Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Diferenciálny a integrálny počet funkcií viac premenných v príkladoch

Martin Kollár, Ľubica Kossaczká
a Daniel Ševčovič

Vysokoškolský učebný text pre potreby zabezpečenia výučby predmetov Matematická analýza a Diferenciálny a integrálny počet vyučovaných na študijnom programe Ekonomická a finančná matematika.

Autori:
© Mgr. Martin Kollár, PhD., RNDr. Ľubica Kossaczká, CSc.,
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Názov: Diferenciálny a integrálny počet funkcií viac premenných v príkladoch
Vydavateľ: Knižničné a edičné centrum FMFI UK
Rok vydania: 2010,2011,2012 (tretie doplnené vydanie)
Miesto vydania: Bratislava
Vydanie: tretie
Počet strán: 198
Internetová adresa:
www.fmph.uniba.sk/index. php?id=el_st_m
www.iam.fmph.uniba.sk/institute/sevcovic/skripta/difint
ISBN: 978-80-89186-54-9

Obsah

Úvod

Učebný text Diferenciálny a integrálny počet vznikol z potrieb zabezpečenia študijnej literatúry pre predmety Matematická analýza a Diferenciálny a integrálny počet, ktoré sa vyučujú v študijnom programe Ekonomická a finančná matematika. Text vychádza a preberá mnohé príklady predovšetkým z osvedčených študijných textov akými sú skriptá Barnovskej a kol. [2, 3, 8] ako aj zo známych zbierok príkladov Demidoviča [10], Bermana [11], Kluvánka, Mišíka a Šveca [5]. Cieľom autorov bolo pripraviť súbornú zbierku, ktorá by pokryla celý obsah látky vyučovanej v treťom a štvrtom semestri štúdia Ekonomickej a finančnej matematiky.

Učebný text pozostáva z štrnástich kapitol: Úvod, Lineárne normované priestory, Topologické vlastnosti lineárnych normovaných priestorov, Spojitosť funkcií, Diferencovateľnosť funkcií viac premenných, Vlastnosti diferencovateľných funkcií, Extremálne vlastnosti funkcií viac premenných, Funkcie zadané implicitným vzťahom, Viazané extrémy funkcie viac premenných, Rozvoj funkcií do Fourierovho radu a aproximácie funkcií, Riemannov integrál funkcie viac premenných, Metóda substitúcie v integrálnom počte, Krivkové a plošné integrály, Parametrické integrály. Posledná časť Výsledky obsahuje výsledky a návody k podstatnej časti uvádzaných príkladov.

Ľubica Kossaczká, Martin Kollár a Daniel Ševčovič
Bratislava, september 2008.

Kapitola 1

Lineárne normované priestory

Norma a jej vlastnosti

Cauchy-Schwartzova nerovnosť, Youngova a Minkowského nerovnosť

Ekvivalentné normy

Príklady noriem v a vo všeobecných LNP

Euklidovský priestor

Skalárny súčin

Dôležité pojmy a tvrdenia

Definícia normy. Nech X je lineárny vektorový priestor nad poľom $\mathbb{R}$ (alebo $\mathbb{C}$). Nech $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ je funkcia, ktorá spĺňa nasledujúce vlastnosti:

1. (nezápornosť, nedegerovanosť)

$$\forall x \in X : \|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

2. (homogenita)

$$\forall x \in X, \alpha \in \mathbb{R} \ \text{(alebo } \mathbb{C}\text{)} : \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|;$$

3. (trojuholníková nerovnosť)

$$\forall x, y \in X : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Definícia ekvivalentných noriem. Nech X je LVP a $\|.\|_a, \|.\|_b$ sú dve normy na X. Hovoríme, že normy $\|.\|_a$ a $\|.\|_b$, sú ekvivalentné (píšeme $\|.\|_a \sim \|.\|_b$,), ak $\exists C > 0$ také, že

$$\frac{1}{C}\|x\|_a \leq \|x\|_b \leq C\|x\|_a \quad \forall x \in X.$$

Príklad 1. Nech $X = \mathbb{R}^n$. Pre $1 < p < \infty$ označme

$$\|x\|_p = (\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}},$$

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,2,\dots n} \|x_i\| \quad \text{ak } p = \infty.$$

Potom X je lineárny normovaný priestor.

Príklad 2. Nech $X = C([a, b])$ je priestor spojitých funkcií. Položme

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

Potm X s normou $\|.\|_\infty$ je lineárny normovaný priestor.

Príklad 3. Nech $X = C([a, b])$ je priestor spojitých funkcií s normou

$$\|f\|_p = (\int_a^b |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}.$$

Potom X je lineárny normovaný priestor.

Riešené príklady

Príklad 1. Nech l_∞ je množina všetkých reálnych ohraničených postupností $\{x_i\}_{i=1}^\infty$. Potom

$$\|x\|_\infty = \sup_{i=1,2,\ldots} |x_i|$$

je zrejme norma na l_∞. Definujme inú normu pomocou vzťahu:

$$\|x\| = \sup\{\frac{1}{n}|x_1 + x_2 + x_3 \ldots + x_n|, n = 1, 2, \ldots\}$$

pre $x \in l_\infty$. Ukážte, že $\|x\|$ je norma, ale $\|x\|$ a $\|x\|_\infty$ nie sú ekvivalentné.

Riešenie. Na to, aby $\|.\|$ bola norma, treba ukázať tri vlastnosti normy a aj to, že pre $x \in l_\infty$ je funkcia $\|.\|$ dobre definovaná. Ak $x \in l_\infty$ je ľubovoľné, potom existuje $C > 0$ také že

$$\forall i \in N \ \ |x_i| \leq C.$$

Teda

$$\frac{1}{n}|(x_1 + x_2 + \ldots x_n)| \leq \frac{1}{n}(|x_1| + |x_2| + \ldots |x_n|) \leq \frac{1}{n}nC = C.$$

Tým pádom existuje konečné $\|x\| = \sup_{n=1,2,\ldots} \frac{1}{n}|(x_1 + x_2 + \ldots x_n)| < \infty$. Nezápornosť, nedegenerovanosť a homogenita triviálne vyplývajú z definície. Pre ilustráciu dokážme trojuholníkovú nerovnosť. Nech $x, y \in l_\infty$ sú ľubovoľné. Keďže

$$\frac{1}{n}|(x_1 + x_2 + \ldots x_n) + (y_1 + y_2 + \ldots y_n)| \leq \frac{1}{n}|(x_1 + x_2 + \ldots x_n)| + \frac{1}{n}|(y_1 + y_2 + \ldots y_n)|,$$

tak potom, z trojuholníkovej nerovnosti pre absolútnu hodnotu reálnych čísel, platí aj

$$\frac{1}{n}|(x_1+x_2+\ldots x_n)+(y_1+y_2+\ldots y_n)| \leq \sup_{n=1,2,\ldots} \frac{1}{n}|(x_1+x_2+\ldots x_n)| + \sup_{n=1,2,\ldots} \frac{1}{n}|(y_1+y_2+\ldots y_n)|$$

$$= \|x\| + \|y\|.$$

Keďže n bolo ľubovoľné, platí $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Teraz sa zaoberajme ekvivalentnosťou noriem $\|.\|$ a $\|.\|_\infty$. Nech $x \in l_\infty$, ľubovoľné. Teda $x = (x_1, x_2, \ldots)$. Keďže $|x_i| \leq \|x\|_\infty$, tak $\frac{1}{n}|(x_1 + x_2 + \ldots x_n)| \leq \frac{1}{n}|(|x_1| + |x_2| + \ldots |x_n|) \leq \frac{1}{n}.n\|x\|_\infty = \|x\|_\infty$ a teda

$$\|x\| \leq \|x\|_\infty.$$

Teraz ukážeme sporom, že dané normy nie sú ekvivalentné. Predpokladajme, že sú ekvivalentné. Potom existuje $C > 0$, také že

$$\forall x \in l_\infty : \|x\|_\infty \leq C\|x\|. \tag{1.1}$$

Teraz vezmime postupnosť $a_n \in l_\infty, n = 1, 2, ..$ takú, že

$$(a_n)_i = 0 \ \ ak \ \ i \neq n, (a_n)_i = 1 \ \ ak \ \ i = n.$$

Zrejme

$$\forall n \in N : \|a_n\| = \frac{1}{n}\,, \|a_n\|_\infty = 1.$$

Dosadíme za $x = a_n$ do (1.1) a dostaneme: $1 \leq \frac{C}{n}$. Keďže n je ľubovoľné, dostávame spor.

Príklad 2. Funkciu $f : \langle a, b\rangle \mapsto \mathbb{R}$ nazývame funkciou s ohraničenou variáciou na $\langle a, b\rangle$ vtedy a len vtedy, keď výraz

$$V(f) = \sup\{\sum_{i=1}^{n} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| : n \in N, a = x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n < x_{n+1} = b\} \in \mathbb{R}.$$

Číslo $V(f)$ nazývame variáciou funkcie f na $\langle a, b\rangle$. Dokážte:

a) Každá monotónna funkcia $f : \langle a, b\rangle \mapsto \mathbb{R}$ má ohraničenú variáciu na $\langle a, b\rangle$ a platí $V(f) = |f(b) - f(a)|$.

b) Lineárna kombinácia dvoch funkcií s ohraničenou variáciou na $\langle a, b\rangle$ je funkcia s ohraničenou variáciou na $\langle a, b\rangle$.

c) Ak $f : \langle a, b\rangle \mapsto \mathbb{R}$ má ohraničenú variáciu na $\langle a, b\rangle$ a $c \in (a, b)$, tak f je s ohraničenou variáciou aj na $\langle a, c\rangle$.

d) Nech $f : \langle a, b\rangle \mapsto \mathbb{R}$ je s ohraničenou variáciou na $\langle a, b\rangle$ a nech $V_f(x)$ znamená 0, ak $x = a$, a variáciu f na $\langle a, x\rangle$,ak $x \in (a, b\rangle$. Potom $V_f(x)$ je na $\langle a, b\rangle$ neklesajúca funkcia. Funkcia $V_f(x) - f(x)$ je na $\langle a, b\rangle$ tiež neklesajúca.

e) Funkcia $f : \langle a, b\rangle \mapsto \mathbb{R}$ je funkciou s ohraničenou variáciou na $\langle a, b\rangle$ vtedy a len vtedy,keď je rozdielom dvoch neklesajúcich funkcií na $\langle a, b\rangle$.

f) Priestor $V(\langle a, b\rangle)$ všetkých funkcií s ohraničenou variáciou na $\langle a, b\rangle$je lineárny priestor nad $\mathbb{R}$ a funkcia

$$\|.\|_v : V(\langle a, b\rangle) \mapsto \mathbb{R}$$

definovaná ako

$$\|f\|_v = |f(a)| + V(f), \forall f \in V(\langle a, b\rangle)$$

je norma na $V(\langle a, b\rangle)$.

Riešenie.

a) Nech $f : \langle a, b\rangle \mapsto \mathbb{R}$ je neklesajúca, potom

$$V(f) = \sup\{\sum_{i=1}^{n} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| : n \in N, a = x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n < x_{n+1} = b\}$$

$$= \sup\{\sum_{i=1}^{n} (f(x_{i+1}) - f(x_i)) : n \in N, a = x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n < x_{n+1} = b\} = f(b) - f(a) \in \mathbb{R}.$$

V prípade nerastúcej f obdobne $V(f) = f(a) - f(b)$.

b) Nech $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$, nech $f, g : \langle a, b\rangle \mapsto \mathbb{R}$ sú funkcie s ohraničenou variáciou. Máme ukázať, že aj $\alpha f + \beta g$ má ohraničenú variáciu na $\langle a, b\rangle$. Nech

$$n \in \mathbb{N}, a = x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n < x_{n+1} = b.$$

Počítajme

$$\sum_{i=1}^{n} |(\alpha f + \beta g)(x_{i+1}) - (\alpha f + \beta g)(x_i)|$$

$$\leq |\alpha|. \sum_{i=1}^{n} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| + |\beta|. \sum_{i=1}^{n} |g(x_{i+1}) - g(x_i)| \leq |\alpha| V(f) + |\beta| V(g).$$

Preto

$$\sum_{i=1}^{n} |(\alpha f + \beta g)(x_{i+1}) - (\alpha f + \beta g)(x_i)| \leq |\alpha| V(f) + |\beta| V(g).$$

Teda aj

$$\sup\{\sum_{i=1}^{n} |(\alpha f+\beta g)(x_{i+1}) - (\alpha f+\beta g)(x_i)| : n \in N, a = x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n < x_{n+1} = b)\}$$

$$\leq |\alpha| V(f) + |\beta| V(g).$$

Preto funkcia $\alpha f + \beta g$ má ohraničenú variáciu na $\langle a, b\rangle$.

c) Nech

$$a = x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n < x_{n+1} = c.$$

Keďže

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_{i+1} - f(x_i)|\} \leq \sum_{i=1}^{n} |f(x_{i+1} - f(x_i)| + |f(b) - f(c)| \leq V(f, a, b),$$

tak f je s ohraničenou variáciou aj na $\langle a, c\rangle$.

d) Nech $x, y \in \langle a, b\rangle$. Nech $x \leq y$.Nech

$$n \in \mathbb{N}, a = x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n < x_{n+1} = x.$$

Potom platí

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_{i+1} - f(x_i)| \leq \sum_{i=1}^{n} |f(x_{i+1} - f(x_i)| + |f(y) - f(x)| \leq V(f, a, y)$$

A teda aj

$$V(f, a, x) \leq V(f, a, y).$$

Čiže $V_f(x)$je na $\langle a, b\rangle$ neklesajúca funkcia.

Ďalej zase predpokladajme,že $x, y \in \langle a, b\rangle$. Nech $x \leq y$. Pre ľubovoľné delenie $a = x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n < x_{n+1} = x$ platí

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_{i+1} - f(x_i)| \leq \sum_{i=1}^{n} |f(x_{i+1} - f(x_i)| + |f(x) - f(y)| + f(x) - f(y).$$

Potom

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_{i+1} - f(x_i)| - f(x) \leq \sum_{i=1}^{n} |f(x_{i+1} - f(x_i)| + |f(x) - f(y)| - f(y) \leq V_f(y) - f(y)$$

Teda

$$V_f(x) - f(x) \leq V_f(y) - f(y).$$

Preto $V_f(x) - f(x)$ je neklesajúca.

e) Nech $f : \langle a, b\rangle \mapsto \mathbb{R}$ je funkcia s ohraničenou variáciou. Zrejme

$$f = V_f - (V_f - f)$$

a na základe d) je f rozdiel dvoch neklesajúcich funkcií na $\langle a, b\rangle$.

Naopak, nech $f : \langle a, b\rangle \mapsto \mathbb{R}$ je rozdiel dvoch neklesajúcich funkcií g_1, g_2 na $\langle a, b\rangle$, $f = g_1 - g_2$. Teda podľa a) g_1 aj g_2 sú funkcie s ohraničenou variáciou. Pre ľubovoľné delenie $a = x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n < x_{n+1} = b$ platí

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq \sum_{i=1}^{n} |g_1(x_{i+1}) - g_1(x_i)| + \sum_{i=1}^{n} |g_2(x_{i+1}) - g_2(x_i)| \leq V(g_1, a, b) + V(g_2, a, b).$$

Preto aj f je funkcia s ohraničenou variáciou.

f) Zrejme $\forall f \in V(\langle a, b\rangle) : \|f\|_v \geq 0$. Ak $f \in V(\langle a, b\rangle)$: je také, že $\|f\|_v = 0$, tak potom

$$\forall x \in \langle a, b\rangle : |f(a)| + |f(x) - f(a)| \leq$$

$$|f(a)| + \sup\{\sum_{i=1}^{n} |f(x_{i+1} - f(x_i)| : n \in N, a = x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n < x_{n+1} = b\} = 0.$$

Potom $f(a) = 0$ aj $f(x) = f(a) = 0$ a teda $f = 0$. Overenie ďalších dvoch vlastností je už triviálne.

Príklady na samostatné riešenie

1.1 Dokážte, že $\|(x_1, x_2)^T\| = \max\{|x_1 + x_2|, |2x_1 - x_2|\}$ je normou na $\mathbb{R}^2$.

1.2 Dokážte, že $\|(x_1, x_2)^T\| = \max\{|x_2|, |x_1 + \frac{x_2}{\sqrt{3}}|, |x_1 - \frac{x_2}{\sqrt{3}}|\}$ je normou na $\mathbb{R}^2$.

1.3 Nech $a_1, ..., a_N > 0$ sú dané. Dokážte, že $\|(x_1, ...x_N)^T\| = a_1|x_1| + ...a_N|x_N|$ je normou na $\mathbb{R}^N$.

1.4 Nech $\alpha > 0$ je dané. Dokážte, že

$$\|f\| = \max_{x \in [0,1]} |e^{-\alpha x} f(x)|$$

je normou na $C([0, 1])$.

1.5 Dokážte, že

$$\|f\| = |f(0)| + \max_{x \in [0,1]} |x f(x)|$$

je normou na $C([0, 1])$.

1.6 Nech $(X, \|.\|_1) a (Y, \|.\|_2)$ sú lineárne normované priestory. Na karteziánskom súčine $X \times Y$ definujeme funkciu $\|.\|$ tak, že pre $(x, y) \in X \times Y$ položíme:

$$\|(x, y)\| = \|x\|_1 + \|y\|_2.$$

Dokážte, že $\|.\|$ je normou na priestore $X \times Y$.

1.7 Nech $(X, \|.\|)$ je LNP a nech $x_1, x_2, ...x_k \in X$. Dokážte, že

$$\|x_1 + ...x_k\| \leq \|x_1\| + ...\|x_k\|.$$

1.8 Nech $(X, \|.\|)$ je LNP a nech $a, b, c, d \in X$. Dokážte, že

$$|\|a - b\| - \|c - d\|| \leq \|a - c\| + \|b - d\|.$$

1.9 Dokážte, že pre každé $\alpha > 0$ je norma

$$\|f\| = \max_{x\in[0,1]} |e^{-\alpha x} f(x)|$$

na $C([0, 1])$ ekvivalentná s maximovou normou

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

1.10 Dokážte, že norma

$$\|f\| = |f(0)| + \max_{x\in[0,1]} |xf(x)|$$

na $C([0, 1])$ nie je ekvivalentná s maximovou normou.

1.11 V príkladoch a), b), c) nakreslite v $\mathbb{R}^2$ guľu so stredom v bode $(0, 0)^T$ a polomerom 1, ak na $\mathbb{R}^2$ uvažujeme normu

$$\begin{aligned}
&a)\ \ \|(x_1, x_2)^T\| = 2|x_1| + 5|x_2| \\
&b)\ \ \|(x_1, x_2)^T\| = \max\{|x_1 + x_2|, |2x_1 - x_2|\} \\
&c)\ \ \|(x_1, x_2)^T\| = \max\{|x_2|, |x_1 + \frac{x_2}{\sqrt{3}}|, |x_1 - \frac{x_2}{\sqrt{3}}|\}
\end{aligned}$$

1.12 Uvažujme priestor $C([0, 1])$ s normou

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$$

a funkcie

$$g(x) = x, x \in [0, 1],$$

$$f_{m,n} = x + \frac{1}{m}\sin(2\pi nx), \ \ x \in [0, 1],$$

kde $m, n \in N$. Nech $\epsilon > 0$ je dané. Pre aké hodnoty parametrov m, n platí

$$f_{m,n} \in B_\epsilon(g)?$$

1.13 Uvažujme priestor $C([0, 1])$ s normou

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

Nech $a, b \in \mathbb{R}$ sú pevne zvolené, definujme funkciu

$$g(x) = ax + b, \ \ x \in [0, 1].$$

Pre parametre $c, d \in \mathbb{R}$ definujme funkciu

$$f_{c,d}(x) = cx + d, x \in [0,1].$$

Nech $\epsilon > 0$ je dané, zistite, pre aké c, d platí

$$f_{c,d} \in B_\epsilon(g).$$

1.14 Nech $a_1, a_2, ...a_n \geq 0$ sú dané kladné čísla. Na priestore $X = \mathbb{R}^n$ definujeme funkciu

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^{N} \left| \frac{x_i}{a_i} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ukážte, že je to norma. Ako vyzerajú gule v $(\mathbb{R}^2, \|.\|)$ a $(\mathbb{R}^3, \|.\|)$?

1.15 Ukážte, že norma v predošlom príklade je ekvivalentná s $\|.\|_p$ v $\mathbb{R}^n$

1.16 Overte Minkowského nerovnosť pre $p = 1$. Teda treba dokázať

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i|$$

1.17 Overte Hölderovu nerovnosť v kritickom prípade $p = 1$.

$$\sum_{i=1}^{n} |\xi_i \eta_i| \leq |\eta|_\infty \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|$$

Pritom

$$|\eta|_\infty = \max_{i=1,...n} |\eta_i|$$

1.18 Nech $1 \leq p \leq \infty$ Ukážte, že

$$\exists C > 0 : \frac{1}{C}\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq C\|x\|_\infty \forall x \in \mathbb{R}^n$$

1.19 Nech

$$1 \leq p, q \leq \infty \text{ Potom } \exists C > 0 : \frac{1}{C}\|x\|_q \leq \|x\|_p \leq C\|x\|_q \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

1.20 Pre funkcie $f, g \in C([a,b])$ a $1 < p, q < \infty$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ukážte

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

1.21 Ukážte, že pre

$$p \geq 1 \ \ \|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

je norma na priestore $C([a,b])$. Dá sa v tomto príklade ukázať analógia nerovností s príkladmi 1.18 a 1.19?

Návod: Nech $f \in C([a,b])$. Potom $(\int_a^b |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$ môžeme počítať ako limitu integrálnych súčtov, kde norma delenia

$$\max_{i=1,2,\dots n} \Delta x_i$$

konverguje k 0, t. j.

$$\lim_{n\to\infty} (\sum_{i=1}^{n} (|f_i|(\Delta x_i)^{\frac{1}{p}}))^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Teraz použijeme Minkowského nerovnosť pre $f_i^* =: |f_i|\Delta x_i^{\frac{1}{p}}$ a $g_i^* =: |g_i|\Delta x_i^{\frac{1}{p}}$:

$$(\sum_{i=1}^{n} |f_i^* + g_i^*|^p)^{\frac{1}{p}} \le (\sum_{i=1}^{n} |f_i^*|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^{n} |g_i^*|^p)^{\frac{1}{p}}$$

a limitným prechodom dostaneme trojuholníkovú nerovnosť. S príkladom 1.18 analógia neexistuje, lebo v priestore $C([a,b])$ neplatí ekvivalentnosť normy $\|.\|_p$ a normy $\|.\|_\infty$. Uvažujte postupnosť funkcií f_n definovaných na $[0,1]$ nasledovne:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= 1 - nx \text{ pre } x < \frac{1}{n} \\ f_n(x) &= 0 \text{ pre } x > \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Teraz ukážte, že hoci $\|f_n\|_\infty = 1$, tak $\|f_n\|_p \to 0$. A teda $\|.\|_\infty$ nie je ekvivalentná s $\|.\|_p$ na priestore funkcií $C([0,1])$.

Rovnako, pre $p > q$ neexistuje konštanta C taká, že $\forall f \in C([0,1])$ platilo

$$\left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le C \left(\int_a^b |f|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Môžeme použiť tú istú postupnosť $f_n(x)$ ako vyššie, a pri presnom zrátaní $\|.\|_p$ *a* $\|.\|_q$ dostaneme, že taká konštanta neexistuje.

