

# O MINIMÁCH A MAXIMÁCH A O ICH HĽADANÍ

PAVOL BRUNOVSKÝ

## III. Zázrak a mystérium duality

Človek sa odjakživa snaží nachádzať v prírode harmóniu a poriadok a vytvárať ich vo svojich dielach. Máloktoľ iná veda je taká bohatá na príklady ako matematika. Jedným z nich, ktorý vždy vo mne vzbudzuje údiv, je dualita vo všetkých jej rozličných podobách. O jednej z nich, súvisiacej s minimami a konvexitou, si voľačo povieme.

Ale začnime z iného konca — voľbou miss funkcie. Budeme hlasovať podľa osobných sympatií k typom funkcií. Na prvom mieste by sme sa vari zhodli — dúfam, že by ste naň tiež dali funkcie lineárne. Pokiaľ ide o druhé miesto, mnoho dôvodov — napr. výpočtové hľadisko — hovorí pre funkcie polynomiálne. Ja by som však hlasoval pre funkcie konvexné. Ak sa Vám to zdá teraz čudné, možno, že na konci článku budete mať pre mňa pochopenie.

Čo je konvexná funkcia, hádam viete: Funkciu  $f$ , definovanú na intervale  $I$  reálnej osi s reálnymi hodnotami, nazývame konvexnou, ak pre ľubovoľné  $x, y \in I$  a ľubovoľné  $\lambda \in [0, 1]$  platí  $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$ . Geometricky to znamená, že všetky body úseku grafu funkcie  $f$  medzi bodmi  $(x, f(x))$  a  $(y, f(y))$  ležia pod alebo na úsečke, spájajúcej tieto dva body (nakreslite si obrázok!).

Aby sme sa nezaťažovali technickými detailami, budeme hovoriť iba o konvexných funkciách, definovaných na celej priamke — ale pripustíme, aby nadobúdali hodnotu  $\infty$  (s hodnotou  $\infty$  budeme počítať ako v časti I). Množinu bodov, v ktorých  $f$  nadobúda konečné hodnoty, nazveme oblasťou konečnosti  $f$  a budeme predpokladať, že  $f$  je na svojej oblasti konečnosti spojitá.

Ako čiastočné vysvetlenie mojich sympatií ku konvexným funkciám môže slúžiť

**Veta. 1.** Nech  $f$  je konvexná. Potom

- $f$  nemá lokálne minimá okrem globálneho.
- Oblasť konečnosti  $f$  je interval a v každom jeho vnútornom bode má  $f$  neprázdny subdiferenciál.
- Pre každé  $a \in \{f'\}(x)$  platí:

$$(1) \quad f(y) \geq f(x) + a(y - x)$$

pre všetky  $y$ .

- $f$  nadobúda v bode  $\hat{x}$  minimum vtedy a len vtedy, ak  $0 \in \{f'\}(x)$ .

**Dôkaz 1.** Predpokladajme, že v bode  $x$  funkcia  $f$  nadobúda lokálne minimum, ale nie globálne, teda že existuje taký bod  $y$ , v ktorom  $f(y) < f(x)$ . Pretože  $f$  je konvexné, platí pre  $\lambda \in (0, 1)$

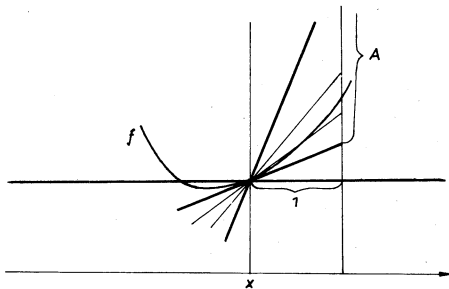
$$(2) \quad f(x) + \lambda(y - x) = f(\lambda y + (1 - \lambda)x) \leq \lambda f(y) + (1 - \lambda) \cdot f(x) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(x) = f(x).$$

Na druhej strane, pretože  $x$  je lokálne minimum, musí pre dost malé  $|\lambda|$  platiť  $f(x) + \lambda(y - x) \geq f(x)$ , čo je v spore s (2). (Oveľa zrejmejšie vám to bude, ak si nakreslíte obrázok.)

2. Skutočnosť, že oblasť konečnosti je interval, dostaneme ihneď z toho, že ak  $x \leq y$ ,  $f(x) < \infty$ ,  $f(y) < \infty$ , potom aj pre ľubovoľné  $\lambda \in [0, 1]$  je  $f(x + \lambda(y - x)) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) < \infty$ .

