[3] FEYNMAN R. P., HIBBS A. R.: *Quantum mechanics and path integrals.* McGraw-Hill Books Co., New York 1965, kap. 1.
[4] COMPTON A. H., DOAN R. L.: Proc. Nat. Acad. Sci. *11* (1925), 598.
[5] EPSTEIN P. S., EHRENFEST P.: Proc. Nat. Acad. Sci. *10* (1924), 133.
EHRENFEST P., EPSTEIN P. S.: Proc. Nat. Acad. Sci. *13* (1927), 400.
[6] HILLIER J.: Canad. J. Res. *A 17* (1939), 64.
[7] BORRIES B. v., RUSKA E.: Naturwiss. *27* (1939), 281.
[8] BOERSCH H.: Naturwiss. *28* (1940), 711.
[9] HILLIER J.: Phys. Rev. *58* (1940), 842.
[10] BOERSCH H.: Naturwiss. *28* (1940), 709.
[11] FAGET J., FERT CH.: Compt. Rend. Acad. Sci. Paris *243* (1956), 2028.
[12] FAGET J., FERT CH.: Cah. Phys. *11* (1957), 285.
[13] FAGET J.: Revue d'Optique *40* (1961), 347.
[14] DRAHOŠ V., KOMRSKA J. ve sborníku Fourth Czech. *Conf. on Electronics and Vacuum Physics.* (Vyd. PÁTÝ L.) NČSAV, Prague 1968, 544.
[15] FERT CH. ve sborníku *Traité de microscopie électronique.* (Vyd. MAGNAN C.) Herman, Paris 1961, 338, 359.
[16] MARTON L.: Science *118* (1953), 470; též ve sborníku *Proceedings of the Third International Conf. on Electron Microscopy 1954.* (Vyd. ROSS R.) Royal Microscopical Society, London 1956, 272.
[17] TONOMURA A., KOMODA T.: Journal of Electron Microscopy *22* (1973), 141.
[18] OHTSUKI M., ZEITLER E.: Ultramicroscopy *2* (1977), 147.
[19] MÖLLENSTEDT G., JÖNSSON C.: Z. Phys. *155* (1959), 472.
[20] JÖNSSON C.: Z. Phys. *161* (1961), 454.
JÖNSSON C.: Am. J. Phys. *42* (1974), 4, 423.
[21] DRAHOŠ V., DELONG A.: Nature *209* (1966), 801.
DRAHOŠ V., DELONG A.: Slaboproudý obzor *27* (1966), 494.
[22] MADER S., HERD S. R.: Journal of Applied Physics *38* (1967), 2396.
[23] MÖLLENSTEDT G. ve sborníku *Electron Microscopy 1980. Volume 1, Physics.* Published by the Seventh European Congress on Electron Microscopy Foundation, Leiden 1980, 2.

Bifurkácie negradientnych dynamických systémov

Pavol Brunovský, Milan Medveď, Bratislava

1. Úvod

Úvodom tohto článku, ktorý pojednáva o teórii singularít diferenciálnych rovníc a ich parametrických deformáciach, spomeňme teóriu singularít funkcií závislých na parametroch, resp. Thomovu teóriu katastróf. Táto teória totiž už vošla do povedomia matematikov a vďaka sérii pekných článkov [19, 20, 21, 34] si o nej mali možnosť urobiť dobrý obraz aj čitatelia Pokrokov. Či už má na tom zásluhu atraktívny názov „katastrófa" alebo nie, popularita tejto teórie dokonce presiahla hranice matematiky a stala sa akousi „módnou" matematickou teóriou. To samozrejme neuberá nič na hĺbke a kráse matematického podkladu teórie katastróf.

Ako to už býva, vlnu nadšenia vystriedala vlna kritiky, predovšetkým aplikácií teórie katastróf [30, 32]. Našim cieľom nie je pripojiť sa týmto článkom k polemike okolo teórie katastróf a tým rozmnožiť už aj tak dosť bohatú literatúru o nej. Aj keď sú jeho východzím miestom dva predmety kritiky teórie katastróf, článok je v prevažnej miere matematický a iba málo sa dotýka jej filozofickej interpretácie.

Čo sú tie dva predmety kritiky? Thomova teória singularít funkcií klasifikuje typické funkcie závislé od (nie viac ako štyroch) parametrov do tried ekvivalencie (ktorých je 7). Týmto funkciam zodpovedajú gradientné dynamické systémy závislé od parametrov. Ich dynamické vlastnosti určujú vlastnosti procesu definovaného v teórii katastróf prostredníctvom týchto funkcií. Poznamenajme, že gradientný dynamický systém je definovaný diferenciálnou rovnicou (vektorovým poľom)

$$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = f(x)\,,$$

kde f je gradientom nejakej funkcie, t.j. $f(x) = -\nabla F(x)$. Funkcia F sa v teórii katastróf nazýva potenciálovou funkciou. Nuž a prvý predmet kritiky je, že u vačšiny interpretácií niet vlastne presvedčivých dôvodov predpokladať, že systém je gradientný a nie je jasné čo má byť onou potenciálovou funkciou. A druhý je, že pojem stability, ktorý sa v teórii singularít funkcií používa, nezodpovedá intuícii a nie je ekvivalentný s oveľa prirodzenejším pojmom štrukturálnej stability, zavedenej Andronovom a Pontrjaginom roku 1936.

Nebudeme tu rozoberať otázku, či je spomínaná kritika oprávnená. Miesto toho má náš článok dať predstavu o tom, nakoľko sa dá vybudovať teória príbuzná Thomovej teórii bez predpokladu gradientnosti a s pojmom štrukturálnej stability ako základom klasifikácie singularít, alebo ako sa v tejto teórii hovorí, bifurkácií. Podobne ako v Thomovej teórii singularít sa nebudeme snažiť o klasifikáciu všetkých možných bifurkácií, ale iba o klasifikáciu množiny generických bifurkácií, ktorá sa dostane vylúčením výnimočných, „patologických" prípadov.

Práce Morseove a Whitneyove o teórii singularít funkcií a zobrazení priviedli R. Thoma na myšlienku generickej klasifikácie zobrazení, ktorú neskôr S. Smale aplikoval na teóriu dynamických systémov (bližšie o úspechoch a neúspechoch tejto teórie sa možno dočítať aj v článku [6]). Pojmy štrukturálna stabilita a generická vlastnosť možno použiť aj na klasifikáciu iných objektov. Vo všeobecnosti ak S je topologicky priestor, ε je relácia ekvivalencie na S, potom prvok $x \in S$ sa nazýva štrukturálne stabilný (vzhľadom k ε), ak existuje také jeho okolie $O(x)$, že každé $y \in O(x)$ je v ε-relácii s x. Vlastnosť P prvkov množiny S sa nazýva generická, ak množina prvkov z S majúcich vlastnosť P obsahuje reziduálnu množinu, t.j. množinu, ktorá je spočitateľným prienikom otvorených, hustých podmnožín množiny S. Napríklad, ak S je Banachov priestor, je každá reziduálna podmnožina v S hustá v S. Teda kým štrukturálna stabilita znamená stabilitu vzhľadom na aproximácie, generičnosť vlastnosti P znamená, že „skoro všetky" prvky z S majú vlastnosť P. Dvoma konkretizáciami tejto schémy sú spomínaný Andronovov a Pontrjaginov pojem štrukturálnej stability, resp. Thomov pojem stability. Tieto pojmy vychádzajú z rozličných (neekvivalentných) definícií ekvivalencie.

2. Lokálna štruktúra toku vektorového poľa v okolí kritického bodu

Časti tohoto odseku sa prekrývajú s článkami [6], [21]; v prvom z nich možno nájsť aj motivácie viacerých základných pojmov kvalitatívnej teórie diferenciálnych rovníc.

Vektorové pole F (VP) triedy C^r na C^{r+1}-variete M dimenzie n je C^r-zobrazenie, ktoré zobrazí každý bod $x \in M$ do bodu z tangenciálneho priestoru T_xM k variete M v bode x. Teda $F\colon M \to \bigcup_{x \in M} T_xM$, $F(x) \in T_xM$ pre každé $x \in M$.

V snahe nekomplikovať výklad, budeme často predpokladať $M = R^n$, V tomto prípade je vektorové pole F v tvare $F(x) = (x, f(x))$, $x \in R^n$, kde $f : R^n \to R^n$ a definuje diferenciálnu rovnicu (DR)

$$\dot{x} = f(x)\,. \tag{1}$$

Vektorové pole F na R^n sa nazýva gradientné, ak existuje C^{r+1} funkcia $g : R^n \to R$ taká, že $f = -\nabla g$, t.j. $f_i(x) = -\partial g(x)/\partial x_i$.

Teraz si zavedieme niektoré základné pojmy z teórie vektorových polí. Integrálna krivka vektorového poľa F prechádzajúca bodom $x \in M = R^n$ je C^r-krivka $\alpha : I \to M$ ($I \subset R$ je otvorený interval, $0 \in I$), pre ktorú je $\alpha(0) = x$ a $\dot{\alpha}(t) = (\alpha(t), \mathrm{d}\alpha(t)/\mathrm{d}t) = F(\alpha(t)) = (\alpha(t), f(\alpha(t))$ ($\dot{\alpha} : I \to TM$, $\dot{\alpha}(t) \in T_{\alpha(t)}M$). Krivka α je teda daná riešením diferenciálnej rovnice (1) so začiatočnou podmienkou $\alpha(0) = x$. Budeme predpokladať, že pre každé $x \in M$ je $I = R$. Potom množina všetkých integrálnych kriviek vektorového poľa F definuje C^r-zobrazenie $\varphi : R \times M \to M$ (jeho hodnoty budeme značiť $\varphi(t, x)$, alebo $\varphi_t(x)$), ktoré má tieto vlastnosti: 1. $\varphi_t : M \to M$ je C^r-difeomorfizmus pre všetky $t \in M$, 2. $\varphi_0 : M \to M$ je identita, 3. Pre každé t, $s \in R$ platí $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$. Zobrazenie φ sa nazýva dynamický systém alebo tok vektorového poľa F, resp. tok diferenciálnej rovnice (1). Množina $\gamma = \gamma_x = \{\varphi_t(x) : t \in R\}$ sa nazýva trajektória diferenciálnej rovnice (orbita) vektorového poľa F prechádzajúca bodom x. Trajektória γ_x sa nazýva periodická (uzavretá) s periodou T, ak $t \to \varphi_t(x)$ je periodické zobrazenie s periódou T.

