

## O MINIMÁCH A MAXIMÁCH A O ICH HĽADANÍ

PAVOL BRUNOVSKÝ, Bratislava

### II. Ako sa množia králiky

Tak teda, ako hľadať minimum? A čo to vôbec znamená?

Hádam netreba nikoho veľmi presvedčovať, že úlohy, v ktorých minimum možno presne vyrátať, budú skôr výnimkou než pravidlom. I keď sa podarí hodnotu, v ktorej sa minimum dosahuje, vyjadriť formulkou, nemusí to ešte znamenať, že skutočne možno minimum presne vypočítať — čo ak formulka napríklad obsahuje odmocniny?

Je teda hádam zrejmé, že nič nestratíme, ak nájdeme spôsob, ako minimum počítať iteratívne, s ľubovoľnou zadanou presnosťou<sup>1</sup>.

Čo však znamená „zadaná presnosť“? Nájsť minimum funkcie  $f$  na intervale  $[a, b]$  (ktorý v tejto časti budeme vždy predpokladať konečný, čo je v praxi vždy splnené) s presnosťou  $\varepsilon$  môžeme chápať vo viacerých zmysloch:

( $x$ ) nájsť interval  $[x_\varepsilon^-, x_\varepsilon^+]$  taký, že  $|x_\varepsilon^+ - x_\varepsilon^-| < \varepsilon$  a  $\hat{x} \in [x_\varepsilon^-, x_\varepsilon^+]$  (kde, podobne ako v časti I, značí  $\hat{x}$  bod, v ktorom  $f$  nadobúda minimum na  $[a, b]$ );

( $xf$ ) nájsť  $x_\varepsilon \in [a, b]$  tak, že  $|x_\varepsilon - \hat{x}| < \varepsilon$  a vypočítať  $f(x_\varepsilon)$ ;

( $f$ ) nájsť  $x_\varepsilon$  tak, že  $f(x_\varepsilon) - f(\hat{x}) < \varepsilon$  a vypočítať  $f(x_\varepsilon)$ .

Všetky z nich — a ešte možno ďalšie — majú zmysel a závisí od konkrétnej situácie, ktorá z nich je adekvátna.

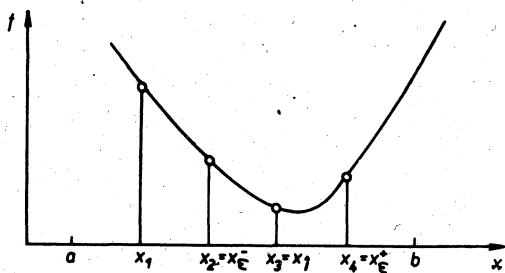
Pre riešenie všetkých týchto úloh máme ihneď naporiadzi jednoduchú „pasívnu“ metódu:

Ak riešime úlohu ( $x$ ), zvolíme  $k$  prirodzene tak, že  $h = k^{-1}(b - a) < \varepsilon/2$ , vypočítame hodnoty  $f_i = f(x_i)$  v bodoch  $x_i = a + ih$ ,  $1 \leq i \leq k - 1$  a položíme

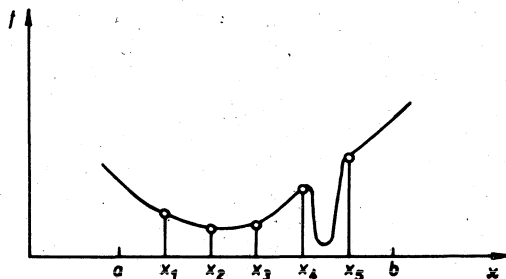
$x_\varepsilon^- = x_{i-1}$ ,  $x_\varepsilon^+ = x_{i+1}$ , kde  $i$  je také, že  $f_i = \min_{1 \leq i \leq k-1} f_i$ ; ak riešime úlohu ( $xf$ ), zvolíme  $k$

tak, že  $k^{-1}(b - a) < \varepsilon$  a položíme  $x_\varepsilon = x_i$ . A konečne, ak riešime úlohu ( $f$ ), volíme postupne  $k = 2^p$ ,  $p = 1, 2, \dots$  nájdeme  $f_i$  pre  $i = i(p)$  a pokračujeme až dovtedy, kým  $f_{i(p)} - f_{i(p+1)} < \varepsilon/2$  (obr. 1).