Dôkaz druhej časti je namáhavejší a ak sa vám do neho nechce, nakreslite si aspoň obrázok a dôkladne si premyslite, čo znamená. Uvidíte, že je to intuitívne zrejímá vlastnosť, ktorá spolu s (1) hovorí, že každým vnútorným bodom grafu funkcie  $f$  možno viesť opornú priamku — t. j. priamku, pod ktorou neleží nijaký bod grafu funkcie  $f$ . Táto hlboká vlastnosť konvexných funkcií sa bohato využíva v analýze, funkcionálnej analýze, nelineárnom programovaní a inde.

Nech teda  $x$  je vnútorný bod oblasti konečnosti  $f$ . Potom existujú také body  $y, z$ , že  $y < x < z$  a  $f(y) < \infty$ ,  $f(z) < \infty$ . Označíme  $a = \inf A$ , kde  $A = \{a \mid \text{existuje } \xi > x \text{ také, že } f(\xi) < f(x) + a(\xi - x)\}$ . Inak povedané,  $a$  je infimum zo smerníc tých priamok  $p$ , prechádzajúcich bodom  $(x, f(x))$ , že vpravo od bodu  $x$  leží na grafe funkcie  $f$  bod pod  $p$  (pozri obr. 1).



Obr. 1.

Dokážeme, že  $a$  je konečné a  $a \in \{f'\}(x)$ . Je  $f(z) < f(x) + f(z) - f(x) + 1 = f(x) + [(f(z) - f(x) + 1)/(z - x)](z - x)$ , a teda  $a \leq (f(z) - f(x) + 1)/(z - x) < \infty$ . Predpokladajme  $a = -\infty$ . To znamená, že existuje postupnosť bodov  $\{\xi_n\}$ ,  $\xi_n > x$  taká, že  $f(\xi_n) < f(x) - n(\xi_n - x)$ . Označme  $\lambda_n = (x - y) / (\xi_n - y)$ .

Je  $0 < \lambda_n < 1$  a z konvexity  $f$  vyplýva:

$$\begin{aligned}
 (3) \quad f(x) &= f(y + [(x - y) / (\xi_n - y)] (\xi_n - y)) = \\
 &= f(y + \lambda_n (\xi_n - y)) = f(\lambda_n \xi_n + (1 - \lambda_n)y) \leq \\
 &\leq \lambda_n f(\xi_n) + (1 - \lambda_n) f(y) < \lambda_n f(x) + (1 - \lambda_n) f(y) - \\
 &\quad - \lambda_n n (\xi_n - x) = \lambda_n f(x) + (1 - \lambda_n) f(y) - \\
 &\quad - \lambda_n (\lambda_n^{-1} - 1) n (x - y) = \lambda_n f(x) + (1 - \lambda_n) [f(y) - n(x - y)].
 \end{aligned}$$

Pre dost veľké  $n$  je  $f(y) - n(x - y) < f(x)$ , a preto z (3) vyplýva:

$$\begin{aligned}
 f(x) &< \lambda_n f(x) + (1 - \lambda_n) [f(y) - n(x - y)] < \\
 &< \lambda_n f(x) + (1 - \lambda_n) f(x) = f(x),
 \end{aligned}$$

čo je nemožné.

Teda  $a > -\infty$  a z jeho definície vyplýva, že existuje taká postupnosť bodov  $\xi_n > x$ , že  $(f(\xi_n) - f(x)) / (\xi_n - x)$  konverguje zhora, k  $a$ . Ďalej platí (1) pre všetky  $y \geq x$ . Keby nie, existoval by totiž bod  $y > x$  taký, že  $f(y) - f(x) < a(y - x)$  a pre dost malé  $\delta > 0$  by platilo  $f(y) - f(x) < (a - \delta)(y - x)$ , a teda  $a - \delta \in A$ , čo odporuje definícii  $a$ .

