Koniec chaosu?

Pavel Brunovský, Bratislava

Právom by ste mi mohli vyčítať, že vodu kážem a víno pijem. Názvom článku som sa totiž prispôsobil móresom, ktoré v článku budem kritizovať. Jednoducho som ani ja nevedel odolať pokušeniu zneužiť to, že pôvodný význam slova chaos sa s jeho matematickým obsahom celkom nekryje. Na rozdiel od mnohých chaosomanov si to však dobre uvedomujem, kajam sa a sľubujem, že sa v ďalšom striktne obmedzím na matematický obsah pojmu.

Dva razy v ostatných dvoch desaťročiach vzišli z matematiky podnety, ktoré vzrušili širokú intelektuálnu verejnosť. Boli to teória katastrôf a chaos. Neviem, či to má historický precedens. Načim si teda položiť otázku, akú úlohu v tom zohrali ich názvy, ktoré navodzujú o veci neadekvátne predstavy. V tejto súvislosti si spomínam, ako sa slovenský preklad krásnej (pre matematikov) Arnoľdovej brožúrky „Teória katastrôf" dostal do predaja v bratislavských novinových stánkoch. Môj synovec, ktorý si ju pre jej názov kúpil, bol prekvapený najprv tým, že ma v nej našiel čo by recenzenta prekladu a potom aj jej obsahom.

Popri spoločnej popularite si však hodno povšimnúť fundamentálne odlišnosti katastrôf a chaosu.

Teória katastrôf je ucelená filozofická teória vychádzajúca z nemenej ucelenej matematickej teórie singularít. Snaží sa podľa jednotného princípu klasifikovať spontánny vznik foriem a náhle zmeny správania pri postupnej zmene parametrov bez ohľadu na ich materiálnu podstatu.

Takáto ambícia urobiť z teórie vševysvetľujúci princíp je v matematike ojedinelá, v minulosti sa skôr vyskytla u fyzikálnych teórií. Spoločné pre snahy tohoto druhu je, že ich propagátori, medzi nimi aj renomovaní vedci, často pri nich zachádzajú priďaleko a veľmi zľavujú z kritérií na vedeckosť.

Rozvírený prach okolo katastrôf medzičasom uľahol a teória sa dostala tam, kam patrí — medzi najkrajšie výsledky matematiky 20. storočia.

Na rozdiel od teórie katastrôf nie je chaos vlastne nijakou teóriou, ale pozorovaním, hoci prevratným. Nemá ani celkom jednotnú matematickú definíciu. Podstatou pozorovania, ktorá sa odráža vo všetkých jeho matematických definíciách, však je, že vďaka extrémnej citlivosti na počiatočné dáta a prepletenosti dynamiky sa systémy, ktoré sa v krátkom časovom úseku javia ako deterministické, dlhodobo môžu správať nepredvídateľne, eraticky.

Tomuto poznatku predchádzalo v dvadsiatych rokoch pozorovanie, ktoré bolo podľa mňa nemenej objavné. Vzišlo zo štúdie Van der Polovho lampového generátora

---

Prof. RNDr. Pavel Brunovský, DrSc. (1934), Ústav aplikovanej matematiky, Univerzita Komenského, Mlynská Dolina, 842 15 Bratislava.

i Volterrovej-Lotkovej rovnice spoločenstva dravec-korisť a jeho podstatou je, že ustálené periodické cykly nie sú niečím patologickým, ale normálnym prírodným javom. Pokiaľ viem, tento poznatok sa s nejakou mimoriadnou pozornosťou nestretol.

História chaosu oslávila nedávno storočnicu. Prvé pozorovania o zložitosti dynamiky v okolí transverzálnej homoklinickej trajektórie (pozri Dodatok) pochádzajú — akože inak — od Poincarého [Po].

Je neveľmi známe, že Van der Polova rovnica zohrala významnú úlohu aj vo vývoji poznatkov o chaotickej dynamike. Odhalili ju v nej Cartwrightová a Littlewood pri štúdiu jej vynútených kmitov koncom štyridsiatych rokov (pozri [CL, L, Le]). Veľa pozornosti však ich výsledky vtedy nevzbudili. Mimo špecialistov nik nezaregistroval ani konštrukciu ďalšieho matematického objektu vytvárajúceho chaos začiatkom šesťdesiatych rokov — Smaleovej podkovy [S1, S2]. Šarkovského práce o komplikovanej dynamike spojitých zobrazení intervalu do seba [Š] zostali dosť neznámymi aj medzi špecialistami. Pritom exotické usporiadanie prirodzených čísel ($3 < 5 < 7 < \ldots < < 2 \cdot 3 < 2 \cdot 5 < \ldots < \ldots < 2^k \cdot 3 < 2^k \cdot 5 < \ldots < \ldots < 2^3 < 2^2 < 2^1 < 1$), ktoré z neho vzišlo, by nemalo nechať chladným nikoho, kto v matematike nachádza kus dobrodružstva a krásy.