1.22 Existuje norma $\|.\|$ na $X = \mathbb{R}^N$, ktorá by nebola ekvivalentná s $\|.\|_p,\ p = 2$?

Kapitola 2

Topologické vlastnosti LNP

Otvorené a uzavreté množiny v lineárnom normovanom priestore

Hranica množiny

Konvergencia postupností v LNP

Kompaktné množiny, kritériá kompaktnosti množín v $\mathbb{R}^n$, Heine-Borelova veta

Úplné normované priestory, Banachov a Hilbertov priestor

Kontraktívne zobrazenia a Banachova veta o existencii pevného bodu

Aplikácie Banachovej vety o pevnom bode

Súvislé množiny

Konvexné množiny v LNP

Dôležité pojmy a tvrdenia

Definícia okolia. Nech $(X, \|.\|)$ je LNP, $x \in X$. Pod okolím $B_r(x)$ rozumieme guľu so stredom x a polomerom $r > 0$,

$$B_r(x) = \{y \in X, \|x - y\| < r\}.$$

Definícia otvorenej množiny. Nech $(X, \|.\|)$ je LNP. Množina $O \subset X$ sa nazýva otvorená, ak

$$\forall x \in O \exists r > 0 : B_r(x) \subset O.$$

Definícia topológie. Nech X je množina a Φ systém jej podmnožín. Nech sú splnené:

1. $X \in \Phi, \emptyset \in \Phi$.
2. Ak $A, B \in \Phi$, tak potom $A \cap B \in \Phi$
3. Ak Λ je množina indexov a $A_\lambda \in \Phi$ pre každé $\lambda \in \Lambda$, tak potom $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \Phi$.

Potom množina X so systémom otvorených množín Φ sa nazýva topologický priestor.

Príklad topologického priestoru Nech X je LNP a Φ systém otvorených množín. Potom X a Φ tvoria topologický priestor.

Tvrdenie. Nech X je LVP. Nech $\|.\|_a, \|.\|_b$ sú dve ekvivalentné normy na X. Potom $O \subset X$ je otvorená v $(X, \|.\|_a) \Leftrightarrow$ je otvorená v $(X, \|.\|_b)$. Teda topológie (systémy otvorených množín) odvodené od ekvivalentných noriem sa zhodujú.

Definícia uzavretosti. Množina $U \subset X$, kde $(X, \|.\|)$ je LNP sa nazýva uzavretá, ak jej doplnok $O = X - U$ je otvorená v $(X, \|.\|)$.

Definícia hranice množín v LNP. Nech $\Omega \subset X$. Bod $x \in X$ sa nazýva hraničný bod množiny Ω ak $\forall r > 0 B_r(x) \cap \Omega \neq \emptyset$ a $\forall r > 0 \ B_r(x) \cap (X - \Omega) \neq \emptyset$. Hranica $\partial\Omega$ množiny Ω je množina všetkých hraničných bodov množiny Ω.

Definícia konvergencie. Nech $(X, \|.\|)$ je LNP. Nech $x^n \subset X$ je postupnosť. Hovoríme, že x^n konverguje k $x \in X$. Píšeme

$$x = \lim_{n \to \infty} x^n$$

ak

$$\lim_{n \to \infty} \|x^n - x\| = 0.$$

Tvrdenie. Nech $(X, \|.\|)$ je LNP a $\|.\|_a, \|.\|_b$ sú dve ekvivalentné normy na X. Potom postupnosť $x^n \subset X$

$$x^n \to x \ v \ (X, \|.\|_a) \Leftrightarrow$$
$$x^n \to x \ v \ (X, \|.\|_b).$$

Tvrdenie. Nech $\mathbb{R}^n$ je n rozmerný priestor. Potom sú všetky jeho normy ekvivalentné.

Kritérium konvergencie v $(\mathbb{R}^n, \|.\|_p)$

$$x^n \to x \text{ v } (\mathbb{R}^n, \|.\|_p)$$

práve ak

$$\forall i = 1, 2, ...n : x_i^n \to x_i$$

pre $n \to \infty$. Konvergencia v $(\mathbb{R}^n, \|.\|_p)$ teda znamená konvergenciu po súradniciach.

Kritérium uzavretosti množiny. Nech $(X, \|.\|)$ je LNP, $A \subset X$. Potom A je uzavretá $\Leftrightarrow$ $\forall x^n \subset A$, ktorá konverguje, t. j. $\exists x = \lim_{n\to\infty} x^n$, tak $x \in A$.

Kritérium hranice. Nech $(X, \|.\|)$ je LNP, $A \subset X$. Potom

$$x \in \partial A \Leftrightarrow \exists\, x^n \in A : x^n \to x \;\; a \;\; \exists\, \overline{x}^n \in A^C : \overline{x}^n \to x$$

Definícia uzáveru. Nech $(X, \|.\|)$ je LNP, $A \subset X$. Uzáver množiny A je množina $\overline{A} = A \cup \partial A$.

Kritérium uzáveru. Nech $(X, \|.\|)$ je LNP, $A \subset X$. Platí:

$$\overline{A} = \{x \in X, \exists\;\; x^n \in A, x^n \to x\}.$$

Definícia hustej množiny. Nech $(X, \|.\|)$ je LNP, $A \subset X$. Podmnožinu $H \subset A$ nazývame hustá podmnožina v A ak $\overline{H} = A$. Podmnožinu H hustú v celom X nazývame jednoducho hustá množina.

Definícia Cauchyho postupnosti. Postupnosť $\{x^n\} \subset X$, kde $(X, \|.\|)$ je LNP, sa nazýva Cauchyho, ak

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists n_0 \;\; \forall n \geq n_0 \;\; \forall p \in \mathbb{N} : \|x^{n+p} - x^n\| < \epsilon.$$

Definícia úplného Banachovho priestoru. LNP $(X, \|.\|)$ sa nazýva úplný priestor (Banachov priestor), ak každá Cauchyho postupnosť má limitu v X.

Kompaktné množiny v LNP

Definícia kompaktnej množiny Nech $(X, \|.\|)$ je LNP, $K \subset X$. Množinu K nazývame kompaktnou, ak z každého otvoreného pokrytia vieme vybrať konečné podpokrytie.

Definícia sekvenciálne kompaktnej množiny Nech $(X, \|.\|)$ je LNP, $K \subset X$. Množinu K nazývame sekvenciálne kompaktnou, ak z každej postupnosti $\{x^n\} \subset K$ vieme vybrať konvergentnú podpostupnosť $\{x^{n_k}\} : x^{n_k} \to x \in [a, b]$.

Poznámka: V metrických a teda aj v LNP je množina kompaktná práve keď je sekvenciálne kompaktná.

Tvrdenie – Heine Borelova veta Nech $X = (\mathbb{R}^n, \|.\|_p), 1 \leq p \leq \infty$. Množina $K \subset X$ je kompaktná $\Leftrightarrow$ je uzavretá a ohraničená.

Poznámka Heine Borelova veta hovorí viac: Ak $(X, \|.\|)$ je LNP s tou vlastnosťou: Každá ohraničená a uzavretá množina je kompaktná, tak X je konečnorozmerný.

Riešené príklady

Príklad 1. Nech $X = C^1\langle -1, 1\rangle$ je priestor spojitých a spojite diferencovateľných funkcií na intervale $\langle -1, 1\rangle$. Definujme

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in \langle -1,1\rangle} |f(x)|.$$

Potom $(X, \|.\|_\infty)$ je LNP, ktorý nie je úplný.

Riešenie. Zoberme priestor $C\langle -1, 1\rangle$ priestor spojitých funkcií s maximovou normou

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in \langle -1,1\rangle} |f(x)|.$$

Tento priestor je úplný a teda Banachov priestor. Ak $f, g \in C^1\langle -1, 1\rangle$, tak $a.f + b.g \in C^1\langle -1, 1\rangle$, lebo lineárna kombinácia spojite diferencovateľných funkcií je zase spojite diferencovateľná funkcia. A teda $C^1\langle -1, 1\rangle$ s normou $\|f\|_\infty$ je LNP.

Na dôkaz, že to nie je úplný priestor, zvoľme postupnosť $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$. Ukážeme, že $f_n(x) \mapsto |x|$ bodovo $\forall x \in \langle -1, 1\rangle$ a dokonca aj rovnomerne na $\langle -1, 1\rangle$. Platí

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x| = \|\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x|\|.\frac{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + |x|}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + |x|} = \frac{1}{n^2}.\frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + |x|} \leq \frac{1}{n}.$$

Teda $f_n(x)$ konverguje v $C\langle -1, 1\rangle$ s normou $\|.\|_\infty$ k funkcii $|x|$. Ale funkcia $|x|$ nie je z priestoru $C^1\langle -1, 1\rangle$, a teda tento priestor nie je úplný.

Príklad 2. Nech $X = C^1\langle a, b\rangle$ je priestor spojitých a spojite diferencovateľných funkcií na $\langle a, b\rangle$. Definujme

$$\|f\|_1 = \max_{x\in\langle a,b\rangle} |f(x)| + \max_{x\in\langle a,b\rangle} |f'(x)|.$$

Potom $(X, \|.\|_1)$ je LNP, ktorý je úplný.

Riešenie. Z predošlého príkladu vieme, že $C^1\langle a, b\rangle$ je LNP. Čo to znamená, že postupnosť $f_n \to f$ v $(C^1\langle a, b\rangle, \|.\|_1)$? Znamená to, že $f_n \rightrightarrows f$ (rovnomerná konvergencia f_n k f) a aj $f_n' \rightrightarrows f'$ (rovnomerná konvergencia f_n' k f'.) Ďalej vieme, že $(C\langle a, b\rangle, \|.\|_\infty)$ je úplný Banachov priestor.

Zoberme f_n ľubovoľnú postupnosť, ktorá je Cauchyho v $\|.\|_1$. Teda f_n je Cauchyho aj v $(C\langle a, b\rangle, \|.\|_\infty)$ aj f_n' je Cauchyho v $(C\langle a, b\rangle, \|.\|_\infty)$. Z úplnosti $(C\langle a, b\rangle, \|.\|_\infty))$ dostaneme, že existuje $g \in C\langle a, b\rangle, f \in C\langle a, b\rangle$ taká, že platí

$$f_n \rightrightarrows f, \qquad f_n' \rightrightarrows g$$

na $\langle a, b\rangle$. Zostáva ukázať, že $g' = f$ na $\langle a, b\rangle$.

Najprv ukážeme, že platí

$$\forall x\, \forall \epsilon > 0\ \exists n_0\ \exists h_0 > 0 : \forall n \geq n_0 \text{ a } h, |h| < h_0 : \quad |\frac{f_n(x + h) - f_n(x)}{h} - g(x)| < \epsilon. \qquad (2.1)$$

Použijeme Lagrangeovu vetu o strednej hodnote. Zrejme existuje $\theta_h, |\theta_h| \leq h_0$ také, že platí

$$|\frac{f_n(x + h) - f_n(x)}{h} - g(x)| = |f_n'(x+\theta_h) - g(x)| \leq |f_n'(x+\theta_h) - f_{n_0}'(x+\theta_h)| + |f_{n_0}'(x+\theta_h) - f_{n_0}'(x)|$$

$$+|f_{n_0}'(x) - g(x)| \leq \|f_n' - f_{n_0}'\|_\infty + \|f_{n_0}' - g\|_\infty + |f_{n_0}'(x + \theta_h) - f_{n_0}'(x)|.$$

Z predpokladu, že $f_n' \rightrightarrows g$ plynie existencia n_0 takého, že

$$\forall n \geq n_0 : \|f_n' - f_{n_0}'\|_\infty < \epsilon, \|f_{n_0}' - g\|_\infty < \epsilon.$$

Z rovnomernej spojitosti funkcie f_{n_0}' dostáme, že existuje h_0 také, že pre $h < h_0$ je $|f_{n_0}'(x + \theta_h) - f_{n_0}'(x)| < \epsilon$. Tým pádom sme ukázali (2.1).

Zvoľme $\epsilon > 0, h < h_0$ ľubovoľné ale pevné a vo vzťahu (2.1) uvažujme limitu pre $n \to \infty$. Dostávame:

$$\forall x \forall \epsilon > 0 \exists h_0, \forall h, \quad |h| \leq h_0 : |\frac{f(x + h) - f(x)}{h} - g(x)| \leq \epsilon.$$

To ale znamená, že $f' = g$.

Príklad 3. Pre nasledujúce podmnožiny $A \subset \mathbb{R}^2$ určte množiny $Int(A), \partial A$ a $\overline{A}$.

a) $A = \{(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}) : m, n \in \mathbb{Z}\}$

b) $A = \mathbb{N} \times Q$

c) $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right) \times (0, n)$

d) $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \overline{B}_{\frac{1}{n}} \left((\frac{1}{n}, n)\right)$

Riešenie.

a) Ľahko vidíme, že $Int(A) = \emptyset$, lebo v každom okolí $(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}), m, n \in \mathbb{Z}$ sa nachádza aj (i_1, i_2), kde i_1, i_2 sú iracionálne.

Pretože $\forall x \in A, \forall n \in \mathbb{N} \exists y \in B(x, \frac{1}{n}),\ y \in A^C$, platí $A \subset \partial A$. ($B(x, \frac{1}{n})$ označuje otvorenú guľu so stredom x a polomerom $\frac{1}{n}$)

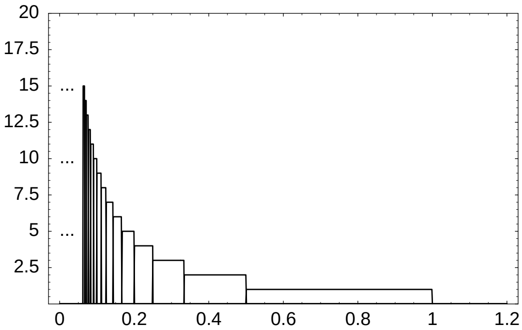
Nech $x \in \partial A \cap A^C$. Musí teda existovať' postupnosť' $x_n \in A$, že $x_n \to x$. Vidíme, že bod x môže byt' len typu $(\frac{1}{n}, 0), (0, \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}$ alebo $(0, 0)$. Teda

$$\partial A = A \cup \{\left(\frac{1}{n}, 0\right), n \in N\} \cup \{(0, \frac{1}{n}), n \in N\} \cup \{(0, 0)\}$$

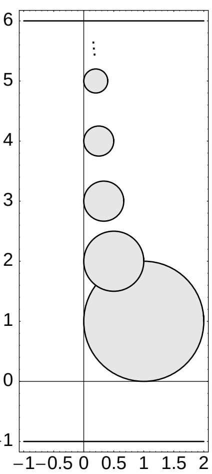
a $\overline{A} = A \bigcup \partial A = \partial A$.

b) Podobne ako v príklade a) vidíme, že $Int(A) = \emptyset, A \subset \partial A$. Opät' sa pýtajme na body (a, b), pre ktoré $\exists (n, q_n) \mapsto (a, b), q_n \in Q, (a, b) \in A^C$. Zrejme sú to body $(n, i), n \in \mathbb{N}$, a i je iracionálne. Teda

$$\partial A = \{(n, r), n \in N, r \in \mathbb{R}\}, \qquad \overline{A} = A \bigcup \partial A = \partial A.$$



Príklad 5. c)



Príklad 5. d)

Obr. 2.1: Znázornenie množín A z príkladov 5 c) a d)

c) Zrejme $Int(A) = A$ (pozri Obr. 2.1 vľavo). Z definície hranice množiny ∂A vyplýva $Int(A) \bigcap \partial A = \emptyset$, teda aj $A \bigcap \partial A = \emptyset$. Čiže $\partial A \subset A^C$.

Ako je možné vidieť z Obr. 2.1

$$\partial A = \{(x,0), x \in \langle 0,1\rangle\} \cup \{(0,y), y \in \langle 0,\infty)\} \cup B \cup C,$$

kde

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \langle \frac{1}{n}, y\rangle, y \in \langle n-1, n\rangle \right\}, \qquad C = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \langle x, n\rangle, x \in \langle \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\rangle \right\}$$

d) Opäť z Obr. 2.1 (vpravo) vidíme, že

$$Int(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} IntA_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ (x,y),\ \sqrt{(x-\frac{1}{n})^2 + (y-n)^2} \le \frac{1}{n} \right\}.$$

$$\partial A = \bigcup_{n\ge 3}^{\infty} \partial A_n \bigcup \partial(A_1 \bigcup A_2).$$

Pritom pre $n \ge 3$ dostávame $\partial A_n = \{(x,y), \sqrt{(x-\frac{1}{n})^2 + (y-n)^2} = \frac{1}{n}\}$ a

$$\begin{aligned}\partial(A_1 \bigcup A_2) \quad == \quad & \{(x,y), \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} = 1\ ,\ \sqrt{(x-\frac{1}{2})^2 + (y-2)^2} \ge \frac{1}{2}\} \\ & \bigcup\{(x,y); \sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+(y-2)^2}, \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} \ge 1\}\end{aligned}$$

Príklad 4. Rozhodnite, či nasledujúce podmnožiny $M \subset R^3$ s Euklidovskou normou sú otvorené, uzavreté, ohraničené a či majú hromadné body.

a) $M = \mathbb{R} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$

b) $M = \mathbb{R} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

c) $M = \mathbb{R} \times (0,1) \times (0,1)$

d) $M = \mathbb{N} \times \langle 0,1\rangle \times \{0\}$

Riešenie. Najprv si všimneme, že vo všetkých prípadoch je M neohraničená množina.

a) M nie je otvorená, $IntM = \emptyset$. M nie je uzavretá, lebo nech napríklad $q_n \to \sqrt{2}, q_n \in Q$, $(1, q_n, 1) \to (1, \sqrt{2}, 1)$, ale $(1, \sqrt{2}, 1)$ nepatrí do M.

Aká je množina hromadných bodov? Vieme, že x je hromadný bod množiny M, ak existuje postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tak, že $x_n \in M, x_n \ne x, x_n \to x$. Teda množina hromadných bodov množiny M je $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$.

b) Úvahami podobnými ako v príklade a) dostaneme, že M nie je otvorená, uzavretá a množina hromadných bodov je $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

c) M je otvorená, lebo je to kartézsky súčin troch otvorených množín v $\mathbb{R}$.

Množina M nie je uzavretá, lebo napríklad $(0,0,0) = \lim_{n\to\infty}(0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n})$. Množina hromadných bodov je $\mathbb{R} \times \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$.

d) M zrejme nie je otvorená a je uzavretá. Pretože, ak $(m_n, x_n, 0) \to (a,b,c)$, kde $m_n \in \mathbb{N}$, tak $c = 0, a \in \mathbb{N}, b \in \langle 0,1\rangle$. Množina hromadných bodov množiny M je $\mathbb{N} \times \langle 0,1\rangle \times \{0\}$.

Príklady na samostatné riešenie

2.1 Zistite, ktoré z nasledujúcich podmnožín $(\mathbb{R}^2, \|.\|)$ sú otvorené, uzavreté, obojaké (t. j. súčasne otvorené aj uzavreté), ani otvorené ani uzavreté.

1. $A_1 = \{(x_1, x_2)^T : |x_1| \leq 3,\ |x_2| \leq 2\}$
2. $A_2 = \left\{(x_1, x_2)^T : (x_1, x_2) = \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)^T,\ \text{kde}\ m, n \in \mathbb{N}\right\}$
3. $A_3 = \{(x_1, x_2)^T : \text{sign}(x_1 x_2) = 1\}$

2.2 Zistite, ktoré z nasledujúcich podmnožín $(\mathbb{R}^3, \|.\|)$ sú otvorené, uzavreté, obojaké (t. j. súčasne otvorené aj uzavreté), ani otvorené ani uzavreté.

1. $B_1 = \{(x_1, x_2, x_3)^T : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$
2. $B_2 = \{(x_1, x_2, x_3)^T : x_1 + x_2 + x_3 \leq 1,\ x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$

2.3 Zistite, ktoré z nasledujúcich podmnožín $(\mathbb{R}^N, \|.\|)$ sú otvorené, uzavreté, obojaké (t. j. súčasne otvorené aj uzavreté), ani otvorené ani uzavreté.

1. Množina tých bodov, ktoré majú aspoň jednu súradnicu nulovú.
2. Množina tých bodov, ktoré majú práve jednu súradnicu nulovú.

2.4 Rozhodnite o otvorenosti, resp. uzavretosti množiny $A = \{f \in C([0,1]) : f(0) = 1\}$

1. v priestore $(C([0,1]), \|.\|_\infty)$,
2. v priestore $(C([0,1]), \|.\|_1)$.

2.5 Nájdite vnútro, hranicu a uzáver množín v $(\mathbb{R}^2, \|.\|)$:

1. $A_1 = \{(x_1, x_2)^T : x_1 + x_2 < 1, x_2 \geq 0\}$
2. $A_2 = \{(x_1, x_2)^T : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_2 > 0\}$
3. $A_3 = \left\{(x_1, x_2)^T : (x_1, x_2) = \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)^T,\ \text{kde}\ m, n \in \mathbb{N}\right\}$

2.6 Uvažujme priestor $(C([0,1]), \|.\|_\infty)$ a jeho podmnožinu

$$A = \{f \in C([0,1]) : f(0) = f(1)\}$$

1. Dokážte, že žiadny jej bod nie je vnútorný.
2. Nájdite všetky jej hraničné body.
3. Čo je uzáver tejto množiny?

2.7 Nech $(X, \|.\|)$ je LNP a nech A je jeho podmnožina. Dokážte, že A je uzavretá práve vtedy, keď $A = \bar{A}$.

2.8 Nech $(X, \|.\|)$ je LNP a nech A je jeho podmnožina. Dokážte, že hranica množiny A sa zhoduje s hranicou množiny A^c.

2.9 Nech $X = \mathbb{R}^n$, $\|.\| = \|.\|_2$; kde $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + ...x_n^2}$. Opíšte hranicu polyedrickej množiny,

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n, Ax \preceq b\},$$

kde A - matica typu $m \times n$, $b \in \mathbb{R}^m$ sú dané. Symbolom $a \preceq b$ rozumieme, že platí $a_i \leq b_i$ pre každý index $i = 1, ..., n$.

2.10 Ukážte, že ľubovolný prienik uzavretých množín je uzavretá množina a že konečné zjednotenie uzavretých množín je uzavretá. Nájdite príklad nekonečného systému uzavretých množín, ktorých zjednotenie nie je uzavreté.

Návod:

$$\bigcup_{n=3}^{\infty} [\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}] = (0, 1)$$

2.11 Zistite, či nasledovné postupnosti konvergujú v $(\mathbb{R}^2, \|.\|_2)$:

$$\begin{aligned} x^n &= (\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})^T \\ x^n &= (\sin n, \frac{1}{n})^T \\ x^n &= (n \sin \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1})^T \end{aligned}$$

2.12 V priestore $X = (C([a,b]), \|.\|_\infty)$, kde $[a,b] = [0,1]$ zistite, či nasledovné postupnosti funkcií konvergujú.

$$\begin{aligned} a)\ f_n(x) &= \frac{nx}{n^2 + x^2} \\ b)\ f_n(x) &= \exp(-nx) \end{aligned}$$

2.13 Nech $X = (\mathbb{R}^2, \|.\|_2)$. Nech postupnosť x^n je definovaná rekurentne nasledovným predpisom:

$$x^1 = (1, 2)^T, ..., \quad x^{n+1} = Ax^n + b,$$

kde $A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$ a $b = (3, 4)^T$. Zistite, či x^n konverguje a nájdite jej limitu.