Ukážeme, že (1) platí i pre všetky  $y \leq x$ . Predpokladajme opak, teda že existuje  $\eta < x$  také, že  $f(\eta) - f(x) < a(\eta - x)$ . Pre dost malé  $\delta > 0$  bude platit

$$(4) \quad f(\eta) - f(x) < (a + \delta)(\eta - x)$$

Pre dost veľké  $n$  platí  $(f(\xi_n) - f(x)) / (\xi_n - x) < a + \delta$ . Vyberme si takéto  $n$  a označme preň  $\lambda = (x - \eta) / (\xi_n - \eta)$ . Je  $0 < \lambda < 1$  a podobne ako v (3) dostaneme:

$$f(x) < \lambda f(x) + (1 - \lambda) [f(\eta) + (a + \delta)(x - \eta)]$$

Úpravou tejto nerovnosti dostaneme:

$$f(\eta) - f(x) > (a + \delta)(\eta - x)$$

čo odporuje (4).

3. Predpokladajme opak. Potom existuje taký bod  $y$ , že  $f(y) < f(x) + (a - \delta) \times (y - x)$ . Potom však pre všetky  $\lambda \in (0, 1]$  platí  $f(x + \lambda(y - x)) \leq \lambda f(y) + (1 - \lambda) f(x) < \lambda [f(x) + (a - \delta)(y - x)] + (1 - \lambda) f(x) = f(x) + \lambda(a - \delta)(y - x)$ , čo znamená, že nemôže byť  $a \in \{f'\}(x)$ .

4. Toto tvrdenie je jedným smerom tvrdením 4 z časti I, druhým smerom zasa ihneď vyplýva z 1.

Keď už sú teda tie konvexné funkcie také sympatické, nebolo by od veci najst spôsob, ako z nekonvexnej funkcie urobiť konvexnú, ale tak, aby si pozmenená funkcia zachovala čo najviac z vlastností, ktoré sú pre nás dôležité. To sú, pravda,

predovšetkým minimá. Prirodzeným riešením tohto problému je najväčší konvexný dolný odhad, či „konvexná obálka“ funkcie  $f$ , t. j. funkcia  $co f$  taká, že  $co f(x) \leq f(x)$  pre všetky  $x$  a že ľubovoľná konvexná funkcia  $g$  je taká, že  $g(x) \leq f(x)$  pre všetky  $x$  (v ďalšom píšeme  $g \leq f$ ) spĺňa i  $g \leq co f$  (porovnajte s definíciou uzáveru množiny ako najmenej uzavretej množiny, obsahujúcej danú množinu, alebo supréma množiny ako jej najmenšieho horného ohraničenia).

Zatiaľ nemôžeme tvrdiť, že každá funkcia musí mať konvexnú obálku, jedno je však zrejmé, že konvexnou obálkou konvexnej funkcie je ona sama. Teraz si overíme, do akej miery konvexná obálka zachováva minimum, ako sme to od nej žiadali:

**Veta 2.**  $co f = \inf f$ ; ak  $f$  nadobúda v bode  $\hat{x}$  minimum, potom  $f(\hat{x}) = co f(\hat{x}) = \min co f$ .

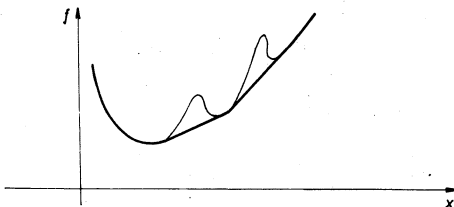
Vetu, prirodzene, treba chápať tak (pokiaľ nedokážeme existenciu obálky ku každej funkcii), že jej tvrdenie platí, ak obálka k danej funkcii existuje.

Dôkaz vety je založený na tom, že ak  $f, g$  sú konvexné, potom aj funkcia  $\max\{f, g\}$  je konvexná (dokážte ako cvičenie). Teda aj  $f = \max\{\inf f, co f\}$  je konvexná funkcia; pretože platí  $f \geq \inf f \geq co f$ , musí platiť  $f \leq co f$ , z čoho vyplýva  $co f = \inf f$ . Ďalej platí  $f(\hat{x}) = co f(\hat{x})$ ,  $\inf f = f(\hat{x})$ , a teda  $co f(\hat{x}) = f(\hat{x})$ .

Príklad funkcie  $f(x) = (1 + x^2)^{-1}$ , ktorej  $co f \equiv 0$  ukazuje, že  $co f$  môže nadobúdať minimum aj vtedy, ak ho  $f$  nenadobúda. Ľahko sa možno presvedčiť, že tvrdenie vety možno preniesť aj na minimum na ohraničenom uzavretom intervale, kde už každá spojitá funkcia musí minimum dosahovať. Je zaujímavé, že kým túto vlastnosť si spojitá funkcie nezachovávajú v nekonečnorozmerných priestoroch, konvexné spojitá funkcie v mnohých prípadoch áno. Táto skutočnosť má veľký význam pre existenčné vety variačného počtu a teórie optimálneho riadenia a viedla k zavedeniu tzv. zovšeobecnených kriviek a relaxovaných riadení.