Pri lokálnej klasifikácii DR sa študujú okolia kritických bodov (rovnovážnych stavov) a uzavretých orbít. Bod $x_0 \in M$ sa nazýva kritický, ak $\varphi_t(x_0) = x_0$ pre všetky $t \in R$, čo nastáva práve vtedy, ak $f(x_0) = 0$. Kritický bod x_0 sa nazýva stabilný, ak $\lim_{t\to\infty} \varphi_t(x) = x_0$ pre x z okolia x_0. Uzavretá orbita γ sa nazýva stabilná, ak množina ω-limitných bodov trajektórie každého bodu y z okolia γ je rovná γ. Bod x nazývame ω-limitným bodom trajektórie bodu y, ak existuje postupnosť $t_k \to \infty$ taká, že $\lim \varphi_{t_k}(y) = x$. Kritický bod a uzavretá orbita sa nazývajú nestabilné, ak nie sú stabilné.

Všimnime si, že gradientný dynamický systém nepripúšťa periodické trajektórie. Totiž z $f = -\nabla g$ vyplýva

$$(\mathrm{d}g(\varphi(t, x))/\mathrm{d}t)_{t=0} = \nabla g(x)\, f(x) = -\,\|f(x)\|^2\,,$$

čo značí, že funkcia f ostro klesá pozdĺž trajektórie, pokiaľ x nie je kritickým bodom. V dôsledku toho sa trajektória nikdy nemôže vrátiť do východzieho bodu (ba ani do jeho dostatočne malého okolia), a to je práve skutočnosť, vďaka ktorej sú gradientné systémy výrazne jednoduchšie.

Najskôr sa budeme zaujímať o lokálnu klasifikáciu vektorových polí v okoliach kritických bodov. Nech $\Gamma^r = \Gamma^r_n(r \leqq \infty)$ je množina všetkých C^r-vektorových polí na R^n s kritickým bodom $x_0 = 0$. Budeme predpokladať, že r je dostatočne veľké. Uvažujme Γ^r ako topologický priestor s tzv. slabou C^r-topológiou, čo je vlastne topológia bodovej konvergencie všetkých derivácií do rádu r, ktorá je rovnomerná na každom kompakte (pozri [10], [16], [21]). V priestore s touto topológiou je každá reziduálna podmnožina v Γ^r hustá v Γ^r.

Vektorové polia F_1, $F_2 \in \Gamma^r$ sa nazývajú ekvivalentné v O, ak existuje okolie U bodu O také, že $F_1|_U = F_2|_U$. Triedu ekvivalentných vektorových polí v O, reprezentovanú vektorovým poľom F nazývame zárodok vektorového poľa F v bode O a značíme ju F. Množinu všetkých takých zárodkov značíme G^r_n.

Predchádzajúca definícia sa týkala len vektorového poľa, resp. pravej strany DR (1) a je známa z teórie o zobrazeniach (pozri [21]). V nasledujúcej definícii sa berie do úvahy už aj tok VP. Zárodky F_1, $F_2 \in G^r_n$ sa nazývajú orbitálne C^0-ekvilanentné, ak pre ich reprezentácie platí: Existujú okolia U a V bodu $O \in R^n$ a homeomorfizmus $h : U \to V$ taký, že ak $x \in U$ a $\varphi^{F_1}_{[0,t]}(x) \subset U$ pre nejaké $t > 0$, potom existuje $t' > 0$ také, že $h(\varphi^{F_1}_{[0,t]}(x)) = \varphi^{F_2}_{[0,t']}(h(x))$ (φ^{F_1}, φ^{F_2} sú toky pre F_1, resp. F_2). Vektorové polia, resp. diferenciálne rovnice sa nazývajú (orbitálne C^0)-ekvivalentné, ak sú orbitálne C^0-ekvivalentné ich zárodky.

Ak $F \in G^r_n$ má lokálnu súradnicovú reprezentáciu $F(x) = (x, f(x))$, potom príslušnú DR (1) možno v okolí počiatku písať v tvare

$$\dot{x} = f(x) = Ax + h(x)\,, \tag{2}$$

kde $A = \mathrm{D}f(0)$ – diferenciál zobrazenia f v bode 0, $h(x) = o(\|x\|)$. Vo vhodne volených súradniciach je $A = \operatorname{diag}(A^-, A^0, A^+)$, kde vlastné čísla matice $A^-(A^0, A^+)$ sú vľavo (na, vpravo) od imaginárnej osi. Ak L^-, L^0, L^+ sú zodpovedajúce invariantne podpriestory, potom $R^n = L^+ \oplus L^0 \oplus L^+$.

Množina $L \subset R^n$ sa nazýva invariantná vzhľadom na tok DR (1), ak $\varphi_t(L) \subset L$ pre všetky $t \in R$. Priestory L^-, L^0, L^+ sú invariantne vzhľadom na tok φ^A linearizácie DR (2)

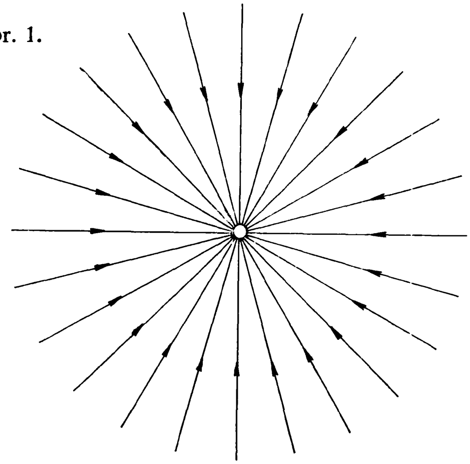
$$\dot{x} = Ax\,. \tag{3}$$

Priestor L^- (L^+) sa nazýva stabilný (nestabilný). Tento názov je vyjadrením vlastnosti toku na L^- (L^+): Ak $x \in L^-$ (L^+), potom $\varphi^A_t(x) \to 0$ pre $t \to \infty$ ($t \to -\infty$). Priestor L^0 sa nazýva centrálny; tok φ^A na L^0 môže byť vo všeobecnosti dosť komplikovaný (pozri [2]). Napríklad, ak $n = 2$ môžu nastať tieto prípady ($\lambda_{1,2}$ sú vlastné čísla matice A)

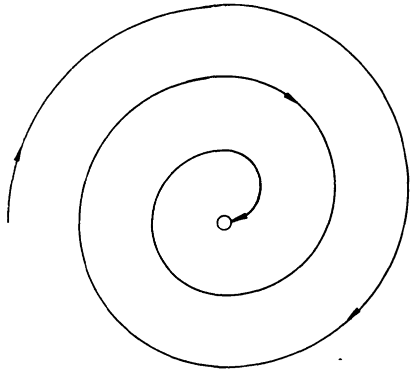
1. $\dim L^- = 2$
2. $\dim L^+ = 2$
3. $\dim L^- = \dim L^+ = 1$
4. $\dim L^- = \dim L^0 = 1$
5. $\dim L^+ = \dim L^0 = 1$
6. $\dim L^0 = 2$

(K tomu pozri obr. 1 – 6 na nasledujúcich stránkach.)

Obr. 1.

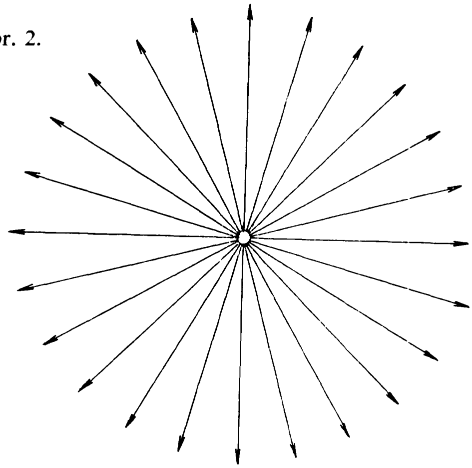


stabilný uzol
($\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$)

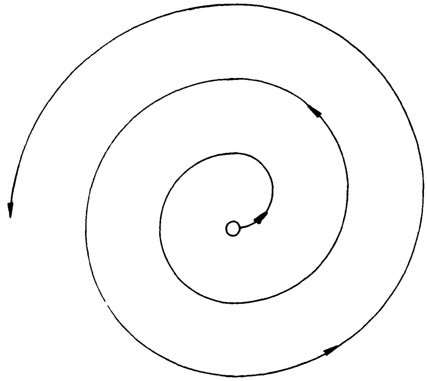


stabilný fókus
($\lambda_{1,2} = \omega_1 \pm i\omega_2$, $\omega_1 < 0$)

Obr. 2.

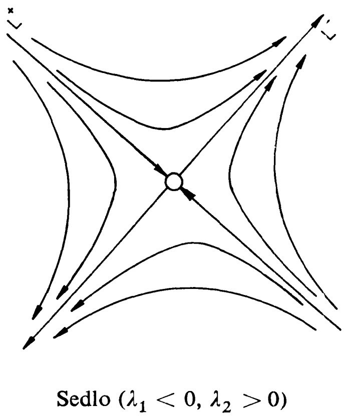


nestabilný uzol
($\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$)



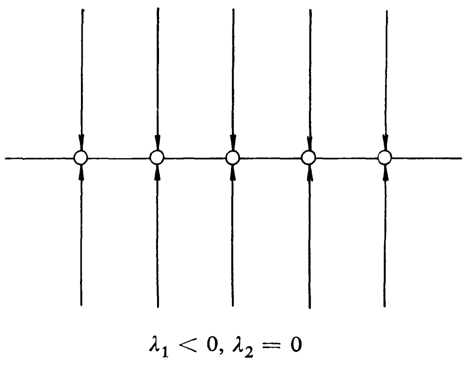
nestabilný fókus
($\lambda_{1,2} = \omega_1 \pm i\omega_2$, $\omega_1 > 0$)

Obr. 3.