Väčší záujem už vzbudil Lorenzov zjednodušený model turbulencie ovzdušia [Lo]. Naozajstná explózia záujmu o chaos nastala, až keď ho Li a Yorke tak nazvali [LY]. Pritom ich práca, ktorá vznikla pri snahe pochopiť Lorenzov model, sčasti znovuobjavuje to, čo bolo oveľa presnejšie známe zo Šarkovského prác. Ťažko povedať, či tento prudký nárast záujmu bol naozaj vyvolaný šťastne zvoleným termínom, alebo je to len časová zhoda. V žiadnom prípade to však z mojej strany nemá byť kritika. Naopak, je užitočné sa poučiť, že aj pri rozširovaní vedeckých výsledkov treba myslieť nielen na obsah, ale aj na obal.

Či už to spôsobil názov alebo nie, práca [LY] značí začiatok dvoch desaťročí snáh odhaliť chaos, kde sa len dá — teoreticky, numericky a experimentálne.

Akú hodnotu majú výsledky týchto pokusov? Predovšetkým si treba pripomenúť, že chaos je matematický pojem a jeho prítomnosť možno dokázať iba matematickými prostriedkami. Vzhľadom na zaokrúhľovacie chyby a chyby metódy, ako aj na to, že na počítanie máme obmedzený čas, nie je napríklad numerickým sledovaním priebehu nejakého deja presne vzaté možné rozlíšiť, či má veľmi dlhú periódu, alebo je chaotický.

Nechcem tým zo štúdie chaosu vylúčiť numeriku. Napokon aj pri iných numerických štúdiách akceptujeme numerické výsledky, hoci nepotvrdzujú nejakú skutočnosť s úplnou presnosťou. Seriózne závery z numerických výsledkov však možno robiť iba vtedy, ak sú zdôvodniteľné v rozumne presnej miere.

A tu je v prípade chaosu kameň úrazu. Citlivá závislosť od počiatočných podmienok, ktorá je základným rysom chaosu, má za následok exponenciálny nárast dôsledkov nepresností počítania. Na prvý pohľad teda robí výsledky numerických výpočtov trajektórií chaotických systémov bezcennými.

O čo ide, vysvetlíme si na jednoduchom príklade dynamického systému

$$x_{t+1} = 2x_t. \tag{1}$$

Jeho trajektórie (t.j. postupnosti generované rekurentným predpisom (1)) sú geometrické postupnosti, ktorých všeobecný člen vieme presne spočítať — platí

$$x_t = 2^t x_0.$$

Predstavme si však, že by sme členy trajektórie počítali rekurentne priamo zo vzťahu (1), ako sa to robí v zložitejších prípadoch. Pri počítaní v dvojnásobnej presnosti na bežnom počítači sa môžeme pri každom výpočte dopustiť nepresnosti $\delta \sim 10^{14}$. To značí, že v prvom kroku môžeme namiesto hodnoty

$$x_1 = 2x_0$$

vypočítať hodnotu

$$\tilde{x}_1 = 2x_0 + \delta.$$

Ak by sme sa už nijakej inej chyby v ďalších výpočtoch nedopustili, po 50 krokoch výpočtu dostaneme člen

$$\tilde{x}_{50} = 2^{49}\tilde{x}_1 \geqq x_{50} + 10^{-14}2^{49} \geqq x_{50} + 1,$$

teda neúnosne veľkú chybu rádu jednotiek.

V tomto príklade samozrejme nijakého chaosu niet. Aby však systém mohol byť chaotický, musí obsahovať expanzívnu zložku, ktorá sa správa podobne (špecialistom pripomenieme, že to vyplýva napr. z toho, že aspoň jeden Ľapunovov exponent musí byť kladný).

Exponenciálny nárast dôsledkov numerických nepresností počítania trajektórie daného bodu je teda neodlúčiteľný od chaosu. Zdanlivo z toho vyplýva, že úspech pri numerickom pátraní po chaose automaticky spochybní metódu jeho hľadania. Hoci sa nedá celkom povedať, že by sa nik nad týmto paradoxom nebol zamyslel [LL], bezmála 15 rokov si väčšina ľudí, „počítajúcich" chaos z toho veľa starostí nerobila. Až nedávno sa našli ľudia, ktorí sa odvážili povedať, že „kráľ je nahý". Bol to napríklad numerik E. Adams z Ústavu aplikovanej matematiky v Karlsruhe.