Ak si nakreslíte graf nejakej nekonvexnej funkcie, ruka vám takmer sama nakreslí jej konvexnú obálku (pozri obr. 2). Z obrázka možno ľahko vyčítať, ako funkciu  $co f$  určiť:

$$co f(x) = \inf \{ \lambda f(y) + (1 - \lambda) f(z) \mid \lambda y + (1 - \lambda) z = x, 0 \leq \lambda \leq 1 \}$$



Obr. 2.

Ponechávame na čitateľovi, aby si vysvetlil geometrický význam tejto formulky a dokázal jej platnosť.

Iný spôsob určenia funkcie  $co f$  je analogický už spomínanému uzáveru množiny:

$$co f(x) = \sup \{g(x) \mid g \text{ konvexná}, g \leq f\}$$

My si však zvolíme inú cestu, ktorá sa sprvu bude zdať čudnou, napokon sa však ukáže prekvapujúco elegantnou a užitočnou.

Definujme najprv k ľubovoľnej funkcii  $f$ , ktorá má aspoň jednu konečnú hodnotu, duálnu funkciu  $f^*$  predpisom

$$f^*(\psi) = \sup_x H(x, \psi)$$

kde

$$H(x, \psi) = \psi x - f(x)$$

(písmeno  $H$  sa nezvolilo celkom náhodne, ale pre analógiu s Hamiltonovou funkciou vo variačnom počte, o ktorej bude reč neskôr).

K definíciám funkcií  $H$  a  $f$  treba ešte niečo dodať. Po prvé, keďže  $f$  môže nadobúdať aj hodnoty  $+\infty$ , môže sa v definícii funkcie  $H$  vyskytnúť  $-\infty$ , o čom sme nehovorili, ako s ním počítateľ. Pravidlá pre počítanie s ním sú však analogické pravidlám pre počítanie s  $+\infty$ . Ak by sme sa používaniu  $-\infty$  chceli vyhnúť úplne,

mohli by sme definovať  $f^*(\psi) = -\inf_x [-H(x, \psi)]$ . Po druhé, keďže pripúšťame iba funkcie s hodnotami v  $(-\infty, \infty]$ , musíme sa presvedčiť, že  $f^*$  nemôže nadobúdať hodnotu  $-\infty$ . Na tom však práve máme predpoklad o tom, že  $f$  nadobúda aspoň jednu konečnú hodnotu, o čom sa ľahko môžete presvedčiť.

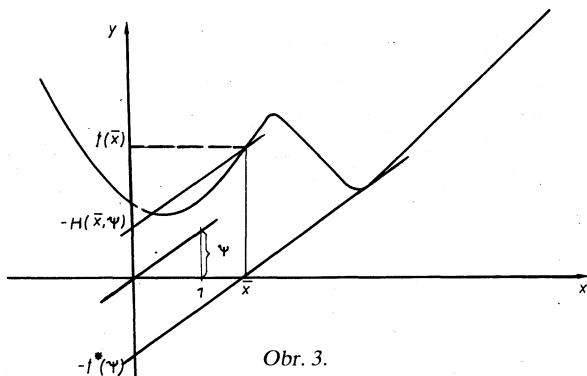
Ak chcete skutočne vniknúť do duality, bude dobré, ak si vypočítate  $f^*$  pre niekoľko funkcií, napr. pre už spomínanú funkciu  $f(x) = (1+x)^{-1}$ , ďalej pre funkcie  $f(x) = ax + b$ ,  $f(x) = |x|$ ,  $f(x) = -|x|$ ,  $f(x) = x^2$  a napokon  $f(x) = 0$  pre  $x = 0$  a  $\infty$  pre  $x \neq 0$ .

Akú majú vlastne  $f^*$  a  $H$  geometrickú interpretáciu? Zvoľme ľubovoľný bod  $(\bar{x}, f(\bar{x}))$  na grafe funkcie  $f$  a vedme ním priamku so smernicou  $\psi$ , ktorá bude mať rovnicu  $y = \psi x + c$ , kde  $c = f(\bar{x}) - \psi \bar{x} = -H(\bar{x}, \psi)$  je jej úsek na osi  $y$ . Hodnota  $f^*(\psi)$  je teda supréмум zo záporne vzatých úsekov na osi  $y$ , vytatých priamkami, prechádzajúcimi bodmi grafu funkcie  $f$  a majúcih smernicu  $\psi$  (obr. 3).

