Controlabilité Bang Bang, controlabilité différentiable, et perturbation des systèmes non linéaires (*).

PAVOL BRUNOVSKY (Bratislava) - CLAUDE LOBRY (Bordeaux)

Summary. – *We describe a general scheme to obtain controllability results under the action of special controls (Bang Bang or smooth) or under perturbations. The method works in the case of linear and nonlinear systems; it uses essentially Brouwer fixed point theorem and the inequality of Gronwall.*

Le but de ce papier est de décrire un procédé systématique permettant de démontrer un certain nombre de résultats de contrôlabilité des systèmes guidables. En fait, ce procédé n'est pas réellement nouveau. Il remonte au moins à la preuve du principe du maximum (voir [11]) ou encore à la démonstration de certains résultats de contrôlabilité de systèmes non linéaires (voir [3], [5]).

Nous avons voulu mettre en valeur ce procédé pour deux raisons:

i) deux articles récents [1], [9] sur la perturbation de systèmes linéaires rentrent exactement dans ce cadre;

ii) grâce au lemme II-5 du présent article nous pouvons prouver de nouveaux résultats sur la contrôlabilité et les perturbations de systèmes non linéaires généraux.

Le lemme II-5 évoqué plus haut n'est qu'une conséquence triviale d'un résultat récent de [4]. En conséquence, nous pouvons dire que ce papier ne contient pas réellement quelque chose de neuf, cependant, nous allons voir que la juxtaposition de ces résultats connus permet d'obtenir aisément des conclusions significatives. Par exemple, nous obtenons le résultat suivant:

« Pour tout système de la forme:

$$\frac{dx}{dt} = g(x) + u_1 f^1(x) + u_2 f^2(x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}^n\,, \qquad u_1 \in \mathbb{R}\,, \qquad u_2 \in \mathbb{R}$$

il existe des perturbations arbitrairement petites f_ε^1 et f_ε^2 de f^1 et f^2 telles que pour tout compact C de $\mathbb{R}^n$ le système perturbé:

$$\frac{dx}{dt} = g(x) + u_1 f(x) + u_2 f(x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

(*) Entrata in Redazione il 29 settembre 1973.

soit contrôlable sur C par des commandes de module inférieur à λ_c; la constante λ_c dépend du compact C ».

Ce résultat s'interprète de la façon suivante: supposons que l'équation différentielle:

$$\frac{dx}{dt} = g(x)$$

représente l'équation du mouvement d'un système dynamique en l'absence de tout contrôle, et que l'équation complète représente le système contrôlé: f^1 et f^2 représentent le type de forces qu'il est possible d'appliquer au système, les contrôles u_1 et u_2 représentent eux l'intensité avec laquelle on applique ces forces. Les forces f^1 et f^2 étant réalisées à l'aide de certains dispositifs « fabriqués », il est clair qu'en jouant sur le procédé de fabrication il est possible de transformer f^1 et f^2 en f^1_ε et f^2_ε, pourvu que ε ne soit pas trop grand. Ce résultat affirme donc la possibilité de contrôler presque tous les systèmes sur un ensemble compact pourvu que l'on puisse appliquer des forces suffisamment grandes.

Le plan de cet article est le suivant: le premier paragraphe est consacré à la description de la méthode que nous proposons, pour bien l'illustrer nous donnons un résultat sur les perturbations non linéaires des systèmes linéaires; ce résultat est une petite amélioration du théorème 4 de l'article [1]. Dans le deuxième paragraphe, nous proposons quelques notations sur les systèmes non linéaires et nous énonçons deux lemmes; le deuxième de ces lemmes est un exercice facile sur l'inégalité de Gronwall. Dans le dernier paragraphe, nous démontrons des résultats de deux types; les premiers sur la possibilité de contrôler par des contrôles de type spécial (Bang Bang, différentiables, périodiques, etc.) les seconds sur les perturbations de systèmes non linéaires. Notre proposition III-3 peut être considérée comme une extension au cas non linéaire du théorème 8 de [2].

I. – La méthode.

Les notations curieuses que nous allons introduire ic iseront justifiées par la suite lorsque nous les appliquerons aux problèmes de contrôle. Pour faciliter le lecture nous donnons entre parenthèses la signification intuitive.

Soit U un ensemble (les commandes admissibles), désignons par:

$$\mathscr{R}: U \to R^n$$

une application de U dans R^n (c'est l'application qui à la commande u associe la réponse). Un inverse à droite local sera une application:

$$\mathscr{U}_x: \mathcal{O}_x \to U$$

où $\mathcal{O}_x$ est un voisinage ouvert et borné du point x, et où l'application $\mathscr{R} \circ \mathscr{U}_x$ de R^n dans lui-même est l'identité.

Soit φ une application de U dans lui-même (l'image $\varphi(U)$ est l'ensemble des commandes spéciales) et enfin une application:

$$\tilde{\mathscr{R}}: U \to R^n$$

(qui représente la réponse à un système perturbé).

I-1. LEMME. – Soit C un compact contenu dans l'intérieur de l'image de $\mathscr{R}$. Supposons qu'en tout point de C l'application $\mathscr{R}$ admette un inverse à droite local, il existe alors un réel $\varepsilon(c)$ strictement positif ne dépendant que de C tel que si:

i) pour tout x de C l'application $\tilde{\mathscr{R}}\circ\varphi\circ\mathscr{U}_x$ est continue;

ii) on a la majoration:

$$\|\tilde{\mathscr{R}}\circ\varphi\circ\mathscr{U}_x(y) - y\| \leqslant \varepsilon(c) \; ; \qquad y \in \mathscr{O}_x$$

alors l'image de $\tilde{\mathscr{R}}$ contient C.

DÉMONSTRATION. – C'est une conséquence immédiate du théorème de Brouwer. Soit un recouvrement fini de C par des boules fermées:

$$B(x_i, \varrho_i)\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, p$$

telles que la boule fermée de rayon double:

$$B(x_i, 2\varrho_i)$$

soit contenue dans l'ouvert $\mathscr{O}_{x_i}$. Soit:

$$\varepsilon(c) = \operatorname{Min}(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_p)\,.$$

Pour tout x dans la boule de centre x_i et de rayon ϱ_i l'application:

$$y \mapsto \psi(y) = x + y - \tilde{\mathscr{R}}\circ\varphi\circ\mathscr{U}_{x_i}(y)$$

est une application continue (condition i)) définie, par construction du recouvrement, sur les boules, et d'après la condition ii), nous avons:

$$\|\psi(y - x_i)\| \leqslant \|x - x_i\| + \|\tilde{\mathscr{R}}\circ\varphi\circ\mathscr{U}_{x_i}(y) - y\| \leqslant 2\varrho_i\,.$$

L'application ψ admet donc un point fixe y_0 qui satisfait naturellement:

$$x = \tilde{\mathscr{R}}\circ\varphi\circ\mathscr{U}_{x_i}(y_0)\,.$$

Ceci prouve que x est dans l'image de $\tilde{\mathscr{R}}\circ\varphi\circ\mathscr{U}_{x_i}$, le lemme est donc prouvé.

Nous nous proposons maintenant d'illustrer ce lemme en l'appliquant à l'exemple suivant de la perturbation d'un système linéaire.

Nous considérons le système standard:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u\,; \qquad x \in \mathbb{R}^n\,; \qquad u \in \mathbb{R}^p\,. \tag{1}$$

Pour ne pas compliquer sans raison les démonstrations nous supposerons que $p = 1$ et que les applications $t \to A(t)$ et $t \to B(t)$ sont continues; la généralisation à p arbitraire et à des applications localement intégrables est immédiate.

Première étape. – Nous appelons U l'ensemble des applications $\mathscr{U}$, intégrables de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}$. A toute commande $\mathscr{U}$ de U, et à la condition initiale $X(0) = 0$, correspond une réponse $\mathscr{R}(\mathscr{U})$ définie par la formule classique:

$$\mathscr{R}(\mathscr{U}) = \phi(T)\int_0^T \phi^{-1}(t)\,B(t)\,\mathscr{U}(t)\,dt\,. \tag{*}$$

Supposons le système (1) complètement contrôlable, donc que $\mathscr{R}$ est surjective: de la formule ci-dessus nous concluons alors que l'ensemble:

$$\left\{\phi(T)\int_0^T \phi^{-1}(t)\;B\,\mathscr{U}(t)\,dt;\;\; \mathscr{U} \in U\right\}$$

est l'espace tout entier.