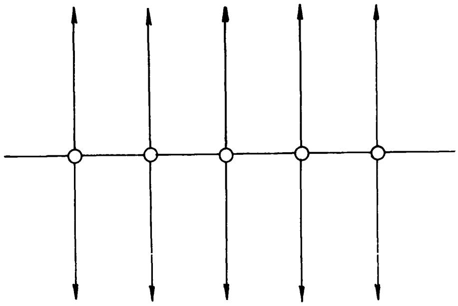


Sedlo ($\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$)

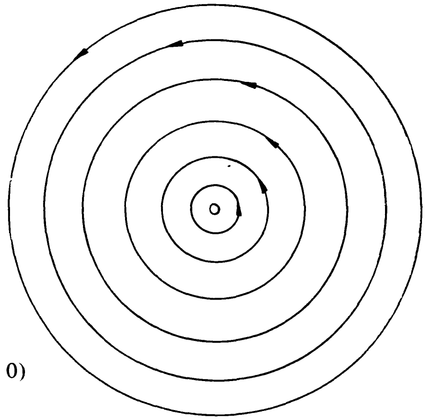
Obr. 4



$\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 = 0$



Obr. 5
$\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$



Obr. 6. Centrum.
$(\lambda_{1,2} = \pm i\omega, \omega \neq 0)$

V súradniciach, v ktorých je $A = \operatorname{diag}(A^-, A^0, A^+)$, môžeme DR (2) písať v tvare systému rovníc

$$(4) \qquad \dot{x}_- = A^- x_- + h_-(x), \quad \dot{x}_0 = A^0 x_0 + h_0(x), \quad \dot{x}_+ = A^+ x_+ + h_+(x),$$

kde $x = (x_-, x_0, x_+)$.

Nasledujúca veta hovorí, že vplyvom nelineárnych členov v rovnici (2) sa invariantne priestory nezničia, iba se deformujú.

Veta o invariantnych varietách ([1, Veta 27. 1]). *Ak* $f \in C^r$, L^- L^0, L^+ *sú invariantne podpriestory matíc* A^-, A^0, A^+, *potom existujú* C^{r-1}*-variety* W^- (*stabilná*), W^0 (*centrálna*), W^+ (*nestabilná*) *také, že* L^- (L^0, L^+) *sa dotýka variety* W^- (W^0, W^+) *v bode* 0 *a platí*:

(1) *pre každé* $x \in W^-$ (W^+) *je* $\lim \varphi_t(x) = 0$ $(t \to -\infty)$

(2) *lokálne v okolí bodu* 0 *sú variety* W^-, W^0, W^+ *dané zobrazeniami triedy* C^{r-1}

$$\begin{aligned} W^- &= \{(x_-, x_0, x_+) : x_+ = v^-(x_-), x_0 = w^-(x_-)\}, \\ W^+ &= \{(x_-, x_0, x_+) : x_- = v^+(x_+), x_0 = w^+(x_+)\}, \\ W^0 &= \{(x_-, x_0, x_+) : x_- = v(x_0), x_+ = w(x_0)\}. \end{aligned}$$

Kým v prípade $L^0 = \{0\}$ je situácia pomerne jednoduchá, prípad $L^0 \neq \{0\}$ je oveľa zložitejší. Nasledujúca veta hovorí, že pre topologickú klasifikáciu toku DR (2) je rozhodujúce jeho správanie na centrálnej variete.

Veta o redukcii na centrálnu varietu ([33, Veta 1]). *Ak* W^-, W^0, W^+ *sú invariantne variety diferenciálnej rovnice* (4), *potom existuje zobrazenie* $g_0 = g_0(x_0)$ *také, že DR* (4) *je lokálne orbitálne* C^0*-ekvivalentná s DR* (5)

$$(5^-)\ \dot{x}_- = -x_-, \qquad (5^0)\ \dot{x}_0 = A^0 x_0 + g_0(x_0), \qquad (5^+)\ \dot{x}_+ = x_+$$

$(g_0(x_0) = h_0(v(x_0), x_0, w(x_0)))$.

Podľa vety o redukcii, DR (4) sa rozpadá na tri nezávislé rovnice, z ktorých (5^-) a (5^+) majú zrejmé topologické štruktúry trajektórií, no DR (5^0) môže byť veľmi komplikovaná. Je samozrejmé, že zložitosť systému (5) rastie s dimenziou x_0. V prípade DR závislých na parametroch sa nutne stretneme s DR tvaru (5) s dim $L^0 \geqq 1$, genericky je však dim $L^0 \leqq$ dimenzia parametra. Veta o redukcii na centrálnu varietu má teda pre klasifikáciu DR závislých na parametroch podobný význam ako veta o redukcii z Thomovej teórie ([21]).

V zmysle definície štrukturálnej stability z úvodu, DR (1) je (lokálne) C^0-štrukturálne stabilná, ak existuje také okolie $U(f)$ zobrazenia f v slabej C^r-topológii, že pre ľubovoľné $g \in U(f)$ je diferenciálna rovnica $\dot{y} = g(y)$ (lokálne) orbitálne C^0-ekvivalentná s DR (1). Analogicky možno definovať (lokálnu) orbitálnu C^0-štrukturálnu stabilitu v okolí uzavretej orbity.

Kritický bod x_0 sa nazýva hyperbolický, ak $L^0 = \{0\}$. V uvedenom príklade lineárnych diferenciálnych rovníc pre $n = 2$ je $x_0 = 0$ hyperbolický kritický bod len v prípadoch 1., 2., 3.

Bezprostredným dôsledkom vety o redukcii je

Veta. *Diferenciálna rovnica* (1) *je lokálne C^0-štrukturálne stabilná v okolí kritického bodu x_0 práve vtedy, ak bod x_0 je hyperbolický.*

Veta (K-S, I)*). *Existuje otvorená hustá podmnožina $\Gamma_H \subset \Gamma^r(1 \leqq r \leqq \infty)$ taká, že ak $f \in \Gamma_H$ potom $x_0 = O$ je hyperbolický kritický bod diferenciálnej rovnice* (1), *tj. vlastnosť byť hyperbolický je generická vlastnosť v priestore Γ^r* (pozri [1, Veta 30.1]).

Dôsledok. *Lokálna C^0-štrukturálna stabilita (vzhľadom ku kritickým bodom) je generická vlastnosť v priestore Γ^r $(1 \leqq r \leqq \infty)$.*

Poznámky: (1) Dôsledok vo všeobecnosti neplatí pre globálnu C^0-štrukturálnu stabilitu.

(2) Veta neplatí pre C^1-štrukturálnu stabilitu (ani v Γ^1, pozri [4, Hlava 3]).

3. Parametrické rozvinutia vektorového poľa a generické bifurkácie kritických bodov

Teraz sa budeme zaoberať parametrizovanými vektorovými poliami (PVP), resp. parametrizovanými DR (PDR). Ak dimenzia parametra je k, hovoríme tiež o k-parametrických systémoch VP, resp. DR.

Zobrazenie $F : M \times P \to TM$ (P je varieta dimenzie k) také, že pre každé $\mu \in P$ je $F_\mu : M \to TM$ $(F(x) = F(x, \mu)$, $x \in M)$ vektorové pole na M, sa nazýva parametrizované VP (k-parametrický systém VP). V prípade $M = R^n$, $P = R^k$ je $F(x, \mu) = (x, g(x, \mu))$, $(x, \mu) \in R^n \times R^k$, a teda toto zobrazenie definuje k-parametrický systém diferenciálnych rovníc

$$(6) \qquad \dot{x} = g(x, \mu)\,.$$

Keďže nám pôjde o lokálnu klasifikáciu PVP, budeme sa zaoberať parametrizovanou

*) Časť vety Kupku—Smalea.

diferenciálnou rovnicou (6), pričom budeme predpokladať, že bod $x_0 = 0$ je kritický bod diferenciálnej rovnice pre $\mu = \mu_0 = 0$. Bod (x_0, μ_0) budeme nazývat kritickým bodom parametrizovanej diferenciálnej rovnice (6).

Označme $H_n^r = H_n^r(k)$ $(1 \leqq r \leqq \infty)$ množinu všetkých C^r parametrizovaných diferenciálnych rovníc tvaru (6) s dim $\mu = k$, so slabou C^r-topológiou. Analogicky ako v prípade DR, môžeme definovať zárodok v O aj pre PDR. Množinu takýchto zárodkov budeme označovať $G_n^r(k)$.

Ak $F \in \Gamma_n^r$, potom zárodok $\tilde{\mathscr{V}} \in G_n^r(k)$ s reprezentáciou $\mathscr{V} : U \to \Gamma_n^r$ takou, že $\mathscr{V}(0) = F$ (kde U je okolie bodu $0 \in R^k$), sa nazýva k-parametrické rozvinutie (unfolding) zárodku F. Okolie U sa nazýva báza rozvinutia.

Aby sme mohli definovať ekvivalenciu rozvinutí, definujme najskôr (lokálnu C^0) ekvivalenciu parametrizovaných diferenciálnych rovníc. Dve rozvinutia budú potom ekvivalentné vtedy, ak ich reprezentácie budú ekvivalentné ako PDR.

Dve PDR definované na okoliach bodu $(0, 0) \in R^n \times R^k$ sa nazývajú lokálne C^0-ekvivalentné v bode $(0, 0)$, ak existujú okolia V_1, V_2 bodu 0 v R^n, U_1, U_2 bodu 0 v R^k a homoemorfizmus $h : V_1 \times U_1 \to V_2 \times U_2$, zobrazujúci roviny konštantnosti parametra na roviny konštantnosti parametra tak, že trajektórie prvej diferenciálnej rovnice vo V_1 s pevnou hodnotou parametra v U_1 sa zobrazia na trajektórie druhej diferenciálnej rovnice vo V_2 so zodpovedajúcou hodnotou parametra v U_2.