<sup>1</sup> Nech sa na mňa nehnevajú „computer scientisti“ a štatistici, že tu abstrahujem od skutočnosti, že jednak zaokrúhľovacie chyby počítača a jednak nepresnosť východiskových dát dávajú na túto presnosť medze.



Obr. 1



Obr. 2

Pravda, hlbavejší duch sa nad touto metódou zamyslí a bez väčšej námahy nájde príklad funkcie, pre ktorú metóda zlyhá, ako napr. na obr. 2. Skutočne, nemôžeme dokázať, že nám pasívna metóda vo všeobecnosti dáva riešenia úloh  $(x)$  až  $(f)$ . Napriek tomu však „zdravý rozum“ hovorí, že príroda nie je až taká zlomyseľná, že by pri dostatočne jemnom kroku bolo možné očakávať situáciu ako na obr. 2 príliš často. V numerike sa napriek vyspelosti matematiky treba na zdravý rozum spoliehať dosť často — a napodiv úspešne ... A vôbec, komu sa nepáči, nech nájde lepšiu metódu, ktorá by bola tak všeobecná ako táto jednoduchá. Zaručujem mu, že ak bude úspešný, sláva ho neminie, lebo takej dosiaľ niet.

Nestálo by za to písať článok, ktorý by skončil takýmto tristným konštatovaním. Neboli by sme matematici, keby sme sa nesnažili dať zdravému rozumu nejakú exaktnú oporu, napríklad tým, že by sme dokázali oprávnenosť takejto jednoduchšej metódy pre funkcie, splňujúce nejaké dodatočné predpoklady, ktoré, aj keď ich v praxi nie vždy môžeme overiť, možno z rôznych príčin očakávať za splnené. Takými môžu byť napríklad ohraňovania na deriváciu  $f$  a pod. O to nám tu však nejde a ponechávame čitateľovi ako užitočné cvičenie zamyslieť sa nad tým. My sa

skôr zamyslíme nad tým, či nie je možné z výpočtov, ktoré musíme pri tejto jednoduchej metóde urobiť, voľačo ušetriť.

Ako sme už spomínali, vo všeobecnosti to nejde. Často sa však stáva, že funkciu  $f$ , ktorej minimum na  $[a, b]$  hľadáme, môžeme na  $[a, b]$  považovať za unimodálnu, pod čím myslíme, že  $f$  nadobúda na  $[a, b]$  svoje minimum v jedinom bode, naľavo od tohto bodu je klesajúca a napravo od neho rastúca. Tak napr. funkcia z obr. 1 je unimodálna, funkcia z obr. 2 nie.

Hoci trieda unimodálnych funkcií je dosť úzka, možno často unimodalitu predpokladať z fyzikálnych dôvodov, alebo je možné jednoduchou metódou s hrubším krokom z pôvodne uvažovaného intervalu vymedziť interval, v ktorom je funkcia unimodálna.

Predpoklad unimodality umožňuje podstatne obmedziť počet bodov, v ktorých treba  $f$  počítať. Je totiž zrejmé, že ak  $x_1 < x_2$  a  $f(x_1) < f(x_2)$ , potom  $f$  nemôže nadobúdať minimum napravo od  $x_2$  (prečo?) a je teda zbytočné napríklad pokračovať v pasívnej metóde a počítať hodnoty v bodoch napravo od  $x_2$ . Táto úvaha naznačuje, že ak si nezvolíme vopred pevné body, v ktorých budeme  $f$  počítať, ale budeme každý ďalší bod voliť už s využitím informácie, získanej z predchádzajúcich výpočtov, môžeme voľačo získať.

A tu sa ukazuje matematický problém: K danému počtu  $n$  výpočtov funkcie  $f$  a danému intervalu  $[a, b]$  nájsť optimálnu metódu postupnej voľby bodov  $\xi_k$ ,  $1 \leq k \leq n$  s využitím informácie o  $\xi_i$  a  $f(\xi_i)$   $1 \leq i \leq k-1$ . Ako vidno, optimalizovať možno nielen program letu rakety alebo strihanie škatule, ale aj samotný optimalizačný algoritmus.