Polemike okolo chaosu venoval časopis Spiegel v roku 1993 sériu troch dlhých článkov [B]. Podľa nich E. Adams zašiel až tak ďaleko, že spochybnil existenciu chaosu vo všeobecnosti a označil ho za numerický artefakt (treba však poznamenať, že Adams v odpovedi [Ad] na článok [RDP] uvádza, že v [B] boli jeho výroky prekrútené). Paradoxne sa to stalo v dobe, keď už kráľ niekoľko rokov nahý nebol a keď už bolo známe, že artefaktom je uvedený rozpor.

Záchrana je v tom, že pri počítaní chaosu sa sleduje náhodne vybraná trajektória. Nie je teda vôbec dôležité, aby bola trajektóriou vopred (zvyčajne aj tak náhodne) vybraného počiatočného bodu. Ukážeme si, že v príklade (1) numericky získaná trajektória $\{x_t\}$ zostáva v blízkosti nejakej trajektórie, prípadne iného počiatočného bodu než je $\tilde{x}_0 = x_0$.

Za tým účelom uvažujeme všeobecnejší neautonómny (t.j. od t závislý) lineárny rekurentný vzťah

$$x_{t+1} = a_t x_t, \tag{2}$$

kde $0 < |a_t| < a < 1$, a týmto vzťahom generované postupnosti (ktoré pre jednoduchosť nie celkom oprávnene budeme podobne ako v prípade autonómneho vzťahu (1) nazývať trajektóriami). Ľahko si overíme, že pre trajektóriu $\{x_t\}$ vzťahu (2) platí

$$x_t = a_{t-1} \dots a_\tau x_\tau \qquad \text{pre } t \geqq \tau, \tag{3}$$

$$x_t = a_t^{-1} \dots a_{\tau-1}^{-1} x_\tau \qquad \text{pre } t \leqq \tau. \tag{4}$$

Nech teraz $\{\tilde{x}_t\}$ je postupnosť, počítaná podľa (2) s nepresnosťou $\leqq \delta$, t.j. platí

$$\tilde{x}_{t+1} = a_t \tilde{x}_t + \delta_t, \tag{5}$$

kde

$$|\delta_t| \leqq \delta, \quad \delta > 0; \tag{6}$$

takúto postupnosť budeme v ďalšom nazývať δ-pseudotrajektóriou. Odčítaním (2) a (5) dostávame

$$|\tilde{x}_{t+1} - x_{t+1}| \leqq a|\tilde{x}_t - x_t| + \delta. \tag{7}$$

Ak pseudotrajektória $\{\tilde{x}_t\}$ a trajektória $\{x_\tau\}$ vychádzajú z toho istého bodu v okamihu $t = \tau$, t.j. platí

$$x_\tau = \tilde{x}_\tau, \tag{8}$$

sčítaním nerovnosti (7) od τ do $t-1$ dostávame pre $t \geqq \tau$

$$|\tilde{x}_t - x_t| \leqq (1 + a + \dots + a^{t-\tau-1})\delta \leqq \frac{1}{1-a}\,\delta. \tag{9}$$

Ak teda platí (3), pre $t \geqq \tau$ sa členy trajektórie a numericky počítanej δ-pseudotrajektórie budú odlišovať nanajvýš o ε $(= (1-a)^{-1}\delta)$, ktoré je pevným od dĺžky postupnosti nezávislým násobkom presnosti počítania δ.

Obrátením času (t.j. zámenou t na $-t$) sa môžeme jednoducho presvedčiť, že ak namiesto (3) platí

$$|a_t| > a > 1, \tag{10}$$

(čo spĺňa aj (1)), namiesto (8) dostávame pre δ-pseudotrajektóriu (2) spĺňajúcu (8) odhad

$$|\tilde{x}_t - x_t| \leqq \frac{1}{1-a^{-1}}\,\delta, \tag{11}$$

avšak pre $t \leqq \tau$. Teda napriek tomu, že v prípade (10) sa δ-pseudotrajektória vychádzajúca z bodu x_0 môže od presnej trajektórie tohoto bodu exponenciálne vzďaľovať, musí bez ohľadu na dĺžku pseudotrajektórie $\{\tilde{x}_\tau\}_{t=0}^{\tau}$ existovať presná trajektória $\{x_t\}_{t=0}^{\tau-1}$, ktorej členy sa od členov postupnosti $\{\tilde{x}_t\}_{t=0}^{\tau}$ líšia o nezávislé od dĺžky postupnosti číslo ε $\left(= (1-a_{-1})^{-1}\delta\right)$. Konkrétne je to trajektória systému (2), spĺňajúca $\tilde{x}_\tau = x_\tau$. Poznamenajme, že x_0 a $\tilde{x}_0$ sa zhodovať nemusia a že trajektória $\{x_t\}$ závisí od τ.