V tejto definícii je veľmi dôležité to, že okolia V_1, V_2 sú dané rovnomerne vzhľadom na parameter. Ďalej si všimnime, že ak ide o gradientne systémy, nie je táto definícia totožná s definíciou ekvivalencie potenciálových funkcií, ktoré ich definujú, používanou v teórii singularít funkcií. Aj keď u jednoduchých singularít sú tieto ekvivalencie ekvivalentné, nemusí to tak byť u zložitejších ([11], [12]).

Nech $\tilde{\mathscr{V}}$ je rozvinutie vektorového poľa $F \in \Gamma_n^r$ s bázou $U \subset R^k$. Zobrazenie $\psi : W \to U$, kde W je okolie 0 v R^1, $\psi(0) = 0$, definuje nové rozvinutie $\psi^*\tilde{\mathscr{V}}$, definované ako zárodok PVP $\mathscr{V} \circ \psi$. Ak ψ je triedy C^r, hovoríme že rozvinutie $\psi^*\tilde{\mathscr{V}}$ je C^r-indukované z rozvinutia $\tilde{\mathscr{V}}$.

Rozvinutie $\tilde{\mathscr{V}}$ vektorového poľa $F \in \Gamma_n^r$ sa nazýva (topologicky orbitálne) verzálne, ak každé rozvinutie vektorového poľa F je lokálne C^0 topologicky ekvivalentné rozvinutiu C^0-indukovanému z $\tilde{\mathscr{V}}$.

Bod $\mu_0 \in R^k$ sa nazýva bifurkačný pre PDR $g \in H_n^r$ (tj. PDR tvaru (6)), ak pre ľubovoľne malé okolie U bodu μ_0 existuje také $\mu \in U$, že DR $\dot{x} = g(x, \mu_0)$ a $\dot{y} = g(x,\mu)$ nie sú orbitálne C^0-ekvivalentné v žiadnom okolí bodu 0. Bifurkačný diagram kritických bodov danej PDR $g \in H_n^r$ v okolí bodu 0 je množina všetkých jej bifurkačných bodov. Zmena topologickej štruktúry trajektórií (triedy C^0-ekvivalencie) pri zmene parametra sa nazýva bifurkácia.

Ako dôsledok vety o lokálnej štrukturálnej stabilite a vety (K-S, I) dostávame, že pre pevne zvolenú hodnotu parametra μ_0 môžeme ľubovoľne malou zmenou zodpovedajúcej rovnice dosiahnuť, aby táto hodnota nebola bifurkačnou. Vo všeobecnosti však nie je možné to urobiť tak, aby žiadna z hodnôt parametra nebola bifurkačnou. Napríklad, ak pre jednorozmernú diferenciálnu rovnicu pre $\mu = \mu_1$ je lineárna časť rovnice rovná $-x$ a pre $\mu = \mu_2 > \mu_1$ je rovná $+x$, potom pre ľubovoľne malú aproximáciu danej PDR existuje $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$ také, že zodpovedajúca DR má nulovú lineárnu časť, tj. je bifurkačná hodnota PDR (aproximácie). Prirodzené je teda položiť si otázku, analogickú otázke, na ktorú v prípade gradientnych DR zodpovedá Thomova teória singularít: S akými typmi nehyperbolických kritických bodov, resp. s akými štruktúrami trajektórii v ich okoliach sa môžeme genericky stretnúť pre rôzne dimenzie stavových priestorov a priestorov parametrov. Táto otázka je formulovaná globálne čo do parametra, avšak podobne ako v teórii singularít funkcií, dostaneme na ňu odpoveď, ak pre každé k, n nájdeme generickú množinu zárodkov k-parametrických systémov diferenciálnych rovníc s kritickým bodom $(0, 0)$, ktorú dokážeme klasifikovať do konečného počtu tried ekvivalencie. Naviac sa samozrejme budeme snažiť nájsť verzálne diferenciálne rovnice v každej triede a pomocou nej bifurkačné diagramy zodpovedajúcich bifurkácií. Skôr než pristúpime k týmto otázkam, sformulujme si vetu o invariantnych varietách a vetu o redukcii pre PDR. Pre tento účel môžeme PDR chápať ako $(k + n)$-rozmernú DR ($k = \dim \mu$) so stavovou premennou $z = (x, \mu)$, ktorú dostaneme tak, že k rovnici (6) pridáme rovnicu $\dot{\mu} = 0$, teda

$$\dot{z} = \hat{g}(z)\,, \tag{7}$$

kde $\hat{g}(z) = (0, 0, \ldots, 0, g(z))$ (počet núl $= \dim \mu$). Ak $\hat{z}_0 = (x_0, \mu_0) = (0, 0)$ je kritický bod PDR (6), potom $\hat{z}_0$ je kritický bod DR (7). Vo vhodne zvolených súradniciach je $B = \mathrm{D}\hat{g}(0) = \operatorname{diag}(B^-, B^0, B^+)$, $B^0 = \operatorname{diag}(0, B^0)$ (0 je nulová matica typu $k \times k$), B^-, B^0, B^+ majú tie isté vlastnosti ako matice A^-, A^0, A^+ zo systému (4) a tak môžeme DR (7) vyjadriť v okolí bodu $\hat{z}_0 = (0, 0)$ v tvare systému (8) $\dot{z}_- = B^- z_- + g_-(z)$, $\dot{z}_0 = B^0 z_0 + g_0(z)$, $\dot{z}_+ = B^+ z_+ + g_+(z)$, kde $z = (z_-, z_0, z_+)$, tj. PDR (6) má v okolí bodu $(x_0, \mu_0) = (0, 0)$ tvar systému

$$\dot{x}_- = B^- x_- + H_-(x, \mu)\,, \quad \dot{x}_0 = B^0 x_0 + H_0(x, \mu)\,, \quad \dot{x}_+ = B^+ x_+ + H_+(x, \mu)\,, \tag{9}$$

kde $x = (x_-, x_0, x_+)$.

Veta o rozšírení invariantnych variet na parametrizované diferenciálne rovnice. *Nech $g \in C^r$, $(x_0, \mu_0) = (0, 0)$ je kritický bod PDR (6) a W^-, W^0, W^+ sú invariantne variety DR $\dot{x} = g(x, 0)$ J kritickom bode $x_0 = 0$. Potom existujú C^{r-1}-variety V^- (stabilná), V^0 (centrálna), V^+ (nestabilná) také, že V^- (V^0, V^+) sa dotýka variety $L^- \times R^k$ ($L^0 \times R^k$, $L^+ \times R^k$) (predpokladáme $\mu \in R^k$) a platí:*

(1) *pre každé $(x, \mu) \in V^-$ (V^+) je* $\lim \varphi_t(x, \mu) = 0$ $(t \to -\infty)$,
(2) *lokálne v okolí bodu $(0, 0) \in R^n \times R^r$ sú variety V^-, V^0, V^+ dané C^{r-1}-zobrazeniami*

$$V^- = \{(x_-, x_0, x_+, \mu) : x_+ = v^-(x_-, \mu), x_0 = w^-(x_-, \mu)\},$$
$$V^+ = \{(x_-, x_0, x_+, \mu) : x_- = v^+(x_+, \mu), x_0 = w^+(x_+, \mu)\},$$
$$V^0 = \{(x_-, x_0, x_+, \mu) : x_- = v(x_0, \mu), x_+ = w(x_0\ \mu)\}$$

$V^{\pm}{}_{|\mu=0} = W^{\pm}$ $V^0{}_{|\mu=0} = W^0$. $\dim V^- = \dim L^- + k$, $\dim V^0 = \dim L^0 + k$, $\dim V^+ = \dim L^+ + k$.

Veta o redukcii na centrálnu varietu pre parametrizované diferenciálne rovnice. *Ak V^-, V^0, V^+ sú invariantne variety PDR (9), potom existuje C^{r-1}-zobrazenie $G_0 = G_0(x_0, \mu)$ také, že PDR (9) je lokálne C^0-ekvivalentná s PDR*

(10) $$\dot{x}_- = -x_-\,, \quad \dot{x}_0 = B^0 x_0 + G_0(x_0, \mu)\,, \quad \dot{x} = x\,.$$

Dôsledok 1. *Dve PDR sú lokálne C^0-ekvivalentné, ak sú lokálne C^0-ekvivalentné ich redukcie na centrálnu varietu a ich stabilné (a tým aj nestabilné) variety majú rovnaké dimenzie.*

Dôsledok 2. *PDR je verzálna práve vtedy, ak jej redukcia na centrálnu varietu je verzálna.*

Nasledujúca veta ukazuje, ake typy lineárnych častí jednoparametrických systémov DR sa genericky vyskytujú.

Veta (o singularitách kritických bodov kodimenzie 1). *Existuje otvorená hustá podmnožina $\mathscr{H}_1 \subset H^r_n(1)$ taká, že pre PDR z $\mathscr{H}_1$ nastáva jeden z nasledujúcich prípadov:*

(1) $L^0 = \{0\}$, t.j. *kritický bod* $(0, 0)$ *je hyperbolický,*

(2) $\dim L^0 = 1$, *vtedy má matica B jedno vlastné číslo $\lambda = 0$ násobnosti 1 a ostatné vlastné čísla s nenulovou reálnou časťou (predpokladáme, že PDR je v tvare* (9)),

(3) $\dim L^0 = 2$, *vtedy má matica B (a teda B^0) dvojicu rýdzo imaginárnych vlastných čísel a ostatné vlastné čísla s nenulovou reálnou časťou.*

Veta vyplýva zo skutočnosti, že matice linearizácií DR, ktoré nesplňajú ani jednu z podmienok (1), (2), (3), teda napr. majú viacnásobné vlastné číslo 0, tvoria v priestore všetkých matíc daných rozmerov algebraickú varietu (množinu spoločných nulových bodov konečného počtu polynomov) kodimenzie 2. Použitím Whitneyovej vety o rozklade algebraickej variety na diferencovateľné variety ([18, Kap. 5]) a Thomovej vety o tranzverzalite ([10, Veta 4.9], [16, Veta 2.1]) možno z toho vyvodiť, že malými zmenami krivky v priestore matíc sa tejto variete možno vyhnúť.