Il existe donc n instants:

$$0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_i < \ldots < t_n < T$$

tels que les vecteurs:

$$\phi^{-1}(t_i)\,R(t_i) \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

soient linéairement indépendants. Par suite, on peut choisir α strictement positif et suffisamment petit de manière à ce que les intervalles $[t_i, t_i + \alpha]$ ne se recouvrent pas, $[t_n, t_n + \alpha]$ soit contenu dans $[0, T]$ et les vecteurs:

$$W_i = \phi(T)\int_{t_i}^{t_i+\alpha} \phi^{-1}(s)\,R(s)\,ds \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

soient indépendants.

(*) Naturellement $\phi(t)$ désigne la résolvante du système $dx/dt = A(t)x$.

Soit x un élément de $\mathbb{R}^n$; à x nous associons l'unique n-uple $(\xi_1(x), \xi_2(x), \dots, \xi_n(x))$ défini par:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x)\, W_i\,.$$

A x enfin, nous associons la commande $\mathscr{U}_0(x)$ définie par:

$$\begin{aligned} &\mathscr{U}_0(x)(t) = \xi_i(x) && \text{si } t_i \leqslant t \leqslant t_i + \alpha,\ i = 1, 2, \dots, n \\ &\mathscr{U}_0(x)(t) = 0 && \text{sinon.} \end{aligned}$$

L'application $\mathscr{U}_0(x)$ est, par construction, un inverse à droite de $\mathscr{R}$. On a:

$$\mathscr{R} \circ \mathscr{U}_0(x) = x\ ; \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Deuxième étape. – Nous appelons λ-commande une commande dont le module est inférieur à λ, une λ-commande B. B. une commande dont le module est pour presque tout t égal à λ. Nous allons définir une application φ_η^λ de l'ensemble des λ-commandes continues par morceaux dans l'ensemble des λ-commandes Bang-Bang. Soit $\mathscr{U}$ une λ-commande, continue par morceaux, discontinue aux points:

$$0 = t_1 < t_2 < \dots < t_1 < \dots < t_p = T$$

prenant la valeur u_i sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$. Soit η un réel de la forme $1/r$ avec r entier. On partage l'intervalle $[0, T]$ en r intervalles de longueur ηT. Cette partition définit une partition de l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ en un certain nombre d'intervalles; soit I un de ces intervalles. Par construction, sur I la commande $\mathscr{U}$ vaut u_i, avec:

$$|u_i| \leqslant \lambda\ .$$

Nous partageons l'intervalle I en deux intervalles I_1 et I_2 tels que:

$$\lambda l(I_1) + (-\lambda) l(I_2) = \mathscr{U}_i l(I)$$

(où $l(I_1)$, $l(I_2)$ et $l(I)$ désignent respectivement les longueurs de I_1, I_2 et I) ce qui est toujours possible. Nous remplaçcons la commande $\mathscr{U}$ par la commande qui vaut $+\lambda$ sur I_1 et $-\lambda$ sur I_2; nous procédons ainsi sur chaque intervalle I et la commande $\varphi_\eta^\lambda(\mathscr{U})$ ainsi définie est bien une λ-commande B. B. Nous illustrons sur la figure 1 en annexe la correspondance $\mathscr{U} \to \varphi_\eta^\lambda(\mathscr{U})$ dans un cas particulier.

Troisième étape. – Nous introduisons le système perturbé:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u + g(t, x, u) \tag{2}$$

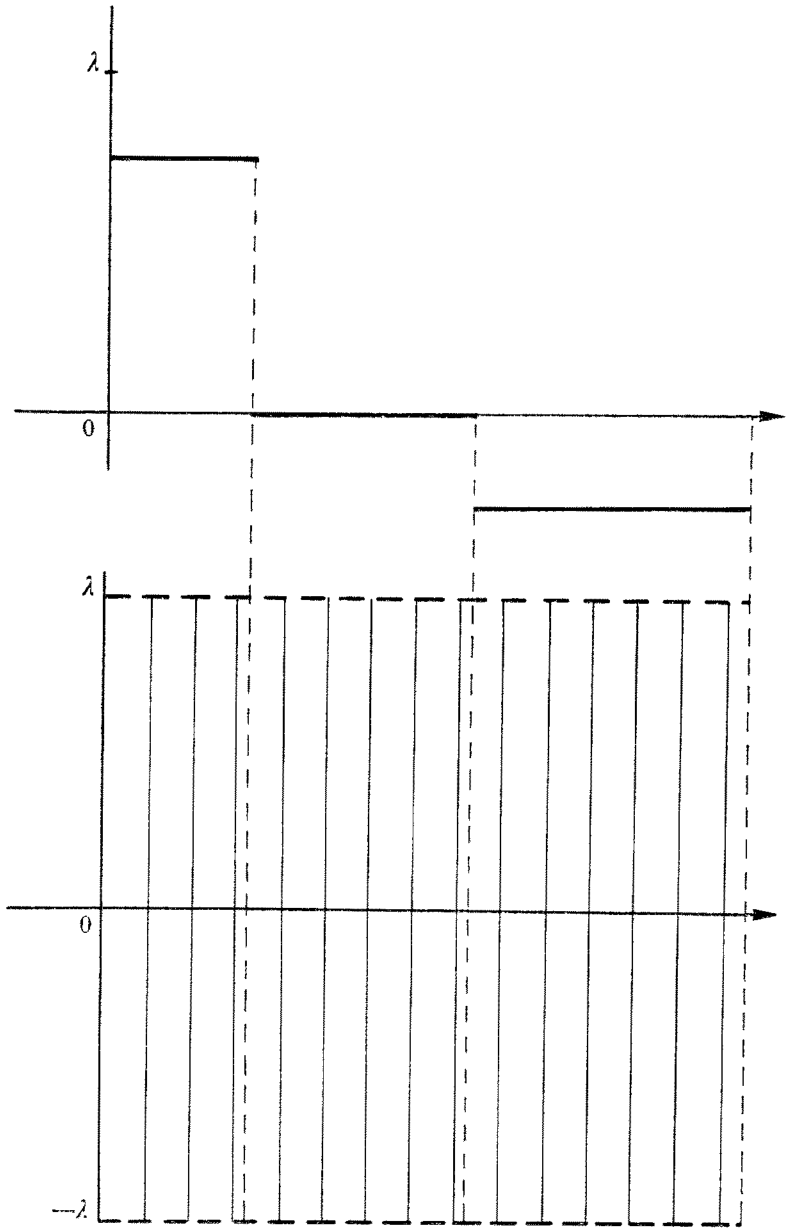

Fig. 1.

et nous supposons que l'application g est continue, bornée par M, localement lipschitzienne par rapport à x. Désignons par:

$$\widetilde{\mathscr{R}}(\mathscr{U})$$

la réponse à l'instant T (toujours depuis la condition initiale: $x(0)=0$). De l'inégalité de Gronwall on déduit la majoration:

$$\|\mathscr{R}(\mathscr{U})-\tilde{\mathscr{R}}(\mathscr{U})\| \leqslant M \exp[K_1, T] \tag{3}$$

où la constante K_1 ne dépend que de l'application $t \to A(t)$.

Nous disposons maintenant de tout ce qu'il faut pour énoncer et prouver la:

I-2. PROPOSITION. – Supposons que le système (1) soit complètement contrôlable. Soit:

$$g: R\times R^n \times R \to R^n$$

$$(t, x, u) \mapsto g(t, x, u)$$

une application continue, bornée, localement lipschitzienne par rapport à x. Pour tout compact C de R^n il existe un réel λ_c tel que le système perturbé (2) contienne C dans l'ensemble de ses états accessibles à partir de l'origine par des λ_c-commandes B. B. constantes par morceaux.