2.14 Ukážte, že priestor $C([a,b])$ s normou $\|.\|_\infty$ je úplný. Pritom

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

2.15 Ukážte, že priestor $C([a,b])$ s normou $\|.\|_1$ nie je úplný. Pritom

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx$$

Návod: Zvoľte si

$$\begin{aligned} f_n(x) &= 0 \text{ ak } x \in [0, 1-\frac{1}{n}], \\ f_n(x) &= nx + (1-n) \text{ ak } x \in [1-\frac{1}{n}, 1], \\ f_n(x) &= 1 \text{ ak } x \in [1, 2], \end{aligned}$$

Ukážte, že f_n je Cauchyovská a teda, ak by bol priestor $C([0,2])$ s normou $\|.\|_1$ úplný, muselo by existovať

$$f \in C([0,2]),\ a\ f_n \to f.$$

Ukážte, že potom $f = 0\ na\ [0,1]$ a $f = 1\ na\ [1,2]$, čo je spor so spojitosťou.

2.16 Zistite, či nasledujúce postupnosti v $(\mathbb{R}^2, \|.\|)$ konvergujú. Ak áno, vypočítajte limitu.

1. $x^n = \left(\frac{(-1)^n}{n}, (-1)^n n\right)^T$
2. $y^n = \left(\sqrt[n]{n}, \sqrt[n]{2n}\right)^T$
3. $z^n = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \frac{2n+1}{n^2+4}\right)^T$

2.17 Dokážte, že postupnosť funkcií z $C([0,\pi])$

$$f^n(x) = \sin^n x, \quad x \in [0,\pi]$$

nemá limitu v priestore $(C([0,\pi]), \|.\|_\infty)$.

2.18 Nájdite limitu postupnosti

$$f^n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}, \quad x \in [-1,1]$$

v priestore $(C([-1,1]), \|.\|_\infty)$.

2.19 Zistite, či postupnosť funkcií $f^n(x) = e^{-\frac{n}{2}x}, \quad x \in [0,1]$, konverguje

- v priestore $(C([0,1]), \|.\|_\infty)$,
- v priestore $(C([0,1]), \|.\|_1)$.

V tých prípadoch, keď konverguje, nájdite limitu.

2.20 Uvažujme nasledovnú postupnosť funkcií z $C([0,1])$:

$$f^n(x) = \begin{cases} -n^6\left(x - \frac{1}{n+1}\right)\left(x - \frac{1}{n}\right), & \text{ak } x \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

1. Dokážte, že táto postupnosť bodovo konverguje k identicky nulovej funkcii. (Návod: Ak $x > \frac{1}{n_0}$, tak $f^n(x) = 0$ pre $n \geq n_0$)
2. Dokážte, že nekonverguje v priestore $(C([0,1]), \|.\|_\infty)$.
3. Dokážte, že nekonverguje ani v priestore $(C([0,1]), \|.\|_1)$.

2.21 Nech $(X, \|.\|)$ je LNP a nech $\{x^n\}, \{y^n\}$ sú postupnosti v X také, že

$$\lim_{n\to\infty} x^n = x, \ \lim_{n\to\infty} y^n = y.$$

Dokážte, že potom

$$\lim_{n\to\infty} \|x^n - y^n\| = \|x - y\|.$$

(Návod: Použite nerovnosť

$$|\|a - b\| - \|c - d\|| \leq \|a - c\| + \|b - d\|$$

príklad (1.8))

2.22 Nech $(X, \|.\|_p)$ je LNP, $X = \mathbb{R}^N$. Ukážte, že množiny

$$O_1 = \{x \in \mathbb{R}^N, \sum a_i x_i > 0\}$$

a

$$O_2 = \{x \in \mathbb{R}^N, x_i > 0, \ pre \ i = 1, 2, ...N\}$$

sú otvorené v $(\mathbb{R}^N, \|.\|_p)$.

2.23 Nech $(X, \|.\|)$ je LNP. Dokážte, že $B_r(x) = \{y \in X, \|y - x\| \leq r\}$ je uzavretá v $(X, \|.\|)$.

Kompaktné množiny

2.24 Ktoré z nasledujúcich množín sú kompaktné v $(\mathbb{R}^3, \|.\|)$?

1. $A_1 = \left\{(x_1, x_2, x_3)^T : x_1^2 + x_2^2 = 1\right\}$
2. $A_2 = \left\{(x_1, x_2, x_3)^T : x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 1, \ x_1, x_2, x_3 > 0\right\}$
3. $A_3 = \left\{(x_1, x_2, x_3)^T : x_1 + x_2 + x_3 = 1, \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 9\right\}$

2.25 Dokážte, že množina

$$\{f \in C([0, 1]) : f(0) = 0\}$$

nie je kompaktná v priestore $(C([0, 1]), \|.\|_\infty)$.

2.26 Dokážte, že množina

$$\{f \in C([0, 1]) : f(x) > 0 \text{ pre všetky } x \in [0, 1]\}$$

nie je kompaktná v priestore $(C([0, 1]), \|.\|_\infty)$.

2.27 Nech $(X, \|.\|)$ je LNP a nech $A_1, \ldots, A_k$ sú kompaktné podmnožiny X. Dokážte, že potom aj ich zjednotenie je kompaktná množina. Dokážte, že zjednotenie nekonečného počtu kompaktných množín nemusí byť kompaktná množina.

2.28 Dokážte, že v ľubovoľnom LNP ak je množina kompaktná, tak je uzavretá a ohraničená.

2.29 Ukážte, že v $(\mathbb{R}^n, \|.\|_p)$ je jednotková sféra $S = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_{p=1} = 1\}$ kompaktná.
Návod: stačí ukázať uzavretosť a ohraničenosť.

2.30 Ukážte, že v $(\mathbb{R}^n, |.|_p)$ je simplex

$$M = \{x \in \mathbb{R}^N; x_i \geq 0, i = 1, 2, ...N, \sum_{i=1}^{N} a_i x_i \leq b\},$$

kde $a_i, b_i > 0$ sú dané konštanty, kompaktná množina.

2.31 Ukážte, že Heine-Borelova veta neplatí vo všeobecnosti v prípade nekonečne rozmerného LNP. Ako príklad uvažujte

$$C_\infty[0,1](= C[0,1]\ s\ |f|_\infty = \max_{s \in [0,1]} |f(s)|$$

a množinu $K = \{f \in X; 0 \leq f(x) \leq 1; \forall x \in [0,1]\}$.

Návod: Ukážete, že množina K je uzavretá a ohraničená, ale nie je kompaktná. Zvolte postupnosť $f^n \in C_\infty[0,1]$tak, že

$$\begin{aligned} f_n(x) &= 1 \text{ pre } x > \frac{1}{n} \\ f_n(x) &= 0 \text{ pre } x < \frac{1}{n+1} \\ f_n(x) &= n(n+1)x - n \text{ pre } x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \end{aligned}$$

Dá sa ukázať, že $|f_n - f_m|_\infty = 1$ ak $n \neq m$ a teda sa nedá vybrať konvergentná podpostupnosť.

Niektoré aplikácie získaných poznatkov

Leontievov vstupno-výstupný model

- Úloha: V ekonomike sa nachádza N producentov rôznych statkov. Medzi jednotlivými producentmi existujú dodávateľsko - odberateľské vzťahy. Ak ich vyjadríme v 1 Eurovom vyjadrení tak, j-ty výrobca potrebuje na výrobu 1 Euro svojho výrobku j od dodávateľa i celkovo a_{ij} Euro jeho výrobku. To znamená, že vždy platí $a_{ij} \geq$. Z dôvodu ekonomickej efektívnosti musí zároveň platiť $\sum_{i=1}^{N} a_{ij} < 1$, pretože inak by j-ty výrobca na výrobu 1 Euro svojho výrobku spotreboval viac Euro na vstupe. Keďže výroba musí byť ekonomicky efektívna pre každého výrobcu musí platiť *podmienka ekonomickej efektivity výroby*

$$\theta := \max_{j=1,\dots,N} \sum_{i=1}^{N} a_{ij} < 1.$$

- Úloha: Našou úlohou je nájsť ekonomicky vyváženú produkciu, t. j. vektor produkcie $(x_1, x_2, ..., x_N)^T$, kde x_i je počet kusov výrobkov i-teho výrobcu.

- Bilancia požiadaviek na výrobky. Prvý výrobca plánuje vyrábať x_1 kusov svojho výrobku v jednotkovej cene 1 Euro. Druhý výrobca požaduje $a_{12}x_2$ Euro dodávky výrobku $i = 1$ na výrobu x_2 kusov výrobku $j = 2$. To znamená, že celková požiadavka na výrobky prvého výrobcu $i = 1$ bude $\sum_{j=1}^{N} a_{ij}x_j + d_i$, kde d_i je celková požiadavka na výrobok $i = 1$ od spotrebiteľov v ekonomike reprezentovanými domácnosťami. To znamená, že musí platiť ekonomická rovnováha pre ponuku a celkový dopyt

$$x_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}x_j + d_i$$

  pre každé $i = 1, ..., N$. V maticovom tvare potom túto rovnováhu môžeme vyjadriť ako

$$x = Ax + d$$

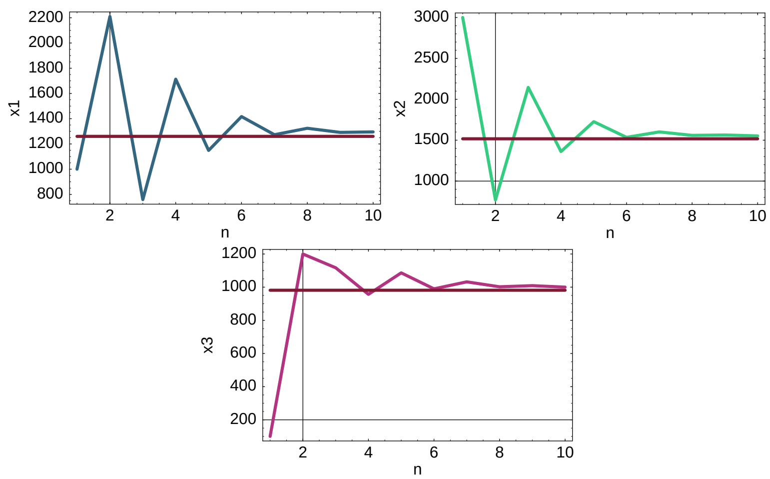
  kde hľadaný je vektor produkcie $x = (x_1, x_2, ..., x_N)^T \in \mathbb{R}^N$, pričom produkčná matica $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,N}$ ako aj vektor spotreby domácností $d = (d_1, d_2, ..., d_N)^T \in \mathbb{R}^N$ sa považuje za známy.

- Hoci sa riešenie x^* dá nájsť vyriešením sústavy rovníc $(I - A)x = d$ a teda $x^* = (I - A)^{-1}d$, tak je zaujímavé, že toto riešenie môžeme získať aj ako limitu v $\mathbb{R}^N$ rekurentne definovanej postupnosti $\{x^n\}$, kde

$$x^{n+1} = f(x^n), \qquad f(x) := Ax + d.$$

  Ekonomická interpretácia tejto postupnosti je pritom zrejmá: $x^n \in \mathbb{R}^N$ je stav produkcie v čase n. V čase $n + 1$ sa ponuka produkcie $x^{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}$ prispôsobí dopytu z času n.

- Funkcia $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ zrejme zobrazuje množinu nezáporných vektorov $M = \{x \in \mathbb{R}^N, \forall i : x_i \geq 0\}$ do seba. To je dôsledkom nezápornosti dopytového vektora d a koeficientov $a_{ij} \geq 0$.



Obr. 2.2: Priebeh postupnosti jednotlivých výrob x_1^n, x_2^n, x_3^n ako funkcia času n

- Kontraktívnosť: Ako samostatné cvičenie ukážte, že toto zobrazenie f je Kontraktívne na množine M úplného LNP $(\mathbb{R}^N, |.|_1)$, t. j. jeho norma je definovaná ako $|x|_1 = \sum_{i=1}^N |x_i|$. Ukážte zároveň, že konštanta kontraktívnosti je práve hodnota θ, ktorá je menšia ako 1 práve vďaka podmienke ekonomickej efektívnosti výroby.

- Na obrázku 2.2 je znázornený priebeh postupnosti jednotlivých výrob x_1^n, x_2^n, x_3^n v prípade, že

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0.7 & 0.1 \\ 0.5 & 0 & 0.7 \\ 0.3 & 0.2 & 0 \end{pmatrix} \qquad d = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}$$

  Vidíme, že postupnosť konverguje k hodnote vektoru

$$x^* = \begin{pmatrix} 1260.1 \\ 1517. \\ 981.4 \end{pmatrix}$$

  pričom konvergencia má osilatorický charakter, ktorý je podobný oscilatorickému hľadaniu trhovej hodnoty produkcie, ktorú môžeme pozorovať aj na reálnych trhových prípadoch.

Kapitola 3

Spojitosť funkcií v LNP

Limity funkcií, definícia spojitosti funkcie v LNP

Extremálne vlastnosti spojitých funkcií na kompaktných a súvislých podmnožinách

Vzťah násobných limít a limity funkcie viac premenných

Grafické znázorňovanie priebehu funkcie viac premenných

Dôležité pojmy a tvrdenia

Banachova veta o pevnom bode. Nech $(X, \|.\|)$ je úplný LNP(t. j. Banachov), nech $M \subset X$ je uzavretá. Nech $f : M \to M$ je kontraktívna, t. j. $\exists\theta,\ 0 < \phi < 1$ (konštanta kontrakcie):

$$\forall x, y \in M : \|f(x) - f(y)\| \leq \theta\|x - y\|.$$

Potom pre ľubovoľné štartovacie $x^0 \in M$ postupnosť $\{x^n\}$ definovaná $x^{n+1} = f(x^n)$ je konvergentná, $x^n \to x^* \in M$, kde x^* je pevný bod f, t. j. $x^* = f(x^*)$. Naviac

$$\|x^* - x^n\| \leq \frac{\theta^n}{1-\theta}\|x^1 - x^0\|$$

a x^* je jediný pevný bod f na M.
Definícia hromadného bodu. Bod $\overline{x}$ sa nazýva hromadný bod definičného oboru $D(f)$, ak v každom okolí bodu $\overline{x}$ sa nachádza aspoň 1 bod z $D(f)$ rôzny od $\overline{x}$.

Definícia limity. Nech $\overline{x}$ je hromadný bod $D(f)$, kde f je funkcia $f : X \to Y$, a X, Y sú LNP. Hovoríme, že ϕ je limita $f(x)$ pre $x \to \overline{x}$ (píšeme

$$\phi = \lim_{x \to \overline{x}} f(x)$$

ak

$$\forall\epsilon > 0\exists\delta > 0\forall x \in D(f) : \quad Ak\ \ 0 < \|x - \overline{x}\|_X < \delta\ \ tak\ \ \|f(x) - \phi\|_Y < \epsilon.$$

Heineho definícia limity – nástroj na výpočet limít

$$\exists \lim_{x \to \overline{x}} f(x) = \phi \Leftrightarrow$$

Ak pre $\forall$ postupnosť$\{x^n\} \subset D(f)\}$ takú, že $x^n \to \overline{x}$ pre $n \to \infty$ máme $f(x^n) \to \phi$ pre $n \to \infty$.

Vlastnosti limity. Nech X, Y sú LNP. 1. Nech $f : D(f) \subset X \to Y$ ako aj $g : D(g) \subset X \to Y$ a

$$\exists \lim_{x \to \overline{x}} f(x) = \phi_f$$

a

$$\exists \lim_{x \to \overline{x}} g(x) = \phi_g$$

Potom

$$\exists \lim_{x \to \overline{x}} f(x) + g(x) = \phi_g + \phi_f.$$

2. Ak $\alpha \in \mathbb{R}(C)$ je skalár,

$$\lim_{x \to \overline{x}} \alpha.f(x) = \alpha. \lim_{x \to \overline{x}} f(x).$$

Definícia spojitosti. Nech $f : D(f) \subset X \to Y$ je funkcia, $D(f)$ je jej definičný obor. Nech $(X, \|.\|_X)$ a $(Y, \|.\|_Y)$ sú LNP. Nech $\overline{x} \in D(f)$. Hovoríme, že f je spojitá v $\overline{x}$ ak

$$\exists \lim_{x \to \overline{x}} f(x) = f(\overline{x}).$$

Landauova O symbolika

Definícia $O(g(x))$**.** Hovoríme, že funkcia $f : D(f) \subset R \to \mathbb{R}$ je $O(g(x))$ pre $x \to \overline{x}$, kde $g : D(f) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pokiaľ existuje $c > 0$ a okolie $B_\epsilon(\overline{x})$ také, že:

$$\|f(x)\| \leq C\|g(x)\|$$

pre $x \in B_\epsilon(\overline{x}) \cap D(f)$ a píšeme

$$f(x) = O(g(x)$$

pre $x \to \overline{x}$.

Definícia $o(g(x))$**.** Hovoríme, že funkcia $f : D(f) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je malé $o(g(x))$ pre $x \to \overline{x}$, kde $g : D(f) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pokiaľ

$$\lim_{x \to \overline{x}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Píšeme $f(x) = o(g(x))$ pre $x \to \overline{x}$.

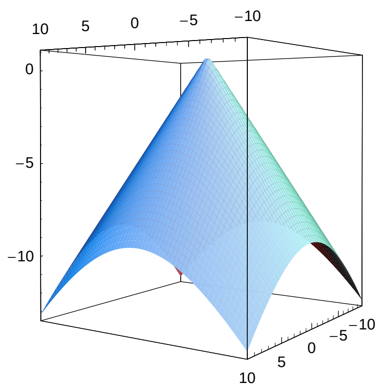
Tvrdenie. Nech $f : D(f) \subset X \to Y$ je funkcia, $D(f)$ je jej definičný obor. Nech $(X, \|.\|_X)$ a $(Y, \|.\|_Y)$ sú LNP. Potom f je spojitá v hromadnom bode $\overline{x}$ definičného oboru $D(f)$,pokiaľ existuje funkcia $g : R \to \mathbb{R}^+$ taká, že

$$\lim_{h \to 0} g(h) = 0,$$

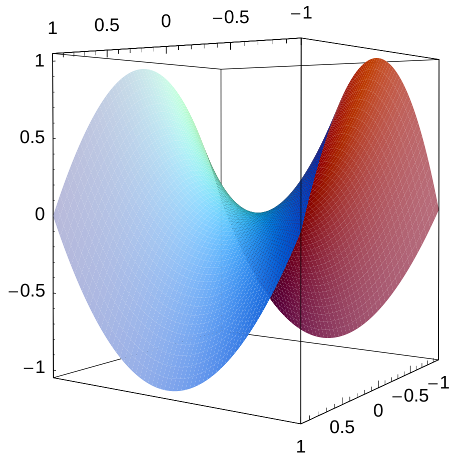
t. j $\|f(\overline{x} + h) - f(\overline{x})\|_Y = O(g(h))$ pre $h \to 0$.

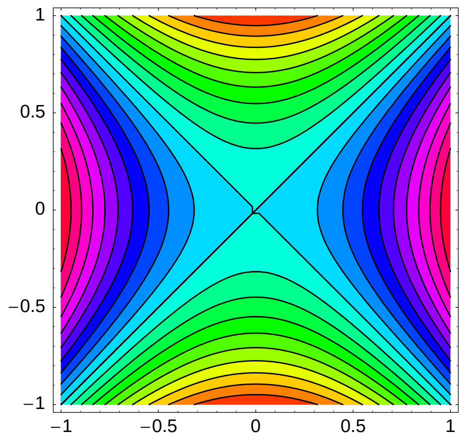
Grafické zobrazenia funkcií viac premenných

- Grafické zobrazenie funkcie $f(x_1, x_2) = 1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

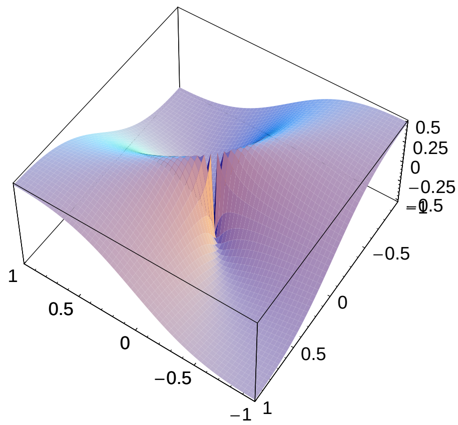


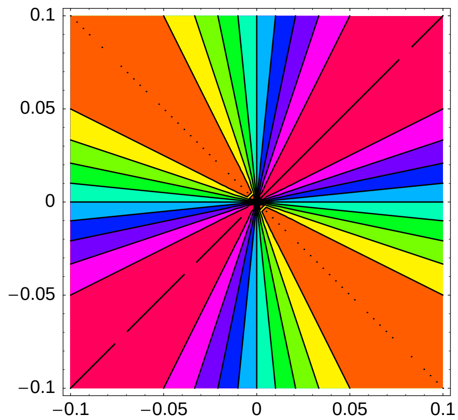
- Grafické zobrazenie sedlovej funkcie $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ a jej úrovňových množín





- Grafické zobrazenie nespojitej funkcie $f(x_1, x_2) = (x_1 x_2)/(x_1^2 + x_2^2)$ v bode $(0,0)$ a jej úrovňových množín