Vďaka vete o redukcii, môžeme teda štúdium generických bifurkácií jednoparametrických systémov DR redukovať, bez ohľadu na dimenziu stavového priestoru, na dimenziu 1 alebo 2.

Možno dokázať existenciu takej otvorenej hustej podmnožiny $\mathscr{H}_2 \subset \mathscr{H}_1$, že PDR z $\mathscr{H}_2$ je lokálne (v okolí kritického bodu $(x_0, \mu_0) = (0, 0)$) C^0-ekvivalentná jednému z nasledujúcich typov PDR ([3], [4, Hlava 6, § 33], [23], [24], [25]):

(I) $\dot{x}_- = -x_-, \dot{x}_+ = x_+$
(ak $L^0 = \{0\}$).

(II) $\dot{x}_0 = x_0^2 + \mu(\mathrm{II}^0), \dot{x}_- = -x_-, \dot{x}_+ = x_+$
kde $\dim x_0 = 1$
(ak $\dim L^0 = 1$).

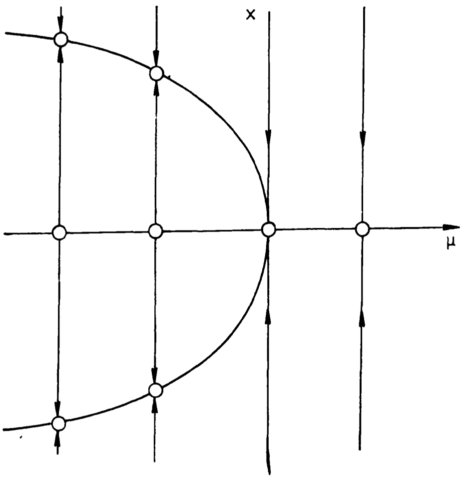
(III) $\dot{x}_- = -x_-, \dot{x}_+ = x_+,$
$\dot{z} = z(\mathrm{i} + \mu + \delta z\bar{z})$ (III$_1$)-komplexná reprezentácia,
kde $z = x_1 + \mathrm{i}x_2$, $\delta = \pm 1$,
$\dot{x}_1 = \mu x_1 - x_2 + \delta x_1(x_1^2 + x_2^2)$, (III$_2$)-reálna reprezentácia
$\dot{x}_2 = x_1 + \mu x_2 + \delta x_2(x_1^2 + x_2^2)$
(ak $\dim L^0 = 2$).

Naviac zárodky PVP reprezentované týmito typmi PVP sú verzálne ([4], [33]).

Ako vyzerajú trajektórie PDR (I)–(III) v okolí kritického bodu a bifurkačnej hodnoty parametra?

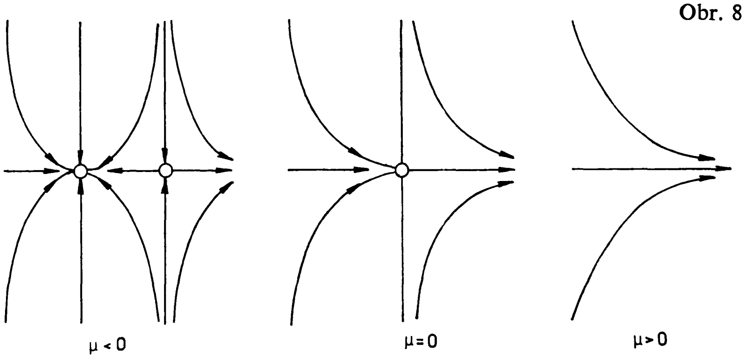
(I) Každej hodnote parametra zodpovedá tá istá DR, ktorej kritický bod $(x_-^0, x_+^0) = (0, 0)$ je hyperbolický. Prípad $\dim x_- = \dim x_+ = 1$ (sedlo) sme už rozoberali.

(II) Kritické body PDR (II) ležia na podvariete $x_- = 0$, $x_+ = 0$. Redukcia na centrálnu varietu je rovnica (II^0), a preto si stačí všimnúť bifurkácie tejto rovnice v okolí kritického bodu $(x_0, \mu_0) = (0, 0)$. Množina kritických bodov DR (II^0) je parabola (Obr. 7).



Obr. 7.
Fold.

Ak napríklad $x = (x_-, x_0) \in R^2$, t.j. $L^+ = \{0\}$, $\dim L^- = 1$, dostávame bifurkáciu znázornenú na obr. 8.



uzol-sedlo sedlo-uzol žiaden kritický bod

Obr. 8.

(III) Ak $z = \varrho\, e^{i\vartheta}$, potom PDR (III$_1$) môžeme v súradniciach (ϱ, ϑ) písať v tvare

$$\dot{\varrho} = \varrho(\mu + \delta\varrho^2), \tag{III$_3$}$$

$$\dot{\vartheta} = 1. \tag{III$_4$}$$

Pre štúdium topologickej štruktúry trajektórií je dôležitá len DR (III_3) (ϑ má len význam parametra pri parametrizácii trajektórií).

Rovnica (III_3) má pre $\mu\delta < 0$ dva nezáporné kritické body $K_1 = 0$ — zodpovedá mu kritický bod (0, 0) PDR (III_2), $K_2 = \sqrt{(-\mu/\delta)}$ — zodpovedá mu uzavretá orbita $\gamma = \{(x_1(t),\ x_2(t)) : x_1^2(t) + x_2^2(t) = -\mu/\delta,\ \ -\infty < t < \infty\}$ DR (III_2). Trajektória splynie pri $\mu \to 0$ s kritickým bodom (0, 0). Táto bifurkácia sa v literatúre nazýva Hopfova bifurkácia (v knihe Arnoľda [4] Poincaré-Andronovova bifurkácia). Ako vyzerajú trajektórie v tomto prípade? Treba rozlíšiť dva prípady:

(a) $\delta = -1$
(b) $\delta = +1$

Štruktúry trajektórií systémov (I), (II) sú známe z Thomovej teórie singularít, vyskytujú sa totiž u jednoparametrických systémov gradientnych diferenciálnych rovníc. Typ (I) zodpovedá singularite kodimenzie 0, typ (II) singularite kodimenzie 1 — množina kritických bodov tvorí záhyb (fold). Všimnime si, že verzálny zárodok (II) je gradientným vektorovým poľom verzálneho (v terminológii [21] univerzálneho) zárodku foldu

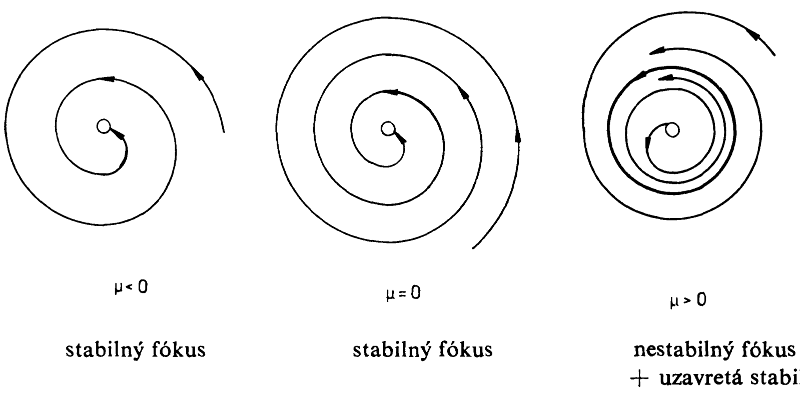
$$g(x, \mu) = x_0^3 + \mu x_0 + 1/2 \sum (x_i^+)^2 - 1/2 \sum (x_i^-)^2 ,$$

kde x_i^+, x_i^- sú zložky vektorov x^+, resp. x^-. Pretože pri Hopfovej bifurkácii vzniká periodická trajektória, nemôže tento úkaz vzniknúť pre gradientné DR. Bezprostredne to vidno aj z toho, že matica linearizácie gradientnej DR je hessiánom funkcie, ktorej gradientom je vektor pravých strán DR a preto nemôže mať imaginárne vlastné čísla.

Aká je interpretácia Hopfovej bifurkácie?

(a) Superkritická bifurkácia. Vyjdime zo stabilného kritického bodu $(x_0, \mu_0) = (0, 0)$. Pre $\mu > 0$ DR stráca stabilitu v prospech stabilnej uzavretej trajektórie a vznikajú

Obr. 9.

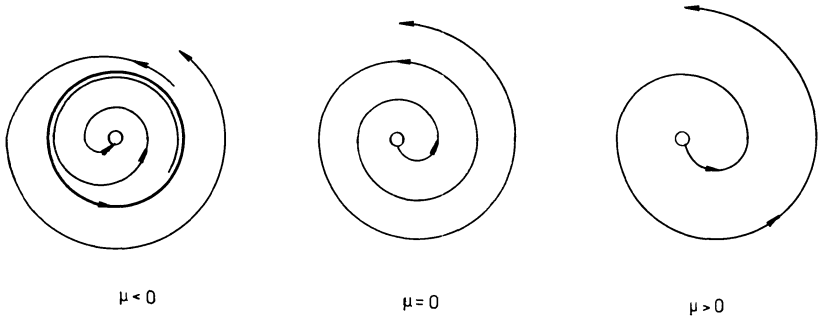


stabilný fókus | stabilný fókus | nestabilný fókus + + uzavretá stabilná trajektória (limitný cyklus)

tzv. samobudené kmity. Amplitúda stabilnej trajektórie je malá, a preto sa tiež hovorí o mäkkej rezonancii.