DÉMONSTRATION. – Soit $B(0, \varrho)$ une boule de R^n contenant C dans son intérieur; la restriction à $B(0, 2\varrho)$ de l'application $\mathscr{U}_0$ construite à la « première étape » définit évidemment pour tout point de C un inverse à droite local de $\mathscr{R}$. Le lemme I-1 s'applique donc, et dans ce cas, on a naturellement $\varepsilon(C)=\varrho$. La commande $\mathscr{U}_0(x)$ est une $K_2\varrho$-commande continue par morceaux, où K_2 est 2 fois la norme de l'application linéaire:

$$x \to (\xi_1(x), \xi_2(x), \dots, \xi_n(x))$$

définie à la « première étape », donc elle appartient au domaine de définition de $\varphi_\eta^{K_2\varrho}$ et par suite, la formule:

$$\varphi_\eta^{K_2\varrho}\circ\mathscr{U}_0$$

a un sens; il est clair que l'application ci-dessus est continue, le point i) du lemme I-1 est satisfait. On a maintenant à majorer la quantité:

$$\|\tilde{\mathscr{R}}\circ\varphi_\eta^{K_2\varrho}\circ\mathscr{U}_0(x)-x\|$$

que nous décomposons en la somme:

$$\|\tilde{\mathscr{R}}\circ\varphi_\eta^{K_2\varrho}\circ\mathscr{U}_0(x)-\mathscr{R}\circ\varphi_\eta^{K_2\varrho}\circ\mathscr{U}_0(x)\| + \|\mathscr{R}\circ\varphi_\eta^{K_2\varrho}\circ\mathscr{U}_0(x)-\mathscr{R}\circ\mathscr{U}_0(x)\|\,.$$

D'après la « troisième étape » on a la majoration (3):

$$\|\widetilde{\mathscr{R}}(p_\eta^{K_2\varrho}\circ\mathscr{U}_0(x)) - \mathscr{R}(\varphi_\eta^{K_2\varrho}\circ\mathscr{U}_0(x))\| \leqslant M \exp[K_1, T] \tag{3}$$

avec: $M = \sup\{g(t, x, u);\ t\subset R;\ x\subset R^n;\ u\subset R\}$.

La quantité $M \exp[K_1, T]$ ne dépend pas de ϱ, nous pouvons donc toujours supposer que celui-ci a été choisi plus grand que $M\ \exp[K_1, T]$, ce que nous faisons. Le rayon ϱ étant maintenant fixé, de la définition de l'application $\varphi_\eta^{K_2\varrho}$, il est aisé de se convaincre que:

$$\|\mathscr{R}\circ p_\eta^{K_2\varrho}\circ\mathscr{U}_0(x) - \mathscr{R}_0\circ\mathscr{U}_0(x)\| \leqslant h(\eta)$$

où la fonction $h(\eta)$ tend vers 0 avec η. On choisira donc η_0 tel que:

$$h(\eta_0) \leqslant \frac{\varrho}{2}\,.$$

Comme nous avons:

$$K_1 T M + h(\eta_0) \leqslant \frac{\varrho}{2} + \frac{\varrho}{2}$$

le lemme s'applique et nous pouvons affirmer que l'image de:

$$\mathscr{R}\circ\varphi_\eta^{K_2\varrho}\circ\mathscr{U}_0$$

contient le compact C. On pose:

$$\lambda_c = K_2\varrho$$

et l'énoncé de la proposition n'apparait plus alors que comme une reformulation de l'inclusion:

$$C\subset\widetilde{\mathscr{R}}\Big(\varphi_{\eta_0}^{K_2\varrho}\big(\mathscr{U}_0(B(0, 2\varrho))\big)\Big)\,.$$

I-3. REMARQUES. – En supposant sur la « perturbation » $g(t, x, u)$, non plus une majoration globale mais des conditions de Lipshitz globales, on obtiendrait des inégalités d'un type différent de (3) qui conduiraient à des résultats anlogues à ceux de [1] et [9].

Dans le cas où $t \to B(t)$ ne serait pas continue, il suffirait d'introduire à la « deuxième étape » une approximation (au sens de la convergense en moyenne) continue.

Cette proposition est une petite amélioration du théorème 4 de l'article [1] en ce sens, que nous affirmons (ce qui découle de la construction) que les λ-commandes B.B. qui permettent de contrôler le système *peuvent etre choisies constantes par morceaux.*

II. – Généralités sur les systèmes non linéaires.

Nous commençons par rappeler des notations très classiques. Un système non linéaire est défini par l'équation:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u)\,; \qquad x \in R^n\,, \qquad u \in R^p\,. \tag{1}$$

Les valeurs du paramètre de contrôle u appartiennent à une partie E de R^p et une commande admissible est une application localement intégrable à valeur dans R.

II-1. DÉFINITION. – Une E-commande est une application localement intégrable d'un intervalle I dans E. Dans la suite nous utiliserons les ensembles:

$$E = \Omega_\lambda \qquad = \left\{(u_1, u_2, \ldots, u_p) \in \mathbb{R}^p;\ u_i \geqslant 0;\ \sum_{i=1}^{p} u_i = \lambda\right\},$$

$$E = \Omega_\lambda\,\text{B.B.} = \left\{(u_1, u_2, \ldots, u_p) \in \Omega_\lambda;\ u_i \in \left\{0; \lambda\right\}\right\},$$

$$E = \Omega_{\leqslant\lambda} \qquad = \bigcup_{0\leqslant\nu\leqslant\lambda} \Omega_\nu\,.$$

Soit:

$$\mathcal{U}\colon [0, T] \to E$$

une E-commande. La réponse à cette E-commande:

$$t \to x(t, \mathcal{U}, f)\,, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T$$

est, par définition, la solution du problème de Cauchy:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \mathcal{U}(t))$$

$$x(0) = 0\,.$$

Cette solution n'est bien définie que si la fonction f satisfait un certain nombre de conditions de régularité classiques qui, dans cet article, seront toujours entrainées par des conditions beaucoup plus fortes.

L'ensemble des états accessibles à l'instant T est l'ensemble de toutes les réponses possibles aux E-commandes définies sur l'intervalle $[0, T]$; on le note: $A(T, E, f)$; cette notation rappelle qu'il s'agit de E-commandes, et que l'équation d'évolution est définie par f. On a donc:

$$A(T, E, f) = \left\{x(T, \mathcal{U}, f);\ \mathcal{U} \in L^1([0\ \ T], E)\right\}.$$

L'ensemble des états accessibles est la réunion pour T positif des états accessibles à l'instant T; on le note $A(E, f)$, donc:

$$A(E, f) = \bigcup_{T \geq 0} A(T, E, f) .$$

Nous considèrerons des systèmes particuliers que nous définissons maintenant.

II-2. DÉFINITION. – Un système « semi linéaire » (cf. [3]) est un système où le paramètre de contrôle entre de façon linéaire, c'est-à-dire un système de la forme:

$$\frac{dx}{dt} = f^0(x) + \sum_{i=1}^{p} u_i f^i(x) ; \tag{2}$$

lorsque la function f^0 est identiquement nulle, on dit que le système est « homogène ». Dans cette définition nous incluons les conditions suivantes:

i) les applications f^i; $i = 0, 1, \ldots, p$ sont de classe C^∞;

ii) les solutions de (2) sont définies pour toutes les valeurs de t.

Nous allons maintenant définir la notion de système semi linéaire homogène en position générale. Cette derniére appellation est justifiée par le fait que « presque tous » les systèmes homogènes sont en position générale (voir: [6], [7]).

II-3. DÉFINITION. – On dit que le système semi linéaire homogène (3):

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i=1}^{p} u_i f^i(x) ; \qquad x \in R^n , \tag{3}$$

est en position générale si la dimension de l'espace vectoriel des valeurs au point x des éléments de l'algèbre de Lie engendrée par les champs de vecteurs f^i est égale à n, ce, pour tout x de R^n.

II-4. – Nous allons nous intéresser aux systèmes semi linéaires homogènes en position générale. Soit donc:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u) = \sum_{i=1}^{p} u_i f^i(x) .$$

Nous définissons pour commencer l'ensemble U comme l'ensemble des Ω_λ-commandes définies sur un intervalle $[0, T]$; $T \in \mathbb{R}^+$. Par abus de notation nous désignons simplement par: $\mathscr{U}$ au lieu de $\mathscr{U}: [0, T] \to \Omega_\lambda$, une telle commande, et nous notons simplement:

$$\mathscr{R}(\mathscr{U}) = x(T, \mathscr{U}, f) .$$

L'image par l'application $\mathscr{R}$ de l'ensemble U est donc par définition l'ensemble $A(\Omega_\lambda, f)$ des états accessibles pour le système semi linéaire homogène défini par:

$$f(x, u) = \sum_{i=1}^{p} u_i f^i(x) .$$

Nous allons montrer que l'application $\mathscr{R}$ possède un inverse à droite local (au sens de I) et de plus, nous allons voir que cet inverse à droite local *prend ses valeurs dans l'ensemble des* Ω_λ B.B.-*commandes ayant un nombre fini de discontinuites*; précieément nous énouçons le:

II-5. LEMME. – Soit un système semi linéaire homogène (3) en position générale. Pour tout x appartenant à l'intérieur de l'ensemble $\mathscr{R}(U)$ il existe:

i) Une Ω_λ B.B.-commande ayant un nombre fini de discontinuités notée: $\underline{\mathscr{U}}_x$

$$\underline{\mathscr{U}}_x\colon [0, \boldsymbol{T}) \to R^p \ ;$$

ii) Une suite $i_1, i_2, \ldots, i_n$ d'éléments de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, p\}$.

iii) Un difféomorphisme local au voisinage de x prenant ses valeurs dans: $(]0, +\infty))^n$.

$$\tau\colon \mathcal{O}_x \to (]0, +\infty))^n$$
$$y \to \tau(y) = (\tau_1(y), \tau_2(y), \ldots, \tau_i(y), \ldots, \tau^n(y))$$

tels que la Ω_λ B.B.-commande $\mathscr{U}_x(y)$ définie par les relations:

$$\mathscr{U}_x(y)(t) = \underline{\mathscr{U}}_x(t) \ ; \qquad 0 \leqslant t \leqslant \boldsymbol{T}$$
$$\mathscr{U}_x(y)(t) = (u_1, u_2, \ldots, u_i, \ldots, u_p)$$

pour:

$$\boldsymbol{T} + \sum_{k=0}^{j} \tau_k(y) \leqslant t \leqslant \boldsymbol{T} + \sum_{k=0}^{j+1} \tau_k(y) \ ; \qquad j = 0, 1, \ldots, n-1$$

avec:
$$\begin{cases} \tau_0(y) = 0 \\ u_i = 0 \qquad \text{si } i \neq i_j \\ u_i = \lambda \qquad \text{si } i = i_j \end{cases}$$

admette pour réponse:

$$\mathscr{R}(\mathscr{U}_x(y)) = y .$$

Pour démontrer ce lemme nous allons utiliser les deux résultats suivants:

R_1 Pour un système semi linéaire homogène l'ensemble $A(\Omega_\lambda\,\text{B.B.}, f)$ des états accessibles par des commandes Bang Bang ayant un nombre fini discontinuités est dense dans l'ensemble des états accessibles par des $\mathscr{U}_\lambda$-commandes quelconques. Ce résultat est une conséquence de ce que $\mathscr{U}_\lambda$ est l'enveloppe convexe de Ω_λ B.B. On peut en trouver une démonstration dans [3] ou [8].

R_2 Soit le système semi linéaire (3) en position générale. Désignons par:

$$(t, x) \mapsto f_t^i(x)\,,$$

le groupe à un paramètre de difféomorphismes de R^n engendré par le champ de vecteur f^i qui, de par la définition mvme d'un système semi linéaire, est nécessairement complet. Quel que soit x dans R^n et quel que soit le voisinage $\mathscr{V}_x$ de x il existe deux suites:

$$i_1, i_2, \dots, i_j, \dots, i_n\,; \qquad i_j \in [1, 2, \dots, p]$$
$$t_1^0, t_2^0, \dots, t_j^0, \dots, t_n^0\,; \qquad t_j > 0$$

telles que:

i) l'application de R^n dans R^n:

$$t_1, t_2, \dots, t_n \mapsto f_{t_n}^{i_n} \circ \dots \circ f_{t_2}^{i_2} \circ f_{t_1}^{i_1}(x)$$

soit difféomorphisme local au voisinage du point:

$$t_1^0, t_2^0, \dots, t_n^0$$

ii) l'image du point:

$$t_1^0, t_2^0, \dots, t_n^0$$

appartienne au voisinage $\mathscr{V}_x$ du point x.

On peut trouver une démonstration de ce résultat dans [4].

DÉMONSTRATION DE LEMME II-5. – Commençons par remarquer qu'il n'est pas restrictif de supposer que $\lambda = 1$ en raison de la relation:

$$x(T, \mathscr{U}, f) = x(T/\lambda, \lambda\mathscr{U}, f)$$

toujours satisfaite par les systèmes homogènes. Dans ces conditions, si on se donne deux suites:

$$i_1, i_2, \ldots, i_q \; ; \qquad i_j \in (1, 2, \ldots, p)$$
$$t_1, t_2, \ldots, t_q \; ; \qquad t_q \in \mathbb{R}^+$$

et si on définit la commande:

$$\mathscr{U}\colon \left[0, \sum_{k=1}^{q} t_k\right] \mapsto \Omega_\lambda \text{ B.B.}$$

par les relations:

$$\mathscr{U}(t) = i_j \qquad \sum_{k=1}^{J-1} t_k \leqslant t_k < \sum_{k=i}^{j} t_k$$

alors, par construction:

$$x\left(\sum_{k=1}^{q} t_k, \mathscr{U}, f\right) = f_{t_q}^{i_q} \circ f_{t_{q-1}}^{i_{q-1}} \circ \ldots \circ f_{t_1}^{i_1}(x)$$

(toujours parce que le système considéré est homogène).

Le résultat $\mathbb{R}_2$ appliqué au système semi linéaire:

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i=1}^{p} u_i(-f^i(x)) \, , \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

qui lui aussi est en position générale nous montre que si $\mathscr{V}_x$ est un voisinage ouvert du point x contenu dans $\mathscr{R}(U)$ il existe deux suites:

$$i_1, i_2, \ldots, i_j, \ldots, i_n \; ; \qquad i_j \in [1, 2, \ldots, p]$$
$$t_1, t_2, \ldots, t_j, \ldots, t_n \; ; \qquad t_j > 0$$

telles que:

i) l'application:

$$t_1, t_2, \ldots, t_n \mapsto f_{-t_n}^{i_n} \circ \ldots \circ f_{-t_n}^{i_2} \circ f_{-t_2}^{i_2}(x)$$

soit un difféomorphisme local au voisinage du point:

$$t_1^0, t_2^0, \ldots, t_n^0$$

ii) le point:

$$y_0 = f_{-t_n^0}^{i_n} \circ \ldots \circ f_{-t_2^0}^{i_2} \circ f_{-t_1^0}^{i_1}(x)$$

appartienne au voisinage $\mathscr{V}_x$ du point x.

Soit $\mathscr{V}_{y_0}$ un voisinage ouvert de y_0 sur lequel l'application inverse de:

$$t_1, t_2, \ldots, t_n \mapsto f^{i_n}_{-t_n} \circ \ldots \circ f^{i_2}_{-t_2} \circ f^{i_1}_{-t_1}(x)$$

est défine et est de rang maximum. D'après le résultat R_1 il existe une commande continue par morceaux:

$$\underline{\mathscr{U}}_x : [0, \underline{T}] \to \Omega_1 \text{ B.B.}$$

dont la réponse appartient à $\mathscr{V}_x \cap \mathscr{V}_{y_0}$. Puisque le point $x(\underline{T}, \underline{\mathscr{U}}_x, f)$ appartient à $\mathscr{V}_{y_0}$ par construction, il existe une suite de réels strictement positifs:

$$\tau_1^0, \tau_2^0, \ldots, \tau_n^0$$

tels que:

$$x(\underline{T}, \underline{\mathscr{U}}, f) = f^{i_n}_{-\tau_n^0} \circ \ldots \circ f^{i_2}_{-\tau_1^0} \circ f^{i_1}_{-\tau_2^0}(x)$$

et, d'autre part, l'application:

$$t_1, t_2, \ldots, t_n \mapsto f^{i_n}_{t_n} \circ \ldots \circ f^{i_2}_{t_2} \circ f^{i_1}_{t_1}(x)$$

est de rang maximum n au point $\tau_1^0, \tau_2^0, \ldots, \tau_n^0$. De l'égalité ci-dessus nous obtenons que

$$x = f^{i_1}_{\tau_1^0} \circ f^{i_2}_{\tau_2^0} \circ \ldots \circ f^{i_n}_{\tau_n^0}\big(x(\underline{T}, \underline{\mathscr{U}}, f)\big) ,$$

et l'application:

$$t_1, t_2, \ldots, t_n \mapsto f^{i_1}_{t_1} \circ f^{i_2}_{t_2} \circ \ldots \circ f^{i_n}_{t_n}\big(x(\underline{T}, \underline{\mathscr{U}}, f)\big)$$

est également de rang maximum au point:

$$\tau_1^0, \tau_2^0, \ldots, \tau_n^0 ,$$

dont l'image est x. Il existe donc un ouvert $\mathcal{O}_x$ contenant x, une application différentiable:

$$y \to \tau_i(y), \tau_2(y), \ldots, \tau_n(y) ; \qquad \tau_1(y) > 0, \tau_2(y) > 0, \ldots, \tau_n(y) > 0 ,$$

définie sur $\mathcal{O}_x$ telle que:

$$f^{i_1}_{\tau_1(y)} \circ f^{i_2}_{\tau_2(y)} \circ \ldots \circ f^{i_n}_{\tau_n}\big(x(\underline{T}, \underline{\mathscr{U}}, f)\big) = y .$$