Mohlo by sa zdať, že v dobe superrýchlych samočinných počítačov je smiešne baviť sa o tom, či vykonať 10 alebo 100 000 výpočtov funkcie  $f$ , veď čože je to pre taký počítač? Napriek tomu, dôvody tu sú. Tu, hľa, hneď tri:

1. čas potrebný na výpočet  $f$  môže byť skutočne dlhý,
2. nie vždy ide o počítanie — hodnoty  $f$  môžu byť výsledkom drahých meraní,
3. metódy hľadania extrémov funkcií viac premenných často obsahujú ako svoju časť hľadanie extrému funkcie jednej premennej, ktoré v procese výpočtu treba veľa rás opakovať.

Na podopretie prvých dvoch dôvodov uvedieme dva príklady z „tvrdej“ praxe. Za prvý vďačím svojej manželke, za druhý Ing. Brokešovi z Výskumného ústavu liehovarov a konzervární.

Niektoré pevné látky majú vlastnosť, že adsorbujú (pohlcujú) niektoré plyny. To sa využíva napríklad pri filtrácii exhalátov. Adsorpcia plynu v guľovej častici sa riadi tzv. II. Fickovým zákonom

$$\frac{\partial c}{\partial t} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( a \frac{\partial c}{\partial r} \right) = 0$$

$$\frac{\partial c}{\partial r}(t, 0) = 0; \quad c(t, r_0) = c_0; \quad c(0, r) = 0$$

keď  $c(t, r)$  značí koncentráciu adsorbátu (plynu) v mieste s polomerom  $r$  a v čase  $t$  a  $c_0$  je koncentrácia na povrchu gule; podmienka  $c(0, r) = 0$  značí, že na počiatku procesu je všade

v guli koncentrácií plynu nulová. Tzv. difúziu konštantu  $a$  však treba určiť experimentálne. Za tým účelom sa naplní kolóna guľovými časticami, do kolóny sa vháňa plyn, ktorý obsahuje ako svoju zložku adsorbát v koncentrácií  $c_0$  a presným prístrojom — gravimatom — sa meria celkové naadsorbované množstvo do času  $t$ ,  $M(t)$ , ktoré sa rovná množstvu naadsorbovanému v jednej častici  $m(t)$  násobenému počtom častíc v kolóne  $q$ , t. j.

$M(t) = qm(t) = q \int_0^r 4\pi cr^2 dr$ . Konštantu  $a$  sa teraz hľadá tak, aby sa vypočítané naadsorbované množstvo  $M_n(t)$  čo najlepšie zhodovalo s nameraným, pričom za kritérium zhody sa volí

$$f(a) = \int_0^T [M(t) - M_n(t)]^2 dt = \int_0^T [M(t) - 4q\pi \int_0^r cr^2 dr]^2 dt$$

Úloha teda vedie na hľadanie minima funkcie  $f$  na intervale  $[0, \infty)$ . K výpočtu každej hodnoty  $f$  však treba numericky vyriešiť parciálnu diferenciálnu rovnicu, čo nie je ani pre počítač celkom špás<sup>2</sup>.

V druhom príklade ide o odlievanie membrán pre reverznú osmózu, jedným z ukazovateľov kvality ktorej je permeabilita (priepustnosť). Tá závisí od rýchlosti odlievania, avšak nik dnes nevie pre túto závislosť udať kvantitatívny vzťah. Čiže ostáva jediná možnosť, ak chceme permeabilitu maximalizovať: voliť rozličné odlievacie časy a merať výslednú permeabilitu.

Aby sme mohli úlohu optimalizácie optimalizačnej metódy presne formulovať, musíme sa rozhodnúť pre niektorú z úloh  $(x)$ ,  $(xf)$  a  $(f)$ . Zvolíme si úlohu  $(xf)$ , pretože pre ňu je riešenie najkrajšie. Skúste si rozmyslieť, ako je to s úlohami  $(x)$ ,  $(f)$ . Výsledky vašich úvah si môžete skonfrontovať s [2].

Označme  $\mathcal{F}(a, b)$  množinu unimodálnych funkcií na intervale  $[a, b]$ . Metódou  $n$ -krokovej postupnej minimalizácie  $\Phi_n$  je daná postupnosťou funkcií  $\xi_k^n = \xi_k^n(a, b, \xi_1, \dots, \xi_{k-1}, \eta_1, \dots, \eta_{k-1})$  s hodnotami v  $[a, b]$ , pomocou ktorých sa hodnoty  $\xi_k^n$  určujú rekurentným predpisom

$$\xi_k^n = \xi_k^n(a, b, \xi_1^n, \dots, \xi_{k-1}^n, f(\xi_1^n), \dots, f(\xi_{k-1}^n)),$$