(b) Subkritická bifurkácia. Pri záporných hodnotách parametra blízkych k 0 je síce kritický bod stabilný, ale jeho atrakčná oblasť (t.j. množina bodov, z ktorých trajektórie k nemu konvergujú pre $t \to \infty$) je veľmi malá. Po strate stability ihneď nastávajú oscilácie s veľkou amplitúdou, a preto sa tiež hovorí o tvrdej rezonancii.

Obr. 10.



Bifurkácie obidvoch typov možno pozorovať pri elektrických a mechanických osciláciach. V poslednej dobe sa objavujú pokusy modelovať pomocou nich prechod laminárneho prúdenia k turbulentnému a vznik periodických ustálených stavov chemických reakcií (Belousovova-Žabotinského reakcia [17], [35]).

Lokálne generické bifurkácie v okoliach jednoparametrických systémov DR máme teda opísané. Pre dvojparametrické (tým skôr pre viacparametrické) systémy DR je už otázka generických bifurkácií oveľa zložitejšia, o čom svedčí už aj nasledujúca veta.

Veta (o singularitách kritických bodov kodimenzie 2) ([3], [4]). *Existuje otvorená hustá podmnožina* $\mathcal{H}_3 \subset H_n^r(2)$ $(r \geqq 4)$ *taká, že pre PDR z* $\mathcal{H}_3$ *nastáva jeden z nasledujúcich prípadov*:

(1)*prípady* (1)–(3) *z vety o singularitách kritických bodov kodimenzie* 1;

(2) *matica* B (*predpokladáme, že PDR je v tvare* (9)) *má vlastné čísla*

(a) $\lambda_1 = 0$ *násobnosti* 2 *a ostatné s nenulovou reálnou časťou*,

(b) $\lambda_1 = 0$ *násobnosti* 1, $\lambda_{2,3} = \pm \mathrm{i}\omega$, $\omega \neq 0$ *a ostatné s nenulovou reálnou časťou*.

(c) $\lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i}\omega_1$, $\lambda_{3,4} = \pm \mathrm{i}\omega_2$, $\omega_1, \omega_2 \neq 0$, $\omega_1 \neq \omega_2$ *a ostatné s nenulovou reálnou časťou*,

(d) $\lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i}\omega$, $\omega \neq 0$, *ostatné s nenulovou reálnou časťou a ešte s ďalším typom singularity, napr.*

$$\dot{z} = z(\mathrm{i}\omega + \mu_1 + \mu_2 z\bar{z} \pm z^2\bar{z}^2), \quad z \in C,$$

(e) $\lambda_1 = 0$ *násobnosti* 1, *ostatné s nenulovou reálnou časťou a ešte s ďalším typom singularity, napr.*

$$\dot{x} = \pm x^3 + \mu_1 x + \mu_2, \quad x \in R.$$

Poznámka 1. Spomínané dodatočné singularity sú také, že pre nejaké prirodzené číslo r, r-jet zárodku zodpovedajúceho príslušnému PVP tranzverzálne pretína určitú algebraickú podvarietu kodimenzie 2 v priestore r-jetov (definíciu r-jetu pozri v [21]).

Poznámka 2. Verzálne systémy DR so singularitami typu (b), (c), (d) nie sú zatiaľ nájdené a ani problém generických bifurkácií nie je pre tieto prípady rozriešený.

Poznámka 3. Z uvedených typov (a)–(e) sa u parametrizovaných gradientnych DR môže vyskytnúť iba typ (e), ktorý zosdpovedá singularite typu cusp.

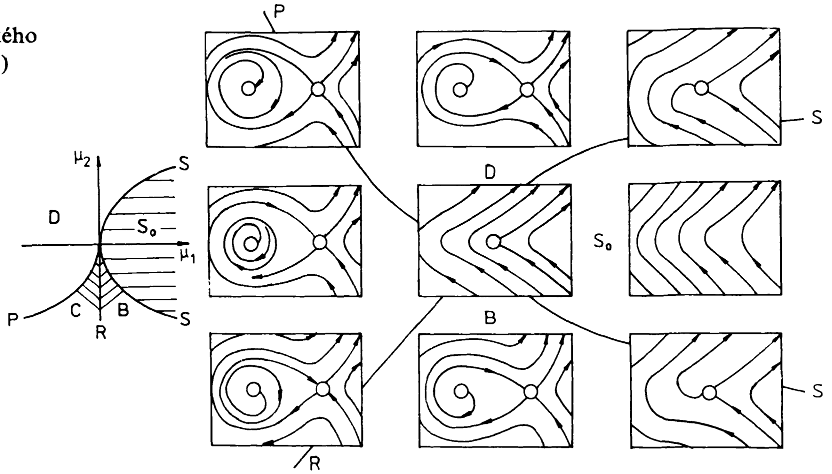
Všimnime si bližšie prípad singularity (a). V dôsledku vety o redukcii možno problém zredukovať na dvojrozmerný. Bogdanov [5] ukázal, že existuje otvorená hustá podmnožina množiny dvojparametrických systémov DR v rovine taká, že ak PDR z tejto množiny má kritický bod typu (a), potom je C^0-ekvivalentný systému

$$\dot{x}_1 = x_2\,, \qquad \dot{x}_2 = \mu_1 + \mu_2 x_1 + x_1^2 \pm x_1 x_2\,, \tag{11}$$

pričom tento systém je verzálny. Bifurkačný diagram a bifurkácie systému (11) v okolí počiatku sú znázornené na obr. 11.

Generické bifurkácie v okoliach kritických bodov so singularitami kodimenzie 3 sú ešte v štádiu výskumov.

Obr. 11.
Bifurkácia kritického bodu systému (11)



4. Generické bifurkácie uzavretých trajektórií

Ako sme ukázali v predchádzajúcom odseku, pri Hopfovvej bifurkácii môže kritický bod stratiť stabilitu v prospech uzavretej trajektórie. Inak povedané, konštantný ustálený stav môže pri zmene parametra prejsť v periodický ustálený režim. Je prirodzené ísť v analýze bifurkácií ďalej a pýtať sa, čo sa môže ďalej stať so stabilným ustáleným režimom, teda aké generické bifurkácie sú možné pre uzavreté trajektórie.

Aby sme túto otázku mohli skúmať, potrebovali by sme precízne definovať pojmy lokálnej C^0-ekvivalencie a lokálnej štrukturálnej stability v okolí uzavretých trajektorií. Keďže tieto pojmy sú analogické zodpovedajúcim pojmom pre kritické body, nebudeme to nanovo robiť.

Ak γ je uzavretá trajektória DR (1), $x_0 \in \gamma$ a Γ je $(n - 1)$-rozmerná podvarieta v R^n, prechádzajúca bodom x_0 a tranzverzálna ku γ v bode x_0 (tj. $(x_0, f(x_0)) \notin T_{x_0}\Gamma$), potom je pre dosť malé okolie U bodu x_0 definované zobrazenie $P : \Gamma \cap U \to \Gamma$, ktoré bodu x priraďuje prvý priesečík trajektórie cez bod x s Γ. Zobrazenie P je difeomorfizmus $\Gamma \cap U$ na $P(\Gamma \cap U)$ s pevným bodom x_0 a nazýva sa Poincarého zobrazenie [6].

Každý difeomorfizmus P nejakej variety Γ na seba generuje diskrétny dynamický systém φ, ktorý je na rozdiel od jeho spojitej verzie – toku definovaný iba pre celé t, a to predpisom $\varphi_t(x) = P^t(x)$ (kde P^t ke t-tá iterácia zobrazenia P). Diskrétny dynamický systém zrejme spĺňa tie isté tri základné vlastnosti toku s tým rozdielom, že t, s berieme z množiny celých čísel. Môžeme preň analogicky ako pre tok definovať pojmy orbity, orbitálnej C^0-ekvivalencie, štrukturálnej stability a ich lokálnych verzií. Okrem pevných bodov (ktoré zodpovedajú kritickým bodom tokov) nás však zaujímajú aj periodické body zobrazenía. Bod x sa nazýva k-periodickým bodom zobrazenia P, ak $P^k(x) = x$, ale $P^n(x) \neq x$ pre $0 < j < k$.

Pre pevné a periodické body diskrétnych dynamických systémov platia aj vety o invarientnych varietách, analogické vetám pre spojité dynamické systémy. Ak totiž bod x_0 je pevným bodom difeomorfizmu P, potom vo vhodných súradniciach je $x_0 = 0$ a zobrazenie P má lokálnu reprezentáciu

$$P(x) = Ax + g(x), \tag{12}$$

kde $A = DP(0)$, $g(x) = o(\|x\|)$ a $A = \operatorname{diag}(A^-, A^0, A^+)$, matica $A^-(A^0, A^+)$ má všetky vlastné čísla s absolutnou hodnotou <1 $(=1, >1)$. Ak $R^n = L^- \oplus L^0 \oplus L^+$ je zodpovedajúci rozklad na invariantné podpriestory, potom invariantné variety W^- (stabilná), W^0 (centrálna) a W^+ (nestabilná) sa dotýkajú po rade podpriestorov L^-, L^0. L^+ a dynamický systém má na nich analogické vlastnosti ako v spojitom prípade. V rovnakom znení ako pre toky možno definovať hyperbolický pevný (a periodický) bod, platí veta o redukcii a analógia vety (K-S, I), ktorú označíme (K-S, II).

Všetky spomínané pojmy a vety o difeomorfizme, resp. o ním generovanom dynamickom systéme, majú lokálny charakter, a preto nestrácajú platnosť ani pre Poincarého zobrazenie, hoci toto zobrazenie nedefinuje dynamický systém (pretože nie je definované na celom Γ a nezobrazuje vo všeobecnosti $\Gamma \cap U$ na seba). Pomocou neho môžeme definovať stabilnú, centrálnu a nestabilnú varietu trajektórie γ ako variety zaplnené trajektóriami vychádzajúcimi z bodov zodpovedajúcich variet jej Poincarého zobrazenia. Poincarého zobrazenie úplne určuje kvalitatívne vlastnosti toku v okolí uzavretej trajektórie, t.j. dva toky sú lokálne orbitálne C^0-ekvivalentné práve vtedy, ak sú lokálne orbitálne C^0-ekvivalentné ich Poincarého zobrazenia.