Jednoduchým limitným prechodom sa však možno presvedčiť, že trajektóriu $\{x_t\}$ spĺňajúcu (11) možno vybrať nezávisle od τ; takúto trajektóriu nazveme ε-tieňom pseudotrajektórie $\{\tilde{x}_t\}$.

Nič nám teraz nebráni rozšíriť pozorovanie o existencii ε-tieňa pre vektorový lineárny rekurentný predpis s dvoma zložkami typu (2), z ktorých jedna spĺňa (3) a druhá (10). Voľne povedané sa ε-tieň získa limitným prechodom riešenia okrajovej úlohy v ktorej zbiehavá zložka je rovná členu pseudotrajektórie na začiatku a rozbiehavá na konci zvoleného časového úseku. Ba dokonca ho možno rozšíriť na vektorový rekurentný predpis ľubovoľnej dimenzie

$$x_{t+1} = A_t x_t, \tag{12}$$

$x_t \in \mathbb{R}^n$, kde A_t sú regulárne matice typu

$$A_t = \begin{pmatrix} B_t & 0 \\ 0 & C_t \end{pmatrix}, \tag{13}$$

a teda (13) možno písať ako dvojicu vzťahov

$$\begin{aligned} y_{t+1} &= B_t y_t, \\ z_{t+1} &= C_t z_t \end{aligned} \tag{14}$$

s maticami B_t, C_t, ktorých rozmery nezávisia od t, spĺňajúcimi

$$|B_{\tau+t-1} \dots B_\tau y| \leqq K a^t |y|, \tag{15}$$

$$|C_{\tau+t-1} \dots C_\tau z| \geqq K^{-1} a^{-t} |z| \tag{16}$$

pre $t \geqq 0$ a $0 < a < 1$.

Všimnime si ďalej, že na existencii ε-tieňovej trajektórie, kde $\varepsilon \leqq Q\delta$ pre nejaké $Q > 0$, stačí, aby sa systém vzťahov (12) dal na podobu (13) pretransformovať postupnosťou lineárnych transformácií

$$(y_t, z_t)^{\mathrm{T}} = S_t x_t$$

($^{\mathrm{T}}$ označuje transpozíciu), pokiaľ $|S_t|$ a $|S_t^{-1}|$ sú rovnomerne ohraničené. V reči matíc žiadame na rozdiel od (13) od matíc A_t, aby spĺňali

$$A_t = S_{t+1}^{-1} \begin{pmatrix} B_t & 0 \\ 0 & C_t \end{pmatrix} S_t, \tag{17}$$

kde B_t a C_t spĺňajú (13). O systéme (12), ktorý má túto vlastnosť, hovoríme, že vykazuje exponenciálnu dichotómiu.

Zo zrejmých dôvodov možno prítomnosť nelineárnej expanzívnej zložky z v systéme rekurentných vzťahov (14) interpretovať ako citlivú závislosť na počiatočných dátach. Všeobecne sa však od chaosu okrem citlivej závislosti od počiatočných dát vyžaduje ešte „tranzitívnosť", teda existencia hustej trajektórie. Táto požiadavka vyjadruje, že sa systém nepredvídateľne môže ľubovoľne blízko priblížiť k ľubovoľnému stavu.

Takúto vlastnosť môžu mať iba nelineárne dynamické systémy. Treba teda pre ne nejako prispôsobiť pojem dichotómie trajektórií.

Uvažujme dynamický systém

$$x_{t+1} = f(x_t), \tag{18}$$

kde $x_t \in \mathbb{R}^n$ (alebo všeobecnejšie z n-rozmernej diferencovateľnej variety) a f je C^1-difeomorfizmus (teda spojité diferencovateľné zobrazenie s diferencovateľným inverzným).

Hovoríme, že invariantná množina H systému (18) je hyperbolická, ak pre ľubovoľnú trajektóriu $\{x_t\}$ systému (18) v H má linearizovaný systém (12) s $A_t := Df(x_t)$ exponenciálnu dichotómiu s rovnakými dimenziami y a z, rovnakými konštantami K a s rovnakým ohraničením C na transformačné matice S_t a S_t^{-1}.

Platí

Tieňová lema. *Nech H je kompaktná invariantná hyperbolická množina dynamického systému* (18). *Potom existuje $Q > 0$ také, že ľubovoľná δ-pseudotrajektória s dostatočne malým $\delta > 0$ má jediný ε-tieň, kde*

$$\varepsilon \leqq Q\delta. \tag{19}$$

Tieňová lema je objavom D. V. Anosova z roku 1963. Je súčasťou rozsiahlej práce [A], bohatej na originálne myšlienky a postupy. Jej dôkaz je technicky náročný.