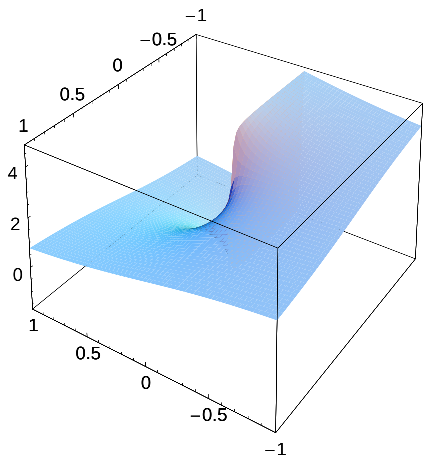


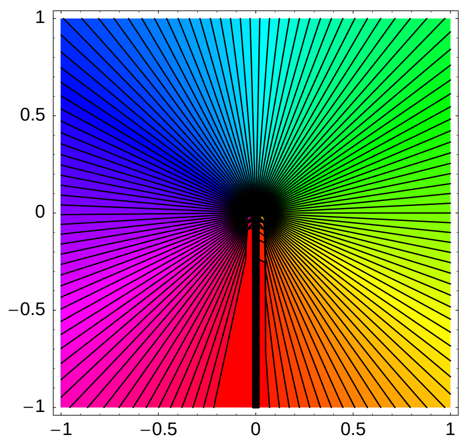


- Grafické zobrazenie nespojitej skrutkovitej funkcie

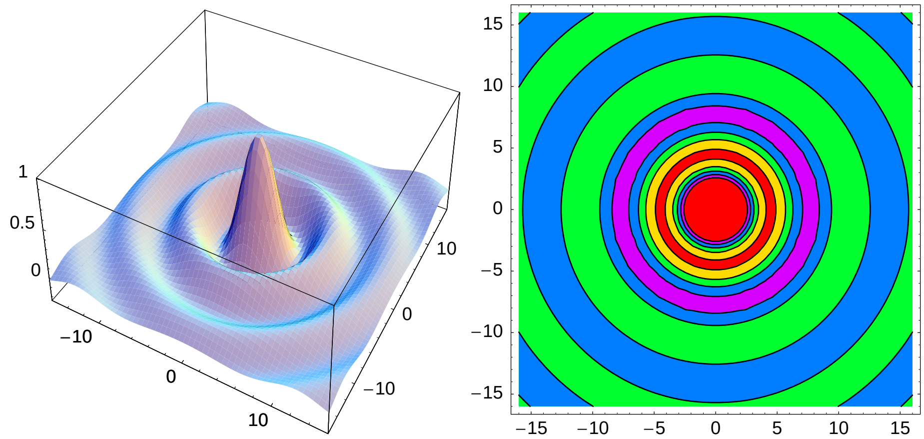
$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \arctan(x_2/x_1) & x_1 > 0 \\ \pi + \arctan(x_2/x_1) & x_1 < 0 \end{cases}$$

v bode $(0,0)$ a jej úrovňových množín

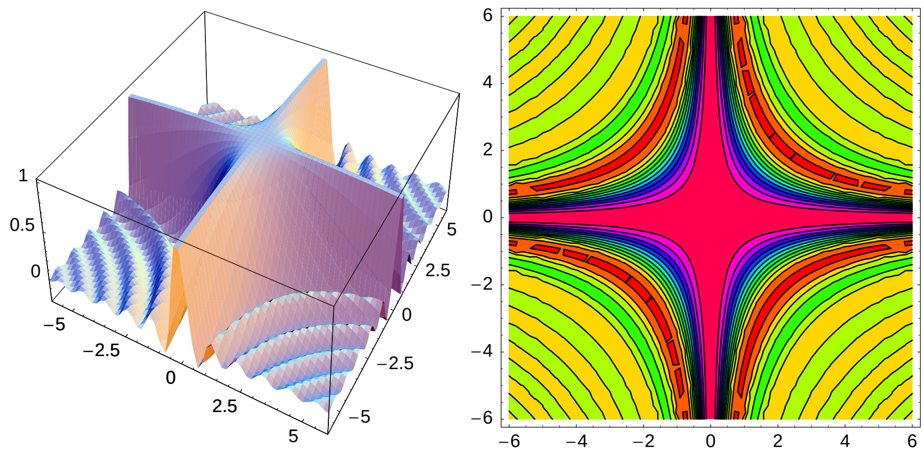




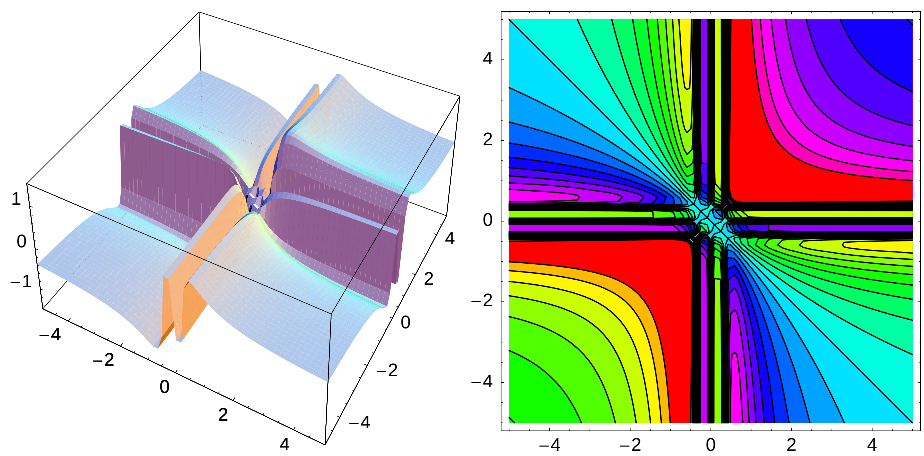
- Grafické zobrazenie spojitej vlnovodovej funkcie $f(x_1, x_2) = \frac{\sin(\sqrt{x_1^2+x_2^2})}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$ a jej úrovňových množín



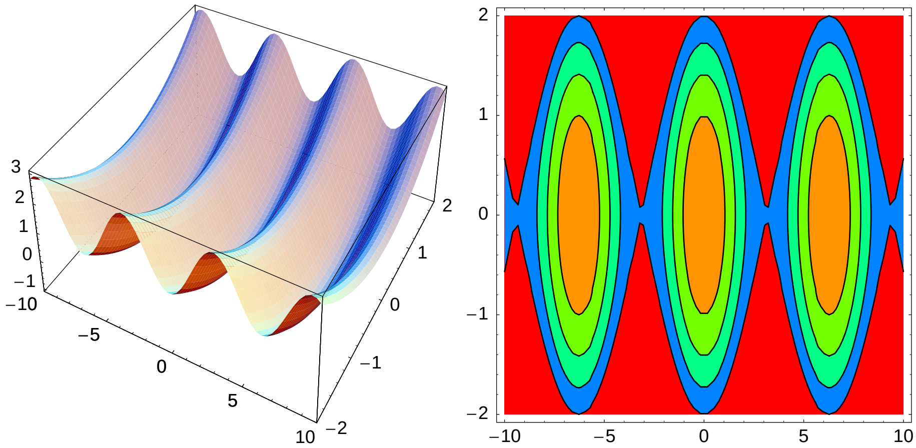
- Grafické zobrazenie nespojitej funkcie $f(x_1, x_2) = \frac{\sin(x_1 x_2)}{x_1 x_2}$ v bode $(0, 0)$ a jej úrovňových množín



- Grafické zobrazenie nespojitej funkcie $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)\sin(1/x_1)\sin(1/x_2)$ v bode $(0, 0)$ a jej úrovňových množín



- Grafické zobrazenie spojitej vlnitej funkcie $f(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{2} - \cos(x_1)$ a jej úrovňových množín



Riešené príklady

Aplikácie Banachovej vety o pevnom bode

Príklad 1. Riešenie implicitnej rovnice.

- Úloha: nájdite riešenie transcendentnej rovnice $\cos(x) = x$.

- Riešenie: Funkcia $f(x) = \cos(x)$ zobrazuje interval $M = [0, 1]$ do seba. Naviac je na ňom kontraktívna, pričom $|\cos(x) - \cos(y)| \leq L|x - y|$, kde $L = \sin(1.) \approx 0.8414 < 1$. Podľa Banachovej vety o pevnom bode rekurentne definovaná postupnosť $x^{n+1} = \cos(x^n)$ konverguje k jedinému pevnému bodu $x^* = \lim_{n\to\infty} x^n \approx 0.739085$.

- Číselné vyjadrenie prvých dvadsiatich členov postupnosti

  $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0,540302$, $x_4 = 0,857553$, $x_5 = 0,65429$,

  $x_6 = 0,79348$, $x_7 = 0,701369$, $x_8 = 0,76396$, $x_9 = 0,722102$, $x_{10} = 0,750418$,

  $x_{11} = 0,731404$, $x_{12} = 0,744237$, $x_{13} = 0,735605$, $x_{14} = 0,741425$, $x_{15} = 0,737507$,

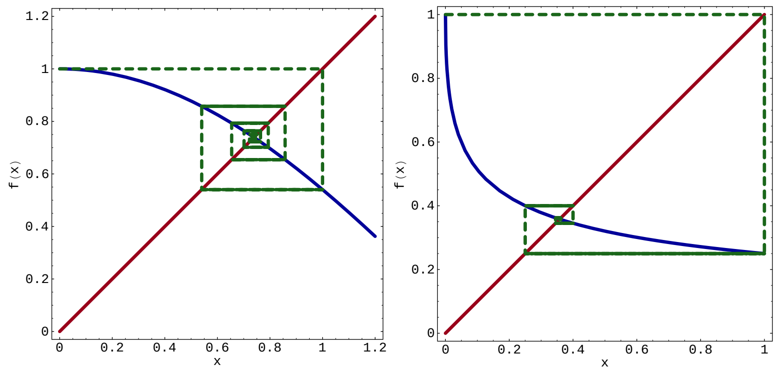
  $x_{16} = 0,740147$, $x_{17} = 0,738369$, $x_{18} = 0,739567$, $x_{19} = 0,73876$, $x_{20} = 0,739304$

- Grafické zobrazenie funkcií $y = x, y = f(x)$ ako aj postupnosti $\{x^n\}$ je na obrázku 3.1

Príklad 2. Riešenie implicitnej rovnice.

- Úloha: nájdite riešenie transcendentnej rovnice $\frac{1}{3\sqrt{x}+1} = x$.

- Riešenie: Funkcia $f(x) = \frac{1}{3\sqrt{x}+1}$ je klesajúca na každom intervale $M = [a, 1]$, kde $0 < a < 1$. Stačí preto nájsť $0 < a < 1$ tak, aby platilo $f(a) \leq 1$ a $f(1) \geq a$. Zrejme



Obr. 3.1: Priebeh funkcií $y = x, y = f(x)$ ako aj postupnosti $\{x^n\}$. Vľavo: $f(x) = \cos x$, vpravo: $f(x) = \frac{1}{3\sqrt{x}+1}$.

hodnota $a = f(1) = 1/4$ vyhovuje obom nerovnostiam. Funkcia f je na intervale $M = [a, 1]$ kontraktívna. Skutočne, podľa Lagrangeovej vety o strednej hodnote máme

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x - y| \leq L|x - y|,$$

pre každé $x, y \in [a, 1]$, kde $L = \max_{\xi \in [a,1]} |f'(\xi)|$. Keďže funkcia f je zároveň konvexná a klesajúca na $M = [a, 1]$ (overte), tak maximum absolútnej hodnoty $|f'(\xi)|$ sa nadobúda v bode $a = 1/4$. Výpočtom zistíme, že $|f'(a)| = | - (3/2)a^{-1/2}/(3\sqrt{a} + 1)^2| = 12/25$. Teda $L \leq 12/25 < 1$ a zobrazenie f je Kontraktívne na $M = [a, 1]$. Podľa Banachovej vety o pevnom bode rekurentne definovaná postupnosť $x^{n+1} = f(x^n), x^1 \in [a, 1]$, konverguje k jedinému pevnému bodu $x^* = \lim_{n\to\infty} x^n \approx 0.357835$.

- Grafické zobrazenie funkcií $y = x, y = f(x)$ ako aj postupnosti $\{x^n\}$ je na obrázku 3.1

Príklad 3. Nech $(X, \|.\|)$ je LNP a nech funkcia $f : X \mapsto \mathbb{R}$ je definovaná pomocou

$$f(x) = \frac{\|x\|}{1 + \|x\|}.$$

Dokážte, že f je rovnomerne spojitá na X.

Riešenie. Najprv ukážeme, že f je Lipschitzovsky spojitá a teda aj rovnomerne spojitá. Počítajme:

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{\|x\|}{1 + \|x\|} - \frac{\|y\|}{1 + \|y\|}\right| = \frac{|\|x\| - \|y\||}{(1 + \|x\|)(1 + \|y\|)} \leq \frac{\|x - y\|}{1},$$

čo sme chceli ukázať.

Príklad 4.

a) Je funkcia $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ rovnomerne spojitá v $\mathbb{R}^2$? Dokážte svoje tvrdenie.

b) Je funkcia $f(x_1, x_2, ...x_n) = (x_1^p + x_2^p + ...x_n^p)^{\frac{1}{p}}$ rovnomerne spojitá v $\mathbb{R}^n$ pre $1 < p < \infty$? Svoje tvrdenie zdôvodnite.

Riešenie.

a) Počítajme

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)| = |\sqrt{x_1^2+y_1^2}-\sqrt{x_2^2+y_2^2}| = \frac{|x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$$

$$= |x_1-x_2|(\frac{|x_1|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}}+\frac{|x_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}})$$

$$+|y_1-y_2|(\frac{|y_1|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}}+\frac{|y_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}}) \leq$$

$$2|x_1-x_2|+2|y_1-y_2| = 2\|x-y\|_1.$$

Z ekvivalentnosti noriem na $\mathbb{R}^2$ vyplýva aj rovnomerná spojitosť.

b) Treba si uvedomiť,že $f(x_1,x_2,...x_n) = \|(x_1,x_2,...x_n)\|_p$. Keďže pre X ľubovoľný lineárny normovaný priestor a

$$\forall x,y \in X\ |\|x\|-\|y\|| \leq \|x-y\|,$$

čo vlastne dokazuje že každá norma je ako funkcia na X LNP rovnomerne spojitá. To vlastne vysvetľuje aj príklad a) jednoduchším spôsobom. Ak X je LNP s normou $\|.\|$, tak $f(x)=\|x\|$ je spojitá a dokonca rovnomerne spojitá na celom X.

Príklad 5. Nech $(X,\|.\|)$ je Banachov priestor, nech M je jeho uzavretá podmnožina a nech $f: M \to M$. Nech existuje také celé číslo $p>0$, že p-krát iterované zobrazenie f^p je kontrakcia na M. Potom f má na M práve jeden pevný bod.

Riešenie. Ak f má na M pevný bod, tak je aj pevným bodom zobrazenia $g=f^p$. Označme

$$g=f^p, g: M \to M.$$

Keďže g má podľa Banachovej vety o pevnom bode práve jeden pevný bod na M, stačí ukázať, že pevný bod funkcie $g=f^p$ je aj pevný bod funkcie f. Označme tento pevný bod x_0. Teda $g(x_0)=x_0$. Nech sporom x_0 nie je pevný bod funkcie f, t.j

$$x_0 \neq f(x_0).$$

Potom

$$0<\|f(x_0)-x_0\| = \|f(g(x_0))-g(x_0)\| = \|g(f(x_0))-g(x_0)\| \leq K\|f(x_0)-x_0\| < \|f(x_0)-x_0\|.$$

Čiže $\|f(x_0)-x_0\| < \|f(x_0)-x_0\|$ a to je spor.

Všimnime si, že zobrazenie f môže byť aj nespojité, aj keď f^2 je kontrakcia (a teda spojité zobrazenie). Ako príklad zvoľme $X=\langle 0,1\rangle$ a definujme

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 0 \leq x \leq \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2}, & \frac{3}{4} < x \leq 1. \end{cases}$$

Potom $f(f(x)) = \frac{1}{4}$ pre všetky $0 \leq x \leq 1$, takže f^2 je kontrakcia.

Príklady na samostatné riešenie

3.1 Dokážte, že rovnica

$$x = \sqrt{2 + \ln x}$$

má pre $x \geq 1$ práve jedno riešenie.

3.2 Dokážte, že rovnica

$$x = \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{3} \cos x$$

má práve jedno riešenie $x \in \mathbb{R}$.

3.3 Nájdite približné riešenie rovníc z príkladov 1, 2 s presnosťou 10^{-3}.

3.4 Dokážte, že postupnosť $x^0 = 0,\; x^{n+1} = \sqrt{2 + x^n}$ konverguje a nájdite jej limitu.

3.5 Dokážte, že sústava rovníc

$$3x = 1 + \sin(x + y)$$

$$4y = x + \cos(x - y)$$

má práve jedno riešenie.

3.6 Pomocou Banachovej vety o pevnom bode ukážte, že existuje jediné riešenie rovnice $\exp(-\frac{x}{2}) = x, x \in \mathbb{R}$. Nájdite jeho približnú hodnotu.

3.7 Pomocou Banachovej vety o pevnom bode ukážte, že existuje jediné riešenie rovnice

$$\exp(-x) = x.$$

Nájdite jeho približnú hodnotu

Návod: Ak x je riešenie danej rovnice, tak $x \in [e^{-1}, 1]$ Nech $Tx = e^{-x}$. Zostrojte $\varepsilon \leq e^{-1}$. Ukážte, že $T([\varepsilon, 1]) \mapsto [\varepsilon, 1]$. Ukážte, že sú splnené podmienky Banachovej vety.

3.8 Pomocou Banachovej vety ukážte, že existuje jediná spojitá funkcia

$$x = x(t)\; ; t \in [t_0, t_0 + \delta],$$

kde $t_{0,}, \delta$ dané, ktorá pre každé $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ vyhovuje integrálnej rovnici:

$$x(t) = \alpha + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) ds;$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je dané. Pritom $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je daná spojitá funkcia v oboch premenných, pre ktorú $\exists L > 0, L\delta < 1$, také, že

$$|f(s, x) - f(s, y)| \leq L|x - y|$$

$\forall s \in [t_0, t_0 + \delta] \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Návod: $X = C([t_0, t_0 + \delta])$ a overte predpoklady Banachovej vety.

3.9 Ukážte, že postupnosť $\{x_n\}$ definovaná predpisom

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{3}{x_n} \right), \qquad x_1 = 1,$$

celá leží v intervale $[1, 2]$ a konverguje. Nájdite $\lim_{n \to \infty} x_n$.

3.10 Daná je funkcia $z = f(x, y)$. Vypočítajte $f(1, \frac{1}{2}), f(-1, 2)$, ak:

a) $f(x,y) = \sqrt{x^2y + y + 1}$ b) $f(x,y) = \arcsin(x+y)$.

3.11 Nájdite definičné obory daných funkcií $z = f(x,y)$ resp. $u = f(x,y,z)$ a znázornite ich v $\mathbb{R}^2$ resp. $\mathbb{R}^3$, ak:

a) $f(x,y) = \frac{1}{r^2-x^2-y^2},\ r > 0$
b) $f(x,y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}},\ a > b > 0$
c) $f(x,y) = \ln(y^2 - 4x + 8)$
d) $f(x,y) = \sqrt{x.\sin y}$
e) $f(x,y) = \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$
f) $f(x,y) = \ln x - \ln \sin y$
g) $f(x,y) = \arcsin \frac{y-1}{x}$
h) $f(x,y) = \ln xy + \pi y^2 \sqrt{x^2 - y^2}$
i) $f(x,y) = \ln(9 - x^2 - y^2) + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}} + \arcsin \frac{y}{x}$
j) $f(x,y,z) = \frac{x}{|y|+|z|}$
k) $f(x,y,z) = \ln xyz$,
l) $f(x,y,z) = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}$.

3.12 Aké druhy kriviek sú rezy grafov daných funkcií $z = f(x,y)$ rovinami rovnobežnými so súradnicovými rovinami $\mathbb{R}_{xz}, R_{yz}$?

a) $f(x,y) = x^2 - y^2$ b) $f(x,y) = xy^2$.

3.13 Nájdite vrstevnice na grafoch funkcií $z = f(x,y)$:

a) $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ b) $f(x,y) = 3x^2 + 2y^2$
c) $f(x,y) = xy$

3.14 Načrtnite grafy funkcií:

a) $z = x - y$ b) $z = -x - y + 1$
c) $z = 4x^2 + 9y^2$ d) $z = x^2 - y^2$
e) $z = 4 - x^2 - y^2$ f) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
g) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ h) $z = 1 - y^2$

3.15 V nasledujúcich príkladoch vypočítajte limity

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} (x^2 + y + 2)$. **2.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2 - \sqrt{4 - xy}}{xy}$.

3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$. **4.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}} \dfrac{\sin xy}{x}$.

5. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)x^2y^2}$. **6.** $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ y\to 0}} \dfrac{\operatorname{tg} xy}{y}$.

7. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{x + y}{x^2 + y^2}$. **8.** $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} (x^2 + y^2)e^{-(x+y)}$.

9. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \left(\dfrac{xy}{x^2 + y^2}\right)^{x^2}$. **10.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(x^2 + y^2\right)^{x^2y^2}$.

11. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$.

12. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} (1 + xy)^{\frac{2}{x^2+xy}}$. **13** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4 + y^4}$.

3.16 Zistite, či existuje:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$. b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

3.17 Dokážte, že nasledujúce limity neexistujú:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$. b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin|x-y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \dfrac{\ln(x+y)}{y}$. d) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$.

3.18 Dokážte, že funkcia $f(x,y)=(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ je nekonečne malá v bode $(0,0)$.

3.19 Vypočítajte dvojnásobné limity ($\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ a $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$):

a) $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$ v $x_0=0, y_0=0$. b) $f(x,y)=\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$ v $x_0=0, y_0=0$.

c) $f(x,y)=\dfrac{\cos x-\cos y}{x^2+y^2}$ v $x_0=0, y_0=0$. d) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^4}$ v $x_0=\infty, y_0=\infty$.

3.20 Ukážte, že pre funkciu $f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ platí:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=0,$$

ale $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ neexistuje.

3.21 Ukážte, že $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{x^2+y^2}{1+(x-y)^4}=\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+y^2}{1+(x-y)^4}$, ale $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x^2+y^2}{1+(x-y)^4}$ neexistuje.

3.22 Zistite, či existujú dvojnásobné limity funkcii $f(x,y)=(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ v bode $(0,0)$.

3.23 Nájdite body nespojitosti funkcií:

1. $f(x,y)=\frac{x-y}{x^3-y^3}$. **2**. $f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$.
3. $f(x,y)=\ln(4-x^2-y^2)$. **4**. $f(x,y)=\sin\frac{x}{y}$.
5. $f(x,y)=\frac{\sin x.\sin y}{xy}$. **6**. $f(x,y,z)=\frac{1}{x^2+y^2-z^2}$.
7 . $f(x,y,z)=\frac{2y}{(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2}$.

3.24 Dokážte, že funkcia

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

je spojitá v bode $(0,0)$ vzhľadom na každú premennú zvlášť, ale nie je spojitá vzhľadom k obidvom premenným.

3.25 Zistite, či je funkcia

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2xy}, & xy\neq 0\\ 1, & xy=0\end{cases}$$

v bode $(0,0)$ a v bode $(1,0)$ spojitá vzhľadom na každú premennú zvlášť a spojitá v týchto bodoch vzhľadom k obidvom premenným.

3.26 Dokážte, že

$$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^4+y^4} \text{ ak } x^2+y^2\neq 0,\quad f(x,y)=0 \text{ ak } x^2+y^2=0$$

nie je spojitá v $[0,0]$, ale je spojitá pozdĺž každého lúča $x = t.\cos\alpha, y = t.\sin\alpha$.
Návod: Na nespojitosť v $[0,0]$ stačí vziať 1) $y = x^2$, 2) $y = x$.

3.27 Pre akú hodnotu c je funkcia

$$f(x,y,z) = \begin{cases} 3x + 4y - 2z + 5, & x \neq 0, y \neq 1, z \neq 2 \\ c, & x = 0, y = 1, z = 2 \end{cases}$$

v bode $(0,1,2)$ spojitá?

3.28 Dokážte, že ak je na množine M funkcia $f(x,y)$ spojitá vzhľadom na každú premennú zvlášť a monotónna vzhľadom na jednu z premenných, potom je funkcia $f(x,y)$ spojitá na množine M.

3.29 Dokážte, že ak na množine M je funkcia $f(x,y)$ spojitá vzhľadom na premennú x a spĺňa Lipschitzovu podmienku vzhľadom na y t. j. $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L.|y_1 - y_2|$, pričom $(x,y_1),(x,y_2) \in M$ a L je konštanta, potom je funkcia $f(x,y)$ spojitá na množine M.

Dokážte, že nasledujúce funkcie sú ohraničené na daných množinách a nájdite ich maximum a minimum, ak existujú:

3.30 $f(x,y) = \frac{x^6+y^6}{x^2+y^2}, M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 9\}$.