Dôležité vlastnosti duálnej funkcie zhrnieme do nasledujúcej vety:

**Veta 3.** Nech funkcia  $f$  sa nie všade rovná  $\infty$ . Potom  $f^*$  je konvexná funkcia. Ak existuje  $x_\psi$  také, že  $f^*(\psi) = H(x_\psi, \psi)$ , potom  $\psi \in \{f'\}(x)$ ; ak  $f$  je konvexná, potom  $\{f'\}(x) = \{\psi \mid x = x_\psi\} = \{\psi \mid f^*(\psi) = H(x, \psi)\}$ .

Dôkaz konvexity  $f^*$  je veľmi jednoduchý. Pre ľubovoľné funkcie  $f, g$  a každé  $x$  platí totiž  $f(x) + g(x) \leq \sup f + \sup g$ , a preto aj  $\sup (f + g) \leq \sup f + \sup g$ . Vďaka tomu dostaneme pre  $\lambda \in [0, 1]$



Obr. 3.

$$\begin{aligned}
 f^*(\lambda\psi_1 + (1-\lambda)\psi_2) &= \sup_x [(\lambda\psi_1 + (1-\lambda)\psi_2)x - f(x)] = \\
 &= \sup_x [(\lambda\psi_1 + (1-\lambda)\psi_2)x - \lambda f(x) - (1-\lambda)f(x)] \leq \\
 &\leq \sup_x [\lambda\psi_1 x - \lambda f(x)] + \sup_x [(1-\lambda)\psi_2 x - (1-\lambda)f(x)] = \\
 &= \lambda \sup_x [\psi_1 x - f(x)] + (1-\lambda) \sup_x [\psi_2 x - f(x)] = \\
 &= \lambda f^*(\psi_1) + (1-\lambda) f^*(\psi_2),
 \end{aligned}$$

čo znamená, že  $f^*$  je konvexná.

Podľa definície  $x_\psi$  platí  $H(x_\psi, \psi) \geq H(x, \psi)$  pre všetky  $x$ , čo znamená  $\psi x - f(x) \leq \psi x_\psi - f(x_\psi)$ , alebo  $f(x) \geq f(x_\psi) + \psi(x - x_\psi)$ , a teda  $\psi \in \{f'\}(x_\psi)$ .

Aby sme dokončili dôkaz vety, stačí nám už iba dokázať, že z  $\psi \in \{f'\}(x)$  vyplýva  $x = x_\psi$ . Ale to je vlastne tvrdenie 4 vety 1.

A teraz príde zlatý kliniec programu: ak funkcia  $f^*$  sa nie všade rovná  $\infty$ , môžeme s ňou urobiť presne to isté, ako s  $f$ , t. j.  $(f^*)^*$  (namiesto toho budeme písať  $f^{**}$ ). Hádajte, čo dostaneme! Odpoveď dáva:

**Veta 4.** Nech  $f < \infty$ . Potom  $co f$  existuje práve vtedy, ak sa  $f^*$  nie všade rovná  $\infty$ ; platí  $f^{**} = co f$ .

Najkrajšie sa prejaví táto veta práve pri aplikácii na konvexné funkcie: ak  $f < \infty$

je konvexná, potom  $f^{**} = f$ . K tomu si stačí uvedomiť, že tvrdenie 2 vety 1 spolu s vetou 3 zaručujú, že ak  $f < \infty$  je konvexná, potom  $f^* \neq \infty$  (presvedčte sa!).

K dôkazu vety už máme kadečo pripravené, takže nebude ani taký zlý, ako by človek od takej prekvapujúcej vety mohol čakať. Pre každé  $\psi$  platí:

$$\begin{aligned} H_r(\psi, x) &= x\psi - f^*(\psi) = x\psi - \sup_y H_r(y, \psi) = \\ &= x\psi - \sup_y \{ \psi y - f(y) \} \leq x\psi - [\psi x - f(x)] = f(x). \end{aligned}$$

z čoho

$$f^{**}(x) = \sup_{\psi} H_r(\psi, x) \leq f(x)$$

(index pri  $H$  označuje, ku ktorej funkcii  $H$  patrí).