$$k = 1, \dots, n.$$

Úlohou je nájsť takú metódu  $\Phi_n$  (optimálnu), aby pre každý interval  $[a, b]$  a každú inú metódu  $\Phi_n$  platilo

$$\max_{f \in \mathcal{F}(a, b)} \min_{1 \leq i \leq n} |\xi_i^n - \hat{x}| \leq \max_{f \in \mathcal{F}(a, b)} \min_{1 \leq i \leq n} |\xi_i^n - \hat{x}|$$

kde  $\xi_i^n$ ,  $\hat{x}$  sú po rade určené metódami  $\Phi_n$ ,  $\Phi_n$  (aj v ďalšom budeme bez ďalšieho dohovoru označovať body, vypočítané niektorou metódou rovnakými znakmi, ako samotnú metódu — napr.  $\Phi_n^*$ ,  $a_k^*$ ).

Pre  $n = 1$  je zrejme, že optimálna metóda  $\Phi_1$  musí bodom  $a, b$  priradovať stred intervalu  $[a, b]$ , t. j.  $\xi_1^1 = (a + b)$ . Pri ľubovoľnej inej voľbe bodu  $\xi_1^1$  je totiž vždy možné nájsť funkciu  $f$  takú, že  $|\xi_1^1 - \hat{x}| > \frac{1}{2}(b - a)$  (ak  $\xi_1^1 > \frac{1}{2}(a + b)$ , je to  $f(x) = x$ , v opačnom prípade  $f(x) = -x$ ).

<sup>2</sup> Úloha je tu trochu zjednodušená a na riešenie uvedenej rovnice je k dispozícii slušne konvergentný rad. V skutočnosti  $a$  závisí od  $c$  a vtedy sa rovnica stáva nelineárnou, čím sa jej riešenie komplikuje.

Aj pre  $n = 2$  je riešenie úlohy ľahké: znalosť funkcie v jednom bode nám ničím neprispieva pre lokalizovanie jej minima (dokážte!), preto je zrejmé, že voľba  $\xi_2^2$  bude nezávislá od hodnoty  $f(\xi_1^2)$ . Obdobnou úvahou ako pre  $n = 1$  zistíme, že musíme voliť  $\xi_1^2, \xi_2^2$  tak, aby delili interval  $[a, b]$  na tretiny (t. j. musí byť  $\hat{x}_1 = a + \frac{1}{3}(b - a)$ ,  $\hat{y}_1 = a + \frac{2}{3}(b - a)$ , kde  $\hat{x}_1 = \min \{\xi_1^2, \xi_2^2\}$ ,  $\hat{y}_1 = \max \{\xi_1^2, \xi_2^2\}$ ).

Mýlil by sa však, kto by si myslel, že pre  $n = 3$  je najvýhodnejšie deliť  $[a, b]$  na štvrtiny; ak totiž poznáme hodnoty  $f$  v dvoch bodoch, vieme už zúžiť interval, na ktorom  $f$  môže minimum dosahovať.

Skúste teraz uhádnuť, ako riešiť úlohu pre  $n = 3$ ! Ak ste hádali, že treba prvé dva body  $\xi_1^3, \xi_2^3$  voliť tak, aby menší z nich bol bodom  $\hat{y}_1$  metódy  $\Phi_2$  pre interval  $[a, \max \{\xi_1^3, \xi_2^3\}]$  a súčasne väčší z nich bodom  $\hat{x}_1$  metódy  $\Phi_2$  pre interval  $[\min \{\xi_1^3, \xi_2^3\}, b]$ , hádali ste správne (nakreslite si to a určite, v akom pomere musia body  $\xi_1^3, \xi_2^3$  deliť interval  $[a, b]$ , aby mali uvedené vlastnosti).

Dokazovať to zatiaľ nebudeme, pretože ukážeme, že toto pravidlo je časťou všeobecného pravidla, podľa ktorého sa bude riadiť voľba bodov  $\xi_k^n$  a ktoré pomenujeme pravidlo  $\pi$ .