Z uvedeného vyplýva, že štúdium lokálnych kvalitatívnych vlastností a bifurkácií toku v okoliach uzavretých trajektórií môžeme redukovať na štúdium lokálnych kvalitatívnych vlastností a bifurkácií diskrétnych dynamických systémov v okoliach ich pevných bodov. Parametrizovanému toku bude zodpovedať prirodzeným spôsobom definované parametrizované Poincarého zobrazenie, a teda parametrizovaný diskrétny dynamický systém s pevným bodom.

Označme $K_n^r(k)$ množinu parametrizovaných C^r-difeomorfizmov na R^n s priestorom parametrov R^k a pevným bodom $(0, 0)$ (teda $P \in K_n^r(k)$ značí, že $P : R^n \times R^k \to R^n$

je C^r-zobrazenie také, že $P(0, 0) = 0$ a pre $\mu \in R^k$ je $P(\cdot, \mu)$ difeomorfizmus $R^n \to R^n$). Zavedieme do tejto množiny slabú C^r-topológiu a analogicky ako pre množinu $H_n^r(k)$ definujeme pojmy zárodku, k-parametrického rozvinutia difeomorfizmu, indukovaného a verzálneho rozvinutia. Potom platí

Veta (o singularitách pevných bodov kodimenzie 1). *Existuje reziduálna podmnožina $\mathscr{K}_1 \subset K_n^r(1)$ taká, že pre P z $\mathscr{K}_1$ nastáva jeden z nasledujúcich prípadov:*

(0) $L^0 = \{0\}$, *t.j. pevný bod* $(0, 0)$ *je hyperbolický,*
(1) dim $L^0 = 1$, *matica A z* (12) *má vlastné číslo $\lambda = 1$ násobnosti* 1 *a ostatné vlastné čísla mimo jednotkovej kružnice S^1,*
(2) dim $L^0 = 1$, *matica A má vlastné číslo $\lambda = -1$ násobnosti* 1 *a ostatné vlastné čísla mimo S^1,*
(3) dim $L^0 = 2$, *matica A má dvojicu komplexne združených vlastných čísel, ktoré nie sú odmocninami z* 1 *a ostatné vlastné čísla mimo S^1.*

V dôsledku vety o redukcii možno teda štúdium generických bifurkácií difeomorfizmov v okoliach pevných bodov kodimenzie 1 redukovať na difeomorfizmy s $n \leqq 2$.

Podobne ako pre PDR sa dá ukázať, že existuje ďalšia reziduálna podmnožina $\mathscr{K}_0 \subset \mathscr{K}_1$ taká, že pre každé $P \in \mathscr{K}_0$, ktorého pevný bod nie je hyperbolický, je jeho redukci a na W^0 lokálne C^0-ekvivalentná jednému zo zobrazení:

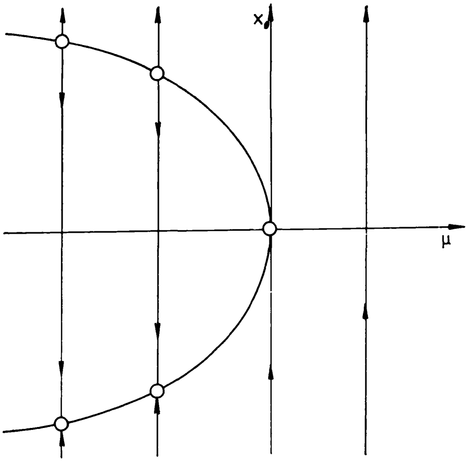
(I) $P^0(x, \mu) = x + x^2 + \mu$ (v prípade (1) vety),
(II) $P^0(x, \mu) = (\mu - 1)\, x \pm x^3$ (v prípade (2) vety),
(III) $P^0(x, \mu) = z(\lambda(\mu) + a|z|^2 + o(|z|^2))$ — v komplexnej reprezentácii, kde $z = x_1 + ix_2$, $x = (x_1, x_2)$, $|\lambda(0)| = 1$, ale $\lambda(0)$ nie je odmocninou z 1, $(\mathrm{d}|\lambda(\mu)|/\mathrm{d}\mu)_{\mu=0} \neq 0$, Re $a \neq 0$ (v prípade (3) vety).

Zobrazenia (I), (II) sú verzálne, avšak v prípade (III) polynomické verzálne zobrazenie neexistuje. Prípad (I) zodpovedá prípadu (II) pre kritické body DR, pre $\mu < 0$ dostávame v okolí 0 dva pevné body $x = \pm \sqrt{-\mu}$ (jeden stabilný a jeden nestabilný), ktoré pri $\mu = 0$ splynú a pre $\mu > 0$ zaniknú (obr. 7). Prípad (II) nemá pri kritických bodoch analógiu. Pevný bod tu existuje pre μ kladné i záporné, avšak (pri znamienku + pred x^3) pre $\mu < 0$ existujú v okolí 0 dva 2-periodické body $x = \pm \sqrt{-\mu}$, ktoré pre $\mu = 0$ splynú s pevným bodom $x = 0$ (obr. 12).

Prípad (III) zodpovedá Hopfovej bifurkácii (niekedy sa aj označuje ako Hopfova bifurkácia pre difeomorfizmy). Dá sa dokázať, že sa tu od pevného bodu $x = 0$ odštiepi invariantna kružnica ([28]).

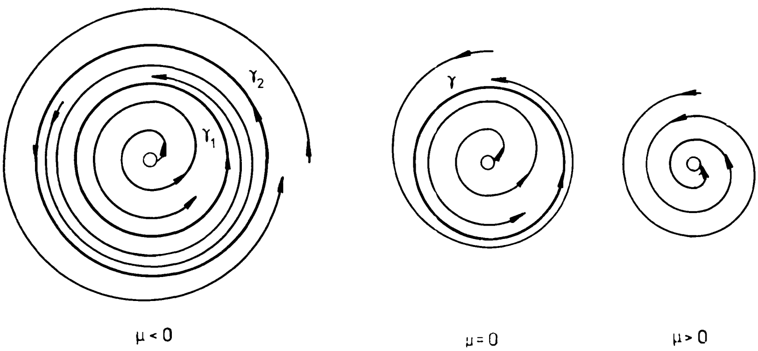
Vráťme sa teraz k bifurkáciam uzavretých trajektórií PDR. Keďže generickým bifurkáciam Poincarého zobrazení zodpovedajú generické bifurkácie uzavretých trajektórií definujúcich tieto zobrazenia ([25], [26]), dostaneme o nich obraz tak, že si znázorníme trajektórie pevných a periodických bodov Poincarého zobrazenia a jeho invariantnych podmnožín.

V prípade (I) dostávame pre $\mu < 0$ dve uzavreté trajektórie (zodpovedajúce dvoma pevným bodom), ktorých periódy pre $\mu \to 0$ sa približujú a ktoré pre $\mu > 0$ zaniknú (obr. 13).



Obr. 12.
Bifurkácia pevného bodu zobrazenia typu (II)

Obr. 13.
Bifurkácie uzavretej trajektórie s Poincarého zobrazením typu (I)



V prípade (II) zodpovedá 2-periodickému bodu trajektória, ktorá sa uzavrie až po dvoch obehoch, teda jej perióda pri $\mu \to 0$ konverguje k dvojnásobku periódy trajektórie bodu $x = 0$, s ktorou splynie (Obr. 14).

Prípad (III) zodpovedá Hopfovej bifurkácii kritického bodu. Tak, ako sa od kritického bodu pri Hopfovej bifurkácii odštiepi uzavretá trajektória, odštiepi sa od pevného bodu Poincarého zobrazenia invariantná kružnica a trajektórie vychádzajúce z bodov invariantnej kružnice vytvoria invariantny tórus T^2 toku DR (Obr. 15), ktorý obkolesuje uzavretú trajektóriu γ vychádzajúcu z bodu $x = 0$.

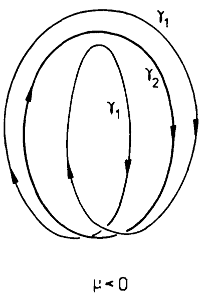
Bifurkácii typu (III) sa venujme trocha podrobnejšie. Jej dôkladné vyšetrenie vyžaduje už znalosť globálnej štruktúry trajektórií DR na tóre. Invariantom topologickej klasifikácie takýchto rovníc je tzv. rotačné číslo ([13]), ktoré (zhruba povedané) predstavuje priemerný počet otočení trajektórie okolo pozdĺžnej osi tóru na jeden obeh okolo osi symetrie (toto číslo je pre všetky trajektórie rovnaké). Ak je rotačné číslo racionálne, rovné p/q, potom má DR uzavreté trajektórie, ktoré sa uzavrú po q obehoch, ak je iracionálne,

γ_1-stabilná
s periódou T
γ_2-nestabilná
s periódou blízkou
k $2T$

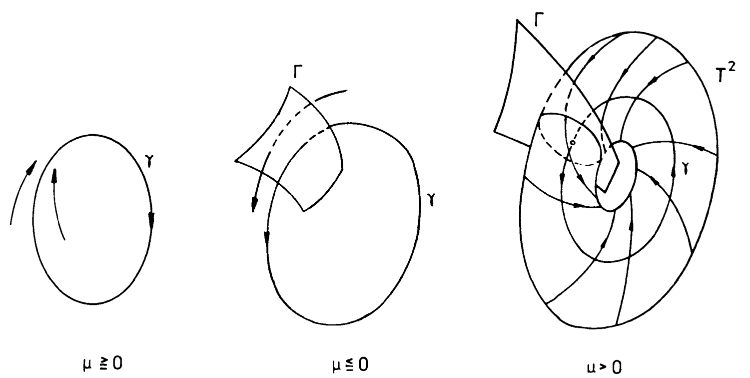
γ-stabilná

γ-stabilná

T^2-stabilný
γ-nestabilná



Obr. 14.