De la remarque faite au début de cette démonstration, nous concluons que la Ω_1B.B.-commande $\mathscr{U}_x(y)$ définie par les relations:

$$\mathscr{U}_x(y)(t) = \underline{\mathscr{U}}_x(t) \; ; \qquad 0 \leqslant t \leqslant \underline{T}$$

$$j = 0, 1, \ldots, n-1 \; ; \qquad \mathscr{U}_x(y)(t) = (u_1, u_2, \ldots, u_i, \ldots, u_p)$$

$$\text{si } \underline{T} + \sum_{k=0}^{j} \tau_k(y) \leqslant t < \underline{T} + \sum_{k=0}^{j+1} \tau_k(y)$$

avec:

$$\begin{cases} \tau_0(y) = 0 \\ u_i = 0 & \text{si } i = i_j \\ u_i = 1 & \text{si } i = i_j \end{cases}$$

admet pour réponse:

$$\mathscr{R}(\mathscr{U}_x(y)) = x\Big(\underline{T} + \sum_{k=0}^{j} \tau_k(y), \mathscr{U}_x(y), f\Big) = y \, .$$

Comme on peut remplacer 1 par λ ceci prouve le lemme.

II-6. REMARQUE. – Le lemme précédent entraine en particulier que pour un système semi linéaire homogène, l'ensemble des états accessibles par des Ω_λ B.B.-commandes contient l'intérieur de l'ensemble des états accessibles par des Ω_λ-commandes. Ce résultat est énoncé dans [4]; nous n'avons fait que reprendre la démonstration de [4] en explicitant l'inverse à droite local. Nous avons remarqué dans la démonstration de II-5 que pour un système semi linéaire homogène:

$$x(T, \mathscr{U}, f) = x(T/\lambda, \lambda\mathscr{U}, f) \, ,$$

ce qui entraine l'égalité des états accessibles:

$$A(\Omega_\lambda, f) = A(\Omega_{\leqslant\lambda}, f)$$

et par suite, on a les inclusions:

$$A(\Omega_\lambda \text{B.B.}, f) \supset \mathrm{Int}\big(A(\Omega_\lambda, f)\big) \qquad \lambda > 0 \, ;$$

$$A(\Omega_\lambda \text{B.B.}, f) \supset \mathrm{Int}\big(A(\Omega_{\leqslant\lambda}, f)\big) \qquad \lambda > 0 \, ;$$

$$A(\Omega_\lambda \text{B.B.}, f) \supset \mathrm{Int}\big(A(\Omega_{\leqslant\nu}, f)\big) \qquad \lambda > 0 \, , \; \nu > 0 \, .$$

Nous allons maintenant établir une majoration basée sur l'inégalité de Gronwall; pour cela, nous introduisons le matériel:

II-7. – Soit un système semi linéaire homogène:

$$\frac{dx}{dt}=\sum_{i=1}^{p}u_i f^i(x)=f(x,u)$$

on suppose que sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^n$ il satisfait les deux conditions:

i) Il existe une constante K telle que:

$$\|f^i(x)-f^i(y)\|\leqslant K\|x-y\| ;\qquad x\in\mathcal{O};\ y\in\mathcal{O};\ i=1,2,\ldots,p.$$

ii) Il existe une constante M telle que:

$$\|f^i(x)\|\leqslant M ;\qquad x\in\mathcal{O};\ i=1,2,\ldots,p .$$

Soit:

$$(x,u)\to g(x,u)$$

une application continue, localement lipschitzienne par rapport à x, satisfaisant:

$$\|g(x,u)\|\leqslant N ,\qquad x\in\mathbb{R}^n,\ u\in\mathbb{R}^p .$$

Soit enfin $\mathcal{U}_1$ une Ω_λ-commande dont la réponse $x(t,\mathcal{U}_1,f)$ est entièrement contenue dans $\mathcal{O}$:

$$x(t,\mathcal{U}_1,f)\in\mathcal{O}\qquad 0\leqslant t\leqslant T .$$

II-8. LEMME. – Dans les conditions énoncées en II-7, pour toute commande définie sur $[0, T]$ on a majoration:

$$\|x(t,\mathcal{U}_2,f+g)-x(t,\mathcal{U}_1,f)\|\leqslant pM\int_0^t \exp[p\lambda K(t-s)]\|\mathcal{U}_1(s)-\mathcal{U}_2(s)\|ds+ \\ +\frac{N}{pK\lambda}[\exp(pK\lambda t)-1]$$

pour toute valeur t inférieure ou égale à τ, le réel τ désignant l'instant où le graphe de:

$$t\mapsto x(t,\mathcal{U}_2,f+g)$$

quitte l'ensemble $[0,T]\times\mathcal{O}$, la norme dans l'espace $\mathbb{R}^p$ des valeurs des commandes étant la norme du max.

DÉMONSTRATION DU LEMME II-8. – On pose:

$$\delta(t) = \|x(t, \mathcal{U}_2, f+g) - x(t, \mathcal{U}_1, f)\| .$$

On a:

$$\delta(t) = \left\|\int_0^t f(x(s, \mathcal{U}_2, f+g), \mathcal{U}_2(s)) + g(x(t, \mathcal{U}_2, f+g), \mathcal{U}_2(s)) - f(x(s, \mathcal{U}_1, f), \mathcal{U}_1(s))\, ds\right\| ,$$

$$\delta(t) \leqslant \int_0^t \|f(x(s, \mathcal{U}_2, f+g), \mathcal{U}_2(s)) - f(x(s, \mathcal{U}_2, f+g), \mathcal{U}_1(s))\|\, ds$$

$$+ \int_0^t \|f(x(s, \mathcal{U}_2, f+g), \mathcal{U}_1(s)) - f(x(s, \mathcal{U}_1, f), \mathcal{U}_1(s))\|\, ds$$

$$+ \int_0^t \|g(x(s, \mathcal{U}_2, f+g), \mathcal{U}_2(s))\|\, ds .$$

Compte tenu des hypothéses faites sur f et g cela conduit à:

$$\|f(x(s, \mathcal{U}_2, f+g), \mathcal{U}_2(s)) - f(x(s, \mathcal{U}_2, f+g), \mathcal{U}_1(s))\| \leqslant pM\|\mathcal{U}_2(s) - \mathcal{U}_1(s)\| ,$$

$$\|f(x(s, \mathcal{U}_2, f+v), \mathcal{U}_1(s)) - f(x(s, \mathcal{U}_1, f), \mathcal{U}_1(s))\| \leqslant \lambda pK\, \delta(t) ,$$

$$\|v(x(s, \mathcal{U}_2, f+v), \mathcal{U}_2(s))\| \leqslant N ,$$

soit:

$$\delta(t) \leqslant \int_0^t \lambda pK\, \delta(s)\, ds + \int_0^t pM\|\mathcal{U}_2(s) - \mathcal{U}_1(s)\|\, ds + \int_0^t N\, ds ,$$

pour toute valeur de t inférieure à τ. Par un argument classique (cf. par exemple Coddington-Levinson, *I*, ex. 1) on déduit de cette inégalité, l'inégalité annoncée dans le lemme.

III. – Contrôlabilité Bang Bang, différentiable, et perturbation des systèmes non linéaires.

Dans une première partie, nous allons étudier la possibilité de contrôler un système homogène par des commandes Bang Bang ou différentiables.

Dans une deuxième partie, nous considérons des petites perturbations d'un système homogène, et nous verrons que ces dernières n'affectent pratiquement pas la contrôlabilité, puis nous envisagerons la contrôlabilité des systèmes non homogènes en considérant ces derniers comme des « perturbations » d'un système homogène.

