δ

PAVOL BRUNOVSKÝ, Bratislava

Na to, že sa na stránkach *Matematických obzorov* objavujú články s významnými písmenami ako nadpismi, sme si už zvykli. Dosiaľ to vždy boli starí známi, ktorí už majú za sebou nejaké to storočie úspešného účinkovania v matematike. Ani nejaké to exotické $\aleph_0$ by nás asi veľmi neprekvapilo. Ale δ? Čo to má byť? Ešte tak, keby pri ňom bolo ε, to by mohlo mať niečo spoločného so základmi matematickej analýzy...

Lenže z toho nebude nič, pretože naše δ má presne definovanú hodnotu, a to 4,6692016091029... Nemožno sa čudovať, ak vám toto číslo nič nehovorí. Veď po prvý raz sa objavilo na stránkach *Journal of Statistical Physics* až v roku 1978. Že čo má spoločného s takými velikánmi v matematike, ako sú π alebo e? Nuž to, že je to tzv. univerzálna konštanta. Nie je to asi presne matematicky definovateľný pojem. Myslí sa tým to, že ono číslo vyjadruje nejakú vlastnosť objektov nejakej triedy, ktorá je pre všetky objekty tejto triedy rovnaká (napríklad π vyjadruje pomer obsahu pravouhlého štvoruholníka a elipsy, ktorá má dĺžky jeho strán ako dĺžky svojich osí, a to pre všetky štvoruholníky).

Čo vyjadruje δ, nedá sa tak ľahko vyjadriť jednou vetou. Ani sa dnes nedá povedať, aký bude jeho význam. Sotva však bude taký ako význam π či e — inak by múdri ľudia už dávno boli naň prišli. Ale také zložité to zas nie je, preto asi stojí za to pohovoriť o ňom aj v *Matematických obzoroch* — veď univerzálne konštanty sa nenachádzajú len tak každý týždeň. Navyše, máme tú výhodu, že sa týkajú objektu, na ktorom nám J. Smítal v poslednom zväzku *Matematických obzorov* predviedol, čomu sa v matematike hovorí chaos.

Reč teda bude o triede spojitých zobrazení intervalu [0, 1] do seba, závislých od reálneho parametru A typu

$$f(x)=Ag(x), \qquad 0\leqslant x\leqslant 1, \tag{1}$$

ktorého význačným reprezentantom je zobrazenie

$$f(x)=Ax(1-x), \qquad 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant A\leqslant 4, \tag{2}$$

teda zobrazenie (1), v ktorom

$$g(x)=x(1-x).$$

Takmer všetko, čo potrebujeme, bolo o tomto zobrazení povedané v [1]. Nebudeme sa teda opakovať a znova rozoberať ekologické a matematické motivácie nášho záujmu o postupnosti $\{x_n\}$, definované rekurentne predpisom

$$x_{n+1}=f(x_n), \qquad n\geqslant 0. \tag{3}$$

Pripomeňme si iba, že píšeme

$$x_n=f^n(x_0), \tag{4}$$

že pevným bodom funkcie f nazývame bod x taký, že $f(x)=x$ a p-cyklom, že sa nazýva postupnosť navzájom rozličných bodov $x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}$ takých, že platí (3) pre $0\leqslant n\leqslant p-2$ a $f(x_{p-1})=x_0$.

A ešte jednu dôležitú vec si zopakujeme z [1] — že totiž pre zobrazenie (2) existuje rastúca postupnosť $\{A_i\}$ hodnôt parametra A taká, že pri $A=A_1$ sa od pevného bodu $x_A=1-1/A$ odštiepi 2-cyklus, z neho sa pri $A=A_2$ odštiepi 4-cyklus atď. všeobecne pri $A=A_i$ sa od 2^i-cyklu odštiepi 2^{i+1}-cyklus.