Obr. 15.

potom každá trajektória je hustá podmnožina tóru. Ak tórus vznikne bifurkáciou z uzavretej trajektórie, potom rotačné číslo konverguje pre $\mu \to 0$ k (iracionálnej) hodnote $((1/2\pi i) \ln \lambda(0))$. Dá sa dokázať, že rotačné číslo je spojitou funkciou parametra a že genericky je v ľubovolne malom okolí bodu $\mu = 0$ nekonštantnou funkciou μ. Musí teda prechádzať cez nekonečný počet racionálnych čísel s ľubovoľne veľkým q. To značí, že v okolí bodu $\mu = 0$ sa objavuje nekonečne veľa sekundárnych bifurkácií, pri ktorých vznikajú a zanikajú uzavreté trajektórie ľubovoľne vysokej periódy ([9]). Tento jav dal podnet k pokusom modelovať pomocou tejto bifurkácie vznik turbulencie ([27]). Využitím nedávnych hlbokých výsledkov M. Hermana [13] sa ďalej dá ukázať, že pre každú pevnú hodnotu $\lambda(0)$ existuje dokonca nekonečne veľa topologicky neekvivalentných zobrazení typu (III). Preto ani nie je možné nájsť verzálnu formu pre zobrazenie typu (III).

5. Záver

Našim článkom sme sa snažili ukázať, že pre negradientné systémy existuje teória, analogická teórii katastróf gradientných dynamických systémov, ktorá je však ďaleko od úplnosti. Prítomnosť periodických ustálených režimov u negradientných systémov a skutočnosť, že stabilné rovnovážne stavy takýchto systémov môžu pri zmene parametra prechádzať v periodické, ba aj v zložitejšie ustálené stavy (invariantne tóry) obohacuje množinu generických bifurkácií natoľko, že už u jednoparametrických systémoch dostávame nekonečný počet topologických typov generických bifurkácií. Zložitosť bifurkácie periodickej trajektórie do invariantneho tóru nasvedčuje tomu, že pre negradientné systémy nebude možné nikdy vybudovať tak pekne uzavretú teóriu ako pre gradientné. Táto bifurkácia, ako aj Bogdanovova bifurkácia, ktorú sme uviedli ako príklad generickej dvojparametrickej bifurkácie, ukazuje, že pri štúdiu lokálnych bifurkácií sa nemožno vyhnúť štúdiu globálnych bifurkácií spravidla nižšej kodimenzie. V Bogdanovovej bifurkácii je to napr. bifurkácia, ktorá vzniká pri prechode cez čiaru P (obr. 11).

To nás privádza k štúdiu globálnej štruktúry trajektórií a globálnych bifurkácií, v ktorom sa už dosiahol rad hlbokých a zaujímavých výsledkov. Spomeňme len to, že sa v globálnej teórii môžu vyskytnúť ešte zložitejšie ustálené stavy, než s ktorými sme sa stretli v našom článku. Sú to objekty, na ktorých sa systém chová v istom zmysle „náhodne". Správanie systému na nich sa označuje termínom chaos (ktorý má svoju presnú definíciu) a spomínané objekty sa nazývajú „strange attractors". V poslednom čase sa im venuje veľká pozornosť.

Pôvodne sme mali v úmysle zahrnúť do nášho článku aj nejaké prvky globálnej teórie dynamických systémov. Keďže sme však chceli mať výklad lokálnej teórie ako tak úplný, článok sa nám rozrástol do takých rozmerov, že na globálnu teóriu nebolo ani pomyslenia. Hádam by sa jej hodilo venovať samostatný článok.

Literatúra

[1] ABRAHAM R., ROBBIN J.: *Transversal mappings and flows.* Benjamin, New York 1967.

[2] ARNOĽD V. I.: *Obyknovennyje differenciaľnyje uravnenija.* Nauka, Moskva 1971.

[3] ARNOĽD V. I.: *Lekcii o bifurkacijach i versaľnych semejstvach.* Uspechi mat. nauk *27* (1972), 119—185.

[4] ARNOĽD V. I.: *Dopolniteľnyje glavy teorii obyknvoennych differenciaľnych uravnenij.* Nauka, Moskva 1978.

[5] BOGDANOV R. I.: *Versaľnaja deformacia osoboj točki vektornogo polja na ploskosti v slučaje nulevych sobstvennych čisel.* Trudy seminara Petrovskogo, *2*, (1976), 37—65.

[6] BRUNOVSKÝ P.: *Topologická klasifikácia diferenciálnych rovníc a štrukturálna stabilita.* PMFA *18* (1973), 271—281.

[7] BRUNOVSKÝ P.: *On one-parameter families of diffeomorphisms I.* Comment. Math. Univ. Carolinae *11* (1970), 559—582.

[8] BRUNOVSKÝ P.: *On one-parameter families of diffeomorphisms II.* Comment. Math. Univ. Carolinae *12* (1971), 765—784.

[9] BRUNOVSKÝ P.: *Generic properties of the rotation number of one-parameter diffeomorphisms of the circle.* Czechosl. Math. J. *24* (1974), 74—90.

[10] GOLUBITSKY M., GUILLEMIN V.: *Stable mappins and their singularities.* Springer-Verlag, 1973.

[11] GUCKENHEIMER J.: *Review of „Stabilité Structurelle et Morphogénese"* by *R. Thom.* Bull. A. M. S. *79* (1973), 878—890.

[12] GUCKENHEIMER J.: *Bifurcation and catastrophe. Dynamical Systems* (ed. PEIXOTO), Acad. Press, Press, New York 1973, 95—109.

[13] HARTMAN: *Ordinary differential equations.* New York 1964.

[14] HERMAN M.: *Mesure de Lebesgue et nombre de rotation.* Lecture Notes in Math., 597, Springer-Verlag 1977.

[15] HIRSCH M. W., PUGH C. C., SHUB M.: *Invariant Manifolds.* Bull. A. M. S. *76* (1970), 1015—1019.

[16] HIRSCH M. W.: *Differential topology.* Springer-Verlag 1976

[17] HOWARD L. N.: *Bifurcations in Reaction — Diffusion Problems.* Advances in Math., *16*, 2 (1975), 246—258.

[18] LU Y. - C.: *Singularity theory and an introduction to catastrophe theory*, Springer-Verlag 1976.

[19] KATĚTOV M., JEDLIČKA P.: *Teorie katastrof: souvislosti a aplikace I.* PMFA *24* (1979), 1—20.

[20] KATĚTOV M., JEDLIČKA P.: *Teorie katastrof: souvislosti a aplikace II.* PMFA *24* (1979), 313—325.

[21] KOWALSKI O.: *Thomova věta o sedmi elementárních katastrofách.* PMFA *22* (1977), 302—316.

[22] MARSDEN J. E., MCCRACKEN M.: *The Hopf bifurcation and its applications.* Springer-Verlag 1976.

[23] MEDVEĎ M.: *Generic properties of parametrized vector fields I.* Czechosl. Math. J. *25* (1975), 376—380.
[24] MEDVEĎ M.: *Generic properties of parametrized vector fields II.* Czechosl. Math. J. *26* (1976), 71 to 83.
[25] MEDVEĎ M.: *Generic bifurcations of second order ordinary differential equations on differentiable manifolds.* Mathematica Slovaca *1* (1977), 9—24.
[26] MEDVEĎ M.: *Generic bifurcations of second order ordinary differential equations near closed orbits.* J. Differential Equations, *37,* 1 (1980), 97—107.
[27] RUELLE D., TAKENS F.: *On the nature of turbulence. Comm. Math. Phys. 20* (1971), 167—192.
[28] SACKER R. J.: *On invariant surfaces and bifurcation of periodic solutions of ordinary differential equations.* New York Univ. IMM-NYU, 333 (1964).
[29] SMALE S.: *Differentiable dynamical systems.* Bull. A. M. S., *73* (1967), 747—817.
[30] SMALE S.: *Catastrophe theory.* Bull. A. M. S., *84,* 6 (1978). 1360—1367.
[31] SOTOMAYOR J.: *Generic bifurcations of dynamical systems. Dynamical Systems* (ed. PEIXOTO), Acad. Press, New York 1973, 561—582.
[32] SUSSMAN H., ZAHLER R.: *Catastrophe theory as applied to the social and biological sciences — a critique.* Synthese *37* (1978), 117—216.
[33] ŠOŠITAJŠVILI A. N.: *O bifurkacii topologičeskogo tipa osobych toček vektornych polej, zavisjaščich ot parametrov.* Trudy seminara Petrovskogo, *1* (1975), 279—309.
[34] VLČEK J., ZIELENIEC J.: *O teorii katastrof.* PMFA *22* (1977), 246—262.
[35] ZAIKIN A. N., ZHABOTINSKII A. M.: *Concentration wave propagation in two-dimensional liquid--phase self-oscillating system.* Nature *225* (1970).

Logika od A do G

Návrh matematikova mechanického pomocníka
volně zpracovaný tvůrčím matematikem

Paul R. Halmos, Santa Barbara, USA

Co je a co není logika

Původně „logika" znamenalo totéž co „zákony myšlení" a logikové studovali předmět ve víře, že mohou objevit lepší způsoby myšlení a jistější způsob, jak se vyhnout omylům, než znali jejich předchůdci, a ve víře, že tomuto umění mohou naučit lidstvo. Zkušenost však ukázala, že je to marná práce. Normální, zdravá lidská bytost má vrozeny všechny „zákony myšlení", které kdy kdo nalezl, a nezbývá nic, co by logikové člověka mohli

---

PAUL R. HALMOS: *Logic from A to G. A sketch for a mathematician's mechanical helper, flippantly annotated by a working mathematician.* Mathematic Magazine Vol. *50.* No. 1. January 1977, pp. 5—11.