3.31 $f(x,y) = xye^{-xy}, M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$.

3.32 Dokážte, že funkcia $f(x,y) = x + 2y + 3$ je rovnomerne spojitá v celej rovine $\mathbb{R}^2$.

3.33 Ako treba zmeniť definíciu funkcie $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$, aby bola rovnomerne spojitá na množine $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$?

3.34 Zistite, či funkcia $f(x,y) = \arcsin \frac{x}{y}$ je rovnomerne spojitá na svojom obore definície.

Zistite, či nasledujúce funkcie sú rovnomerne spojité na uvedených množinách:

3.35 $f(x,y) = \sin \frac{\pi}{1-x^2-y^2}, M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1\}$.

3.36 $f(x,y) = x^2 + y^2, M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

3.37 $f(x,y) = x^3 - y^3, M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$.

3.38 $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}, M = \mathbb{R}^2$.

Kapitola 4

Diferencovateľnosť funkcií viac premenných

Parciálne derivácie funkcií viac premenných a ich geometrická interpretácia

Parciálne derivácie vyšších rádov, zameniteľnosť poradia diferencovania

Derivácia funkcie viac premenných a jej geometrická interpretácia

Vzťah derivácie funkcie a jej parciálnych derivácii, Jacobiho matica

Derivácia zloženej funkcie

Derivácie vyšších rádov

Dôležité pojmy a tvrdenia

Definícia. Nech $f : D(f) \subset X \to Y$ je funkcia, nech $\overline{x} \in D(f)$ je hromadný bod. Nech $(X, \|.\|_X)$ a $(Y, \|.\|_Y)$ sú LNP. Hovoríme, že lineárne zobrazenie $L : X \to Y$ je deriváciou funkcie f v bode $\overline{x}$ ak

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(\overline{x}+h) - f(\overline{x}) - Lh\|_Y}{\|h\|_X} = 0, h \in X.$$

Inak povedané

$$\|f(\overline{x}+h) - f(\overline{x}) - Lh\|_Y = o(\|h\|_X) \ \ pre \ \ \|h\|_X \to 0.$$

Tvrdenie. Ak f má deriváciu L, tak $L : X \to Y$ je jediná.

Definícia parciálnej derivácie. Nech $f : D(f) \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^1$. Hovoríme, že f má v bode $\overline{x} \in D(f)$ parciálnu deriváciu podľa x_j ak

$$\exists \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_j + \epsilon, ..., \overline{x}_N) - f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_j, ..., \overline{x}_N)}{\epsilon} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\overline{x}).$$

Definícia totálneho diferenciálu. Nech $f : D(f) \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^1$ má deriváciu v $\overline{x} \in D(f)$. Výraz:

$$df(\overline{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{x})dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\overline{x})dx_2 + ... \frac{\partial f}{\partial x_N}(\overline{x})dx_N$$

nazývame totálny (úplný) diferenciál funkcie f v bode $\overline{x}$.

Definícia Jacobiho matice. Ak $f : D(f) \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ má deriváciu v $\overline{x} \in D(f)$. Potom Jacobiho matica je

$$f'(\overline{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\overline{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\overline{x}) ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_N}(\overline{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\overline{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\overline{x}) ... & \frac{\partial f_2}{\partial x_N}(\overline{x}) \\ . & . & . \\ . & . & . \\ \frac{\partial f_M}{\partial x_1}(\overline{x}) & \frac{\partial f_M}{\partial x_2}(\overline{x}) ... & \frac{\partial f_M}{\partial x_N}(\overline{x}) \end{pmatrix}$$

Tvrdenie. (postačujúca podmienka existencie derivácie) Nech $f : D(f) \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ a nech $\overline{x} \in D(f)$ a nech existujú $\forall$ parciálne derivácie $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ pre $x \in O(\overline{x})$; kde $O(\overline{x})$ je nejaké okolie $\subset D(f)$ bodu x. Naviac predpokladajme, že funkcie $\mathbb{R}^N \supseteq O(\overline{x}) \ni x \to \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \in \mathbb{R}, i = 1, 2, ...M; j = 1, 2, ..., N$ sú spojité. Potom $\exists f'(x)$ a rovná sa Jacobiho matici.

Poznámka. Existencia parciálnych derivácií sa vyžaduje nielen v $\overline{x}$,ale na nejakom jeho okolí.

Tvrdenie o derivovaní zloženého zobrazenia. Nech $g : D(g) \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^K$je diferencovateľná v bode $\overline{x} \in D(g)$. Nech $f : D(f) \subset \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}^M$je diferencovateľná v bode $\overline{y} = g(x)$. Potom zložené zobrazenie $F(x) = f(g(x))$je diferencovateľné v bode $\overline{x}$ a platí reťazové pravidlo

$$F'(\overline{x}) = f'(g(\overline{x})).g'(\overline{x}).$$

Pritom $F'(\overline{x})$ je reprezentované Jacobiho maticou $M \times N$, $f'(g(\overline{x}))$ maticou $M \times K$ a $g'(\overline{x}$ maticou $K \times N$.

Definícia druhej derivácie. Nech $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je diferencovateľné zobrazenie(t. j. $\forall x \in \Omega \exists f'(x)$). Hovoríme, že f má druhú deriváciu v bode $\overline{x} \in \Omega$ ak zobrazenie $g(x) := f'(x)^T, g : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ má deriváciu v $\overline{x}$. Druhú deriváciu označujeme $f''(\overline{x})$, kde $f''(\overline{x})$ je $N \times N$ matica, $f''(\overline{x}) = g'(\overline{x})$.

Definícia druhej derivácie. (všeobecný prípad) Nech $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ je diferencovateľné zobrazenie v Ω. Nech $g(x) = f'(x)$, $g : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{MN}$ je diferencovateľné v $\overline{x} \in \Omega$.) Potom hovoríme, že f má druhú deriváciu $f''(\overline{x}) = g'(x)$ a je reprezentovaná maticou $MN \times N$.

Označenie. Nech $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^1$. Nech $\exists f'(x) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), ..., \frac{\partial f}{\partial x_N}(x))$ pre $\forall x \in \Omega$. Potom označujeme

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x).$$

Tvrdenie. Ak $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ má druhú deriváciu $f''(\overline{x})$ v bode $\overline{x}$, tak

$$f''(\overline{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(\overline{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\overline{x}) \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_N}(\overline{x}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_N}(\overline{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_N}(\overline{x}) \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_N}(\overline{x}) \end{pmatrix}$$

Tvrdenie. (postačujúca podmienka existencie druhej derivácie a zameniteľnosť derivácií) Nech $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Nech

$$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \ \ pre \ \ \forall i = 1, 2, ...n \ \ a \ \ \forall j = 1, 2, ...n$$

a nech sú to spojité funkcie v bode $\overline{x} \in \Omega$. Potom f má 2. deriváciu v $\overline{x}$,

$$f''(\overline{x}) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\overline{x})\right) i, j = 1, 2, ...n$$

a naviac Hessova matica $f''(\overline{x})$ je symetrická, t. j.

$$\forall i, j = 1, 2, ...n : \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\overline{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\overline{x}).$$

Riešené príklady

Príklad 1. Nech $x \in \mathbb{R}^n, r = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ...x_n^2}$. Nech Δ je Laplaceov operátor. Teda

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}.$$

Nech $\Phi \in C^2(\mathbb{R})$ je funkcia so spojitou druhou deriváciou. Ukážte, že ak

$$u(x) = \Phi(|x|),$$

tak platí

$$\Delta u = \Phi''(|x|) + \frac{n-1}{r}\Phi'(|x|).$$

Vypočítajte Δu pre $x \neq 0$ a pre funkcie

a) $\Phi(r) = r^\alpha$,

b) $\Phi(r) = \frac{1}{r}e^{\alpha r}$,

c) $\Phi(r) = \frac{1}{r}\cos\alpha r$,

d) $\Phi(r) = \frac{1}{r}\sin\alpha r$,

pričom $\alpha \neq 0$. Pre ktoré $\lambda \in \mathbb{R}$ platí, že $\Delta u = \lambda u$?

Riešenie.
Zrejme

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \Phi'(|x|)\frac{\partial r}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \Phi''(|x|)\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_i} + \Phi'(|x|)\frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2}.$$

Ďalej platí

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ...x_n^2}}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2} = \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ...x_n^2} - x_i^2\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+...x_n^2}}}{x_1^2 + x_2^2 + ...x_n^2} = \frac{r^2 - x_i^2}{r^3}.$$

Tým pádom dostávame

$$\begin{aligned}\Delta u &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \Phi''(r)\sum_{i=1}^n(\frac{\partial r}{\partial x_i})^2 + \Phi'(r)\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2} = \Phi''(r)\sum_{i=1}^n\frac{x_i^2}{r^2} + \Phi'(r)\sum_{i=1}^n\frac{r^2 - x_i^2}{r^3} \\ &= \Phi''(r) + \Phi'(r)\frac{n-1}{r}.\end{aligned}$$

a) Ak $\Phi(r) = r^\alpha$, tak $\Phi'(r) = \alpha r^{\alpha-1}$, $\Phi''(r) = \alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2}$, a

$$\Delta r^\alpha = \alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2} + \frac{n-1}{r}\alpha.r^{\alpha-1} = \alpha r^{\alpha-2}(\alpha + n - 2).$$

Vidíme, že ak $u = r^{2-n}$, tak $\Delta u = 0$.

b) Nech $\Phi(r) = \frac{1}{r}e^{\alpha r}$. Teda

$$\Phi'(r) = -\frac{1}{r^2}e^{\alpha r} + \frac{1}{r}\alpha e^{\alpha r} = e^{\alpha r}(\frac{-1}{r^2} + \frac{\alpha}{r}), \quad \Phi''(r) = \frac{e^{\alpha r}}{r}(\alpha^2 + \frac{2}{r^2} - \frac{2\alpha}{r}).$$

Dostávame

$$\begin{aligned}\Delta(\frac{1}{r}e^{\alpha r}) &= \frac{e^{\alpha r}}{r}(\alpha^2 + \frac{2}{r^2} - \frac{2\alpha}{r}) + \frac{n-1}{r}e^{\alpha r}(\frac{-1}{r^2} + \frac{\alpha}{r}) \\ &= \frac{e^{\alpha r}}{r}(\alpha^2 + \frac{\alpha}{r}(n-3) - \frac{1}{r^2}(n-3))\end{aligned}$$

Vidíme, že ak $n = 3$, tak $\Delta u = \alpha^2 u$, pre $u = \frac{1}{r}e^{\alpha r}$.

c) Nech $\Phi(r) = \frac{\cos\alpha r}{r}$. Potom

$$\Phi'(r) = -\alpha\frac{\sin\alpha r}{r} - \frac{\cos\alpha r}{r^2}$$

a

$$\Phi''(r) = -\alpha^2\frac{\cos\alpha r}{r} + \frac{2\alpha}{r^2}\sin\alpha r + \frac{2}{r^3}\cos\alpha r.$$

Dostávame

$$\Delta u = \Phi'' + \frac{n-1}{r}\Phi' = -\alpha^2\frac{\cos\alpha r}{r} + \frac{2\alpha}{r^2}\sin\alpha r + \frac{2}{r^3}\cos\alpha r + \frac{n-1}{r}(-\alpha\frac{\sin\alpha r}{r} - \frac{\cos\alpha r}{r^2}) =$$

$$= -\frac{\cos\alpha r}{r}(\alpha^2 + \frac{n-3}{r^2}) + \frac{\sin\alpha r}{r^2}\alpha(3-n).$$

Opäť, ak $n=3$, tak $\Delta u = -\alpha^2 u$.

d) Nech $\Phi(r) = \frac{\sin\alpha r}{r}$. Podobne ako v c) dostaneme:

$$\Delta\frac{\sin\alpha r}{r} = -\frac{\sin\alpha r}{r}(\alpha^2 + \frac{n-3}{r^2}) + \frac{\cos\alpha r}{r^2}\alpha(n-3).$$

Opäť ak $n=3$, tak $\Delta u = -\alpha^2 u$.

Príklad 2. Nech $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ pre $(x,y)\neq(0,0)$ a a $f(0,0)=0$. Dokážte, že

a) Pre $(x,y)\neq(0,0)$

$$\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}) = (\frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}, \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}).$$

b) Ukážte, že $\nabla f(0,0) = (0,0)$ a teda funkcia f má parciálne derivácie na $\mathbb{R}^2$.

c) Jednako f nie je na $\mathbb{R}^2$ spojitá.

Riešenie.

a) Dostaneme priamo derivovaním.
b)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)}{h} = 0.$$

Analogicky dostaneme, že $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Teda $\nabla f(0,0) = (0,0)$.
c) Funkcia f nie je v bode $(0,0)$ spojitá, lebo

$$\lim_{x\to 0, y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}$$

neexistuje. Dostaneme to vypočítaním limít po rôznych lúčoch, napr. 1) $x=0, y=t, t\to 0$ vtedy

$$\lim_{t\to 0} f(t,0) = 0$$

a 2) $x=t, y=t, t\to 0$,

$$\lim_{t\to 0} f(t,t) = \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2}.$$

Teda limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ neexistuje.

Príklad 3. Nech funkcia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ je pre $(x,y)\neq(0,0)$ daná vzťahom

$$f(x,y) = \frac{xy^3}{x^2+y^2}, f(0,0) = 0.$$

Ukážte, že

a) f je spojitá,

b) pre $(x,y) \neq (0,0)$ je

$$\nabla f(x,y) = (\frac{y^3(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}, \frac{xy^2(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}),$$

c) $\forall x, y \in \mathbb{R} : f_x(0,y) = y$ a $\forall x, y \in \mathbb{R} : f_y(x,0) = 0$,

d)
$$\forall x, y \in R : f_{xy}(0,0) = 1, f_{yx}(0,0) = 0.$$

Riešenie.

a) funkcia f je pre body $(x,y) \neq (0,0)$ spojitá. Keďže

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^2} = 0$$

je funkcia f spojitá.
b) dostaneme parciálnym derivovaním.
c) počítajme pre ľubovoľné y:

$$f_x(0,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,y)-f(0,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{hy^3}{(h^2+y^2)h} = y.$$

Počítajme pre ľubovoľné x:

$$f_y(x,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,h)-f(x,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{xh^3}{(x^2+h^2)h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2x}{x^2+h^2} = 0.$$

d) počítajme pre ľubovoľné y:

$$f_{xy}(0,y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} f(0,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(0,y+h)-f_x(0,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{y+h-h}{h} = 1.$$

Počítajme pre ľubovoľné x:

$$f_{yx}(x,0) = \partial x \frac{\partial f}{\partial y} f(x,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(x+h,0)-f_y(x,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0.$$

Teda $f_{xy}(0,0) = 1, f_{yx}(0,0) = 0$.

Príklad 4. Nech $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| < r\}$. Označme $\dot{B}_r = B_r - \{0\}$. Nech existujú $D^p u(x)$, pre $x \in \dot{B}_r$ a $|p| \leq k$. Nech existujú limity

$$\alpha_p = \lim_{x\to 0} D^p u(x)$$

pre $|p| \leq k$.

a) Ukážte, že u sa dá rozšíriť na B_r pomocou $u(0) = \alpha_0$ ako spojitá funkcia.

b) Ukážte, že $u \in C^k(B_r)$ a $D^p u(0) = \alpha_p$.

Riešenie.

a) Samozrejme, a vyplýva z definície spojitosti funkcie.
b) Zrejme p je n-rozmerný vektor, ktorý označuje podľa ktorej premennej koľkokrát derivujeme. Pre jednoduchosť to dokážeme v prípade, ak derivujeme podľa prvej premennej. Teda $p = (1, 0, \cdots, 0)$. Teraz počítajme

$$u_{x_1(0)} = \lim_{h\to 0} \frac{u(h, 0, \cdots, 0) - u(0)}{h}.$$

Keďže u je spojitá a má parciálne derivácie v $\dot{B}_r$, tak potom funkcia $g(s) = u(s, 0, \ldots, 0)$ spĺňa predpoklady Lagrangeovej vety o strednej hodnote. Počítajme

$$u_{x_1}(0) = \lim_{h\to 0} \frac{u(h, 0, \cdots, 0) - u(0)}{h} = \lim_{h\to 0} D_{x_1}(\theta_h h, 0, \cdots, 0) = \alpha_{(1,0,\cdots,0)}.$$

Pritom $0 < \theta_h < 1$, podľa Lagrangeovej vety o strednej hodnote. Rovnako by sme postupovali pre p, $|p| = 1$ podľa každej premennej. Pod $|p|$ chápeme súčet zložiek (resp. rád derivácie.) Pre p také, že $|p| > 1$, postupujeme matematickou indukciou vzhľadom na $k = |p|$. Každá derivácia je prvou deriváciou funkcie (derivácie $k-1$ rádu) o ktorej sme to už z indukčného predpokladu platí. Pre prvú deriváciu sme to už dokázali. To znamená, že uvedené tvrdenie platí.

Príklad 5. Nech je daná funkcia

$$u(x, y) = \frac{1}{r^2} \sin(x^3 + y^4),$$

kde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ pre $r \neq 0$, $u(0, 0) = 0$. Spočítajte gradient funkcie. Je funkcia u v bode $(0, 0)$ diferencovateľná?

Riešenie.
Najprv zistíme, či je funkcia v bode $(0, 0)$ spojitá. Počítajme

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x, y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2 + y^2} \sin(x^3 + y^4) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3 + y^4)}{(x^3 + y^4)} \frac{(x^3 + y^4)}{(x^2 + y^2)} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3 + y^4)}{(x^3 + y^4)}.(x.\frac{x^2}{x^2 + y^2} + y^2 \frac{y^2}{x^2 + y^2}) = 1.(0 + 0) = 0 = u(0).
\end{aligned}$$

Teda u je spojitá na $\mathbb{R}^2$. Teraz počítajme parciálne derivácie. Pre $(x, y) \neq (0, 0)$ platí:

$$u_x = -\frac{2x}{r^4} \sin(x^3 + y^4) + \frac{3x^2}{r^2} \cos(x^3 + y^4), \quad u_y = -\frac{2y}{r^4} \sin(x^3 + y^4) + \frac{4y^3}{r^2} \cos(x^3 + y^4)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{x\to 0} \frac{u(x, 0) - u(0, 0,)}{x} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin h^3}{h^3} = 1, \\
\frac{\partial u}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{h\to 0} \frac{u(0, h) - u(0, 0,)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{u(0, h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin h^4}{h^3} = 0.
\end{aligned}$$

Teraz, ak by funkcia u bola v bode $(0, 0)$ diferencovateľná, muselo by platiť, že

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{u(x, y) - u(0, 0) - u_x(0, 0)x - u_y(0, 0)y}{r} = 0.$$

Ale to zrejme neplatí, pretože stačí zvoliť $x = y \to 0$. Potom by totiž muselo, keď to dosadíme do predošlej limity platiť

$$\lim_{x\to 0} \frac{u(x,x) - x}{\sqrt{2}x} = 0.$$

Teda by muselo platiť, že

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{u(x,x) - x}{\sqrt{2}x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(x^3+x^4)}{2x^2} - x}{\sqrt{2}x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^3+x^4)}{2\sqrt{2}x^3} - \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^3+x^4)}{2\sqrt{2}(x^3+x^4)} \frac{(x^3+x^4)}{x^3} - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = 0,
\end{aligned}$$

čo je spor. Teda naša funkcia nie je v bode $(0,0)$ diferencovateľná.

Príklady na samostatné riešenie

4.1 Nájdite parciálne derivácie podľa x a y:

a) $z = e^x \cos(xy)$ b) $z = \dfrac{x+y}{x^2+y^2+1}$

c) $z = \ln\sqrt{2x^2+y^2}$ d) $z = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

e) $z = e^{(x+y)^2}$ f) $z = \sin(x+y)\cos(x-y)$

g) $z = \left(x^2y+y\right)^4$ h) $z = y\mathrm{tg}\,(xy)$

i) $z = \mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{y}$ j) $z = \ln\dfrac{xy}{x^2+y^2}$

h) $z = xye^{xy}$ l) $z = \dfrac{x+y}{x-y}$

m) $z = \ln(x^2+y^2)$ n) $z = \ln\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{y}$

o) $z = x^y$ p) $z = \left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$.

4.2 . Nájdite parciálne derivácie podľa x, y a z:

a) $u = x^3yz^2$ b) $u = \left(ax^2+by^2+cz^2\right)^n$

c) $u = \arcsin\dfrac{xy}{z}$ d) $u = e^{x^2+y^2+z^2}$

e) $u = \cos(xy).\mathrm{arctg}\,(xz)$ f) $u = z\ln\dfrac{y}{x}$

g) $u = e^{xyz}\sin x\cos y$ h) $u = \left(\dfrac{x}{y}\right)^z$

i) $u = x^{y/z}$.

4.3 Napíšte rovnicu dotyčnice ku krivke, ktorá je rezom eliptického paraboloidu $z = x^2+2y^2$:

a) rovinou $y = 2$ v bode $A = (3,2,17)$ b) rovinou $x = 3$ v bode $A = (3,2,17)$.

4.4 Napíšte rovnicu dotyčnice ku krivke, ktorá je rezom plochy $z = \left(x^2-3y^2\right)^2$:

a) rovinou $x = 2$ v bode $A = (2,1,1)$ b) rovinou $y = 1$ v bode $A = (2,1,1)$.

4.5 Určte deriváciu zobrazenia φ (t. j. Jacobiho maticu), ak

a) $\varphi : (u,v) \to (x,y,z);\ x = uv,\ y = u^2 + v^2,\ z = u^2 - v^2;$
b) $\varphi : (u,v) \to (x,y);\ x = u\cos v,\ y = u\sin v;$
c) $\varphi : (u,v) \to x;\ x = \dfrac{u}{v};$
d) $\varphi : u \to (x,y);\ x = u\mathrm{tg}\,u,\ y = u\sin u;$
f) $\varphi : (u,v,w) \to (x,y);\ x = u^2 + v^2 + w^2,\ y = u + v + w.$

4.6 Nájdite Jakobián zobrazenia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$:

a) $f : x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi;\ f : (r,\varphi) \to (x,y);$
b) $f : u = \dfrac{z}{x^2+y^2},\ v = xy,\ w = \dfrac{y}{x};\ f : (x,y,z) \to (u,v,w);$
c) $f : x = r\cos\varphi\cos\psi,\ y = r\sin\varphi\cos\psi,\ z = r\sin\psi;\ f : (r,\varphi,\psi) \to (x,y,z);$
d) $f : u = xy,\ v = \dfrac{y}{x};\ f : (x,y) \to (u,v);$
e) $f : x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = u^2;\ f : (r,\varphi,u) \to (x,y,z).$

Parciálne derivácie vyšších rádov

4.7 Nájdite parciálne derivácie 1. a 2. rádu nasledujúcich funkcií:

a) $u = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};$ b) $u = \dfrac{\cos x^2}{y};$
c) $u = \mathrm{tg}\,\dfrac{x^2}{y};$ d) $u = x^y;$
e) $u = \mathrm{arctg}\,\dfrac{x+y}{1-xy};$ f) $u = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};$
g) $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$ h) $u = \left(\dfrac{x}{y}\right)^z$;i) $u = x^{y/z}.$

4.8 Overte rovnosť

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x},$$

ak

a) $u = x^2 - xy - 3y^2;$ b) $u = x^{y^2};$
c) $u = \arccos\sqrt{\dfrac{x}{y}}.$

Nájdite parciálne derivácie uvedeného rádu:

4.9 $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$, ak $u = x\ln(xy)$.