Ručným počítaním sa dá zistiť, že $A_1=3$, ale na dobrom počítači vedia šikovní ľudia spočítať s veľkou presnosťou aj ďalšie členy postupnosti. A s nimi, samozrejme, aj čísla $\delta_i=(A_i-A_{i-1})/(A_{i+1}-A_i)$. Spočítal si ich americký fyzik M. Feigenbaum a zistil, že pre rastúce i sa približujú k číslu 4,6692016091029... Toto číslo označil δ a tým sa zaslúžil o kvetnatý nadpis tohto článku.

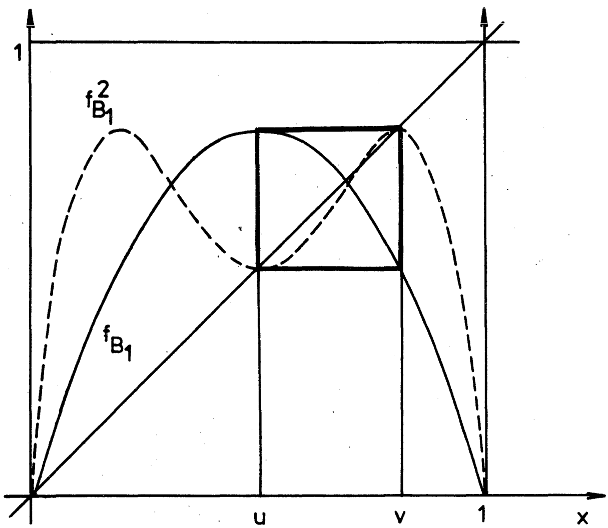
To by však ešte nebolo nič zvláštneho, veď civilizovaná postupnosť by limitu mať mala. Ale Feigenbaum [2] začal podľa rovnakého receptu počítať postupnosť $\{\delta_i\}$ pre iné zobrazenia f_A než (2), ktorých definujúce zobrazenie g má analogické vlastnosti ako zobrazenie $g(x)=x(1-x)$. Analogické v tom, že

1. $g(0)=g(1)=0$, $g(x)>0$ pre $0<x<1$,
2. g je spojite diferencovateľná,
3. g má jediné maximum $\bar{x}$, v ktorom má druhú deriváciu,
4. f je ostro rastúca na $[0, \bar{x}]$ a ostro klesajúca na $[\bar{x}, 1]$.

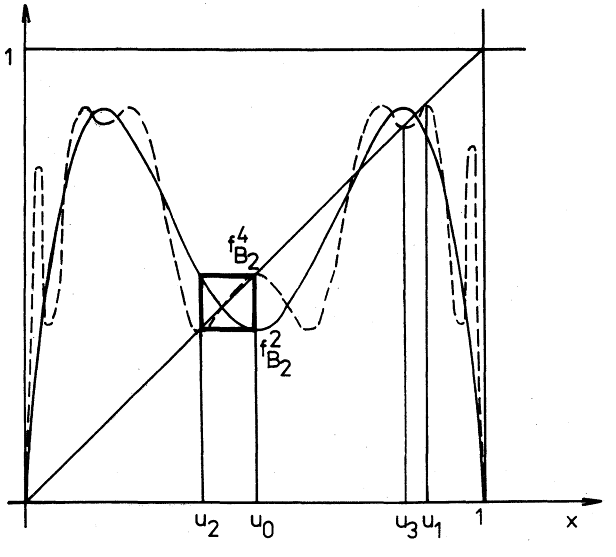
Vedelo sa už predtým, že pre takéto g existuje rastúca postupnosť hodnôt $\{A_i\}$ s analogickými vlastnosťami ako pre (2). Prekvapením však bolo, že Feigenbaumove numerické experimenty nasvedčovali tomu, že pre ľubovoľnú funkciu g s vlastnosťami 1—4 sa čísla δ_i približujú k číslu, ktoré sa na veľký počet miest zhoduje s číslom δ. Nielen to, ale Feigenbaum dal aj netriviálne vysvetlenie, prečo by postupnosti $\{\delta_i\}$ mali pre každú funkciu g spĺňajúcu 1—4 konvergovať a prečo by ich limita mala byť nezávislá od g.

