O MINIMÁCH A MAXIMÁCH A O ICH HĽADANÍ

PAVOL BRUNOVSKÝ, Bratislava

I. O minimách a maximách

Človek sa často dostáva do situácie, v ktorej sa musí rozhodovať. Predmetom takéhoto rozhodovania často býva voľba nejakého naj. Môže tu ísť o drobné problémy (odtrhnúť si najčervenšie jablčko), závažnejšie (nájsť najkratšie spojenie s Kecerovských Peklian do Caracasu), až po veľmi vážne (výber najvhodnejšieho partnera pre život). Učene tomu hovoríme, že človek optimalizuje. Často sa mu pritrafí, že musí optimalizovať aj pri svojej práci. A tu musí riešiť úlohy niekedy jednoduché (z 57 časov dosiahnutých na Veľkej cene Slovenska vybrať najkratší), zložitejšie (vystrihnúť sako z najmenšieho kusa látky) a ťažké (určiť program letu rakety tak, aby vyniesla družicu na obežnú dráhu pri minimálnej spotrebe paliva).

Treba povedať, že človek je v tejto disciplíne majster. Myslím, že vo väčšine činností, ktoré človek dlhší čas robí, jeho postup je veľmi blízky optimálnemu. Ako príklad možno uviesť úlohu dopraviť električku z miesta A do miesta B po rovnej trati za daný čas pri minimálnej spotrebe energie. Dnešný matematický aparát umožnuje spočítať, že optimálny režim pripúšťa iba 4 fázy: maximálny ťah, udržovanie konštantnej rýchlosti, výbeh a maximálne brzdenie. A všimli ste si, ako postupuje vodič električky? Tak isto si myslím, že keby sa spočítalo, ako optimálne strihať látku na sako, sotva by sa výsledok veľmi líšil od toho, ako to krajčíri robia desaťročia. (Mimochodom, matematický popis tejto úlohy by bol ďaleko od jednoduchého!) Na tom nič nemení ani štatistika rozvodových súdov, ktorá hovorí, že, žiaľ, práve v jednom z najzávažnejších rozhodnutí, ktoré človek vo svojom živote musí urobiť, nie veľmi uspieva...

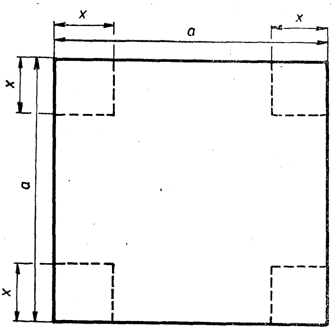
Napriek svojmu majstrovstvu sa človek často potrebuje obrátiť o pomoc na matematiku, napríklad preto, že nemá možnosť rozhodnutie opakovať dostatočne veľa ráz, aby sa k optimálnemu priblížil (raketa). Niekedy sa problém dá formulovať matematicky pomerne ľahko (raketa), inokedy ťažšie (strihanie látky) a niekedy to asi prakticky nejde (výber partnera pre život — našťastie, predstavte si tú bitku o toho najvhodnejšieho!).

Ak si zalistujeme trocha v spomienkach, možno si spomenieme, že jeden z prvých príkladov toho, že diferenciálny počet „na niečo je" sa týkal práve problému hľadania minima, resp. maxima reálnej funkcie reálnej premennej. Konkrétne, používali sme

Tvrdenie 1. Nech $f\colon (-\infty, \infty) \to (-\infty, \infty)$ je diferencovateľná. Aby funkcia f nadobúdala v bode $\hat{x}$ (lokálny) extrém (t. j. minimum alebo maximum), musí platiť $f'(\hat{x}) = 0$.

Školským príkladom pre použitie tejto vety je úloha odstrihnúť zo štvorca so stranou a rohy tak, aby sa zo zvyšku zložila škatuľa s maximálnym objemom (*obr. 1*). Ak si označíme x dĺžku strany odstrihnutého štvorca a $f(x)$ objem vzniknutej škatule, dostávame

$$f(x) = (a - 2x)^2 x = 4x^3 - 4ax^2 + a^2 x.$$



Obr. **1**

Aby f nadobúdala v bode $\hat{x}$ maximum, musí platiť $f'(\hat{x}) = 0$, z čoho dostávame pre určenie $\hat{x}$ rovnicu

$$12\hat{x}^2 - 8a\hat{x} + a^2 = 0$$

a jej riešením dostávame dvoch „kandidátov" na lokálne extrémy

$$\hat{x}_1 = 1/6a, \qquad \hat{x}_2 = 1/2a.$$

Ľahko sa presvedčíme — napríklad tým, že spočítame $f(0)$ (prečo?) — že riešením úlohy je $\hat{x}_1$.