Tieňová lema nám vlastne tvrdí to, čo treba — ak počítame trajektóriu numericky s presnosťou δ, bude v jej ε-blízkosti presná trajektória. Vzhľadom na odhad (19) môžeme teoreticky ε voliť ľubovoľne malé. Prakticky je však δ zdola ohraničené zaokrúhľovacou chybou počítača, a to nám dáva dolné ohraničenie na ε. Preto je zaujímavá aj konštanta Q, ktorá sa odvodzuje od konštánt exponenciálnej dichotómie K, a, C.

Horšie je to s predpokladmi hyperboličnosti, na ktorej overovanie nie sú vypracované všeobecne účinné metódy. Súvisí s prítomnosťou Ľapunovových exponentov rozličných znamienok, známym to heuristickým predpokladom chaosu.

Matematicky dokázateľne chaotické množiny sú všetky hyperbolické aspoň v zoslabenej forme (jeden z príkladov je v Dodatku, kde tieňová lema vystupuje ako prostriedok dokazovania chaosu). Nie je preto veľkým prehreškom, ak tieňovú lemu prijmeme ako zdôvodnenie korektnosti numerických výpočtov chaotických trajektórií.

Stretol som sa aj z názorom, že v pozadí rozruchu okolo Adamsových názorov sú aj peniaze. Podľa tohoto názoru nemeckej meteorologickej lobby domáhajúcej sa prostriedkov na stále výkonnejšie počítače neveľmi vyhovovalo, že sa počasie považovalo za typicky chaotický, a teda dlhodobo nepredpovedateľný jav. Veľmi jej teda prišlo vhod tvrdenie, že chaos je artefakt. Pre spravodlivosť treba povedať, že som toto počul od človeka, ktorého úspešná kariéra stála práve na „počítaní" chaosu.

Nad zdôvodniteľnosťou numerickej simulácie chaotických procesov sa ako prvý zamyslel spoluautor jeho názvu J. Yorke so spolupracovníkmi [HYG1]. Myšlienka použitia tieňovej lemy patrí Chowovi a Palmerovi [CP1, CP2].

V spomínaných a ďalších prácach [HYG2, SY1, SY2, CP3, CV] sa autori nespoliehajú na vieru v ťažko overiteľný predpoklad rovnomernej hyperboličnosti chaotickej množiny. Nahradzujú ho buď a posteriori alebo rekurentne numericky overovanou dichotómiou linearizácie pozdĺž numericky počítanej individuálnej trajektórie. Umožňuje im to nielen rigorózne dokázať existenciu tieňovej trajektórie, ale aj odhadnúť jej vzdialenosť od numericky získanej pseudotrajektórie. Stojí za poznámku, že o týchto prácach niet v sérii článkov [B] ani zmienky.

Prirodzenou otázkou je, ako je to s dynamickými systémami so spojitým časom, generovanými diferenciálnymi rovnicami. Tieňová lema pre takéto systémy je sformulovaná a dokázaná v [KP], numerickým výpočtom je venovaná práca [CV].

Na záver ešte jedna dobrá správa pre fanúšikov chaosu: Po dvadsiatich rokoch neúspešných pokusov mnohých matematikov sa nedávno K. Mischaikowovi a M. Mrózekovi podarilo vypracovať dôkaz chaotičnosti atraktora v Lorenzových rovniciach. Využíva sa v ňom počítač, ale na celkom inej úrovni: pri precíznom sledovaní nepresnosti počítania sa overujú algebraicky — topologické podmienky toho, že atraktor obsahuje „Smaleovu podkovu“, v ktorej chaotičnosť je dokázaná.*) Ani tento výsledok nevzbudil pozornosť autora [B], kde je chaotičnosť Lorenzovho atraktora spochybnená. Cituje sa v ňom (či už oprávnene alebo nie) výrok E. Adamsa, podľa ktorého „Obrázok (myslí sa zmeny počítačom získaný obrázok trajektórie v atraktore Lorenzových rovníc) je takmer celkom nesprávny. Čo ukazuje, nemá nič spoločného s tým, čo sa v Lorenzovej rovnici odohráva“. Sérii článkov Spieglu však treba priznať jeho oprávnenú kritiku nekvalifikovaného zbožňovania chaosu. Hoci to takto explicitne neformuluje, autor cíti neprimeranosť stotožňovania rozličných významov pojmu.

Ako teda odpovedať na otázku v nadpise? Milovníci chaosu, ktorým Adamsove vývody spôsobili bezsenné noci, môžu naďalej pokojne spávať — pokiaľ im k tomu postačí, že ich výpočty nie sú ich úspechom automaticky vylúčené. Celkom bezstarostní však zasa byť nemôžu. Existuje totiž príklad, v ktorom je naozaj možné chaos v nechaotickom systéme „vyrobiť“ nepremyslenou numerickou aproximáciou (pozri Dodatok).