To vysvetlenie nie je vôbec jednoduché, ani elementárne a operuje sa v ňom s akousi transformáciou funkcií, pri ktorej sa objaví ďalšia univerzálna konštanta, a to $\alpha = 2{,}50290787550957\ldots$ Pokúsme sa aspoň v hrubých črtách naznačiť, aká je to transformácia a ako sa pomocou nej definuje α.

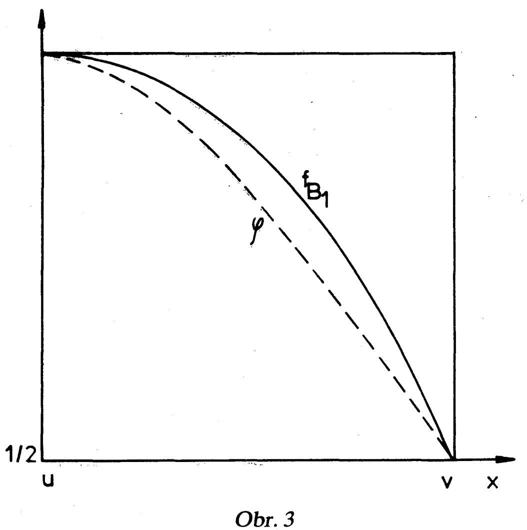
Vráťme sa ku konkrétnemu zobrazeniu (2). Všimnime si grafy funkcií f_A^2 na *obr. 3* z [1]. Je zrejmé, že medzi 3 a 3.5 musí byť hodnota $A = B_1$ taká, že v pravom krajnom priesečníku v grafu funkcie $f_{B_1}^2$ s diagonálou má $f_{B_1}^2$ maximum, a teda vodorovnú dotyčnicu, t. j. $(f_{B_1}^2)'(v) = 0$. Pretože $(f_A^2)'(x) = f_A'(f_A(x))\, f_A'(x)$ a $f_{B_1}'(v) \neq 0$, musí byť $f_{B_1}'(f_{B_1}(v)) = 0$ a teda $u = f_{B_1}(v) = 1/2$ (*obr. 1*). Netreba už hádam dodávať, že u, v tvoria



Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3

2-cyklus pre $A = B_1$. Na kalkulačke bez veľkej námahy môžeme spočítať, že $B_1 \approx 3.23$ a $v \approx 0.81$.

Všimnime si teraz štvorec na *obr. 1* s ľavým spodným vrcholom (u, u) a pravým horným vrcholom (v, v). Nie je ťažké sa presvedčiť, že pri aplikácii zobrazenia f_{B_1} z neho nevybočíme (t. j. platí $f_{B_1}([u, v]) \subset ([u, v])$.

Prejdime teraz k zobrazeniu f_A^4. Podobne ako pre f_A^2 sa v intervale (A_2, A_3) nájde bod B_2 taký, že $u_0 = 1/2$ je bodom 4-cyklu u_0, u_1, u_2, u_3; s pomocou kalkulačky sa môžeme presvedčiť, že $B_2 \approx 3.50$ a že graf funkcie f_{B_2} vyzerá ako na *obr. 2*. Všimnime si štvorec na *obr. 2* s vrcholmi (u_0, u_0) a (u_2, u_2). Opäť platí $f_{B_2}^2([u_2, u_0]) \subset [u_2, u_0]$ a, čo je dôležitejšie, ak štvorec preklopíme podľa juhovýchodno-severozápadnej diagonály, roztiahneme jeho strany lineárne tak, aby sa zhodovali so stranami štvorčeka na *obr. 1* a výsledným štvorčekom prekryjeme štvorček na *obr. 1*, krivka, ktorá vznikne z grafu funkcie $f_{B_2}^2$, sa bude silne ponášať na úsek grafu funkcie f_{B_1} (*obr. 3*). Nie je ťažko sa presvedčiť, že spomínaná krivka je grafom funkcie