III-1. PROPOSITION (KRENER [4]). – Pour un système semi linéaire homogène en position générale, l'ensemble des états accessibles par des Ω_λ B.B.-commandes continues par morceaux contient l'intérieur de l'ensemble des états accessibles par des Ω_λ-commandes, ou encore des $\Omega_{\leqslant\lambda}$-commandes, soit les inclusions:

$$A(\Omega_\lambda \text{ B.B.}, f) \supset \operatorname{Int}\big(A(\Omega_\lambda, f)\big) ,$$
$$A(\Omega_\lambda \text{ B.B.}, f) \supset \operatorname{Int}\big(A(\Omega_{\leqslant\lambda}, f)\big) .$$

DÉMONSTRATION. – Nous n'avons fait que rappeler pour la commodité la remarque II-6.

III-2. DÉFINITION. – Soit une suite discrète:

$$t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$$

de nombres réels, une suite:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

de vecteurs de R^p. On dit qu'une commande $\mathscr{U}$ satisfait les conditions « ponctuelles » ci-dessus lorsque pour tout entier n on a:

$$\mathscr{U}(t_n) = a_n .$$

Une telle condition n'a naturellement de sens que si on s'intéresse à des commandes continues.

III-3. PROPOSITION. – Soit le système semi linéaire homogène:

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i=1}^{p} u_i f^i(x) = f(x, u)$$

en position générale. L'ensemble des états accessibles par des $\Omega_{\leqslant\lambda}$-commandes différentiables satisfaisant un nombre fini de conditions ponctuelles:

$$\mathscr{U}(t_i) = a_i , \qquad a_i \in \Omega_{\leqslant\lambda} , \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

contient l'intérieur de l'ensemble des états accessibles par des $\Omega_{\leqslant\lambda}$-commandes quelconques.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION III-3. – Pour simplifier les écritures, nous allons supposer qu'il n'y a qu'une seule condition ponctuelle à satisfaire, soit par exemple:

$$\mathscr{U}(0) = (\lambda, 0, 0, 0, \ldots, 0) .$$

Pour compact C du lemme I-1, nous choisissons un compact réduit à un unique point x choisi dans l'intérieur de l'ensemble $A(\Omega_{\leqslant\lambda}, f)$ des états accessibles par une commande quelconque. D'après le lemme II-5, il existe un inverse local: $\mathscr{U}_x$ défini sur un voisinage $\mathcal{O}_x$ du point x; nous pouvons toujours restreindre $\mathcal{O}_x$ à une boule fermée de centre x et de rayon ϱ L'image par l'application τ (défine dans l'énoncé du lemme II-5) de cette boule est un compact de $(R^+)^n$. De ceci, nous pouvons conclure que les commandes $\mathscr{U}_x(y)$ ont leur intervalle de définition contenu dans un intervalle $[0, T]$ indépendant de y dans $\mathcal{O}_x$, qu'elles ont un nombre fini de discontinuités, disons r, et l'intervalle qui sépare deux discontinuités successives a une longueur minorée par $\alpha > 0$, α étant indépendant de y dans $\mathcal{O}_x$. Prolongeons la commande $\mathscr{U}_x(y)$ à l'intervalle $[0, T]$ par 0. L'application:

$$(y, t) \mapsto x(t, \mathscr{U}_x(y), f)$$

définie sur $\mathcal{O}_x \times [0, T]$ est continue, son image F donc un compact. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert borné contenant F et ξ la distance entre F et le complémentaire de $\mathcal{O}$.

Soit K une constante de lipschitz valable pour tous les f^i sur l'ouvert $\mathcal{O}$, M une une constante majorant tous les f^i sur $\mathcal{O}$. Nous sommes en mesure d'appliquer les deux lemmes, I-1 et II-8.

Nous choisissons le réel positif μ de manière à ce que:

i) $\mu \leqslant \frac{1}{2}\alpha$,

ii) $T\lambda p M \exp[p\lambda KT]\mu(r+1) \leqslant \frac{1}{2}\xi$,

iii) $T\lambda p M \exp[p\lambda KT]\mu(r+1) \leqslant \varepsilon(C)$,

iii) $T\lambda p M \exp[p\lambda KT]\mu(r+1) \leqslant \varepsilon(C)$

où $\varepsilon(C)$ est le réel défini au lemme I-1.

Nous désignons par:

$$\varphi_{n,m,\tau}: \mathbb{R} \to \Omega_{\leqslant\lambda}\,; \qquad 1 \leqslant n \leqslant p,\ 1 \leqslant m \leqslant p$$

une application différentiable ayant les propriétés suivantes:

$$t \leqslant \tau \Rightarrow \varphi_{n,m,\tau}(t) = (\underbrace{0, 0, \ldots, \lambda}_{n\text{-ième place}}, 0, \ldots, 0)$$

$$t > \tau + \mu \Rightarrow \varphi_{n,m,\tau}(t) = (\underbrace{0, 0, \ldots, \lambda}_{m\text{-ième place}}, 0, \ldots, 0)$$

une telle fonction existe de manière évidente.

Nous associons, pour terminer, à la commande $\mathscr{U}_x(y)$ la commande $\varphi(\mathscr{U}_x(y))$ définie ainsi: nous avons vu que la commande $\mathscr{U}_\lambda(y)$ est une λ-commande Bang Bang ayant exactement r discontinuités; cette Ω_λ B.B.-commande est donc parfaitement caractérisée par les r instant de discontinuité:

$$\tau_0, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_i, \ldots, \tau_r$$

$$\tau_i - \tau_{i-1} \geqslant \alpha\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, r$$

et les r nombres entiers compris entre 0 et p:

$$i_1, i_2, \ldots, i_r$$

indiquant la composante de $\mathscr{U}_x(y)$ qui est égale à λ sur l'intervalle: $[\tau_{i-1}, \tau_i]$, τ_0 étant par définition l'instant 0. Par définition, la commande $\varphi(\mathscr{U}_x(y))$ est définie par les relations ci-dessous:

$$\begin{aligned}
&\tau_0 \leqslant t < \tau_{0+\mu} && \Rightarrow \varphi(\mathscr{U}_x(y))(t) = \varphi_{1,i_1}(t)\\
&\tau_{0+\mu} \leqslant t < \tau_1 && \Rightarrow \varphi(\mathscr{U}_x(y))(t) = \mathscr{U}_x(y)(t) = (\underbrace{0, \ldots, \lambda,}_{i_1\text{-ième place}} 0, \ldots, 0)\\
&\tau_{j-1+\mu} \leqslant t < \tau_j && \Rightarrow \varphi(\mathscr{U}_x(y))(t) = \mathscr{U}_x(y)(t) = (\underbrace{0, \ldots, \lambda,}_{i_j\text{-ième place}} 0, \ldots, 0)\\
&\tau_j \leqslant t < \tau_{j+\mu} && \Rightarrow \varphi(\mathscr{U}_x(y))(t) = \varphi_{i_j, i_{j+1}, \tau_j}(t)\\
&\tau_r \leqslant t && \Rightarrow \varphi(\mathscr{U}_x(y))(t) = \mathscr{U}_x(y)(t) = (\underbrace{0, \ldots, \lambda,}_{i_r\text{-ième place}} 0, \ldots, 0)
\end{aligned}$$

Cette construction est possible pour tout y de $\mathscr{O}$ car la constante μ satisfait la condition i).

Nous appliquons maintenant le lemme I-1 avec:

$$\tilde{\mathscr{R}} = \mathscr{R}\,,$$

soit:

$$\mathscr{U} \to \tilde{\mathscr{R}}(\mathscr{U}) = x(T, \mathscr{U}, f)\,.$$

L'application:

$$y \to \tilde{\mathscr{R}} \circ \varphi \circ \mathscr{U}_x(y) = x\big(T, \varphi(\mathscr{U}_x(y)), f\big)$$

est clairement continue; majorons:

$$\|\tilde{\mathscr{R}} \circ \varphi \circ \mathscr{U}_\lambda(y) - y\|$$

soit encore:

$$\|x\big(T, \varphi(\mathscr{U}_x(y)), f\big) - x(T, \mathscr{U}_x(y), f)\|\,.$$

D'après le lemme II-8, on a pour t inférieur à τ:

$$\left\|x\big(t, \varphi(\varphi(\mathscr{U}_x(y)), f\big) - x(t, \mathscr{U}_x(y), f)\right\| \leqslant pM \int_0^t \exp[p\lambda K(t-s)] \left\|\varphi(\mathscr{U}_x(y))(s) - \mathscr{U}_x(y)(s)\right\| ds\,,$$

soit, puisque $\varphi(\mathscr{U}_x(y))$ et $\mathscr{U}_x(y)$ sont des commandes de $\Omega_{\leqslant\lambda}$ qui diffèrent sur un ensemble de mesure au plus égale à $(r+1)\mu$:

$$\left\|x\big(t, \varphi(\mathscr{U}_x(y)), f\big) - x(t, \mathscr{U}_x(y), f)\right\| \leqslant 2T\lambda pM \exp[p\lambda KT] p(r+1)\,, \tag{1}$$

donc, en raison de la condition ii) sur μ:

$$\left\|x\big(t, \varphi(\mathscr{U}_x(y)), f\big) - x(t, \mathscr{U}_x(y), f)\right\| \leqslant \tfrac{1}{2}\xi\,,$$

ce qui montre que, pour tout t de $[0, T]$ le point: $x\big(t, \varphi(\mathscr{U}_x(y)), f\big)$ appartient à $\mathcal{O}$, donc que $\tau = T$ dans le lemme II-8, donc l'inégalité (1) est vraie pour $t = T$; la condition iii) sur p entraîne alors:

$$\|\tilde{\mathscr{R}} \circ \varphi \circ \mathscr{U}_x(y) - y\| \leqslant \varepsilon(C)\,.$$

D'après le lemme I-1, la proposition est démontrée.