Dodatok

Triviálnym prípadom hyperbolickej množiny dynamického systému (18) je hyperbolický pevný bod. Je to bod $\hat{x}$ taký, že

$$f(\hat{x}) = \hat{x}$$

*) Presnejšie povedané, atraktor Lorenzových rovníc obsahuje invariantnú podmnožinu, tok na ktorej je semikonjugovaný Smaleovej podkove.

a vlastné hodnoty $Df(\hat{x})$ sú mimo jednotkovej kružnice. Vo vhodne volených súradniciach totiž vtedy možno písať

$$Df(\hat{x}) = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

kde vlastné hodnoty matice B majú absolútnu hodnotu < 1, kým absolútne hodnoty vlastných hodnôt C sú > 1 a B, C sú v Jordanovom kanonickom tvare. Priamočiarym výpočtom sa možno presvedčiť, že systém (12) s $A_t \equiv Df(\hat{x})$ má exponenciálnu dichotómiu, odhady (15), (16) sa zredukujú na

$$|B^t y| \leqq K a^t |y|, \tag{19}$$

$$|C^t z| \geqq K^{-1} a^{-t} |z| \tag{20}$$

$(0 < a < 1)$ pre $t \geqq 0$.

Odhady (19), (20) značia, že násobením maticou $Df(\hat{x})$ sa body invariantného podpriestoru $z = 0$ k sebe (a teda aj k 0) exponenciálne približujú, kým body priestoru $y = 0$ sa od seba exponenciálne vzďaľujú. Preto nazývame priestor $z = 0$ stabilným a priestor $y = 0$ nestabilným podpriestorom bodu $\hat{x}$.

Veta o stabilnej a nestabilnej variete hovorí, že existujú invariantné variety $W^s(\hat{x})$ (stabilná) a $W^u(\hat{x})$ (nestabilná) systému (18), prechádzajúce bodom $\hat{x}$ a dotýkajúce sa v ňom stabilného, resp. nestabilného podpriestoru. Tieto variety dedia vyššie spomínané vlastnosti približovania, resp. vzďaľovania sa trajektórií linearizovaného systému. Môžu sa pretínať aj v inom bode x_0 než v $\hat{x}$. Z ich invariantnosti vyplýva, že vtedy spolu s bodom x_0 obsahujú aj celú jeho trajektóriu $\{x_t\}, x_t = f^t(x_0)$ a že platí

$$\lim_{t \to \pm\infty} x_t = \hat{x}. \tag{21}$$

Trajektóriu $\{x_t\}$ nazývame homoklinickou trajektóriou bodu $\hat{x}$. Hovoríme že $\{x_t\}$ je transverzálna, ak dotykové priestory $T_{x_0}W^s(\hat{x})$, $T_{x_0}W^u(\hat{x})$ variet $W^s(\hat{x}), W^u(\hat{x})$ v bode x_0 majú jednobodový prienik (a teda ich algebraický súčet je celý priestor).

Ak $\{x_t\}$ je transverzálna homoklinická trajektória hyperbolického pevného bodu $\hat{x}$, potom množina

$$H := \{\hat{x}\} \cup \{x_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$$

je kompaktná invariantná hyperbolická množina [P].

Aby sme si to ozrejmili, všimnime si že H sa skladá z dvoch trajektórií. Hyperboličnosť $\{\hat{x}\}$ značí exponenciálnu dichotómiu tejto jednobodovej trajektórie, zostáva teda ozrejmiť si exponenciálnu dichotómiu trajektórie $\{x_t\}$.

Linearizovaný systém (12) s $A_t = Df(x_t)$ zrejme zobrazuje dotykové priestory invariantných variet v bode x_t na dotykové priestory v bode x_{t+1}. Nie je ťažko si predstaviť, že dotykové priestory $T_{x_t}W^s(\hat{x})$ a $T_{x_t}W^u(\hat{x})$ sa pre $t \to \pm\infty$ blížia k stabilnému, resp. nestabilnému priestoru v bode $\hat{x}$ a preto linearizovaný systém (12) body na nich asymptoticky exponenciálne približuje, resp. vzďaľuje. Od t závislá lineárne transformácia, ktorá prevádza $T_{x_t}W^s(\hat{x})$, resp. $T_{x_t}W^u(\hat{x})$ do podpriestorov $y = 0$, resp. $z = 0$ teda prevádza linearizovaný proces do tvaru, v ktorom platia odhady (15), (16).

Na invariantnej množine H teda platí Tieňová lema. Použijeme ju pre špeciálne pseudotrajektórie.

