VEKTORY OČAMI NEČISTÉHO MATEMATIKA

alebo nezabudnime, že vektor je šípka, a to nie hocijaká. Ale taká, čo je všade a nikde. Asi tak, ako maličkí panáci na Chagallových obrazoch.

Pravdaže, vektor je n-tica čísel, trieda ekvivalencie, posunutie a neviem čo všetko iné, ako sme sa o tom dočítali na stránkach *Matematických obzorov* (1—5). Teda presnejšie, možno ho tak definovať a možno si ho aj tak predstavovať. Naproti tomu intuitívna *šípková* definícia vlastne vôbec nie je definíciou podľa našich súčasných kritérií. Ale zato je to veľmi užitočná a názorná predstava — trúfal by som si povedať, že v tomto smere má veľké prednosti pred všetkými presnými definíciami a že všetky spomínané definície sú tu vlastne preto, aby túto predstavu vyjadrili.

V čom vlastne spočíva užitočnosť a príťažlivosť šípkovej predstavy? Predovšetkým v tom, že je veľmi jednoduchá a názorná a pritom dostatočne výstižná na to, aby sme z nej mohli odvodiť veľmi veľa z toho, čo o vektoroch vieme. A čo je dôležité, hoci to nie je presná definícia, nikdy neodvodíme nič chybného.

Práve preto by sme nikdy nemali na túto predstavu zabudnúť a tobôž nie sa za ňu hanbiť.

Nejde tu však natoľko o vektor, ako o predstavy v matematike všeobecne.

Možno sa opýtať — načo o tom písať? Kto komu bráni, aby si čokoľvek akokoľvek predstavoval? Isteže, nikto nikomu nebráni. Ale ak chceme niekoho naučiť dobre maľovať, nestačí nebrániť mu v tom — treba ho voľačo aj naučiť. A tak aj v matematike treba žiakom a študentom vštepovať správne predstavy. Predstavy názorné a jednoduché, ktoré umožňujú voľačo vypočítať a voľačo vytvoriť. Neviem, či to nie je tak, že pri všetkých našich reformách, učebných plánoch atď. priveľmi nedbáme na to, aby sme sa, preboha nikde nedopustili nejakej logickej nedôslednosti, pričom nám utečie sem-tam názornosť. Ako keby sme sa báli, že ak si dovolíme čo len trocha oprieť o predstavu, postavia nás na pranier a budú na nás prstom ukazovať ako na trestuhodných diletantov, alebo horšie, zradcov matematiky. Najmarkantnejšie sa to hádam prejavuje pri vyučovaní nematematikov na vysokých školách.

Teda, nezabudnime, že vektor je šípka. A patrilo by sa dodať — a rýchlosť. A dva razy to podčiarknuť. To preto, že ak nám asi trocha unikajú geometrické predstavy, o fyzikálnych je to celkom isté. Neviem presne, ako je to na strednej škole, ale je neodpustiteľným hriechom, že fyzika prakticky vymizla z učebných programov matematikov na vysokých školách. Nemali by sme zabudnúť, že veľká časť našej súčasnej matematiky je veľmi úzko spätá s fyzikou (diferenciálny a integrálny počet, lineárna algebra, variačný počet), s ktorou a pre ktorú sa vyvíjala od vynájdenia infinitezimálneho počtu pred viac ako 300 rokmi. Na čom sa má matematik učiť robiť matematické modely, ak nie na fyzikálnych úlohách?

Ale vráťme sa k vektoru. Na čom inom si môže človek tak krásne predstaviť vektor a potrebu jeho zavedenia, ako práve na vektore rýchlosti? Tam to úplne kričí, že kým *polohový vektor* vlastne vektorom nie je (ten musí byť niekde *upevnený* a sčitovať alebo prenášať takéto vektory nemá prirodzený zmysel), vektory rýchlostí dvoch hmotných bodov možno sčitovať, nech sú body akokoľvek ďaleko od seba. Kde by človek prišiel na taký čudný pojem, ako je vektorový súčin, nebyť, povedzme, elektromagnetického poľa vodiča a *pravidla pravej ruky?*