4.10 $\dfrac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}$, ak $u = \dfrac{x+y}{x-y}$.

4.11 $\dfrac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q}$, ak $u = (x-x_0)^p(y-y_0)^q$.

4.12 $\dfrac{\partial^{p+q+r} u}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r}$, ak $u = xyze^{x+y+z}$.

4.13 $\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}(0,0)$, ak $f(x,y) = e^x \sin y$.

4.14 Nech $Au = x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y}$. Nájdite Au a $A^2u = A(Au)$, ak

a) $u = \dfrac{x}{x^2+y^2}$; b) $u = \ln\sqrt{x^2+y^2}$.

4.15 Nech

$$\Delta_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

$$\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Nájdite $\Delta_1 u$ a $\Delta_2 u$, ak: a) $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; b) $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

4.16 Nech $f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, ak $x^2+y^2 \neq 0$ a $f(0,0) = 0$. Ukážte, že funkcia $f(x,y)$ je spojitá v bode $(0,0)$ a $f''_{xy}(0,0) \neq f''_{yx}(0,0)$.

4.17 Nájdite diferenciály 1. a 2. rádu funkcií:

a) $u = x^m y^n$; b) $u = \sqrt{x^2+y^2}$;
c) $u = \ln\sqrt{x^2+y^2}$; d) $u = xy + yz + zx$;
e) $u = \dfrac{z}{x^2+y^2}$.

4.18 Nájdite $df(1,1,1)$ a $d^2f(1,1,1)$, ak $f(x,y,z) = \left(\dfrac{x}{y}\right)^{1/z}$.

4.19 Ukážte, že pre funkciu $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ platí: $d^2u \geq 0$.

4.20 Ukážte, že funkcia $u = \ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ (a, b sú konštanty) vyhovuje Laplaceovej rovnici:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

4.21 Nech $u = f(r)$ je dvakrát diferencovateľná funkcia a $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Nájdite funkciu $F(r)$, pre ktorú platí:

$$\Delta u = F(r),$$

kde $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ je Laplaceov operátor.

4.22 Zjednodušte výraz

$$\sec x\frac{\partial z}{\partial x} + \sec y\frac{\partial z}{\partial y},$$

ak $z = \sin y + f(\sin x - \sin y)$, kde f je diferencovateľná funkcia $\left(\sec u = \dfrac{1}{\cos u}\right)$.

4.23 Ukážte, že funkcia

$$z = x^n f\left(\frac{y}{x^2}\right),$$

kde f je diferencovateľná funkcia, spĺňa rovnicu

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y} = nz.$$

4.24 Ukážte, že funkcia

$$z = yf(x^2 - y^2),$$

kde f je ľubovoľná diferencovateľná funkcia, spĺňa rovnicu

$$y^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = xz.$$

4.25 Predpokladajúc, že funkcie φ, ψ atď. sú diferencovateľné toľkokrát, koľko potrebujeme, overte nasledujúce rovnosti:

a) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, ak $u = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$;

b) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, ak $u = x\varphi(x + y) + y\psi(x + y)$;

c) $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n(n-1)u,$ ak $u = x^n\varphi\left(\dfrac{y}{z}\right) + x^{1-n}\psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$;

d) $\dfrac{\partial u}{\partial x}.\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial y}.\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, ak $u = \varphi[x + \psi(y)]$.

4.26 Nech funkcia $u = u(x, y)$ spĺňa rovnicu $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ a okrem toho, nasledujúce podmienky: $u(x, 2x) = x,\ u'_x(x, 2x) = x^2$. Nájdite $u''_{xx}(x, 2x),\ u''_{xy}(x, 2x),\ u''_{yy}(x, 2x)$.

4.27 Riešte rovnicu: $\dfrac{\partial^n z}{\partial y^n} = 0$ s neznámou funkciou $z = z(x, y)$.

Poznámka. Pod riešením danej rovnice budeme rozumieť funkciu $z(x, y)$ z triedy $C^{(n)}(G; R)$ (t. j. $z(x, y)$ je spojitá spolu so svojimi parciálnymi deriváciami až do rádu n včítane v oblasti $G \subset \mathbb{R}^2$), ktorá vyhovuje danej rovnici (a prípadne aj daným podmienkam).

4.28 Nájdite riešenie $z = z(x, y)$ rovnice $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2y$, ktoré spĺňa podmienku $z(x, x^2) = 1$.

4.29 Nájdite riešenie $z = z(x, y)$ rovnice $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$, ktoré vyhovuje podmienkam: $z(x, 0) = 1,\ z'_y(x, 0) = x$.

4.30 Nájdite riešenie $z = z(x, y)$ rovnice $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x + y$, vyhovujúce podmienkam: $z(x, 0) = x,\ z(0, y) = y^2$.

Transformácie, pravidlo reťazenia

Pomocou zavedenia nových premenných transformujte nasledujúce obyčajné diferenciálne rovnice:

4.31 $x^2y'' + xy' + y = 0$, ak $x = e^t$.

4.32 $y''' = \frac{6y}{x^3}$, ak $t = \ln|x|$.

4.33 $(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$, ak $x = \cos t$.

4.34 $y'' + y'\text{tgh}\, x + \dfrac{m^2}{\cosh^2 x}y = 0$, ak $x = \ln \text{tg}\, \dfrac{t}{2}$.

Poznámka. Tu $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ je hyperbolický kosínus a $\text{tgh}\, x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ je hyperbolický tangens.

4.35 $y'' + p(x)y' + g(x)y = 0$, ak $y = ue^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} p(\tau)d\tau}$.

4.36 $x^4y'' + xyy' - 2y^2 = 0$, ak $x = e^t$ a $y = ue^{2t}$, kde $u = u(t)$.

4.37 $y'' + (x + y)(1 + y')^3 = 0$, ak $x = u + t, y = u - t$, kde $u = u(t)$.

4.38 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + y}{x - y}$, ak $x = r\cos(\phi), y = r\sin(\phi)$.

4.39 $(xy' - y)^2 = 2xy(1 + y'^2)$, ak $x = r\cos(\phi), y = r\sin(\phi)$.

Zavedením nových nezávislých premenných ξ a η rozriešte nasledujúce rovnice:

4.40 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial y}$, ak $\xi = x + y,\ \eta = x - y$.

4.41 $a\dfrac{\partial z}{\partial x} + b\dfrac{\partial z}{\partial y} = 1$ $(a \neq 0)$, ak $\xi = x$ a $\eta = y - bz$.

4.42 $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$, ak $\xi = x$ a $\eta = \dfrac{y}{x}$.

Berúc u a v za nové nezávislé premenné, transformujte nasledujúce rovnice:

4.43 $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + \sqrt{1 + y^2}\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy$, ak $u = \ln x,\ v = \ln(y + \sqrt{1 + y^2})$.

4.44 $(x + y)\dfrac{\partial z}{\partial x} - (x - y)\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, ak $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ a $v = \text{arctg}\, \dfrac{y}{x}$.

4.45 $2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, ak $u = x + 2y + 2,\ v = x - y - 1$.

4.46 Transformujte rovnice:

a) $\Delta u \equiv \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$;

b) $\Delta(\Delta u) = 0$, kladúc $u = f(r)$, kde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

4.47 V rovnici $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0$ položte $\xi=x,\ \eta=y-x,\ \zeta=z-x$.

Transformujte do polárnych súradníc r a φ, kde $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi$, nasledujúce výrazy:

4.48 $w=x\frac{\partial u}{\partial y}-y\frac{\partial u}{\partial x}$.

4.49 $w=x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}$.

4.50 $w=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

4.51 $w=x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

4.52 $w=y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}\right)$.

4.53 Vo výraze $I=\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial v}{\partial x}$ položte $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi$.

Kapitola 5

Vlastnosti diferencovateľných funkcií

Rozvoj funkcie viac premenných do Taylorovho radu

Totálny diferenciál funkcie a jeho použitie na približné určovanie hodnoty funkcie

Gradient funkcie a derivácia v smere

Úrovňové množiny konvexných funkcií

Vzťah gradientu funkcie k hranici úrovňovej množiny diferencovateľnej funkcie

Konvexné a konkávne funkcie

Kritérium konvexnosti funkcie viac premenných

Dôležité pojmy a tvrdenia

Definícia konvexnej oblasti. $\Omega \subset \mathbb{R}^N$nazývame konvexná, ak $\forall x, y \in \Omega$ platí , že aj

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in \Omega \;\; pre \;\; \forall \lambda \in (0,1).$$

Tvrdenie. Nech $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Nech Ω je konvexná oblasť, tak pre $\overline{x}, \overline{x}+h \in \Omega$ platí

$$f(\overline{x}+h) = f(\overline{x}) + f'(\theta)h,$$

kde $\theta = \overline{x} + \xi h \in \Omega, \xi \in (0,1)$.

Taylorov rozvoj do rádu 2. Nech $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Nech Ω je konvexná oblasť. Nech f má spojité 2. parciálne derivácie, tak

$$\forall \overline{x}, \overline{x}+h \in \Omega : f(\overline{x}+h) = f(\overline{x}) + f'(\overline{x})h + \frac{1}{2}h^T f''(\theta)h, \;\; kde \;\; \theta = \overline{x} + \xi h \in \Omega, \xi \in (0,1).$$

Taylorov rozvoj do rádu 3. Nech $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Nech Ω je konvexná oblasť. Nech f má spojité 3. parciálne derivácie, potom

$$\forall \overline{x}, \overline{x}+h \in \Omega : f(\overline{x}+h) = f(\overline{x}) + f'(\overline{x})h + \frac{1}{2}h^T f''(\overline{x})h + \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^3 f(\theta)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} h_i h_j h_k,$$

kde $\theta = \overline{x} + \xi h \in \Omega, \xi \in (0,1)$.

Definícia konvexnej funkcie. Nech $D(f)$ je konvexná množina. f sa nazýva konvexná, ak pre

$$\forall \overline{x}, \overline{\overline{x}} \in D(f), \forall \lambda \in [0,1]$$

platí:

$$f(\lambda \overline{x} + (1-\lambda)\overline{\overline{x}}) \le \lambda f(\overline{x}) + (1-\lambda) f(\overline{\overline{x}}).$$

Funkcia f sa nazýva konkávna, ak

$$\forall \overline{x}, \overline{\overline{x}} \in D(f), \forall \lambda \in [0,1]$$

platí:

$$f(\lambda \overline{x} + (1-\lambda)\overline{\overline{x}}) \ge \lambda f(\overline{x}) + (1-\lambda) f(\overline{\overline{x}}).$$

Hovoríme, že f je striktne konvexná (striktne konkávna) ak vyššie uvedené nerovnosti sú ostré.

Lema. Nech $f : M \subset D(f) \subseteq \mathbb{R}^N \to R$. f je konvexná na $M \leftrightarrow$ každý rez je konvexná reálna funkcia reálnej premennej, t. j. $\forall \overline{x}, \overline{\overline{x}} \in M$ je funkcia $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$, definovaná $\varphi(t) = f(\overline{\overline{x}} + th) \in \mathbb{R}$, kde $h = \overline{x} - \overline{\overline{x}}$, konvexná na $[0,1]$.

Tvrdenie. Nech $f : M \subset D(f) \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. f je 2-krát spojite diferencovateľná. Nech $f''(x)$ je kladne semidefinitná (kladne definitná) $\forall x \in M$. Potom f je konvexná (striktne konvexná) na M.

Tvrdenie. Nech $f : M \subset D(f) \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. f je 2-krát spojite diferencovateľná. Nech $f''(x)$ je záporne semidefinitná (záporne definitná) $\forall x \in M$. Potom f je konkávna (striktne konkávna) na M.

Definícia úrovňovej množiny funkcie. Úrovňová množina s parametrom $c \in \mathbb{R}$

$$E_c^{\leq} = \{x \in D(f), f(x) \leq c\}.$$

Tvrdenie. Ak $f : M \subset D(f) \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je konvexná, tak $\forall c \in \mathbb{R}$ je úrovňová množina

$$E_c^{\leq} = \{x \in D(f), f(x) \leq c\}$$

konvexná množina v $\mathbb{R}^N$.

Tvrdenie. Ak $f : M \subset D(f) \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je konkávna, tak $\forall c \in \mathbb{R}$ je úrovňová množina

$$E_c^{\geq} = \{x \in D(f), f(x) \geq c\}$$

konvexná množina v $\mathbb{R}^N$.

Definícia derivácie v smere. Ak $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Nech $M_0 \in D(f)$. Nech $\vec{l}$ je jednotkový vektor so začiatkom v bode M_0. Ak existuje

$$\lim_{t \mapsto t_0} \frac{f(M_0 + t\vec{l}) - f(M_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0)$$

hovoríme, že funkcia f má v bode deriváciu v bode M_0 a smere $\vec{l}$.

Veta. Ak je funkcia $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^N \to R$ spojite diferencovateľná v bode M_0, tak

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1} l_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} l_2 + \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n} l_n,$$

kde $\vec{l} = (l_1, l_2, \ldots l_n)$ je jednotkový vektor.

Definícia. Nech je funkcia $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Vektor

$$\nabla f(M_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(M_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(M_0) \right)$$

sa nazýva gradient funkcie f v bode M_0.

Poznámka.

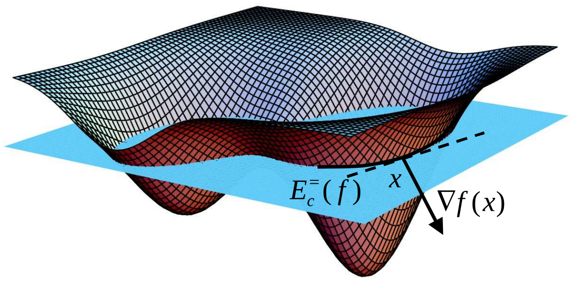
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0) = (\nabla f(M_0), \vec{l}),$$

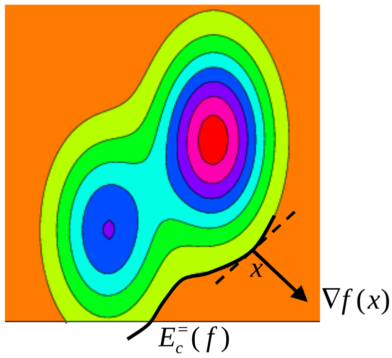
kde $(.\,,.)$ je skalárny súčin v $\mathbb{R}^N$.

Tvrdenie 1. Nech je funkcia $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ spojite diferencovateľná v bode M_0. Nech $E_c^{=} = \{x \in D(f), f(x) = c\}$ je vrstevnica funkcie f a nech $M_0 \in E_c^{=}$. Nech vrstevnica $E_c^{=}$ je v bode M_0 lokálne parametrizovateľná spojite diferencovateľnou funkciou $(x_1(t), x_2(t))$, t. j .$\exists B_r(M_0)$, tak, že $B_r(M_0) \cap E_c^{=} = (x_1(t), x_2(t))$. Potom $\nabla\ f(M_0)$ je ortogonálny k vrstevnici $E_c^{=}$, t. j k dotyčnici vrstevnice v bode M_0.

Poznámka. Nech je funkcia $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ spojite diferencovateľná v bode M_0. Ak je úrovňová množina $E_c^{=}$ lokálne v okolí bodu M_0 dostatočne hladká, tak $\nabla\ f(M_0)$ je smer normálového vektora k dotykovej nadrovine k úrovňovej množine $E_c^{=}$ v bode M_0.

Počítanie dotykových rovín





Obr. 5.1: Geometrický význam gradientu $\nabla f(x)$ funkcie f v bode x. Gradient je vektor, ktorý je v danom bode kolmý na úrovňovú rovinu $E_c^=(f) = \{x, f(x) = c\}$ prechádzajúcou daným bodom x.

1. Nech je funkcia $F : D(F) \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ spojite diferencovateľná v okolí bodu $(x_0, y_0, z_0) \in E_0^=$. Nech je plocha $E_0^=$ určená rovnicou $F(x, y, z) = 0$. Potom v bode $(x_0, y_0, z_0) \in E_0^=$ rovnica dotykovej roviny je

$$(x - x_0)F'_x(M_0) + (y - y_0)F'_y(M_0) + (z - z_0)F'_z(M_0) = 0.$$

2. Nech je funkcia $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, nech $(u_0, v_0) \in D(f)$. Nech

$$f(u, v)^T = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))^T$$

spojite diferencovateľná v bode (u_0, v_0). Označme $M_0 = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))^T$. Ak je plocha D daná parametricky

$$D : x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), M_0 \in D,$$

tak dotyková rovina v bode $M_0 = [x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0)]^T$ má parametrické vyjadrenie

$$f(u_0, v_0) + df(u_0, v_0)(u - u_0, v - v_0).$$

Teda ak $[x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0)] = (x_0, y_0, z_0)$, tak parametrické vyjadrenie je:

$$x = x_0 + x_u(u - u_0) + x_v(v - v_0), \qquad x_u = \frac{dx}{du}(u_0, v_0), x_v = \frac{dx}{dv}(u_0, v_0),$$

$$y = y_0 + y_u(u - u_0) + y_v(v - v_0), \qquad y_u = \frac{dy}{du}(u_0, v_0), y_v = \frac{dy}{dv}(u_0, v_0),$$

$$z = z_0 + z_u(u - u_0) + z_v(v - v_0), \qquad z_u = \frac{dz}{du}(u_0, v_0), z_v = \frac{dz}{dv}(u_0, v_0),$$

Riešené príklady

Príklad 1. Nech je daná funkcia

$$f(x,y) = (x^2+y^2)\cos\frac{\pi}{x^2+y^2}.$$

Dodefinujte funkciu v $(0,0)$ na spojitú funkciu. Ukážte, že f je diferencovateľná v $(0,0)$, ale jej parciálne derivácie v $(0,0)$ nie sú spojité.

Riešenie. Pretože

$$\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)}(x^2+y^2) = 0$$

a funkcia kosínus je ohraničená funkcia,

$$\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} f(x,y) = 0.$$

Teda $f(0,0) = 0$ a f je spojitá na $\mathbb{R}^2$. Teraz vypočítajme $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. Zrejme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \frac{x^2\cos\frac{\pi}{x^2}-0}{x} = 0.$$

Rovnako

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Teda na to, aby f bola v $(0,0)$ diferencovateľná, treba z definície diferencovateľnosti ukázať, že

$$\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{|f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y|}{\|(x,y)\|} = 0.$$

Počítajme

$$\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{|f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y|}{\|(x,y)\|} = \lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{|(x^2+y^2)\cos\frac{\pi}{x^2+y^2}-0-0x-0y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}\cos\frac{\pi}{x^2+y^2} = 0.$$

To znamená, že f je naozaj diferencovateľná v $(0,0)$.

Teraz pre $(x,y)\neq(0,0)$ platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\cos\frac{\pi}{x^2+y^2} + 2\pi x\frac{\sin\frac{\pi}{x^2+y^2}}{x^2+y^2}.$$

Tento výraz je v okolí $(0,0)$ neohraničená funkcia. Pre $k\in\mathbb{N}$ zvoľme

$$(x_k,y_k) = ((2k+1/2)^{-1/2},0).$$

Zrejme

$$\lim_{k\mapsto 0}(x_k,y_k) = 0,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_k,y_k) = 2\pi\sqrt{2k+0.5},$$

čo je neohraničená postupnosť v okolí $(0,0)$.

Príklad 2. Je daná funkcia

$$g(x,y) = \begin{cases} y - x^2, & y \geq x^2 \\ \frac{y^2}{x^2} - y, & 0 \leq y < x^2 \end{cases}$$

$$g(x,y) = -g(x,-y), \quad y < 0.$$

Ukážte, že g je diferencovateľná v $\mathbb{R}^2$, ale nemá spojité parciálne derivácie. Konkrétne nemá spojitú $\frac{\partial g}{\partial y}$ v $[0,0]$.

Riešenie. Najprv ukážeme, že pre $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2, (x_0, y_0) \neq (0,0)$ existujú parciálne derivácie $\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}$, ktoré sú spojité. Tým pádom bude g diferencovateľná na $\mathbb{R}^2 - \{[0,0]\}$. Pre $y \geq x^2, y \geq 0$, platí

$$g(x,y) = y - x^2,$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -2x, \frac{\partial g}{\partial y} = 1.$$

Podobne pre $y \leq -x^2, y \leq 0$, platí

$$g(x,y) = y + x^2,$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x, \frac{\partial g}{\partial y} = 1.$$

Pre $y \leq x^2, y \geq 0, x \neq 0$ platí

$$g(x,y) = \frac{y^2}{x^2} - y$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -2y^2x^{-3}, \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{2y}{x^2} - 1.$$

Podobne pre $y \geq -x^2, y \leq 0, x \neq 0$ platí

$$g(x,y) = \frac{-y^2}{x^2} - y,$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2y^2x^{-3}, \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{-2y}{x^2} - 1.$$

Vidíme, že $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, 0) = -1$ pre $x_0 \neq 0$. Teraz spočítajme $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)$.

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \mapsto 0} \frac{g(h,0) - g(0,0)}{h} = \lim_{h \mapsto 0} \frac{g(h,0)}{h} = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \mapsto 0} \frac{g(0,h) - g(0,0)}{h} = \lim_{h \mapsto 0} \frac{g(0,h)}{h} = \lim_{h \mapsto 0} \frac{h}{h} = 1$$

Keďže $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, 0) = -1$ pre $x_0 \neq 0$ a $\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 1$,tak $\frac{\partial g}{\partial y}$ nie je spojitá v $(0,0)$. Nakoniec ukážeme, že g je v $(0,0)$ diferencovateľná. Počítajme

$$\lim_{(x,y) \mapsto (0,0)} \frac{g(x,y) - g(0,0) - \frac{\partial g}{\partial x}(0,0)x - \frac{\partial g}{\partial y}(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y) \mapsto (0,0)} \frac{g(x,y) - y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Ukážeme, že táto limita je 0. Počítajme ju v dvoch krokoch:

1) Ak $y \geq x^2$, tak

$$\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{g(x,y)-y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{y-x^2-y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

2) Ak $0 \leq y \leq x^2$, tak

$$\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{g(x,y)-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{\frac{y^2}{x^2}-y-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \lim_{(x,y)\mapsto(0,0),0\leq y\leq x^2} x.\frac{y}{x^2}.(\frac{y}{x^2}-2).\frac{1}{\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}}$$

Keďže platí, že

$$\frac{y}{x^2}, (\frac{y}{x^2}-2), \frac{1}{\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}}$$

sú ohraničené pre $0 \leq y \leq x^2$, tak

$$\lim_{(x,y)\mapsto(0,0),0\leq y\leq x^2} x.\frac{y}{x^2}.(\frac{y}{x^2}-2).\frac{1}{\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}} = 0.$$

Spojením 1), 2) dostávame, že

$$\lim_{(x,y)\mapsto(0,0),y\geq 0} \frac{g(x,y)-y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Analogicky pre $y \leq 0$. Teda funkcia $g(x,y)$ je v $(0,0)$ diferencovateľná.