Zvolíme malé $\delta > 0$. Keďže platí (21), existuje N tak veľké, že x_{-N} a x_N sú v δ-okolí bodu $\hat{x}$. Označíme

$$\Sigma = \{x_{-N}, \dots, x_0, \dots x_N\}$$

a pre $m \geqq 0$ označíme Γ_m m-člennú postupnosť, ktorej všetky členy sú $\hat{x}$. Pre ľubovoľne zvolenú postupnosť nezáporných čísel $\{m_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ je postupnosť

$$\dots, \Gamma_{m_{-1}}, \Sigma, \Gamma_{m_0}, \Sigma, \Gamma_{m_1}, \dots,$$

ktorá vznikne zreťazením konečných postupností Γ_{m_k} a medzi nich vložených konečných postupností Σ zrejme δ-pseudotrajektóriou. Existuje teda jej ε-tieň. Ak δ (a teda ε) je dosť malé, potom jeho úsek, zodpovedajúci Σ predstavuje jeden obeh v blízkosti homoklinickej trajektórie, kým v úseku, zodpovedajúcom Γ_m, tieňová trajektória zostáva v blízkosti pevného bodu $\hat{x}$. Voľbou čísel m_k (pripomínam, že m_k môže byť aj 0) si teda pre tieňovú trajektóriu môžeme predpísať ľubovoľné počty následných obehov v blízkosti homoklinickej trajektórie a pomedzi ne vložiť pobyty trajektórie v blízkosti $\hat{x}$ ľubovoľnej dĺžky. Vidno teda, že správanie sa trajektórie je naprosto nepredvídateľné, eratické.

Spresnením našich argumentov možno dokázať, že dynamický systém v okolí homoklinickej trajektórie obsahuje invariantnú množinu, na ktorej je konjugovaný s tzv. Bernoulliho posunom, o ktorom je známe, že má všetky bežne prijímané vlastnosti chaosu: citlivú závislosť na počiatočných dátach, hustú trajektóriu, periodické body ľubovoľnej periódy, ergodickú invariantnú mieru, atď. Štúdium transverzálnej homoklinickej trajektórie bolo aj motiváciou pre vznik Smaleovej podkovy — zobrazenia roviny do seba, ktoré bolo jednou z prvých príkladov chaosu.

Príklad transverzálnej homoklinickej trajektórie naznačuje aj to, ako možno chaos vyrobiť umelo: homoklinická trajektória dynamického systému so spojitým časom nemôže byť transverzálna a ani nemá nič spoločné s chaosom. Diskretizáciou, resp. numerickou aproximáciou rovnice možno transverzálnu trajektóriu a teda aj chaos vyrobiť. Našťastie, miera transverzality klesá s veľkosťou kroku diskretizácie rýchlejšie, ako ľubovoľná jeho mocnina. Preto je v tomto prípade možné vyhnúť sa umelému chaosu voľbou dostatočne jemného kroku [FS].

Záverom by som sa rád poďakoval anonymnému recenzentovi, ktorý ma upozornil na všeličo, o čom som nevedel — napríklad na knihu [LL], ako aj na dozvuky série [B] v článkoch [RDP] a [Ad].

Literatura

[A] D. V. Anosov: *Geodetičeskije potoki na zamknutych rimannovych poverchnosťach otricatel'noj krivizny.* Trudy Mat. Inst. im. Steklova *90* (1967).

[Ad] E. ADAMS: Phys. B1 *50* (1994), 359.

[B] P. BRÜGGE: *Der Kult um das Chaos.* Der Spiegel *47* (1993); č. 39, 156–164; č. 40, 232–241; č. 41, 240–252.

[CL] M. L. CARTWRIGHT and J. E. LITTLEWOOD: *On nonlinear differential equations of the second order. The equation* $\ddot{y} + k(1 - y^2)\dot{y} + y = b\lambda k \cos(\lambda t + a)$*, k large.* J. Lond. Math. Soc. *20* (1945), 180–189.

[CP1] S. N. CHOW and K. J. PALMER: *The accuracy of numerically computed orbits of dynamical systems.* In „Equadiff 7", proceedings of the Conference held in Prague 1989 (1990), Teubner, Leipzig, 74–76.

[CP2] S.-N. CHOW and K. J. PALMER: *On the numerical computation of orbits of dynamical systems: The one-dimensional case.* J. Dynamics and Differential Equations *3* (1991), 361–379.

[CP3] S.-N. CHOW and K. J. PALMER: *On the numerical computation of orbits of dynamical systems: the higher dimensional case.* J. Complexity *8* (1992), 398–423.

[CV] S.-N. CHOW and E. S. VAN VLECK: *A shadowing lemma approach to global error analysis for initial value ODEs.* SIAM J. Sci. Comput. *15*, No. 4, July 1994, 959–976.

[FS] B. FIEDLER, J. SCHEURLE: *Discretization of homoclinic orbits, rapid forcing and „invisible" chaos.* Preprint SC 91-5 (1991), Konrad-Zuse Zentrum für Informationstechnik Berlin, vyjde v sérii Memoirs of American Mathematical Society.