Napokon, ešte jedna vec stojí za zmienku. Predstava má veľmi dôležitú úlohu nielen v štádiu tvorby, ale aj pri dokazovaní a overovaní výsledkov — väčšiu, než sa to zvyčajne pripúšťa. Je známe, že starí páni infinitezimálneho počtu — Newton, Euler, d'Alembert a iní — sa nemýlili viac ako my, hoci nemali k dispozícii tak precízne deduktívne vybudovanú matematickú teóriu, akú máme dnes my. To sa často zdôvodňuje tým, že to boli géniovia. O tom iste nik nepochybuje, ale bude tu aj iný dôvod: mali veľmi bohaté a dobré predstavy — predovšetkým geometrické a fyzikálne. A to je veľmi mocný prostriedok na overovanie správnosti výsledkov — možno mocnejší, ako logicko-deduktívny. A vôbec, prečo ísť tak ďaleko do histórie: Je obdivuhodné, ako dobrí inžinieri alebo fyzici vedia vymýšľať nové matematické pojmy, vety a overovať si ich, mysliac pritom nie na prvé, či druhé derivácie, ale na rýchlosti, zrýchlenia, momenty a podobne. Alebo iný príklad: Definovať matematicky precízne tenzor nie je také ľahké a vyžaduje to pomerne vysokú matematickú erudíciu. Vie to dosť málo vyštudovaných matematikov a ešte menej inžinierov alebo iných matematikov. Napriek tomu vedia inžinieri a mechanici virtuózne počítať s tenzormi — práve preto, že si za nimi predstavujú napätia, deformácie atď. A čo je prekvapujúce — vedia to neporovnateľne zručnejšie, ako matematici, ktorí síce tenzor definovať vedia, ale zodpovedajúce predstavy nemajú.

Keď hovoríme o predstavách, zaujímavý je aj prípad geniálneho indického matematika RAMANUJANA, ktorý vymýšľal fantasticky komplikované číselne-teoretické a kombinatorické identity, ktoré nevedel dokazovať, ani odvodiť. Domnievam sa, že o všetkých sa po kratšom alebo dlhšom čase dokázalo, že sú správne. Ich dokazovaním sa nezaoberal nik iný, ako HARDY — vari najväčšia postava teórie čísel 20. storočia. Ako mohol Ramanujan tie identity vymýšľať? Hádam mal nejaké svojské predstavy, ktoré my nemáme...

Zaujímavý je aj príklad teórie grafov. Je to disciplína, ktorá by sa úplne dala vybudovať bez grafov (vrcholy sú prvky množiny a dvojice týchto prvkov s istými vlastnosťami...). Veď keď sa grafické úlohy riešia na počítači, grafická predstava aj tak musí ísť bokom a takto človek vlastne grafy do počítača zapisuje. Netreba však azda nijako osobitne vysvetľovať, že teória grafov by bez svojej grafickej interpretácie sotva mohla existovať.

Napokon, či sa nám to páči, alebo nie, skutočnosť je taká, že aj konečnú kontrolu prakticky každého zložitejšieho matematického postupu si robíme nie logicko-deduktívne, ale akosi globálne. Čo to značí? Je to akési vnorenie výsledku do subjektívnej intuitívnej axiomatiky, vytvorenej na základe štúdia množstva konkrétnych špeciálnych prípadov a analógií, čo nie je nič iné, ako predstavy.

Znamená to teda, že máme celú nádhernú deduktívnu stavbu našej súčasnej matematiky zavrhnúť a vrátiť sa k Eulerovým predstavám? Pravdaže, nie. Okrem všetkých veľmi vážnych dôvodov, ktoré všetci dobre poznáme a ktorých podstatou je to, že matematika ako každá iná veda má svoj vnútorný život, ktorý sa prirodzene vyvíja a do ktorého nemožno robiť hrubé zásahy, je tu možno ešte dôvod, ktorý práve súvisí s aplikáciami. Dnes sa totiž matematika používa na modelovanie mnohých iných a nielen fyzikálnych dejov. Modely tu nie sú zďaleka také priliehavé, ako modely fyzikálne, a preto ani overovanie výsledkov na základe predstáv nie je také presvedčivé.

Tak teda, čo je vektor? Šípka, prvok abstraktného vektorového priestoru, posunutie alebo trieda ekvivalencie? Myslím, že správna odpoveď je — všetko. Lingvisti hovoria, že koľko rečí vieš, toľkými životmi žiješ. Našu úvahu by sme mohli zakončiť voľnou parafrázou ich hesla: Čím bohatší register predstáv máš, tým lepšie veci rozumieš, a tým skôr niečo vymyslíš než ten, čo sa strnule drží jednej predstavy alebo formálnej definície.

Pavol Brunovský

Literatúra

1. Gedeonová, E.: Vektory očami algebraika. Matematické obzory, 8. Bratislava, ALFA 1975, s. 11 až 32.
2. Medek, V.: Vektory očami geometra. Matematické obzory, 9. Bratislava, ALFA 1976.
3. Franek, M.: Vektory očami stredoškolského profesora. Matematické obzory, 10. Bratislava, ALFA 1977, s. 1 až 18.
4. Zelinka, B.: Vektory očima funkcionálního analytika. Matematické obzory, 13. Bratislava, ALFA 1979.
5. Zelinka, B.: Vektory očima diskrétního matematika. Matematické obzory, 15. Bratislava, ALFA (v tlači).