Takýchto pár príkladov sme si v knižke prečítali, prípadne na cvičení prerátali a ostal v nás dobrý pocit, že sme sa presvedčili o užitočnosti diferenciálneho počtu a že v prípade potreby hravo nájdeme extrém funkcie — aspoň jednej premennej. Ani sme si pritom nestačili uvedomiť, že tento a ďalšie príklady boli tak starostlivo vybraté, že sme mali z pekla šťastie v tom, že:

1. extrém sa nachádzal vnútri uvažovanej oblasti (v našom prípade $0 \leqq x \leqq a/2$),

2. lokálny extrém bol súčasne globálnym extrémom

a najmä, že

3. sme poznali analytický výraz pre f a rovnica $f'(\hat{x}) = 0$ sa dala explicitne riešiť.

Nebolo by treba dlho hľadať príklady, ktoré niektorú z týchto vlastností nemajú (napríklad triviálna úloha odrezať z danej palice palicu maximálnej dĺžky, pokiaľ pripustíme ,,prázdne" rezanie, nemá prvú vlastnosť). Pre úlohy, o ktorých nevieme vopred, že majú prvé dve vlastnosti, môžeme však ľahko na základe našich znalostí sformulovať

Tvrdenie 2. Nech f je diferencovateľná na intervale $[a, b]$ (rozumieme tým, že f má v bodoch a, b deriváciu sprava, resp. zľava a v každom vnútornom bode intervalu obojstrannú deriváciu) a f dosahuje v bode $\hat{x}$ lokálne minimum, potom buď $\hat{x} = a$ a $f'(a) \geqq 0$, alebo $\hat{x} = b$ a $f'(b) \leqq 0$, alebo $\hat{x} \in (a, b)$ a $f'(\hat{x}) = 0$[1].

Tvrdenie 2 problém hľadania globálneho (t. j. nie iba lokálneho) minima, samozrejme, úplne nerieši, nemožno ho však považovať za zbytočné. Jeho zmysel spočíva okrem iného v tom, že silne obmedzuje množinu bodov, v ktorých f môže nadobúdať minimum. Dá sa dokonca celkom exaktne dokázať, že v istom zmysle pre ,,skoro všetky" funkcie je počet takýchto bodov konečný[2].

Uvažovaním ohraničení stratila jednoduchá formulácia nutnej podmienky minima tvrdenia 1 na kráse. Matematik má oveľa radšej, ak môže alternatívnu formuláciu so slovami buď, alebo nahradiť jednotnou. Treba tu mať pritom na mysli, že formulácia analógie tvrdenia 1, resp. tvrdenia 2 pre funkcie viac premenných sa uvažovaním ohraničení stane ešte oveľa komplikovanejšou, pretože tu už zďaleka nevystačíme s intervalmi ako množinami, na ktorých sa minimalizuje.

Na pomoc si tu treba vziať jednoduchú myšlienku z praxe: Ak chceme, aby niekto nevkročil do zakázaného priestoru (v našom prípade mimo intervalu $[a, b]$), tak buď priestor oplotíme, alebo budeme za porušenie zákazu vyberať pokutu. Keďže nám veľmi záleží na tom, aby nikto zákaz neporušil, budeme vyberať pokutu poriadne vysokú; ako matematici máme v tomto smere výhodu v tom, že si môžeme dovoliť vyberať pokutu nekonečnú.

---

[1]) Obdobnú vetu možno, samozrejme, sformulovať pre maximum. Pretože však $\max f = -\min(-f)$, budeme v ďalšom hovoriť iba o minimách.

[2]) Presnejšie, dá sa dokázať, že pri vhodnej, prirodzeným spôsobom zvolenej topológii v priestore diferencovateľných funkcií na konečnom uzavretom intervale je množina funkcií, ktoré uvedenú vlastnosť nemajú, I. Baireovej kategórie.