[HYG1] S. M. HAMMEL, J. A. YORKE and C. GREBOGI: *Do numerical orbits of chaotic dynamical processes represent true orbits?* J. Complexity *3* (1987), 136–145.

[HYG2] S. M. HAMMEL, J. A. YORKE and C. GREBOGI: *Numerical orbits of chaotic processes represent true orbits.* Bull. Amer. Math. Soc. *19* (1988), 465–470.

[L] N. LEVINSON: *A second order differential equation with singular solutions.* Ann. Math. *50* (1949), 127–153.

[Le] M. LEVI: *Qualitative analysis of the periodically forced relaxation oscillations.* Mem. AMS *214* (1981), 1–147.

[Lo] E. N. LORENZ: *Deterministic non-periodic flow.* J. Atmos. Sci. *20* (1963), 130 až 141.

[LL] A. J. LICHTENBERG, M. A. LIEBERMAN: *Regular and Statistical Motion.* Springer, Berlin 1983, 276.

[LY] T. Y. LI and J. A. YORKE: *Period three implies chaos.* Amer. Math. Monthly *82* (1975) 985–992.

[MM] K. MISCHAIKOW, M. MRÓZEK: *Chaos in the Lorenz equations: a computer assisted proof.* Center for Dynamical Systems & Nonlinear Studies, Georgia Inst. of Technology, Report Nr. CDSN93-123, 1993.

[P] K. J. PALMER: *Exponential dichotomos; the shadowing lemma and transversal homoclinic points.* Dynamics Reported *1* (1988), 265–306.

[Po] H. POINCARÉ: *Sur les équations de la dynamique et les problemes des trois corpes.* Acta Math. *13* (1890), 1–270.

[RDP] P. H. RICHTER, H. DULLIN, H.-O. PEITGEN: *Der Spiegel, das Chaos — und die Wahrheit.* Phys. B1 *50* (1994), 335.

[S1] S. SMALE: *Diffeomorphisms with many periodic points.* In: Differential and Combinatorial Topology (ed. S. S. Cairns), Princeton University Press, Princeton 1963, 63–80.

[S2] S. SMALE: *Differentiable dynamical systems.* Bull. Amer. Math. Soc. *73* (1967), 747–817.

[SY1] T. SAUER and J. A. YORKE: *Shadowing trajectories of dynamical systems.* In „Computer-Aided Proofs in Analysis“ (eds. K. Meyer and D. Schmidt), Springer--Verlag, Berlin 1990, 229–234.

[SY2] T. SAUER and J. A. YORKE: *Rigorous verification of trajectories for the computer simulation of dynamical systems.* Nonlinearity *4* (1991), 961–979.

[Š] A. N. ŠARKOVSKIJ: *Koexistencija ciklov nepreryvnogo otobraženia prjamoj na sebja.* Ukrainskij matematičeskij žurnal *16* (1964), 61–71.

O Fermatových číslech

Michal Křížek, Praha

1. Úvod

Francouzský matematik Pierre Fermat (1601–1665) se proslavil nejen svou velkou a malou větou Fermatovou, ale také hypotézou, že všechna čísla tvaru

$$F_m = 2^{2^m} + 1 \quad \text{pro } m = 0, 1, 2, \dots \tag{1}$$

jsou prvočísla. Ani jedno z těchto tří tvrzení však pravděpodobně nedokázal. Přiznával ale, že s důkazem domněnky o prvočíselnosti F_m si neví rady. Čísla F_m se po něm nazývají Fermatova čísla.

Pokud je F_m prvočíslo, říkáme, že je Fermatovým prvočíslem. Prvních pět členů posloupnosti (1), tj.

$$F_0 = 3, \quad F_1 = 5, \quad F_2 = 17, \quad F_3 = 257, \quad F_4 = 65537, \tag{2}$$

jsou prvočísla. K tomu, aby číslo $2^n + 1$ pro n přirozené bylo prvočíslem, je nutné, aby byl exponent n tvaru 2^m pro $m \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Je-li totiž k přirozené a $l \geqq 3$ liché, pak

$$2^{kl} + 1 = (2^k + 1)(2^{k(l-1)} - 2^{k(l-2)} + \dots - 2^k + 1). \tag{3}$$

Odtud plyne, že číslo $2^n + 1$ je složené, jestliže je exponent n dělitelný lichým číslem $l \geqq 3$. To však v posloupnosti (1) nenastane.

RNDr. MICHAL KŘÍŽEK, DrSc. (1952), je pracovníkem Matematického ústavu AV ČR, Žitná 25, 11 567 Praha 1 (e-mail: `krizek@earn.cvut.cz`). Tato práce byla částečně podpořena grantem č. 201/94/1067 GA ČR.