Les propositions III-1 et III-3 sont fausses si on remplace l'ensemble des états accessibles par l'ensemble des états accessibles à l'instant T (voir [2] p. 260). Par contre, on a la:

III-4. PROPOSITION. – Soit le système semi linéaire homogène:

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i=1}^{p} u_i f^i(x) = f(x, u)\,,$$

en position générale. L'ensemble des état accessibles par des Ω_λ B.B.-commandes à l'instant $T + \varepsilon$ ou, par des $\Omega\, 2\lambda$-commandes différentiables satisfaisant des conditions ponctuelles, contient l'intérieur de l'ensemble des états accessibles par des Ω_λ-commandes à l'instant T, soit:

$$A(T+\varepsilon, \Omega_\lambda\, \text{B.B.}, f) \supset \operatorname{Int}\big(A(T, \Omega_\lambda, f)\big)\,.$$

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION III-4. – On considère l'espace « augmenté » R^{n+1} et dans cet espace le système:

$$\frac{dX}{dt} = F(X, u) = \sum_{i=1}^{p} u_i F^i(X)\,; \qquad X = (x, x_{n+1})$$

$$F^i(X, u) = \big(f^i(x, u), 1\big)\,.$$

Ce système est également un système en position générale.

Désignons par π la projection canonique:

$$\pi: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n ,$$

$$(x, x_{n+1}) \mapsto x$$

et par H_T le plan de R^{n+1} défini par:

$$H_T = \{(x, x_{n+1});\ x_{n+1} = T\} .$$

On a évidemment la relation:

$$\pi(A(\Omega_\lambda, F) \cap H_T) = A(T, \Omega_\lambda, f) .$$

Si x est un point intérieur de $A(T, \Omega_\lambda, f)$ le point:

$$X = (x, T + \eta) ,$$

est un point intérieur de $A(\Omega_\lambda, F)$ dès lors que η est choisi assez petit. A partir de ce point, il suffit d'appliquer la proposition III-1 (resp. III-3), pour obtenir le résultat.

III-5. – Nous considérons maintenant le problème de la perturbation d'un système homogène; nous considèrerons ici des commandes où le paramètre λ est fixé une fois pour toutes. Le seul résultat que nous proposerons sur cette question est le suivant; comme il a été remarqué au paragraphe I, d'autres types de ma jorations peuvent être envisagés pour la fonction perturbatrice g.

III-6. PROPOSITION. – On considère un système semi linéaire homogène en position générale. Pour tout compact C contenu dans l'intérieur de l'ensemble des états accessibles par des Ω_λ-commandes quelconques, il existe un réel strictement positif tel que pour toute application:

$$g: R^n \times R^p \to R^n ,$$

continue, localement lipschitzienne par rapport à x satisfaisant l'inégalité:

$$g(x, u) \leqslant \mu \ ; \qquad x \in R^n ,\ u \in R^p ;$$

l'ensemble:

$$A(\Omega_\lambda, f + g) ,$$

des états accessibles du système:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u) + g(x, u) = \sum_{i=1}^{p} u_i f^i(x) + g(x, u)$$

contient le compact C.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION III-6. – Nous choisissons des inverses locaux, comme ils sont définis dans le lemme II-5.

$$\mathcal{U}_x(y): [0, t_x(y)] \to \Omega_\lambda \text{ B.B.}$$

On peut toujours supposer que les voisinages $\mathcal{O}_x$ sont des boules $B(x, \varrho)$ compactes centrées en x. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_q$ les centres d'un recouvrement fini de C par des boules de rayon moitié et soit $\varepsilon(C)$ le plus petit de ces demi-rayons. Toutes les commandes:

$$\mathcal{U}_{x_i}(y) \; ; \qquad y \in B(x_i, \varrho_i) \; ; \qquad i = 1, 2, \ldots, q \, ,$$

ont leur intervalle de définition $[0, t_x(y)]$ contenu dans un unique intervalle $[0, T]$; nous convenons de prolonger la commande $\mathcal{U}_{x_i}(y)$ au-delà de la borne supérieure de son intervalle de définition $t_x(y)$ par la valeur 0. Chaque point de C est donc la réponse pour le système non perturbé, à une commande de la forme:

$$\mathcal{U}_x(y): [0, T] \to \Omega_\lambda \text{ B.B.}$$

Par un argument de compacité évident, on voit que toutes les trajectorires du système non perturbé, conduisant à ces points (et correspondant aux commandes particulières ci-dessus) sont contenues dans un même ouvert *bornè* $\mathcal{O}$. Sait $\alpha > 0$ la distance du complémentaire de $\mathcal{O}$ à l'ensemble des points situés sur les trajectoires en question. Soit enfin K une constante de Lipschitz valable pour chaque fonction f^i sur l'ouvert borné $\mathcal{O}$.

D'après le lemme II-8, on a la majoration:

$$\|x(\tau, \mathcal{U}_x(y), f) - x(\tau, \mathcal{U}_x(y), f + g)\| \leqslant \frac{\eta}{pK\lambda} [\exp [pK\tau\lambda) - 1]$$

où τ est comme dans II-8 le premier instant où le graphe de la solution perturbée quitte $\mathcal{O} \times [0, T]$. Si on choisit:

$$\eta \leqslant \eta_0 = \tfrac{1}{2} \alpha pK\lambda [\exp (pK\lambda T) - 1]^{-1}$$

on a alors: $\tau = T$, et par suite, puisque $t_x(y)$ est inférieur à T, l'inégalité:

$$\|x(t_y(x), \mathcal{U}_x(y), f) - x(t_x(y), \mathcal{U}_x(y), f + g)\| \leqslant \frac{\eta}{pK\lambda} [\exp (pK\lambda T) - 1]$$

est valide pour toute commande $\mathcal{U}_x(y)$.

Nous allons appliquer le lemme I-1. Posons:

$U =$ ensemble des Ω_λ-commandes définies sur $[0, t]$; $t \leqslant T$

$$\begin{aligned}
\mathscr{R}:\ & U \mapsto \mathbb{R}^n \\
& \mathscr{U} \mapsto \mathscr{R}(\mathscr{U}) = x(t, \mathscr{U}, f)\,, \\
\varphi:\ & U \mapsto U \\
& \mathscr{U} \mapsto \mathscr{U}\,, \\
\tilde{\mathscr{R}}:\ & U \mapsto \mathbb{R}^n \\
& \mathscr{U} \mapsto \tilde{\mathscr{R}}(\mathscr{U}) = x(t, \mathscr{U}, f+g)\,.
\end{aligned}$$

La première condition requise, à savoir que l'application:

$$x \mapsto \tilde{\mathscr{R}} \circ \varphi \circ \mathscr{U}_x(y)\,,$$

soit continue pour chaque x est clairement satisfaite; il reste à majorer:

$$\|\tilde{\mathscr{R}} \circ \varphi \circ \mathscr{U}_x(y) - y\|\,,$$

qui, par construction, est égale à:

$$\|x(t_x(y), \mathscr{U}_x(y), f+g) - x(t_x(y), \mathscr{U}_x(y), f)\|\,.$$

Donc:

$$\|\tilde{\mathscr{R}} \circ \varphi \circ \mathscr{U}_x(y) - y\| \leqslant \frac{\lambda}{pK\lambda}[\exp(pK\lambda T) - 1]\,,$$

la proposition découle donc de I-1, si:

$$\eta \leqslant \min\{\eta_0, \varepsilon(C)pK\lambda[\exp(pK\lambda T) - 1]^{-1}\}\,.$$

Remarquons que la proposition précédente est encore valable si le système semi linéaire est défini non plus sur R^n mais sur une variété; tous les arguments utilisés ont toujours été de nature locale lorsqu'ils étaient « différentiels » ou alors purement topologiques. Ceci nous permet d'énoncer un corollaire:

III-7. COROLLAIRE. – L'ensemble des systèmes semi linéaires complètement contrôlables (i.e. dont les états accessibles par des Ω_λ B.B.-commandes remplissent tout l'espace) sur une variété compacte M est un ouvert pour la C_0 topologie.