Ináč povedané, interpretujeme f ako „cenu" a namiesto toho, aby sme skúmali funkciu f na intervale $[a, b]$, budeme skúmať funkciu $\tilde{f}: (-\infty, \infty) \to (-\infty, \infty]$, definovanú takto:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pre } x \in [a, b] \\ \infty & \text{pre } x \notin [a, b] \end{cases}$$

Pretože sme rozšírili priestor obrazov na $(-\infty, \infty]$ musíme povedať, ako v tomto priestore budeme počítať. Pre naše účely nám stačí definovať

$$x + \infty = \infty + x = \infty, \qquad x \leqq \infty$$

pre každé $x \in (-\infty, \infty]$.

Je teraz zrejmé, že ak f je funkcia s reálnymi hodnotami na $[a, b]$, $\tilde{f}(\hat{x}) = \min_{x \in (-\infty, \infty)} \tilde{f}(x)$ vtedy a len vtedy, ak

$\hat{x} \in [a, b]$ a $f(\hat{x}) = \min_{x \in [a, b]} f(x)$ (prečo?).

S deriváciami, resp. diferenciálmi na takúto funkciu zrejme nemôžme (aj v prípade, že f je diferencovateľná na $[a, b]$, bude mať $\tilde{f}$ nespojitosti v bodoch a, b). Pomôže nám však pojem subdiferenciálu, ktorý sa definuje podobne ako diferenciál, s tým rozdielom, že rovnosť v definícii sa nahradí nerovnosťou.

Nech f: $(-\infty, \infty) \to (-\infty, \infty]$, $x \in (-\infty, \infty)$ a $f(x) < \infty$). Lineárnu funkciu $\mathrm{d}y = a\,\mathrm{d}x$ (reprezentovanú číslom a) budeme nazývať subdiferenciálom funkcie f v bode x, ak pre každú postupnosť $h_n \to 0$ existuje postupnosť $\{\omega_n\}$ taká, že $f(x + h_n) - f(x) \geqq ah_n + \omega_n$ pre každé n a $\lim_{n \to \infty} h_n^{-1}\omega_n = 0$.

Ekvivalentne môžeme subdiferenciál f v x definovať ako číslo a také, že platí

$$\liminf_{h \to 0} |h|^{-1}[f(x + h) - f(x) - ah] \geqq 0.$$

(dokážte!). Jedno-jednoznačné priradenie čísel a lineárnych funkcií nám umožňuje považovať subdiferenciál buď za číslo, alebo za lineárnu funkciu, podľa toho, ako nám to vyhovuje (pozri [1]).

Pre geometrickú predstavu nám poslúži ďalšia ekvivalentná definícia: a je subdiferenciál f v $\hat{x}$ vtedy a len vtedy, ak funkcia $F(x) = \min\{f(x), \hat{x} + a(x - \hat{x})\}$ je diferencovateľná v $\hat{x}$ a platí $F'(\hat{x}) = a$. (Nakreslite si graf funkcie F, ak $f(x) = x - x^2 \sin x$ a $\hat{x} = 0$!).

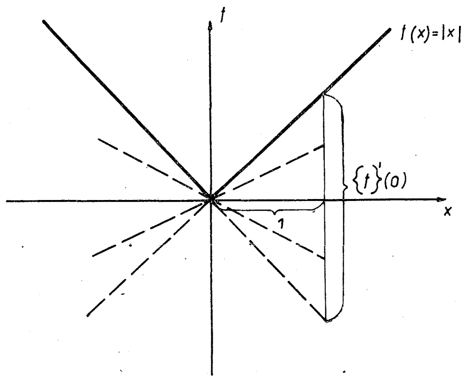
Je zrejmé, že subdiferenciál funkcie v niektorom bode nemusí existovať a tak isto, že takýchto subdiferenciálov môže byť viac. Označíme $\{f'\}(x)$ množinu subdiferenciálov f v x. Pre dobré pochopenie definície sa oplatí rozmyslieť si, že

— pre $f(x) = |x|$ je $\{f'\}(x) = \{f'(x)\} = \operatorname{sign} x$ pre $x \neq 0$ a $\{f'\}(0) = [-1, +1]$ (*obr. 2*),