Aby sme ho mohli formulovať pre všeobecné  $n, k$ , všimneme si najprv, že ak poznáme hodnoty  $\xi_1^n, \dots, \xi_k^n \in [a, b]$  a  $f(\xi_1^n), f(\xi_2^n), \dots, f(\xi_k^n)$ , pre lokalizovanie minima funkcie  $f$  z toho môžeme vyťažiť nič viac a nič menej než to, že  $f$  nadobúda minimum na intervale  $[a_k, b_k]$ , kde  $a_k, b_k$  sú najbližší zľava, resp. sprava z bodov

$a, b, \xi_1^n, \dots, \xi_k^n$  k bodu  $\xi_k^n$  takému, že  $f(\xi_k^n) = \min_{1 \leq i \leq k} f(\xi_i^n)$ .<sup>3</sup> To znamená, že

pokračovanie každého procesu postupnej  $n$ -krokovej minimalizácie  $\Phi_n$  na  $[a, b]$  spočíva v  $n - k + 1$ -krokovej postupnej minimalizácii na  $[a_k, b_k]$  so zadaným prvým bodom  $\xi_k^n$ , ktorý označíme  $\eta_k^n$ : Z toho ihneď vyplýva, že  $\eta_{k+1}$  je jedným z bodov  $\eta_k, \xi_{k+1}^n$ . Z toho ďalej dostávame

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] = \begin{cases} [a_k, y_k] & \text{ak } f(y_k) > f(x_k) \\ [x_k, b_k] & \text{ak } f(y_k) < f(x_k) \end{cases} \quad (1)$$

kde  $x_k = \min \{\eta_k, \xi_{k+1}^n\}$ ,  $y_k = \max \{\eta_k, \xi_{k+1}^n\}$ .

Pravidlo  $\pi$  teraz možno formulovať nasledovne:

Ak  $[a_k, b_k]$  je interval, lokalizujúci minimum po  $k$ -tom kroku metódy  $\Phi_n$ , potom body  $\eta_k, \xi_{k+1}^n$  sú totožné (nie nutne po rade) s prvými dvoma bodmi metódy  $\Phi_{n-k+1}$  pre interval  $[a_k, b_k]$ .

Špeciálne prípady pre  $n = 1, 2$ , ako aj celková symetria úlohy vzhľadom na stred intervalu  $[a, b]$  nás tiež oprávňujú očakávať, že pre ľubovoľné  $n$  a ľubovoľný interval  $[a, b]$  sú  $\xi_1^n$  a  $\xi_2^n$  symetrické podľa bodu  $\frac{1}{2}(a + b)$ . Z (1), pravidla  $\pi$  a tejto symetrie môžeme už zrátať dĺžky intervalov  $[\hat{a}_k, \hat{b}_k]$ . Ak totiž označíme  $\tau = \hat{\eta}_n - \hat{a}_n$ ,  $\hat{x}_k = \min \{\hat{\eta}_k, \hat{\eta}_{k+1}\}$ ,  $\hat{y}_k = \max \{\hat{\eta}_k, \hat{\eta}_{k+1}\}$ , potom z pravidla  $\pi$  najprv vyplýva

$$\hat{b}_n - \hat{a}_n = 2\tau \quad (2)$$

<sup>3</sup> Tu i v ďalšom nechávame bokom v praxi sa nevyskytujúci prípad, že by hodnota  $f$  vyšla rovnaká v rozličných bodoch a prenechávame čitateľovi rozmyslieť si túto možnosť.



$$b - a = \hat{b}_1 - \hat{a}_1 = F_{n+1}\tau,$$

$$\hat{y}_1 - a = b - \hat{x}_1 = \hat{b}_2 - \hat{a}_2 = F_n\tau$$

z čoho

$$(b - \hat{x}_1)/(b - a) = (\hat{y}_1 - a)/(b - a) = F_n/F_{n+1}$$

$$(\hat{x}_1 - a)/(b - a) = (b - \hat{y}_1)/(b - a) = 1 - (\hat{y}_1 - a)/(b - a) =$$

