}$ von naturellen Zahlen, dass die Folgen $\{x_1^{(k_\nu^1)}\}$, $\{y_1^{(k_\nu^1)}\}$ endliche oder unendliche Limiten haben, die wir durch x_1^*, y_1^* bezeichnen. Weiter wählen wir aus der Folge $\{k_\nu^1\}$ eine solche Folge $\{k_\nu^2\}$, dass die Folgen $\{x_2^{(k_\nu^2)}\}$, $\{y_2^{(k_\nu^2)}\}$ die Limiten x_2^*, y_2^* haben. Wenn wir in solcher Weise fortschreiten werden, erhalten wir eine solche Folge von Folgen $\{\{k_\nu^\mu\}_{\nu=1}^{\infty}\}_{\mu=1}^{\infty}$ wo $\{k_\nu^n\}$ aus $\{k_\nu^{n-1}\}$ gewählt ist und die Folgen $\{x_n^{(k_\nu^n)}\}_{\nu=1}^{\infty}$, $\{y_n^{(k_\nu^n)}\}_{\nu=1}^{\infty}$ endliche oder unendliche Limiten x_n^*, y_n^* haben. Offensichtlich sind $X^* = \{x_n^*\}$, $Y = \{y_n^*\}$ nicht fallende Folgen und folglich ist $(X^*, Y^*$ eine Strategie. Wir zeigen, dass $\tau(X^*, Y^*) = \tau^*$ gilt und daher die Strategie (X^*, Y^*) optimal ist.

Bezeichnen wir der Einfachheit wegen von neuem $x_n^{(k_\nu^\nu)} = x_n^{(\nu)}$ $y_n^{(k_\nu^\nu)} = y_n^{(\nu)}$. Offensichtlich gilt $\tau(X^{(\nu)}, Y^{(\nu)}) \to \tau^*$ und $x_n^{(\nu)} \to x_n^*$, $y_n^{(\nu)} \to y_n^*$ für beliebiges n. Bezeichnen wir durch K_1, K_2 solche Zahlen, dass $F(x) = 0$ für $x \leqslant K_1$, $F(x) > 0$

für $x > K_1$, $F(x) < 1$ für $x < K_2$ und $F(x) = 1$ für $x \geqslant K_2$ gilt. (K_1, K_2 können auch $-\infty$, bzw. $+\infty$ sein). Es sei $K_1 < L_1 \leqslant L_2 < K_2$, und $L_1 \neq x_n^*$, $L_2 \neq y_n^*$ für beliebiges n. Wie bewiesen wurde, ist die Folge $c_{\langle L_1, L_2 \rangle}(X^{(\nu)}, Y^{(\nu)})$ beschränkt und daher existieren solche Zahlen n_1, n_2, dass $x_{n_1}^* < -L_1 < x_{n_1+1}^*$ und $y_{n_2}^* < L_2 < y_{n_2+1}^*$ gilt. Für genügend grosse ν wird dann auch $x_{n_1}^{(\nu)} < - L_1 < x_{n_1+1}^{(\nu)}$ und $y_{n_2}^{(\nu)} < L_2 < y_{n_2+1}^{(\nu)}$ gelten.

Bezeichnen wir jetzt kurzerhand

$$t_\nu(x) = T(x, X^{(\nu)}, Y^{(\nu)}) - |x|,$$
$$t^*(x) = T(x, X^*, Y^*) - |x|.$$

Offensichtlich ist

$$t(x) = t(-x_{n+1}) \quad \text{für} \quad x \in \langle -x_{n+1}, x_n),$$
$$t(x) = t(y_{n+1}) \quad \text{für} \quad x \in (y_n, y_{n+1} \rangle.$$

Die Funktionen $T(x, X^{(\nu)}, Y^{(\nu)})$ sind offensichtlich fallend für $x \leqslant 0$ und wachsend für $x \geqslant 0$. Daher gilt

$$\tau(X^{(\nu)}, Y^{(\nu)}) \geqslant t_\nu(L_1)F(L_1) + t_\nu(L_2)\,[1 - F(L_2)] =$$
$$= 2[\sum_{n=0}^{n_1} (x_n^{(\nu)} + y_n^{(\nu)})F(L_1) + \sum_{n=0}^{n_2} (x_{n+1}^{(\nu)} + y_n^{(\nu)})\,(1 - F(L_2))],$$

woraus folgt, dass die Folgen $\{x_n^\nu\}$ für $n \leqslant \max\{n_1, n_2 + 1\}$ und $\{y_n^{(\nu)}\}$ für $n \leqslant \max\{n_1, n_2\}$ beschränkt sind und daher gegen endliche Limiten konvergieren. Es gilt