Nech teraz  $\bar{f}$  je ľubovoľná konvexná funkcia taká, že  $\bar{f} \leq f$ . Dokážeme, že potom platí aj  $\bar{f} \leq f^{**}$ . Pretože z vety 3 vieme, že  $f^{**}$  je konvexná, bude tým dokázané

$$f^{**} = \text{co } f$$

Zvoľme  $\psi \in \{\bar{f}'\}(x)$  (pretože  $\bar{f}$  je konvexná, existuje podľa vety 1. Potom podľa vety 3 platí:

$$\begin{aligned} \psi x - \bar{f}(x) &= \sup_y \{ \psi y - \bar{f}(y) \} \geq \sup_y \{ \psi y - f(y) \} = f^*(\psi) = \\ &= \psi x - x\psi + f^*(\psi) \geq \psi x - \sup_x \{ x\chi - f^*(\chi) \} = \psi x - f^{**}(x), \end{aligned}$$

z čoho vyplýva  $\bar{f}(x) \leq f^{**}(x)$ .

Na ukončenie dôkazu vety nám ešte treba dokázať, že ak existuje  $\text{co } f$ , potom  $f^*$  sa nie všade rovná  $\infty$ .

Pretože  $\text{co } f \leq f < \infty$ , má  $\text{co } f$  podľa vety 1 v každom bode  $x$  neprázdny subdiferenciál; zvoľme teda  $x$  a  $\psi \in \{\text{co } f'\}(x)$ .

Podľa vety 1 to znamená:

$$\text{co } f(y) \geq \text{co } f(x) + \psi(y - x)$$

pre všetky  $y$ , a teda aj

$$f^*(\psi) = \sup_y \{ \psi y - f(y) \} \leq \sup_y \{ \psi y - \text{co } f(y) \} \leq \psi x - \text{co } f(x) < \infty$$

Mohli by ste sa ešte právom opýtať, prečo sme zavádzali funkcie s hodnotami  $\infty$ ,

keď sme hlavný výsledok nakoniec dokázali iba pre konečné funkcie. Nuž, je to preto, že aj pre konečnú funkciu môže vyjsť jej duálna s nekonečnými hodnotami (čo už viete, ak ste si vypočítali príklady). Okrem iného, veta platí aj za predpokladu, že  $f$  nadobúda aspoň jednu konečnú hodnotu, ak navyše predpokladáme, že je polospojité zdola (šarapatu robia okraje intervalu konečnosti  $f^{**}$ , v ktorých môže byť  $f^{**} < cf$ ).

Ak sa vám ešte stále nechce veriť vete 4, preskúšajte si ju na konkrétnych príkladoch, ktoré sú uvedené pred vetou 3, alebo ktoré si sami vymyslíte. Ale aj keď tomu veríte, je to celkom zábavné. Že veta neplatí celkom všeobecne, môžete sa presvedčiť na príklade konvexnej funkcie  $f(x) = 0$  pre  $x \in (0, 1)$ ,  $1$  pre  $x = \pm 1$  a  $\infty$  pre  $|x| > 1$ .

Všimnime si ešte jednu vec, ktorá nám bude v ďalšom užitočná: Ak  $f$  je konvexná a konečná (a teda  $f^{**} = f$ ), potom  $f^{***} = (f^{**})^{**} = (f^{**})^* = f^*$  už bez akýchkoľvek ďalších predpokladov na  $f^*$  (teda aj pre  $f^*$  nadobúdajúcu nekonečné hodnoty!).

Ako podivuhodne sa prepletajú vlastnosti funkcie a jej duálnej funkcie, ukazuje:

**Veta 5.** Nech  $f$  je konečná. Potom platí:

1. Ak  $f$  je konvexná,  $\psi \in \{f'\}(x)$  vtedy a len vtedy, ak  $x \in \{f^{*'}\}(\psi)$ .
2. Ak  $f$  nadobúda v bode  $\hat{x}$  minimum, potom  $\hat{x} \in \{f^{*'}\}(0)$ ; ak  $f$  je konvexná, platí to aj opačným smerom.

Prv než vetu 5 dokážeme, uvedomme si geometrický význam jej tvrdenia 2:  $f(\hat{x})$  je maximálny  $z$  úsekov, ktoré na priamke  $x = \hat{x}$  vytnú oporné priamky grafu funkcie  $f$ .