$$= 1 - F_n/F_{n+1} = (F_{n+1} - F_n)/F_{n+1} = F_{n-1}/F_{n+1}$$

Teda body  $\hat{x}_1, -\hat{y}_1$  treba voliť tak, aby úsečky  $[a, \hat{x}_1], [a, b]$  boli v pomere  $F_{n-1}:F_{n+1}$  a bod  $\hat{y}_1$  s ním symetricky; ak  $f(\hat{x}_1) > f(\hat{y}_1)$ , zvolíme  $[\hat{a}_2, \hat{b}_2] = [a, \hat{y}_1]$ ,  $\hat{\eta}_2 = \hat{x}_1$ , v opačnom prípade  $[\hat{a}_2, \hat{b}_2] = [\hat{x}_1, b]$ ,  $\hat{\eta}_2 = \hat{y}_1$ . V každom prípade teda bude platiť buď  $(\hat{\eta}_2 - \hat{a}_2)/(\hat{b}_2 - \hat{a}_2) = F_{n-1}/F_n$ , alebo  $(\hat{b}_2 - \hat{\eta}_2)/(\hat{b}_2 - \hat{a}_2) = F_{n-1}/F_n$ . Vo všeobecnosti v  $k$ -tom kroku ( $k \leq n-1$ ) budeme mať interval  $[[\hat{a}_k, \hat{b}_k]$  a bod  $\hat{\eta}_k \in [\hat{a}_k, \hat{b}_k]$  taký, že buď  $(\hat{\eta}_k - \hat{a}_k)/(\hat{b}_k - \hat{a}_k) = F_{n-k+1}/F_{n-k+2}$ , alebo  $(\hat{b}_k - \hat{\eta}_k)/(\hat{b}_k - \hat{a}_k) = F_{n-k+1}/F_{n-k+2}$ . Doplňme tento bod symetrickým na dvojicu  $\hat{x}_k, \hat{y}_k$  a položíme  $[\hat{a}_{k+1}, \hat{b}_{k+1}] = [\hat{a}_k, \hat{y}_k]$ ,  $\hat{\eta}_{k+1} = \hat{x}_k$ , ak  $f(\hat{x}_k) < f(\hat{y}_k)$  a  $[\hat{a}_{k+1}, \hat{b}_{k+1}] = [\hat{x}_k, \hat{b}_k]$ ,  $\hat{\eta}_{k+1} = \hat{y}_k$  v opačnom prípade. Pre  $k = n$  bude pre bod  $\hat{\eta}_n$  platiť  $(\hat{\eta}_n - \hat{a}_n)/(\hat{b}_n - \hat{a}_n) = F_1/F_2 = 1/2$ , a teda  $\hat{\eta}_n$  bude stredom úsečky  $[\hat{a}_n, \hat{b}_n]$ . Oveľa jednoduchšie a prehľadnejšie než týmto slovným popisom možno metódu  $\hat{\Phi}_n$  popísať pomocou blokovej schémy, obvyklej v programovaní (obr. 4).

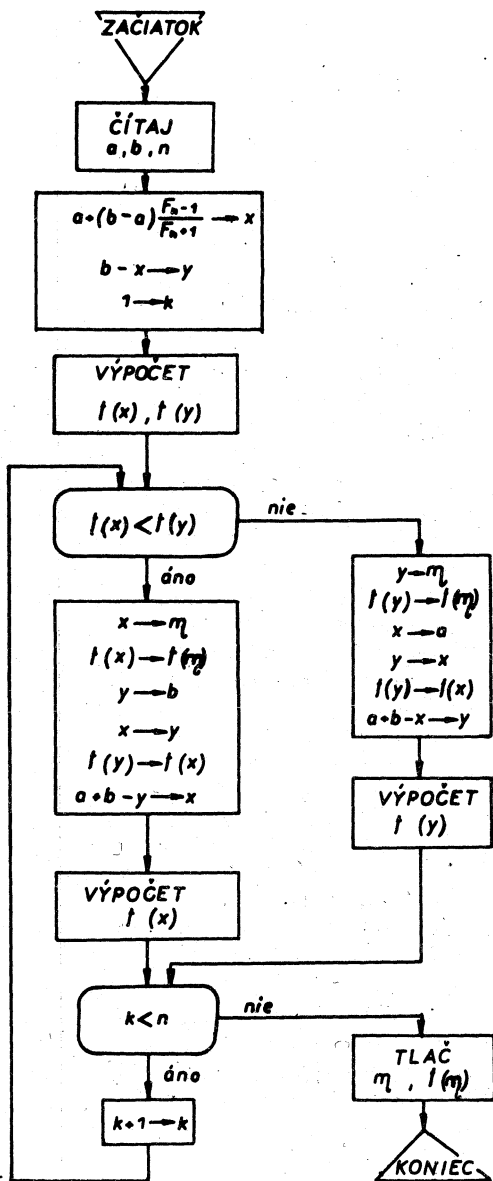
Týmto sme vlastne už ukázali, že je možné skonštruovať metódu, vyhovujúcu pravidlu  $\pi$ . Zostáva nám ešte dokázať, že metóda  $\hat{\Phi}_n$  je skutočne optimálna  $n$ -kroková metóda postupného hľadania minima; súčasne dokážeme, že je jediná.