$$\varphi(x) = \alpha_1(1/2 - f_{B_2}^2(1/2 - \alpha_1^{-1}(x - 1/2))) + 1/2$$

kde

$$\alpha_1 = (v - u)/(u_0 - u_2).$$

Označme T_{α_1} transformáciu, ktorou sme z funkcie $f_{B_2}|[u_2, u_0]$ dostali funkciu φ. Analogicky, ako sme definovali B_1 pre f_A^2 a B_2 pre f_A^4, môžeme definovať aj $B_i \in (A_i, A_{i+1})$ pre $f_A^{2^{i+1}}$ pre ľubovoľné $i > 2$. Ďalej môžeme analogicky definovať čísla α_i a transformácie T_{α_i}. Feigenbaum opäť na základe numerických experimentov prišiel k záveru, že čísla α_i pre $i \to \infty$ konvergujú k číslu α a že funkcie $T_{\alpha_1} T_{\alpha_2} \ldots T_{\alpha_i} f_{B_i}^{2^i}$ konvergujú k funkcii $f_{B_1}|[u, v]$ a svoj záver aj zdôvodnil.

Pravda, Feigenbaumove zdôvodnenia, aj keď boli hlboké, neboli ešte dôkazmi na dnešnej úrovni požiadaviek v matematike. A tak sa do veci pustilo viacero schopných hláv a dnes sú už prakticky všetky Feigenbaumove objavy exaktne dokázané [3, 4]. Je zaujímavé, že autor [3] si pri dôkaze pomohol aj počítačom. Zaujímavé aj preto, že sa vedú diskusie o tom, či takéto dôkazy uznávať. Nedávno sme sa stretli s touto otázkou v súvislosti s vyriešením problému štyroch farieb, kde sa počítač použil na preskúmanie síce teoretickými úvahami redukovaného, ale predsa ešte veľmi rozsiahleho počtu možností. V našom prípade sa počítač použil inak: bolo treba robiť odhady pre nekonečné rady. To sa robilo počítačom, pričom sa súčasne kontrolovali zaokrúhľovacie chyby. Ako hovorí autor, spomínané operácie by sa dali urobiť za niekoľko dní aj ručne, ak by sa niekomu chcelo. Nuž, neviem ako vás, ale mňa takýto dôkaz plne uspokojuje.

Dôkazy viac-menej vychádzajú z Feigenbaumových myšlienok a sotva ich tu možno čo i len naznačiť. Využívajú totiž aparát teórie hladkých dynamických systémov — modernej disciplíny na hranici analýzy a topológie, ktorý bol vyvinutý tak v posledných dvoch desaťročiach.

Načo nás teda autor balamutí, keď nevie to, čo začal, povedať do konca? Nuž, túto otázku som si položil aj ja — ale nakoniec som článok predsa len dokončil. Dôvod: vidí sa mi, že objav čohosi, čo sa dá vyjadriť jedným-jedinkým číslom, je čosi vzrušujúceho. Predsa len vzrušujúcejšieho, než to, že vo Vete 17.5 na 2 strany možno predpoklad 7 s formuláciou na 1/2 strany nahradiť predpokladom 7′ na 1 stranu. Posolstvo teda znie: aj u takého deda, akým je dnes už matematická analýza, možno nájsť dobrodružstvo. A že aj zložité teórie môžu niečo vypovedať o jednoduchých objektoch.

Literatúra

1. Smítal, J.: Chaos. Matematické obzory 21. Alfa, Bratislava 1984, s. 79.
2. Feigenbaum, M.: Quantitative universality for a class of non-linear transformations. J. Statist. Phys. 19 (1978), 25—52.
3. Lanford, O. E.: A computer-assisted proof of the Feigenbaum conjecture. Bull. Amer. Math. Soc. 6 (1982), 427—434.
4. Campanino, M.—Epstein, H.—Ruelle, D.: On Feigenbaum's functional equation. Topology.