**Dôkaz.**  $x \in \{f^{*'}\}(\psi)$  znamená podľa vety 1  $f^*(x) \geq f^*(\psi) + x(x - \psi)$ , a teda  $\psi x - f^*(\psi) \geq \psi x - f^*(x)$  pre všetky  $x$ . Pretože podľa vety 4  $f^{**} = f$ , znamená to

$$\psi x - f^*(\psi) = \max_x \{ \psi x - f^*(x) \} = f^{**}(x) = f(x) =$$

$$\psi x - \sup_y \{ \psi y - f(y) \} \geq f(x)$$

$$\psi x \geq f(x) + \sup_y \{ \psi y - f(y) \} \geq f(x) + \psi y - f(y)$$

pre každé  $y$ , a teda

$$f(y) \geq f(x) + \psi(y - x)$$

čo znamená  $\psi \in \{f'\}(x)$ .

Všimnime si, že konečnosť funkcie  $f$  sme potrebovali iba k tomu, aby sme si zabezpečili splnenie rovnosti  $f^{**} = f$  a že tvrdenie platí i za tohto predpokladu.



Pretože  $f = f^{**}$ , znamená  $\psi \in \{f'\}(x)$  aj  $\psi \in \{f^{***}\}(x)$ . Ak v tvrdení, ktoré sme už dokázali, zameníme  $f$  za  $f^*$  (čo môžeme vzhľadom na to, že  $f^{***} = f^*$ ), dostaneme  $x \in \{f^{*'}\}(\psi)$ .

Ak  $f$  nadobúda v bode  $\hat{x}$  minimum, potom podľa vety 2 nadobúda v bode  $x$  minimum i funkcia  $co f = f^{**}$  a platí  $f^{**}(\hat{x}) = f(\hat{x})$ . Podľa vety 1 platí  $0 \in \{f^{*'}\}(\hat{x})$  a podľa 1. tvrdenia našej vety z toho vyplýva  $\hat{x} \in \{f^{*'}\}(0)$  (opäť sme použili  $f^{***} = f^*$ ). Naopak, ak  $\hat{x} \in \{f^{*'}\}(0)$ , potom podľa 1. tvrdenia  $0 \in \{f'\}(\hat{x})$  a podľa vety 1, ak  $f$  je konvexná, nadobúda v bode  $\hat{x}$  minimum.

Veta 3 je tým zázrakom i mystériom. Zázrakom preto, že to tak krásne klope, a mystériom je, prečo to tak klope. Veta 3 je totiž jednou z mnohých analogických viet v geometrii, algebre, topológii i funkcionálnej analýze, pre ktoré niet spoločného vysvetlenia. Tým myslím, že ani nie sú „odporované z prírody“, ani niet všeobecnej matematickej teórie, z ktorej by sa dali vyvodiť ako špeciálne prípady.

Pravda, opäť sa môžeme opýtať ústami prakticistu: Dobre, dualita je krásna, ale načo ju potrebujeme?

V tejto forme asi nanič. Ale kto sa stretol s viazanými extrémami v analýze, alebo s kanonickými premennými a Legendrovou transformáciou vo variačnom počte, alebo sa s nimi stretne, potvrdí mi, že sú to nie ľahké veci na pochopenie. A pritom si to pomocou funkcie  $H$  a premennej  $\psi$  môže v čistej geometrickej forme „nakresliť“. No význam kanonických premenných v mechanike, či ich mladších súrodencov — duálnych premenných v lineárnom, čo v nelineárnom programovaní sotva niekto odškriepi.

Zaujímavé je, že vývoj tu nešiel od nášho jednoduchého geometrického modelu duality ku kanonickým premenným, ale práve naopak. Ťažko je vziť sa dnes do toho, ako rozmýšľal Hamilton pred poldruha storočím, ale skôr sa zdá, že na svoje objavy prišiel formálnym počítaním, než z geometrických predstáv. Tým skôr mu treba vzdať úctu.

Pokiaľ ste z predchádzajúcich častí získali dojem, že ňadržam matematike, ktorá priamo počíta, tak touto časťou som chcel vyjadriť hold matematike, ktorá je krásna, a matematike, ktorá vysvetľuje. História ukazuje, že zdôrazňovanie len jedného z aspektov vedie iba k degenerácii matematiky a že iba jej prirodzený komplexný rozvoj vedie k skutočnému pokroku.