Dôkaz urobíme indukciou. Pre  $n = 1$  je tvrdenie zrejme pravdivé; predpokladajme, že je pravdivé aj pre  $1 \leq k < n$ .

Metóda  $\hat{\Phi}_n$  dáva pre ľubovoľnú funkciu  $|\hat{\eta}_n - \hat{x}| \leq (b - a)/F_{n+1}$ . Všimnime si, že rovnosť sa dosahuje okrem iného pre monotónne funkcie  $f$  — ak totiž napríklad  $f$  je rastúca, zrejme  $\hat{a}_k = a$  pre všetky  $1 \leq k \leq n$ ,  $\hat{x} = a$ , a preto  $\hat{\eta}_n - \hat{x} = \hat{\eta}_n - a = \hat{\eta}_n - \hat{a}_n = (b - a)/F_{n+1}$ . Ukážeme, že k ľubovoľnej inej metóde  $\Phi_n^*$  existuje funkcia, pre ktorú  $|\hat{\eta}_n^* - \hat{x}| > (b - a)/F_{n+1}$ , čím bude dokázané jednak že  $\hat{\Phi}_n$  je optimálna, jednak že je jediná.

Z indukčného predpokladu vyplýva, že nie je možné, aby sa  $\Phi_n^*$  zhodovala s  $\hat{\Phi}_n$  vo voľbe prvých dvoch bodov (ovplyvňujúcich  $a_2^*, b_2^*$ ), ale líšila sa od  $\hat{\Phi}_n$  v ďalších krokoch. Musí sa teda  $\Phi_n^*$  líšiť od  $\hat{\Phi}_n$  vo voľbe prvých dvoch bodov  $x_1 = \min\{\xi_1^*, \xi_2^*\}$ ,  $y_1 = \max\{\xi_1^*, \xi_2^*\}$ . Predpokladajme  $x_1^* \neq \hat{x}_1$  (prípád  $y_1^* \neq \hat{y}_1$  je symetrický). Ak  $x_1^* < \hat{x}_1$ , potom pre klesajúcu funkciu  $f$  bude  $[a_2^*, b_2^*] = [x_1^*, b]$ , a teda  $b_2^* - a_2^* < b - \hat{x}_1$ ; pretože podľa indukčného predpokladu  $\Phi_n^*$  musí pokračovať ako Fibonacciho metóda  $\hat{\Phi}_{n-1}$  na  $[a_2^*, b_2^*]$ , ktorá pre zvolenú funkciu  $f$  dáva  $|\hat{\eta}_n - \hat{x}| = (b_2^* - a_2^*)/F_n > (b - \hat{x}_1)/F_n = (b - a)F_n/(F_n F_{n+1}) = (b - a)/F_{n+1} \cong \cong |\hat{\eta}_n - \hat{x}|/(b - a)$ ,  $\Phi_n^*$  nemôže byť optimálna.

Ak  $x_1^* > \hat{x}_1$ , zvolíme  $f$  rastúcu na  $[a, b]$ . Potom bude zrejme  $[a_2^*, b_2^*] = [a, y_1^*]$  a  $[a_3^*, b_3^*] = [a, x_1^*]$ , alebo  $[a_3^*, b_3^*] = [a, \xi_3^*]$  podľa toho, či zvolíme  $\xi_3^* < \hat{x}_1$  alebo



Obr. 4



$\xi_3^* > x_1^*$ . V každom prípade však bude  $b_3 - a_3 \cong x_1^* - a > x_1 - a = F_{n-1}/F_{n+1}(b-a)$ . S pomocou indukčného predpokladu dostaneme opäť  $|\eta_n^* - x| > (b-a)/F_{n+1}$ , čím je dôkaz ukončený.

Spočítajme si teraz, čo môžeme ušetriť pomocou metódy  $\hat{\Phi}_n$  oproti pasívnej metóde pre unimodálnu funkciu. Pomocou formulky

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \quad (6)$$

ktorá je známa pre Fibonacciho čísla (pozri [3]), si môžeme ľahko spočítať, že kým pre presnosť  $\varepsilon = 10^{-3} (b-a)$  potrebujeme pri použití pasívnej metódy spočítať hodnoty  $f$  v 999 bodoch, pri použití metódy  $\hat{\Phi}_n$  sa ich počet zredukuje na 13.