Príklad 3. Zameňte prírastok funkcie diferenciálom a približne vypočítajte hodnotu

$$\frac{1,03^2}{\sqrt[3]{0,98\sqrt[4]{1,05^3}}}.$$

Riešenie. Zvoľme funkciu

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{y\sqrt[4]{z^3}}} = x^2 y^{\frac{-1}{3}} z^{\frac{-1}{4}},$$

ktorá je v malom okolí bodu $(1,1,1)$ spojitá a diferencovateľná, lebo jej parciálne derivácie sú spojité. Počítajme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x.y^{\frac{-1}{3}} z^{\frac{-1}{4}}, \frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1) = 2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-1}{3} x^2 y^{\frac{-4}{3}} z^{\frac{-1}{4}}, \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1) = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{1}{4} x^2 y^{\frac{-1}{3}} z^{\frac{-5}{4}}, \frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1) = -\frac{1}{4}.$$

V malom okolí bodu $(1,1,1)$ môžeme teda prírastok f nahradiť jej diferenciálom

$$f(1+\Delta x, 1+\Delta y, 1+\Delta z) \sim f(1,1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1)\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1)\Delta z$$
$$= 1 + 2\Delta x - \frac{1}{3}\Delta y - \frac{1}{4}\Delta z.$$

Dosadíme

$$\Delta x = 0,03, \Delta y = -0,02, \Delta z = 0,05$$

a máme

$$\frac{1,03^2}{\sqrt[3]{0,98\sqrt[4]{1,05^3}}} \sim 1,05416.$$

Presná hodnota výrazu vypočítaná kalkulačkou je 1,05512...

Príklad 4. Trojuholník ABC má strany $a = 200m \pm 2m, b = 300m \pm 5m,$ a uhol medzi nimi $\angle\gamma = \frac{\pi}{3} \pm \frac{\pi}{180}$. Približne vypočítajte stranu c aj možnú absolútnu chybu pri tomto výpočte.

Riešenie. Použijeme kosínusovú vetu, podľa ktorej $c = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}$, Definujme

$$F(a,b,\gamma) : (0,\infty) \times (0,\infty) \times (0,\pi) \to R, F(a,b,\gamma) = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}.$$

Teda

$$F(200, 300, \frac{\pi}{3}) = \sqrt{7}.10^2 \approx 264,575...$$

V okolí $(200, 300, \frac{\pi}{3})$ nahradíme prírastok funkcie jej diferenciálom. Teraz

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \frac{a - b\cos\gamma}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}}, \frac{\partial F}{\partial a}(200, 300, \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2\sqrt{7}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = \frac{b - a\cos\gamma}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}}, \frac{\partial F}{\partial b}(200, 300, \frac{\pi}{3}) = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \gamma} = \frac{ab\sin\gamma}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}}, \frac{\partial F}{\partial \gamma}(200, 300, \frac{\pi}{3}) = \frac{300\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$$

To znamená, že

$$F(200+\Delta a, 300+\Delta b, \frac{\pi}{3}+\Delta\gamma) \sim F(200, 300, \frac{\pi}{3})$$
$$+\frac{\partial F}{\partial a}(200, 300, \frac{\pi}{3})\Delta a + \frac{\partial F}{\partial b}(200, 300, \frac{\pi}{3})\Delta b + \frac{\partial F}{\partial \gamma}(200, 300, \frac{\pi}{3})\Delta\gamma$$
$$= \sqrt{7}.10^2 + \frac{1}{2\sqrt{7}}\Delta a + \frac{2}{\sqrt{7}}\Delta b + \frac{300\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\Delta\gamma.$$

Teda strana $c = F(200, 300, \frac{\pi}{3}) = \sqrt{7}.10^2$ s možnou chybou prvého rádu

$$\frac{1}{2\sqrt{7}}\Delta a + \frac{2}{\sqrt{7}}\Delta b + \frac{300\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\Delta\gamma, \quad \text{kde} \quad (\Delta a, \Delta b, \Delta\gamma) = (2, 5, \frac{\pi}{180}).$$

Možná chyba teda je:

$$\frac{1}{2\sqrt{7}}\Delta a + \frac{2}{\sqrt{7}}\Delta b + \frac{300\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\Delta\gamma = \frac{1}{2\sqrt{7}}.2 + \frac{2}{\sqrt{7}}.5 + \frac{300\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.\frac{\pi}{180} = \frac{33+5\pi\sqrt{3}}{3\sqrt{7}} \simeq 7,58.$$

Príklady na samostatné riešenie

5.1 Nájdite deriváciu funkcie
$$z = x^2 - y^2$$
v bode $M = (1,1)$ v smere $\vec{l}$, ktorý zviera uhol $\alpha = 60^\circ$ s kladným smerom osi x - ovej.

5.2 Nájdite deriváciu funkcie
$$z = x^2 - xy + y^2$$
v bode $M = (1,1)$ v smere $\vec{l}$, ktorý zviera uhol α s kladným smerom osi x - ovej. V akom smere má táto derivácia: a) najväčšiu hodnotu; b) najmenšiu hodnotu; c) rovnú 0.

5.3 Nájdite deriváciu funkcie
$$z = \ln(x^2 + y^2)$$
v bode $M = (x_0, y_0)$ v smere kolmom na vrstevnicu prechádzajúcu týmto bodom.

5.4 Nájdite deriváciu funkcie
$$z = 1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$$
v bode $M = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ v smere vnútornej normály v tomto bode ku krivke
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

5.5 Nájdite deriváciu funkcie $u = xyz$ v bode $M = (1,1,1)$ v smere $\vec{l} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$. Čomu sa rovná veľkosť gradientu funkcie v danom bode?

5.6 Vypočítajte veľkosť a smer gradienta funkcie
$$u = \frac{1}{r},$$
kde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, v bode $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

5.7 Určte uhol medzi gradientmi funkcie
$$u = x^2 + y^2 - z^2$$
v bodoch $A = (\varepsilon, 0, 0)$ a $B = (0, \varepsilon, 0)$.

5.8 O koľko sa líši v bode $M = (1,2,2)$ veľkosť gradientu funkcie
$$u = x + y + z$$
od veľkosti gradienta funkcie
$$v = x + y + z + 0,001 \sin\left(10^6 \pi \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)?$$

5.9 Ukážte, že v bode $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ uhol medzi gradientmi funkcií

$$u = ax^2 + by^2 + cz^2,$$

$$v = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2mx + 2ny + 2pz$$

(a, b, c, m, n, p sú konštanty a $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$.) konverguje k 0, ak bod M_0 sa vzďaľuje do nekonečna.

5.10 Nech funkcia $u = f(x, y, z)$ je dvakrát diferencovateľná. Nájdite $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \vec{l}^2} = \dfrac{\partial}{\partial \vec{l}}\left(\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right)$, ak $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ sú smerové kosínusy smeru $\vec{l}$ derivovania.

5.11 Predpokladajúc, že x, y sú v absolútnej hodnote malé, odvoďte približné vzorce pre výrazy:

a) $(1+x)^m(1+y)^n$; b) $\operatorname{arctg} \dfrac{x+y}{1+xy}$.

5.12 Nájdite hodnoty 1. diferenciálu funkcie u v bode M_0 v danom vektore $\vec{h}$, ak

a) $u = \arcsin xy,\ M_0 = (\frac{1}{2}, 1),\ \vec{h} = (0,5; 0,1)$
b) $u = x^3y - xy^2,\ M_0 = (1, 2),\ \vec{h} = (-0,5; 0,8)$
c) $u = x^{2y},\ M_0 = (4, 1),\ \vec{h} = (0,1; 0,2)$
d) $u = \sqrt[3]{4x^2 + y^2},\ M_0 = (1, 2),\ \vec{h} = (-0,2; 0,3)$
e) $u = x\sqrt{1 + y^3},\ M_0 = (2, 2),\ \vec{h} = (0,1; 0)$.

5.13 Zameňte prírastok funkcie jej diferenciálom a približne vypočítajte:

a) $1,002.2,003^3.3,004^3$ b) $\sqrt{1,02^3 + 1,97^3}$
c) $\sin 29° \operatorname{tg} 46°$ d) $0,97^{1,05}$.

5.14 Nájdite $f'_x(0,0), f'_y(0,0)$, ak $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$. Je táto funkcia diferencovateľná v bode $(0,0)$?

5.15 Ukážte, že funkcia

$$f(x,y) = (x^2 + y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2},\ \text{ak } x^2 + y^2 \neq 0 \text{ a } f(0,0) = 0,$$

má v okolí bodu $(0,0)$ parciálne derivácie $f'_x(x,y),\ f'_y(x,y)$, ktoré nie sú spojité v bode $(0,0)$ a sú neohraničené v ľubovoľnom okolí tohto bodu; avšak táto funkcia je diferencovateľná v bode $(0,0)$.

5.16 Dokážte, že funkcia $f(x,y)$, ktorá má ohraničené parciálne derivácie $f'_x(x,y),\ f'_y(x,y)$ na nejakej konvexnej oblasti E, je rovnomerne spojitá.

5.17 Dokážte, že ak funkcia $f(x,y)$ definovaná na oblasti $G \subset \mathbb{R}^2$ je spojitá vzhľadom na premennú x pre každú hotnotu y a má ohraničenú deriváciu $f'_y(x,y)$, potom táto funkcia je spojitá vzhľadom na obidve premenné v oblasti G.

5.18 Napíšte Taylorov vzorec pre funkciu $f(x,y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$ v okolí bodu $M = (1, -2)$.

5.19 Napíšte Taylorov vzorec pre funkciu $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ v okolí bodu $M = (1,1,1)$.

5.20 Nájdite prírastok funkcie $f(x,y) = x^2y + xy^2 - 2xy$ v bode $(x_1, y_1) = (1,-1)$ vzhľadom na bod $(x_2, y_2) = (1+h, -1+k)$.

5.21 Vypíšte členy až do 2. rádu včítane v Taylorovom vzorci pre funkciu $f(x,y) = x^y$ v okolí bodu $M(1,1)$.

5.22 Napíšte Maclaurinov vzorec až do členov 4. rádu včítane pre funkciu $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$.

Napíšte rovnice dotykových rovín a normál k nasledujúcim plochám v danom bode $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$:

5.23 $z = xy,\ M_0 = (5,1,5)$.

5.24 $x^2y^3 - xy^2 = z + \frac{3}{8},\ M_0 = (2, \frac{1}{2}, -\frac{3}{8})$.

5.25 $xy + xz + yz = x^3 + y^3 + z^3,\ M_0 = (1,1,1)$.

5.26 $x^3 + y^3 + z^3 = -xyz,\ M_0 = (1,-1,-1)$.

5.27 $x = u + v,\ y = u^2 + v^2,\ z = u^3 + v^3,\ M_0 = (x(u_0,v_0), y(u_0,v_0), z(u_0,v_0))$, $u_0 = 1,\ v_0 = 2$.

5.28 $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = v,\ M_0 = (x(u_0,v_0), y(u_0,v_0), z(u_0,v_0))$, $u_0 = 1,\ v_0 = \frac{\pi}{4}$.

5.29 $x = e^u + u\sin v,\ y = e^u - u\cos v,\ z = uv,\ M_0 = (x(u_0,v_0), y(u_0,v_0), z(u_0,v_0))$, $u_0 = 1,\ v_0 = \pi$.

5.30 K ploche $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$ nájdite dotykovú rovinu, ktorá je rovnobežná s rovinou $x - y + 2z = 0$.

5.31 Nájdite geometrické miesto bodov na valci $(x+z)^2 + (y-z)^2 = 18$, v ktorých je normála rovnobežná so súradnicovou rovinou xOy.

Derivácia v smere

5.32 Nech $f = \arctan\frac{xz}{y}$. Nech $M_0 = [1,1,-1]$. Určte deriváciu funkcie f v bode M_0 a v smere gradientu funkcie $\varphi(x,y,z) = xyz - x^2 - y^2 - z^2$ v tomto bode.

5.33 Nájdite deriváciu funkcie $u(x,y,z) = xyz$ v bode $[x_0, y_0, z_0]$, ktorý leží na elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

v smere normály k elipsoidu v tomto bode.

Kapitola 6

Extremálne vlastnosti funkcií viac premenných

Vyjadrenie dotykovej roviny ku grafu funkcie

Maximá a minimá funkcie viac premenných, lokálne extrémy

Sedlové body

Nutné podmienky nadobúdania lokálneho extrému funkcie viac premenných

Postačujúce podmienky nadobúdania lokálneho extrému a Hessova matica druhých derivácii

Globálne extrémy a metódy ich určovania

Aplikácie, ktoré vedú na hľadanie voľných extrémov

Dôležité pojmy a tvrdenia

Definícia lokálneho extrému. Nech $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Nech bod $\overline{x} \in \Omega$. Hovoríme, že f má v bode $\overline{x}$ (ostré) lokálne maximum, ak existuje okolie $B_\epsilon(\overline{x})$ také, že $\forall x \in B_\epsilon(\overline{x}), x \neq \overline{x}$: $f(x) \leq f(\overline{x})$ a ostré ak$f(x) < f(\overline{x})$.

Hovoríme, že f má v bode $\overline{x}$ (ostré) lokálne minimum, ak existuje okolie $B_\epsilon(\overline{x})$ také, že $\forall x \in B_\epsilon(\overline{x}), x \neq \overline{x} : f(x) \geq f(\overline{x})$ a ostré ak$f(x) > f(\overline{x})$.

Hovoríme, že f má globálne maximum (minimum)na množine Ω ak $f(x) \leq f(\overline{x}), (f(x) \geq f(\overline{x}))$ pre každé $x \in \Omega$.

Tvrdenie, nutné podmienky lokálneho extrému. Nech $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ má deriváciu v bode $\overline{x} \in \Omega$. Ak bod $\overline{x}$ je bodom lokálneho extrému t. j. lokálneho maxima alebo lokálneho minima, tak nutne:

$$\forall i = 1, 2, ...N : \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x}) = 0.$$

Kvadratické formy Nech $A : N \times N$ symetrická matica. Maticu A nazývame kladne definitná ak $\forall h \neq 0, h \in \mathbb{R}^N : h^T Ah > 0$. Maticu A nazývame záporne definitná ak $\forall h \neq 0, h \in \mathbb{R}^N : h^T Ah < 0$.

Maticu A nazývame indefinitná ak $\exists h \neq 0, h \in \mathbb{R}^N : h^T Ah < 0$ a $\exists h \neq 0, h \in \mathbb{R}^N : h^T Ah > 0$.

Tvrdenie. Ak $\forall$ vlastné čísla matice A sú kladné, tak A je kladne definitná. Ak $\forall$ vlastné čísla matice A sú záporné, tak A je záporne definitná. Ak $\exists \lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$, tak A nie je ani kladne ani záporne definitná, je indefinitná.

Sylvestrovo kritérium. Matica $A : N \times N$ je kladne definitná $\Leftrightarrow$ determinanty všetkých hlavných minorov sú kladné. Pritom minory

$$M_1 = (a_{11})$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$M_N = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}... & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22}... & a_{2N} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ a_{N1} & a_{N2}... & a_{NN} \end{pmatrix}.$$

Teda Sylvestrovo kritérium hovorí, že A je kladne definitná, práve vtedy keď

$$|M_1| > 0, |M_2| > 0, |M_3| > 0..., |M_N| > 0.$$

Ďalej, A je záporne definitná, práve ak

$$|M_1| < 0, |M_2| > 0, ..., |M_N|(-1)^N > 0.$$

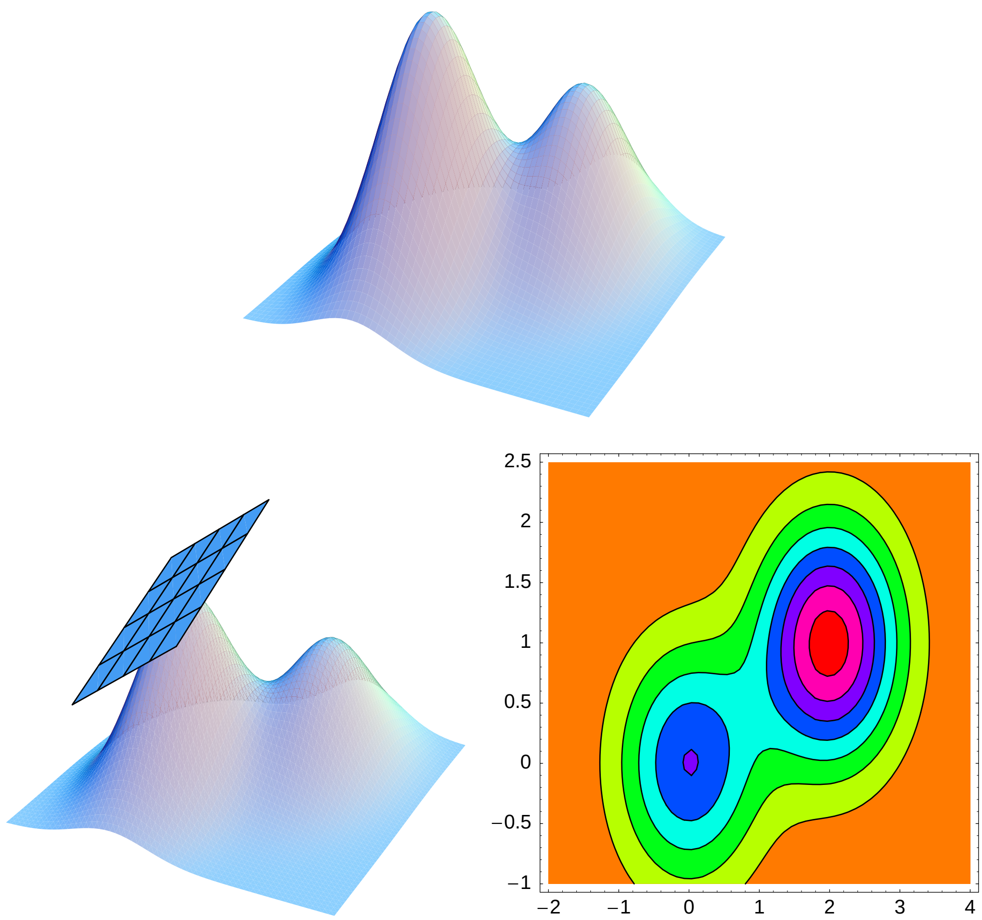
Tvrdenie, postačujúce podmienky lokálneho extrému. Nech $f : D(f) \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je dvakrát spojite diferencovateľná v bode $\overline{x} \in D(f)$, ktorý je kandidát na extrém, t. j.$f'(x) = 0$ $(\forall i = 1, 2, ...N : \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x}) = 0)$.

Ak $f''(x)$ je kladne definitná, tak v $\overline{x}$ f nadobúda ostré lokálne minimum.

Ak $f''(x)$ je záporne definitná, tak v $\overline{x}$ f nadobúda ostré lokálne maximum.

Grafické zobrazenia funkcií viac premenných a dotykovej roviny

- Grafické zobrazenie funkcie $f(x_1, x_2) = e^{-x_1^2 - x_2^2} + \frac{3}{2} e^{-(x_1-2)^2-(x_2-1)^2}$, dotykovej roviny v bode $(2.1, 1.1)$ a úrovňových rovín tejto funkcie.



Graf funkcie, dotykovej roviny a úrovňových rovín funkcie f

- Výpis programu Mathematica na zobrazenie grafu funkcie, určenie dotykovej roviny a jej zobrazenia a zobrazenie úrovňových množín danej funkcie.

```
f1[x_,y_]: =Exp[-(x^2 +y^2)];
f[x_,y_]: =f1[x,y] + 1. 5f1[x-2, y -1];

graf1=Plot3D[f[x,y],{x,-2,4},{y,-1,2. 5},
      PlotPoints->60, Mesh->False,
      ViewPoint->{-2,4,1. },
      AspectRatio->1,
      Boxed->False,
      Axes->None,
      ImageSize->300
```

```
      ];

bdx=2. 1; bdy=1. 1;
derx[x_,y_]=D[f[x,y], x];
dery[x_,y_]=D[f[x,y], y];

p[x_,y_]: = f[bdx,bdy]+ derx[bdx,bdy](x-bdx) +dery[bdx,bdy](y-bdy) ;

grafrovina=Plot3D[p[x,y],{x,bdx-1,bdx+1},{y,bdy-1,bdy+1},
      PlotPoints->5, Mesh->True,
      ViewPoint->{-2,4,1. },
      AspectRatio->1,
      Boxed->False,
      Axes->None,
      ImageSize->300
      ];

graf=Show[graf1,grafrovina];

graf2=ContourPlot[f[x,y],{x,-2,4},{y,-1,2. 5},PlotPoints->60,
      Contours->Table[2 i/10, {i,0,20,1}],
      ColorFunction->Hue,
      ImageSize->300];
```

Riešené príklady

Príklad 1. Nájdite lokálne extrémy funkcie

$$F(x,y,z) = 2x^3yz - x^2 - y^2 - z^2.$$

Riešenie.
Keďže funkcia je polynomická, je nekonečne veľakrát diferencovateľná a teda aj z triedy $C_2(\mathbb{R}^3)$. Stačí teda vyšetriť stacionárne body tejto funkcie. Počítajme jednotlivé parciálne derivácie.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 6x^2yz - 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2x^3z - 2y, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2x^3y - 2z.$$

Pre stacionárne body musí platiť

$$\begin{aligned} 6x^2yz - 2x &= 0 \\ 2x^3z - 2y &= 0 \\ 2x^3y - 2z &= 0. \end{aligned}$$

Riešením tohto systému rovníc dostaneme 5 stacionárnych bodov:

$$M_0 = (0,0,0), M_1 = (1, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}),, M_2 = (1, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}),, M_3 = (-1, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}),, M_4 = (-1, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}).$$

Spočítajme druhé parciálne derivácie.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 12xyz - 2, \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -2, \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = -2$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 6x^2z, \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = 6x^2y, \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = 2x^3.$$

Teraz vyšetrujme Hessovu maticu v jednotlivých bodoch M.

$$He(M) \equiv F''(M) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(M) & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(M) & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}(M) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(M) & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(M) & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}(M) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}(M) & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(M) & \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}(M) \end{pmatrix}.$$

Teraz si postupne vyjadrime $He(M_0)$, $He(M_1)$, $He(M_2)$, $He(M_3)$, $He(M_4)$.

$$He(M_0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Keďže $He(M_0)$ je negatívne definitná, má F v bode M_0 ostré lokálne maximum. Podobne

$$He(M_1) = \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 & 2 \\ 2\sqrt{3} & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Táto matica je indefinitná, lebo na hlavnej diagonále má aj kladné aj záporné prvky, preto v M_1 nie je maximum ani minimum, je to sedlový bod funkcie F. Rovnako sa vyšetria aj body M_2, M_3, M_4, ktoré sú tiež sedlové.

Príklad 2. Nájdite lokálne extrémy funkcie

$$z(x,y) = (1-x^2)\sqrt[3]{y^2}(1-y).$$

Riešenie.