Cet ouvert n'est pas vide, car, d'une part, presque tous les systèmes symétriques (i.e. quel que soit i il existe j tel que: $f^j = -f^i$) sont complètement contrôlables, et d'autre part, sur les variétés riemanniennes compactes, les systèmes « conservatifs » (i.e. tels que chaque f^i soit conservatif) sont presque tous complètement contrôlables (voir [6], [7], [9]).

Nous allons maintenant supposer que la fonction g qui était le terme de perturbation, donc réputée petite, est maintenant donnée et non petite; nous pouvons cependant la faire apparaitre comme petite si dans le système non homogène:

$$\frac{dx}{dt} = g(x, u) + \sum_{i=1}^{p} u_i f^i(x)$$

la partie homogène:

$$\sum_{i=1}^{p} u_i f^i(x) ,$$

peut être considérée comme grande; ceci sera le cas si nous n'imposons pas de borne a priori sur les commandes. C'est cette simple idée qui guide le calcul qui va suivre.

III-8. PROPOSITION. – Soit:

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i=1}^{p} u_i f^i(x) = f(x, u)$$

un système semi linéaire homogène en position générale, et:

$$g: R^n \times R^p \to R^n ,$$

$$(x, u) \mapsto g(x, u) ,$$

une application continue, localement lipschitzienne par rapport à x et bornée. Soit C un compact contenu dans l'ensemble $A(\Omega_1, f)$ des états accessibles pour le système homogène par des Ω_1-commandes. Il existe alors un réel λ_0 tel que pour tout $\lambda \geqslant \lambda_0$ le compact C soit contenu dans l'ensemble des états accessibles du système non homogène:

$$\frac{dx}{dt} = g(x, u) + \sum_{i=1}^{p} u_i f^i(x) = f(x, u) + g(x, u) , \qquad \text{pour des } \Omega_\lambda\text{-commandes} .$$

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION III-8. – Comme dans la démonstration de III-6, nous choisissons des inverses locaux:

$$\mathscr{U}_x(y): [0, t_x(y)] \to \Omega_1 \text{ B.B.}$$

De même, nous supposons qu'ils sont définis sur des boules compactes de centre x et de rayon ϱ. Comme précédemment, soient $x_1, x_2, \ldots, x_q$ les centres d'un recouvrement fini de C par des boules de rayon moitié et soit, enfin, $\varepsilon(C)$ le plus petit de ces demi-rayons.

Maintenant, nous allons remplacer les Ω_1-commandes Bang Bang $\mathscr{U}_x(y)$ par des Ω_λ-commandes Bang Bang en posant:

$$\mathscr{U}_{\lambda x}(y)(t) = \lambda \mathscr{U}_x(y)\left(\frac{t}{\lambda}\right), \qquad 0 \leqslant t \leqslant \frac{t_x(y)}{\lambda}.$$

Puisque le système défini par f est homogène, on a:

$$x\left(\frac{t_x(y)}{\lambda}\right), (\mathscr{U}_{\lambda x}(y), f) = x(t_\lambda(y), \mathscr{U}_x(y), f).$$

Comme dans la démonstration de III-6, soit $\mathscr{O}$ un ouvert borné ontenant toutes les trajectoires du système non perturbé correspondant aux commandes $\mathscr{U}_x(y)$, prolongées par 0 sur $]t_x(y), T]$. Soit K une constant de Lipschitz valable pour tous les f^i sur $\mathscr{O}$ et $N = \max_{\substack{x\in\mathbf{R}^p\\ u\in\mathbf{R}^n}} \|g(x, u\|$; avec les notations de II-8, on a:

$$\|x(\tau, \mathscr{U}_{\lambda x}(y), f + g) - x(\tau, \mathscr{U}_{\lambda x}(y), f)\| \leqslant \frac{N}{pK\lambda}\left[\exp\left(pK\lambda\frac{T}{\lambda}\right) - 1\right]$$

car toutes les commandes $\mathscr{U}_{\lambda x}(y)$ sont définies sur $[0, T/\lambda]$; donc:

$$\|x(\tau, \mathscr{U}_{\lambda x}(y), f + g) - x(\tau, \mathscr{U}_{\lambda x}(y), f)\| \leqslant \frac{1}{\lambda} \times \frac{N}{pK}[\exp(pKT) - 1].$$

La quantité $N/pK\,[\exp(pKT) - 1]$ ne dépend que de f, g et du compact C, donc en prenant λ assez grand, la norme:

$$\|x(\tau, \mathscr{U}_{\lambda x}(y), f + g) - x(\tau, \mathscr{U}_{\lambda x}(y), f)\|$$

peut être rendue arbitrairement petite. A partir de là, on procède comme dans la démonstration de III-6.

III-9. – Nous allons conclure en prouvant le résultat de l'introduction. Soient dans R^n deux fonctions: f^1 et f^2. On sait qu'il existe (voir [6], [7]) des fonctions f^1_ε et f^2_ε arbitrairement proches de f^1 et f^2 telles que le système:

$$\frac{dx}{dt} = u_1 f^1_\varepsilon(x) + u_2 f^2_\varepsilon(x) + u_3(-f^1_\varepsilon(x)) + u_4(-f^2_\varepsilon(x)),$$

soit complètement contrôlable par des Ω_1 B.B.-commandes. Soit maintenant une fonction: $x \to g(x)$ définissant la dynamique d'un système en l'absence de tout contrôle. La proposition III-8 signifie que pour tout compact C il esiste λ_0 tel que pour tout $\lambda \geqslant \lambda_0$ le système guidable obtenu en rajoutant à l'équation du « mouvement libre »:

$$\frac{dx}{dt} = g(x)$$

la partie homogène définie plus haut; soit:

$$\frac{dx}{dt} = g(x) + u_1 f^1(x) + u_2 f^2(x) + u_3(-f^1(x)) + u_4(-f^2(x))$$

contient C dans l'ensemble de ses états accessibles.

Remerciements. – Ce travail a été élaboré alors que les deux auteurs se trouvaient à Florence à »l'Istituto Ulisse Dini ». Ils remercient le Professeur CONTI de son aimable invitation qui leur a permis de travailler dans d'aussi agréables conditions.

REFERENCES

[1] G. ARONSON, *Global controllability and Bang Bang steering for certain nonlinear systems*, J. SIAM on Control, **11**, No. 4 (1973).

[2] A. F. FILIPPOV, *Classical solutions of differential equations with multivalued right-hand side*, SIAM Journal on Control, **15**, no. 4 (1967).

[3] H. HERMES, *Controllability and the singular problem*, J. SIAM on Control, **2**, no. 2 (1965), pp. 241-260.

[4] A. KRENER, *A generalization of Chow's theorem, and the Bang Bang theorem to nonlinear systems*, J. SIAM on control, **12**, No. 1 (1974).

[5] E. B. LEE - L. MARKUS, *Foundations of optimal control theory*, John Wiley and Sons, Inc., 1967.

[6] C. LOBRY, *Controlabilité des systèmes non linéaires*, SIAM Journal on Control, **8**, no. 4 (1970).

[7] C. LOBRY, *Une propriété générique des couples de champs de vecteurs*, Czechoslovak Mathematical Journal, **22** (97) (1972).

[8] C. LOBRY, *Sur les états atteignables par les solutions d'une équation différentielle multivoque*, Publ. Math. Bordeaux, Année 1, fasc. 5 (1973).

[9] C. LOBRY, *Controllability of nonlinear systems on compact manifold*, to appear in SIAM Journal on Control.

[10] D. L. LUKES, *Global controllability of nonlinear systems*, SIAM Journal on Control, **10**, no. 1 (1972).

[11] PONTRYAGIN and others, *Mathematical theory of optimal processes*, Interscience Publishers (1962).