$$\int_{L_1}^{L_2} (T(x, X^{(\nu)}, Y^{(\nu)}) - T(x, X^*, Y^*))\,\mathrm{d}F(x) = \int_{L_1}^{L_2} (t_\nu(x) - t^*(x))\,\mathrm{d}F(x) = \tag{11}$$
$$= \sum_{n=0}^{n_1-1} t_\nu(-x_{n+1}^{(\nu)})\,(F(-x_n^{(\nu)}) - F(x_{n+1}^{(\nu)})) + t_\nu(L_1)\,(F(-x_{n_1}^{(\nu)}) - F(L_1)) +$$
$$+ \sum_{n=0}^{n_2-1} t_\nu(y_{n+1}^{(\nu)})\,(F(y_{n+1}^{(\nu)}) - F(y_n^{(\nu)})) + t_\nu(L_2)\,(F(L_2) - F(y_{n_2}^{(\nu)}) -$$
$$- \sum_{n=0}^{n_1-1} t^*(-x_{n+1}^*)\,(F(-x_n^*) - F(-x_{n+1}^*)) - t^*(L_1)\,(F(-x_{n_1}^*) - F(L_1)) -$$
$$- \sum_{n=0}^{n_2-1} t^*(y_{n+1}^*)\,(F(y_{n+1}^*) - F(y_n^*)) - t^*(L_2)\,(F(L_2) - F(y_{n_2}^*)) =$$
$$= \sum_{n=0}^{n_1-1} (t_\nu(-x_{n+1}^{(\nu)}) - t^*(-x_{n+1}^*))\,.\,(F(-x_n^{(\nu)}) - F(-x_{n+1}^{(\nu)})) +$$
$$+ (t_\nu(L_1) - t^*(L_1))\,(F(-x_{n_1}^{(\nu)}) - F(L_1)) + \sum_{n=0}^{n_2-1} (t_\nu(y_{n+1}^{(\nu)}) -$$
$$- t^*(y_{n+1}^*))\,(F(y_{n+1}^{(\nu)}) - F(y_n^{(\nu)})) + (t_\nu(L_2) - t^*(L_2))\,(F(L_2) - F(y_{n_2}^{(\nu)})) +$$
$$+ \sum_{n=0}^{n_1} t^*(-x_{n+1}^*)\,(F(-x_n^{(\nu)}) - F(-x_n^*) + F(-x_{n+1}^*) - F(-x_{n+1}^{(\nu)}) +$$

$$+ t^*(L_1)\,(F(-x_{n_1}^{(\nu)}) - F(-x_{n_1}^*)) + \sum_{n=0}^{n_2-1} t^*(y_{n+1}^*)\,[F(y_n^*) - F(y_n^{(\nu)}) +$$

$$+ F(y_{n+1}^{(\nu)}) - F(y_{n+1}^*)] + t^*(L_2)\,(F(y_{n_2}^*) - F(y_{n_2}^{(\nu)}))\,.$$

Da aber, wie oben bewiesen wurde, x_i^*, y_i^* für $i \leqq n$ endlich sind, gilt

$$(t_\nu(-x_{n+1}^{(\nu)}) - t^*(-x_{n+1}^*)) = 2\sum_{i=1}^{n}[(x_i^{(\nu)} + y_i^{(\nu)}) - (x_i^* + y_i^*)] \to 0$$

für $n \leqq n_1$, woraus sich

$$\sum_{n=0}^{n_1-1}(t_\nu(-x_{n+1}^{(\nu)}) - t^*(-x_{n+1}^*))\,(F(-x_n^{(\nu)}) - F(-x_{n+1}^{(\nu)})) \to 0$$

ergibt. Weiter folgt von der Stetigkeit der Funktion F

$$F(-x_n^{(\nu)}) - F(-x_n^*) \to 0$$

für $n \leqq n_1$, woraus

$$\sum_{n=0}^{n_1-1} t^*(-x_{n+1}^*)\,(F(-x_n^{(\nu)}) - F(-x_n^*) + F(-x_{n+1}^{(\nu)}) - F(-x_{n+1}^*)) \to 0$$

folgt. Ähnlich beweist man leicht, dass auch die bleibenden Glieder in der Formel (11) gegen Null konvergieren. Daraus ergibt sich

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_{L_1}^{L_2} T(x, X^{(\nu)}, Y^{(\nu)})\,\mathrm{d}F(x) = \int_{L_1}^{L_2} T(x, X^*, Y^*)\,\mathrm{d}F(x).$$

Wählen wir jetzt zwei solche Folgen $\{L_{1k}\}$, $\{L_{2k}\}$ dass $L_{1k} \to K_1$, $L_{2k} \to K_2$ und $L_{1k} \neq -x_n$, $L_{2k} \neq y_n$ für $n = 1, 2, \ldots$ gilt. Dann gilt

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_{L_{1k}}^{L_{2k}} T(x, X^{(\nu)}, Y^{(\nu)})\,\mathrm{d}F(x) = \int_{L_{1k}}^{L_{2k}} T(x, X^*, Y^*)\,\mathrm{d}F(x)\,,$$

woraus

$$\tau^* = \lim_{\nu\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} T(x, X^{(\nu)}, Y^{(\nu)})\,\mathrm{d}F(x) = \lim_{\nu\to\infty}\int_{K_1}^{K_2} T(x, X^{(\nu)}, Y^{(\nu)})\,\mathrm{d}F(x) =$$

$$= \int_{K_1}^{K_2} T(x, X^*, Y^*)\,\mathrm{d}F(x) = \tau(X^*, Y^*)$$

folgt. Damit ist der Satz bewiesen.

Eingegangen am 10. 9. 1964.

ČSAV, Ústav technickej kybernetiky
Slovenskej akadémie vied, Bratislava