Formulka (6) má ešte aj iný význam. Pretože  $1/2|1-\sqrt{5}| < 1$ , možno z nej ľahko vyčítať, že platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |F_n - z_n| = 0 \quad (7)$$

kde  $z_n = (1/\sqrt{5}) (1/2) (1+\sqrt{5})^n$ . Jednoduchým výpočtom sa môžeme presvedčiť, že máme ešte aj to šťastie, že navyše má postupnosť  $\{z_n\}$  spoločnú s  $\{F_n\}$  aj vlastnosť (5), t. j. že platí  $z_{n-1} + z_n = z_{n+1}$  pre  $n > 1$ . To ale znamená, že ju môžeme použiť na vytvorenie metódy postupného hľadania  $\Phi^z$  podobne ako  $\{F_n\}$ , t. j. tak, že položíme  $x_i^* = a + (z_{n-1}/z_{n+1})(b-a)$ ,  $y_i^* = a + b - x_i^* = a + (1 - z_{n-1}/z_{n+1})(b-a) = a + (z_n/z_{n+1})(b-a)$ . Proti  $\{F_n\}$  má však postupnosť  $\{z_n\}$  tú výhodu, že je geometrická, čo znamená, že  $z_n/z_{n-1} = 1/2(1+\sqrt{5})$  nezávisí od  $n$ , a preto nezávisle od počtu krokov metódy a od toho, v ktorom kroku sme, delíme interval, lokalizujúci minimum v rovnakom pomere (preto ani v označení metódy  $\Phi^z$  neindikujeme počet jej krokov). Asymptotická rovnosť (7) nám zaručuje, že pre veľké  $n$  metóda  $\Phi^z$  nebude oveľa horšia ako  $\hat{\Phi}_n$ , pričom počítanie podľa nej je oveľa pohodlnejšie. Navyše, netreba dopredu vedieť počet krokov, ktoré chceme urobiť, a preto sa výhodne používa pre riešenie úlohy (f).

Metóde  $\Phi^z$  sa tiež hovorí metóda zlatého rezu, pretože  $z = 2(1+\sqrt{5})^{-1}$  je už zo staroveku známe ako pomer, v ktorom treba úsečku rozdeliť na dve časti tak, aby pomer dĺžky úsečky k dĺžke jej väčšej časti bol rovnaký ako pomer dĺžky väčšej časti k dĺžke menšej a ktorý bol významný v starovekej estetike.

Metódy  $\hat{\Phi}_n$  a  $\Phi^z$  nie sú zďaleka jediné, s ktorými možno postupne hľadať minimum unimodálnych funkcií. Napríklad, viaceré metódy sú vypracované pre prípad, že možno ľahko zisťovať deriváciu funkcie  $f$ . Nám tu však nešlo o prehľad metód minimalizácie, za ktorým čitateľ môže siahnuť do [2].

Tým sme konečne skončili s výpočtom toho, o čo nám tu nešlo. O čo nám tu teda šlo, alebo, prečo sme sa tu podrobne práve zaoberali Fibonacciho metódou? Pretože sa dá z nej vyvodiť niekoľko poučení. Po prvé, že aj v tých zdanlivo najprimitívnejších úlohách sa dá kadečo užitočného a zaujímavého vyumať. Po

druhé, že sa pritom často objavia celkom neočakávané súvislosti. A po tretie, metóda postupného hľadania je dobrým príkladom objektu, ktorého popis a analýza sa veľmi nešikovne formalizujú v obvyklom matematickom jazyku. V tomto smere môžeme ďakovať ľuďom od počítačov, že vytvorili symboliku a aparát (pozri napr. blokovú schému na *obr. 4*), ktoré sú pre takéto účely oveľa výhodnejšie.

#### Literatúra

- [1] Brunovský, P.: O maximách a minimách a o ich hľadaní. In: Matematické obzory 8/75, Bratislava 1975, s. 43.
- [2] Vasiljev, F. P.: Lekcii po metodam rešenija ekstremaľnych zadač. Izd. Mosk. Univ. 1974.
- [3] Vorobjev, N. N.: Čísla Fibonacci. Nauka 1969.