— pre $f(x) = -|x|$ je $\{f'\}(x) = -\operatorname{sign} x$ pre $x \neq 0$, ale $\{f'\}(0) = \emptyset$,

— $\{f'\}(x_0) = \{g'\}(x_0)$, ak $g(x) = f(x) + \alpha(x - x_0)^2$, alebo, všeobecnejšie, ak $\limsup\limits_{h \to 0} |h|^{-1} |g(x_0 + h) - f(x_0 + h)| = 0$,

— ak $f(x) = \alpha$ pre $x \leqq 0$, $f(x) = \beta$ pre $x > 0$, kde $\alpha < \beta \leqq \infty$, potom $\{f'\}(0) = [0, \infty)$
a dokázať si to pomocou niektorej z ekvivalentných definícií.



Obr. 2

Podaktoré z vlastností, ktoré si pozorný čitateľ všimol na príkladoch, platia všeobecne a sú zhrnuté v tvrdení 3.

Tvrdenie 3. Nech $f\colon (-\infty, \infty) \to (-\infty, \infty]$. Potom

1. $\{f'\}(x)$ je uzavretý (prípadne prázdny) interval.

2. Ak f má deriváciu sprava a zľava v x (označíme ich $f'^{+}(x)$, resp. $f'^{-}(x)$), potom $\{f'\}(x) = [f'^{-}(x), f'^{+}(x)]$ (rozumieme $[a, b] = \emptyset$, ak $b < a$).

3. Ak $f(x) = \infty$ pre $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ a $f'^{-}(x)$ existuje, potom $\{f'\}(x_0) = [f'^{-}(x_0), \infty)$.

Ako dôsledok 2. bodu tvrdenia 3 dostávame, že $\{f'\}(x) = \{f'(x)\}$, ak f je diferencovateľná v bode x.

Aby sme dokázali 1. bod tvrdenia 3, treba nám ukázať, že $\{f'\}(x)$ je interval, t. j. že ak $\alpha, \beta \in \{f'\}(x)$ a $\gamma \in [\alpha, \beta]$, potom $\gamma \in \{f'\}(x)$ a že $\{f'\}(x)$ je zhora uzavretá množina, t. j. že ak $\alpha_n \to \alpha$, $\alpha_n \leqq \alpha$, $\alpha_n \in \{f'\}(x)$, potom aj $\alpha \in \{f'\}(x)$ (uzavretosť zdola sa totiž dokazuje úplne obdobne).

Nech teda α, $\beta \leqq \{f'\}(x)$. Nech $h_n \to 0$. Potom existujú postupnosti $\{\omega_n^i\}_{n=1}^{\infty}$ také, že $\lim h_n^{-1}\omega_n^i = 0$ a

$$f(x + h_n) - f(x) \geqq ih_n + \omega_n^i, \quad i = \alpha, \beta.$$

Položme $\omega_n = \omega_n^\beta$, ak $h_n \geqq 0$, $\omega_n = \omega_n^\alpha$, ak $h_n < 0$. Potom zrejme platí $h_n^{-1}\omega_n \to 0$ a ak $\alpha \leqq \gamma \leqq \beta$, potom

$$f(x + h_n) - f(x) \geq \beta h_n + \omega_n \geq \gamma h_n + \omega_n, \quad \text{ak} \quad h_n \geqq 0,$$

$$f(x + h_n) - f(x) \geq \alpha h_n + \omega_n \geq \gamma h_n + \omega_n, \quad \text{ak} \quad h_n < 0,$$

z čoho vyplýva $\gamma \in \{f'\}(x)$.

Pre dôkaz uzavretosti zhora použijeme druhú definíciu subdiferenciálu. Nech $\alpha_n \to \alpha$, $\alpha_n \leqq \alpha$, $\alpha_n \in \{f'\}(x)$ a predpokladajme $\alpha \notin \{f'\}(x)$. Potom platí

$$\eta = \liminf_{h \to 0} |h|^{-1}[f(x + h) - f(x) - \alpha h] < 0.$$

Z toho vyplýva, že existuje ľubovoľne malé $|h|$ také, že

(1) $$|h|^{-1}[f(x + h) - f(x) - \alpha h] < 1/2\eta.$$

Pre dosť veľké n je $0 \leqq \alpha - \alpha_n \leqq 1/4\eta$, takže pre každé takéto $h > 0$ dostávame z (1) pre n dosť veľké

$$|h|^{-1}[f(x + h) - f(x) - \alpha h] < 1/4\eta + 1/4\eta \leqq 1/4\eta - h \,.\, h^{-1}(\alpha - \alpha_n)$$

$$|h|^{-1}[f(x + h) - f(x) - \alpha_n h] < 1/4\eta$$

(pre $h < 0$ vyplýva posledná nerovnosť z (1) triviálne).

Z toho dostávame pre dosť veľké n

$$\liminf_{h \to 0} |h|^{-1}[f(x + h) - f(x) - \alpha_n h] < 0$$

a to je v spore s predpokladom.

Vzhľadom na to, že už vieme, že $\{f'\}(x)$ je interval, na to, aby sme dokázali, že platí tvrdenie 3.2, stačí nám dokázať, že ak $f'^-(x) \leqq f'^+(x)$, potom $f'^+(x) \in \{f'\}(x)$ a že ak $\alpha > f'^+(x)$, potom $\alpha \notin \{f'\}(x)$ (dôkazy pre f'^- sú opäť obdobné). Z definície derivácie sprava, resp. zľava vyplýva

(2) $$\lim_{h \to 0+} h^{-1}[f(x + h) - f(x) - f'^+(x)h] = 0,$$

(3) $$\lim_{h \to 0-} |h|^{-1}[f(x + h) - f'^-(x) - f'^-(x)h] = 0.$$

Ak si uvedomíme, že pre $h < 0$ je $-f'^-(x)h < -f'^+(x)h$, dostaneme z (3)

$$\liminf_{h \to 0-} |h|^{-1}[f(x+h) - f(x) - f'^+(x)h] \geqq \lim_{h \to 0-} |h|^{-1}[f(x+h) - f(x) - f'^-(x)h] = 0\,.$$

Z toho a z (2) dostávame

$$\liminf_{h \to 0} |h|^{-1}[f(x+h) - f(x) - f'^+(x)h] \geqq 0\,,$$

a teda $f'^+(x) \in \{f'\}(x)$.

Ak $\alpha > f'^+(x)$, potom pre $h > 0$ dosť malé dostaneme z (2)

$$h^{-1}[f(x+h) - f(x) - f'^+(x)h] < 1/2(\alpha - f'^+(x)) = hh^{-1}(\alpha - f'^+(x)) - 1/2(\alpha - f'^+(x))\,,$$

$$h^{-1}[f(x+h) - f(x) - \alpha h] < -1/2(\alpha - f'^+(x))\,,$$

z čoho vyplýva

$$\liminf_{h \to 0} |h|^{-1}[f(x+h) - f(x) - \alpha h] < 0\,.$$

Keďže k dôkazu 3. bodu tvrdenia 3 netreba nijakú zvlášť novú myšlienku a dá sa vykonať tou istou technikou ako dôkazy prvých dvoch častí vety, prenecháva sa čitateľovi ako cvičenie.

Čo nám dáva pojem subdiferenciálu pre formuláciu nutnej podmienky minima, vidno z tvrdenia 4.

Tvrdenie 4. Ak f: $(-\infty, \infty) \to (-\infty, \infty]$ a $\hat{x}$ je lokálne minimum f, potom $0 \in \{f'\}(x)$.

Dôkaz je veľmi jednoduchý: ak $0 \in \{f'\}(\hat{x})$, potom

$$\liminf_{h \to 0} |h|^{-1}[f(\hat{x} + h) - f(\hat{x})] < 0\,,$$

čo je možné iba tak, že v každom okolí bodu 0 existuje h také, že $|h|^{-1}[f(\hat{x}+h) - f(\hat{x})] < 0$, t. j. $f(\hat{x}+h) < f(\hat{x})$, a teda $\hat{x}$ nie je lokálne minimum f.

Je zrejmé, že tvrdenie 4 obsahuje tvrdenie 2 v tom zmysle, že tvrdenie 2 je dôsledkom tvrdenia 4 v prípade, že funkcia f z tvrdenia 4 vznikne vlnovkovou operáciou z funkcie diferencovateľnej na danom intervale. Vyplýva to ihneď použitím 2. a 3. bodu tvrdenia 3 a dôkazy opäť prenechávame ako cvičenia čitateľovi.

Na záver tejto časti urobme si bilanciu toho, čo sme zavedením pojmu subdiferenciál získali. Z hľadiska „čisto" matematického sme získali nesporne dosť: podarilo sa nám sformulovať nutnú podmienku minima, ktorá okrem toho, že je elegantnejšia než tvrdenie 2, je platná pre funkcie, na ktoré nie sú kladené nijaké podmienky regularity (to je v matematickej analýze prípad veľmi neobvyklý). Prakticista by zasa povedal, že sme sa dostali z dažďa pod odkvap, že nám totiž pojem subdiferenciálu pre samotné hľadanie minima nič nedáva: jednoducho možno subdiferenciál zistiť iba pre diferencovateľné funkcie a pre tie je tvrdenie 4 ekvivalentné tvrdeniu 2.

Nepochybne kus pravdy v tom je. Možno však úplne považovať eleganciu, všeobecnosť a jednoduchosť matematických tvrdení a teórií za samoúčelnú? Myslím si, že nie. Iste by bolo možné zaobísť sa bez znamienok $+$ a $-$ a opisovať tieto operácie slovne, ale myslím, že dnes sotva niekto pochybuje o tom, aký prevratný význam pre matematiku malo ich zavedenie. Samozrejme, nechcem tým povedať, že zavedenie pojmu subdiferenciál môže znamenať prínos, porovnateľný so zavedením $+$ a $-$; dokonca by som pripustil, že úžitok, ktorý z neho získame, nestojí za námahu — keby sme sa mohli obmedziť na funkcie jednej premennej. Vieme však, že s tým nevystačíme, a že matematika i ostatné vedy kladú pred nás optimalizačné úlohy, ktoré vedú na hľadanie extrémov funkcií viac premenných, dokonca funkcií na všeobecnejších priestoroch (raketa!). Tu už sa úžitok z pojmu subdiferenciál prejavuje oveľa vypuklejšie. Naviac má pojem subdiferenciálu hlboký význam, ktorý zatiaľ nemôžme vysvetliť, dostaneme sa však k nemu v tretej časti článku o kovexifikácii a dualite.

Pre funkcie n premenných $f: E^n \to (-\infty, \infty)$ analógiu tvrdenia 2 predstavujú tzv. Kuhnove — Tuckerove podmienky: Nech f, $g_i : E^n \to (-\infty, \infty)$, $i = 1, \ldots, m$ sú diferencovateľné a nech $\hat{x} \in K$ je taký bod, že $f(\hat{x}) = \min_{x \in K} f(\hat{x})$, $K = \{x \mid g_i(x) \leqq 0, i = 1, \ldots, m\}$. Označme $I(x) = \{i \mid g_i(x) = 0\}$. Predpokladajme, že vektory $\mathrm{d}g_i(\hat{x})$[3], $i \in I(\hat{x})$ sú lineárne nezávislé (túto podmienku možno oslabiť, nie však úplne vypustiť). Potom existujú čísla $\mu_i \geqq 0$, $i \in I(\hat{x})$ (tzv. Kuhnove — Tuckerove multiplikátory) také, že

$$\mathrm{d}f(\hat{x}) = \sum_{i \in I(\hat{x})} \mu_i \, \mathrm{d}g_i(\hat{x}).$$

Ak prijmeme konvenciu $f(x) = \infty$ pre $x \notin K$, je táto pomerne zložito formulovaná veta obsiahnutá vo vete, ktorá znie rovnako ako tvrdenie 4, pričom subdiferenciál sa definuje doslovne rovnako ako pre funkciu jednej premennej.

To je všetko pekné, môžete povedať, uznávame, že subdiferenciál je užitočný, ale ako teda máme to minimum hľadať? O tom nabudúce.

Literatúra

[1] Brunovský P.: Derivácie a linearizácia. Matematické obzory 2/1972. Bratislava, ALFA 1972.

---

[3]) Rozumieme $\mathrm{d}g(x)$ ako vektor so zložkami $(\partial g/\partial x_j)(x)$, $j = 1, \ldots, n$.