Najprv vypočítame parciálne derivácie. Pre

$$y \neq 0 : \frac{\partial z}{\partial x} = -2x\sqrt[3]{y^2}(1-y), \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(1-x^2)(2-5y)}{3\sqrt[3]{y}}.$$

Teraz sa pokúsme vyšetriť body $M_0 = (x_0, 0)$ s otázkou, či v nich existujú parciálne derivácie a či môžu v nich nastať lokálne extrémy:

$$|x_0| \neq 1 : \frac{\partial z}{\partial y}(M_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{z(M) - z(M_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{(1-x_0^2)\sqrt[3]{\Delta y^2}(1-\Delta y)}{\Delta y} = \infty.$$

Nech $M_1 = (1,0), M_2 = (-1,0)$. Teraz $\frac{\partial z}{\partial y}(M_1) = \frac{\partial z}{\partial y}(M_2) = 0$. Síce $\frac{\partial z}{\partial y}(M_1)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(M_2)$ existujú, ale z nemá v okolí M_1, M_2 konečné derivácie. Teda ich treba extra vyšetriť, napr z tvaru funkcie z.

1. $M_0 = (x_0, 0), |x_0| < 1$: Vezmeme také okolie $U((x_0,0))$, aby $|x| < 1, |y| < 1$, potom pre $(x,y,) \in U((x_0,0)) : z(x,y) \geq 0 = z(x_0,0)$ A teda v bode M_0 nadobúda z neostré minimum.

2. $M_0 = (x_0, 0), |x_0| > 1$: Rovnako dostaneme, že funkcia nadobúda v $M_0 = (x_0, 0)$ neostré lokálne maximum.

3. $M_1 = (1,0)$ Ak $(x,y) \in U(M_1), x > 1, 0 < |y| < 1$, tak $z(x,y) < 0 =$. Ak ale $(x,y) \in U(M_1), 0 < x < 1, 0 < |y| < 1$, tak $z(x,y) > 0 = z(1,0)$. A teda bod $M_1 = (1,0)$ je sedlový bod.

4. $M_2 = (-1,0)$ je analogicky ako v predošlom prípade sedlový bod. Zostáva preveriť tie stacionárne body , že $y \neq 0$. Dostaneme ich ak

   $$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x\sqrt[3]{y^2}(1-y) = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(1-x^2)(2-5y)}{3\sqrt[3]{y}} = 0$$

   Sú to tieto: $M_4 = (1,1), M_5 = (-1,1), M_6 = (0, \frac{2}{5})$

Teraz vypočítajme druhé derivácie:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2\sqrt[3]{y^2}(1-y), \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (1-x^2)(\frac{-2}{9})y^{\frac{-4}{3}}(1+5y), \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2}{3}xy^{-\frac{1}{3}}(5y-2).$$

Dostávame

$$He(M_4) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teda v bode M_4 má funkcia z sedlový bod, lebo $He(M_4)$ je indefinitná.

$$He(M_5) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že v M_5 má z sedlový bod.

$$He(M_6) = \begin{pmatrix} -\frac{6}{5}\sqrt[3]{(\frac{4}{5})^2} & 0 \\ 0 & -\frac{5}{3}\sqrt[3]{\frac{5}{2}} \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že $He(M_6)$ je negatívne definitná a teda v M_6 má ostré lokálne maximum.

Príklady na samostatné riešenie

Lokálne extrémy
V nasledujúcich príkladoch nájdite lokálne extrémy daných funkcií:

6. 1 $z = x^2 - 2xy + 4y^3$.
6. 2 $z = x^3 + y^3 - 3xy$.
6. 3 $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$.
6. 4. $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$.
6. 5. $z = x^2y^3(6 - x - y)$.
6. 6. $z = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y},\ x > 0,\ y > 0$.
6. 7. $z = xy\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}},\ a > 0,\ b > 0$.
6. 8. $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$.
6. 9. $z = x + y + 4\sin x \sin y$.
6. 10. $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.
6. 11. $z = xy\ln(x^2 + y^2)$.
6. 12. $x^2y + 2xy + y^2 + 2x + 2y + 1$.
6. 13. $z = xy^2(4 - x - y)$.
6. 14. $u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$.
6. 15. $u = 2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^2$.
6. 16. $u = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}$.
6. 17. $u = 2\dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{z} - 4x + 2z^2$.
6. 18. $u = xyz(1 - x - y - z)$.
6. 19 $u = 6x^2 + 2xy + y^2 + 2z^2 - 2yz + 2xz + 2x - 2y + 4z + 4$.

6. 20 Nájdite lokálne extrémy funkcie

$$f(x, y) = (x + 2y)(1 - x - y) + 2xy$$

a vyšetrite ich charakter (minimá, maximá, sedlové body).
6. 21 Určte lokálne extrémy funkcie

$$u(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z.$$

Kapitola 7

Funkcie zadané implicitným vzťahom

Príklady a význam funkcií zadaných implicitne

Existencia funkcie zadanej implicitne

Derivácia implicitnej funkcie

Vyšetrovanie priebehu funkcie zadanej implicitne

Veta o existencií inverznej funkcie

Dôležité pojmy a tvrdenia

Definícia implicitnej funkcie. Nech

$$F : D(F) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}.$$

Nech $(x_0, y_0) \in D(f)$ je také, že $F(x_0, y_0) = 0$. Hovoríme, že funkcia

$$y = y(x) : O(x_0) \to O(y_0)$$

je zadaná implicitne (alebo aj implicitným vzťahom) ak platí:

$$F(x, y(x)) = 0 \;\; \forall x \in O(x_0).$$

1. Veta o implicitnej funkcii. Nech

$$F : D(F) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}.$$

je spojite diferencovateľná na okolí bodu (x_0, y_0). Nech $(x_0, y_0) \in D(f)$ je také, že $F(x_0, y_0) = 0$. Nech platí

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Potom $\exists$ okolie $O_\delta(x_0)$ bodu x_0 a $\exists$ okolie $O_\epsilon(y_0)$ bodu y_0 a jediná funkcia

$$y : O(x_0) \subset \mathbb{R} \mapsto O(y_0) \subset \mathbb{R},$$

ktorá je implicitne zadanou funkciou t. j.

$$F(x, y(x)) = 0 \;\; \forall x \in O(x_0), y_0 = y(x_0).$$

Naviac je y diferencovateľná v x_0 a platí

$$y'(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}.$$

2. Veta o implicitnej funkcii. Nech

$$f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^M$$

je spojite diferencovateľná na okolí bodu $(x_0, y_0) \in D(f)$, pre ktorý platí, že $f(x_0, y_0) = 0$. Ak Jacobiho matica

$$f'_y(x_0, y_0) = (\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x_0, y_0)) \;\; i = 1, 2, ...M \;\; a \;\; j = 1, 2, ...M$$

je invertovateľná, tak potom existuje okolie $O(x_0) \subset \mathbb{R}^N$ a okolie $O(y_0) \subset \mathbb{R}^M$ a jediná funkcia $y : O(x_0) \subset \mathbb{R}^N \mapsto O(y_0) \subset \mathbb{R}^M$, ktorá vyhovuje implicitnému vzťahu $f(x, y(x)) = 0 \;\; \forall x \in O(x_0)$. Naviac $\exists$ derivácia

$$y'(x_0) = -[f'_y(x_0, y_0)]^{-1}.f'_x(x_0, y_0),$$

kde $f'_x(x_0, y_0)$ je reprezentované maticou $M \times N$ a $[f'_y(x_0, y_0)]^{-1}$ je reprezentované maticou $M \times M$ a $y'(x_0)$ je reprezentované maticou $M \times N$.

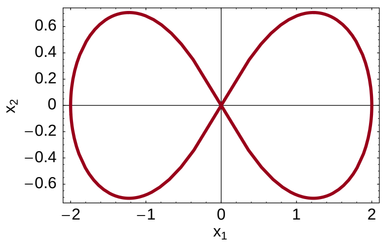
Aplikáciou vety o implicitnej funkcii pre zobrazenie $f(x, y) = F(y) - x$ dostávame nasledovné tvrdenie o existencii inverznej funkcie.

3. Veta o inverznej funkcii. Nech $F : D(F) \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ je spojite diferencovateľná funkcia na okolí $O(y_0)$ bodu $y_0 \in D(F)$, pre ktorý je Jacobiho matica $F'_y(y_0)$ invertovateľná. Potom existuje okolie $O(x_0)$ bodu $x_0 = F(y_0)$ a jediná (inverzná) funkcia $y = y(x) : O(x_0) \subset \mathbb{R}^N \to O(y_0)$ taká, že $F(y(x)) = x$, t.j. $y(x) = F^{-1}(x)$ pre každé $x \in O(x_0)$. Naviac funkcia $y(x)$ je diferencovateľná v okolí $O(x_0)$ a platí

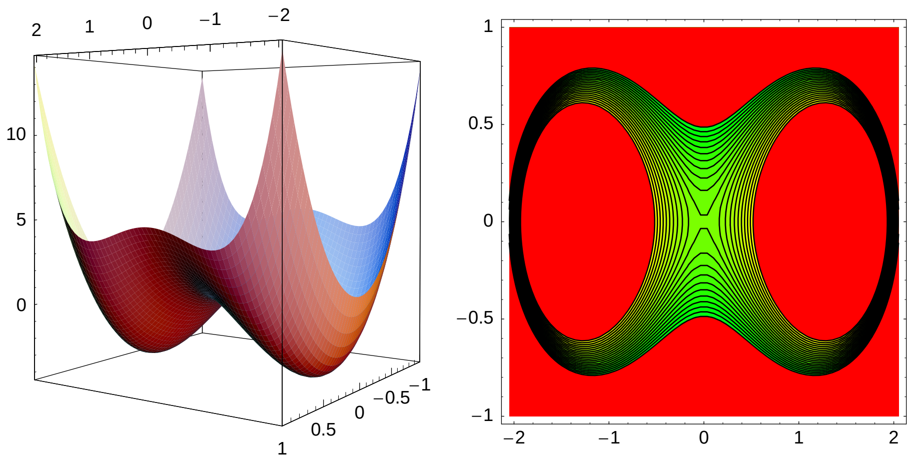
$$y'(x_0) = (F'(y_0))^{-1} F(y_0).$$

Grafické zobrazenia funkcií zadaných implicitne

- Grafické zobrazenie Bernoulliho lemniskáty $(x_1^2 + x_2^2)^2 - 4a^2(x_1^2 - x_2^2) = 0$ pomocou polárnej transformácie $x_1 = r\cos(\phi), x_2 = r\sin(\phi)$, kde $r = r(\phi) = 2a\sqrt{\cos(2\phi)}$, pričom $\phi \in (-\pi/4, \pi/4) \cup (3\pi/4, 5\pi/4)$. Zobrazenie funkcie $f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 4a^2(x_1^2 - x_2^2)$



- Zobrazenie funkcie $f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 4a^2(x_1^2 - x_2^2)$ a jej úrovňových množín. Nulová úrovňová množina tejto funkcie vytvára Bernoulliho lemniskátu



Riešené príklady

Príklad 1. Implicitnou rovnicou

$$x^2 + y^2 = x^4 + y^4$$

je definovaná mnohoznačná funkcia $y(x)$. Na akých množinách je táto „funkcia" 1) jednoznačná? 2) dvojznačná? 3) trojznačná? 4) štvorznačná? 5) Aké sú body vetvenia tejto funkcie a čo sú jej spojité vetvy?

Riešenie. Keďže implicitný vzťah $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$ sa dá ekvivalentne vyjadriť prostredníctvom vzťahu:

$$\left(y^2 - \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 - x^4 + \frac{1}{4},$$

tak potom dostávame, že platí

$$y^2 = \frac{1}{2} \pm \sqrt{x^2 - x^4 + \frac{1}{4}}.$$

To znamená, že máme nasledovné riešenia

$$y_1 = \pm\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{x^2 - x^4 + \frac{1}{4}}}, \qquad y_2 = \pm\sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{x^2 - x^4 + \frac{1}{4}}}.$$

Teraz sa zamyslime nad definičným oborom a viacznačnosťou vzťahu pre funkciu y. Aby y_1 bolo dobre definované, musí platiť $x^2 - x^4 + \frac{1}{4} \geq 0$. To je možné iba pre

$$x \in \langle -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}, \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \rangle.$$

V krajných bodoch $-\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}, \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$ tohto intervalu pritom y_1 nadobúda tie isté hodnoty ako y_2. Konkrétne $\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$. Na to, aby hodnota y_2 bola definovaná, musí platiť

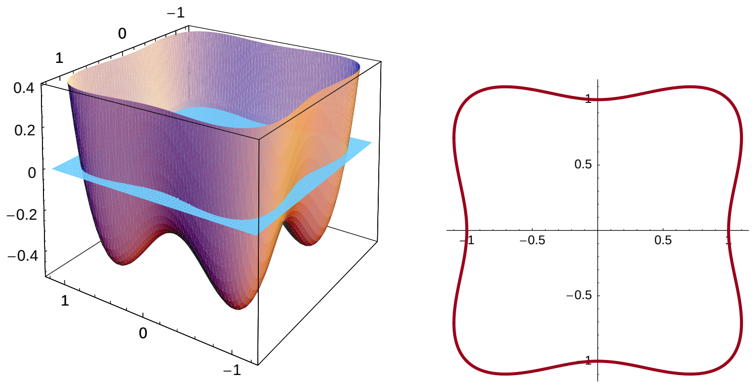
$$x^2 - x^4 + \frac{1}{4} \geq 0 \quad \text{a} \quad \frac{1}{2} \geq \sqrt{x^2 - x^4 + \frac{1}{4}},$$

čo nastane pre

$$x \in \langle -\frac{1+\sqrt{2}}{2}, -1\rangle \bigcup \langle 1, \frac{1+\sqrt{2}}{2}\rangle.$$

Tým pádom dostávame, že 1) funkcia y definovaná rovnicou $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$ nie je nikdy jednoznačne definovaná;. 2) dvojznačná je v bodoch $-\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}, \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$; 3) trojznačná je v bodoch -1 a 1; 4) štvorznačná je na množine

$$(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}, -1) \bigcup (1, \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}});$$



Obr. 7.1: Priebeh funkcie $F(x,y) = x^4 + y^4 - (x^2+y^2)$ (vľavo) a znázornenie množiny bodov $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^4+y^4 = x^2+y^2\}$ (vpravo).

5) spojité jednoznačné vetvy funkcie y sú na intervale $(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}, \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}})$, pričom platí:

$$y_1^+ = \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{x^2 - x^4 + \frac{1}{4}}}, \quad y_1^- = -\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{x^2 - x^4 + \frac{1}{4}}}.$$

Na množine $\langle -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}, -1\rangle \bigcup \langle 1, \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\rangle$ platí

$$y_2^+ = \sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{x^2 - x^4 + \frac{1}{4}}}, \quad y_2^- = -\sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{x^2 - x^4 + \frac{1}{4}}}.$$

Pozrite si ilustratívny Obrázok 7.1!

Príklad 2. Nech funkcia $f(x)$ je spojitá na (a,b). Nech $\varphi(y)$ je monotónne rastúca a spojitá funkcia na (c,d). Za akých podmienok rovnica $\varphi(y) = f(x)$ definuje jednoznačnú funkciu $y = \varphi^{-1}(f(x))$? Uvažujte prípady:

a) $\sin y + \sinh y = x$,

b) $e^{-y} = -\sin^2 x$.

Riešenie. Keďže φ je monotónne rastúca funkcia, inverzná funkcia φ^{-1} existuje. Označme obor hodnôt funkcie f pomocou $H(f)$ a obraz intervalu (teda tiež obor hodnôt) funkcie φ ako $H(\varphi)$. Zisťujeme, kedy existuje $y = \varphi^{-1}(f(x))$? To nastane práve vtedy, keď $H(\varphi) \bigcap H(f) \neq \emptyset$.

Rozoberieme dva prípady. Ak $H(\varphi) \bigcap H(f) = \emptyset$, tak potom neexistuje $x \in (a,b)$ také, že $\varphi(y) = f(x)$. Ak $H(\varphi) \bigcap H(f) \neq \emptyset$, potom definičný obor $D(\varphi^{-1} f) = \varphi^{-1}(f(a,b))$ a $y(x) = \varphi^{-1}(f(x))$ je dobre definovaná funkcia.

a) Ak $f(x) = x$, tak $(a,b) = (-\infty,\infty)$, a $f(-\infty,\infty) = (-\infty,\infty)$. Teda $D(\varphi^{-1} f) = \varphi^{-1}(-\infty,\infty)$. Teraz skúmajme, vlastnosti funkcie φ. Zrejme $D(\varphi) = R$, $\varphi(y) = \sin y + \sinh y$ je nepárna. $\varphi'(y) = \cos y + \cosh y \geq 0$, pretože $\cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \geq 1$. Táto vlastnosť vyplýva z toho, že ak $h(y) = \cosh y$, tak $h'(y) = \sinh y$, $h'(0) = 0$, $h''(y) = \cosh y > 0$. Teda h' je rastúca funkcia a na $(0,\infty)$ je kladná. Potom aj funkcia $\cosh$ je na $(0,\infty)$ rastúca a je väčšia ako 1. Dostávame $\varphi'(y) = \cos y + \cosh y \geq 0$, na $(0,\infty)$. Teda φ je na $(0,\infty)$ rastúca funkcia, čo sme potrebovali ukázať. Ďalej z faktu, že φ je nepárna funkcia a

$$\lim_{y\to\infty} \varphi(y) = \infty,$$

vyplýva, že $H(\varphi) = (-\infty, \infty)$. Dostávame

$$D(\varphi^{-1}f) = \varphi^{-1}(-\infty, \infty) = (-\infty, \infty).$$

b) Ak $f(x) = -\sin^2 x$, tak $D(f) = (-\infty, \infty)$, $H(f) = \langle -1, 0 \rangle$ a $D(\varphi) = (-\infty, \infty)$, $H(\varphi) = (0, \infty)$. Teda $H(\varphi) \bigcap H(f) = \emptyset$ a preto neexistuje také x, žeby $\varphi(y) = f(x)$.

Príklad 3. Ukážte, že predpoklad o spojitej diferencovateľnosti vo vete o inverznej funkcii je podstatný. Ako príklad uvažujte: $n = 1, f(t) = t + 2t^2 . \sin\frac{1}{t}$ pre $t \neq 0, f(0) = 0$, Potom funkcia f je spojitá, f' je ohraničená na $(-1, 1)$, ale f nie je prostá v žiadnom okolí 0. Ukážte.

Riešenie. Zrejme $f(t) = t + 2t^2 . \sin\frac{1}{t}$ pre $t \neq 0, f(0) = 0$, je spojitá funkcia a platí

$$\lim_{t\to 0} f(t) = 0.$$

Ďalej pre $t \neq 0$ platí $f'(t) = 1 + 4t\sin\frac{1}{t} - 2\cos\frac{1}{t} . f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0} 1 + 2h\sin\frac{1}{h} = 1$. Teda f' je na $(-1, 1)$ naozaj ohraničená. Derivácia f' je však v bode 0 naozaj nespojitá, lebo neexistuje $\lim_{t\to 0} f'(t)$. To znamená, že nie sú splnené predpoklady vety o inverznej funkcii. Naozaj ukážeme, že neexistuje okolie bodu 0, v ktorom by funkcia f bola prostá. Uvažujme o postupnosti

$$t_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi}.$$

Zrejme pre n nepárne dostávame $f(t_n) = t_n - 2t_n^2$. Pre n párne máme $f(t_n) = t_n + 2t_n^2$. Zrejme $t_n \mapsto 0$ pre $n \to \infty$ a t_n je klesajúca. Ak k je párne, tak

$$t_k(1 + 2t_k) = f(t_k) > t_k > t_{k+1} > t_{k+1}(1 - 2t_{k+1}) = f(t_{k+1}).$$

To znamená, že pre k párne platí $f(t_k) > f(t_{k+1})$. Ďalej ukážeme, že pre k párne naviac platí $f(t_k) > f(t_{k-1})$. Chceme teda ukázať, že platí

$$t_k + 2t_k^2 > t_{k-1} - 2t_{k-1}^2.$$

Vieme, že pre každé $A, B > 0$ platí

$$\frac{\pi}{2}AB < 2AB \leq A^2 + B^2.$$

Zvoľme teraz $A = \frac{\pi}{2} + k\pi, B = \frac{\pi}{2} + (k-1)\pi$. Teda

$$\frac{\pi}{2}(\frac{\pi}{2} + k\pi)(\frac{\pi}{2} + (k-1)\pi) = \frac{\pi}{2}AB < A^2 + B^2 = (\frac{\pi}{2} + k\pi)^2 + (\frac{\pi}{2} + (k-1)\pi)^2.$$

Ekvivalentnými úpravami dostaneme, že

$$t_{k-1} - t_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + (k-1)\pi} - \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi} < 2\left(\frac{1}{(\frac{\pi}{2} + k\pi)^2} + \frac{1}{(\frac{\pi}{2} + (k-1)\pi)^2}\right) = 2(t_k^2 + t_{k-1}^2).$$

Odkiaľ je zrejmé, že pre k párne platí $f(t_{k-1}) < f(t_k)$. Spojením poznatku, že f je spojitá a že pre k párne $f(t_{k-1}) < f(t_k)$ a $f(t_k) > f(t_{k+1})$, dostávame, že f nie je prostá na intervale (t_{k+1}, t_{k-1}) a teda ani v žiadnom okolí bodu 0.

Príklad 4. Dokážte, že rovnica

$$z^3 - xyz + y^2 = 16$$

určuje jedinú funkciu $z(x, y)$ v okolí bodu $(1, 4, 2)$. Nájdite jej parciálne derivácie

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y), \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, y), \frac{\partial z}{\partial x}(1, 4), \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1, 4).$$

Riešenie. Bod $(1, 4, 2)$ spĺňa rovnicu $z^3 - xyz + y^2 = 16$. Funkcia $F(x, y, z) = z^3 - xyz + y^2 - 16$ je spojite diferencovateľná v ľubovoľnom okolí bodu $M_0(1, 4, 2)$ a $F_z(1, 4, 2) = 3z^2 - xy = 8 \neq 0$. Teda sú splnené predpoklady vety o implicitnej funkcii. Keďže $F(x, y, z)$ je dvakrát diferencovateľná v okolí M_0, tak aj funkcia $z(x, y)$ je dvakrát diferencovateľná v nejakom okolí bodu $(1, 4)$. Podľa vety o implicitnej funkcii máme zaručenú existenciu dvakrát diferencovateľnej funkcie v nejakom okolí bodu $(1, 4)$ $z(x, y)$, ktorá spĺňa rovnicu

$$z^3(x, y) - xyz(x, y) + y^2 = 16.$$

Teraz túto rovnicu derivujeme podľa x. Dostávame:

$$3z^2 z_x - yz - xyz_x = 0.$$

Opätovným derivovaním dostaneme

$$6z(z_x)^2 + 3z^2 z_{xx} - 2yz_x - xyz_{xx} = 0.$$

Dostaneme $z_x = \frac{yz}{3z^2 - xy}$,

$$z_{xx} = \frac{2yz_x - 6z(z_x)^2}{3z^2 - xy}$$

Ak dosadíme za z_x, máme

$$z_{xx} = \frac{-2xy^3 z}{(3z^2 - xy)^3}.$$

Ak dosadíme $x = 1, y = 4, z = 2$, tak nakoniec získame $z_x(1, 4) = 1, z_{xx}(1, 4) = -0,5$.

Príklad 5. Určte prvé a druhé derivácie funkcií $x(z), y(z)$, v bode $z = 2$. Tieto funkcie sú zadané implicitne systémom rovníc

$$x^2 + y^2 = 0,5z^2$$

$$x + y + z = 2$$

a spĺňajú podmienky $x(2) = 1, y(2) = -1$.

Riešenie. Označme funkcie $F_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 0,5z^2$ a $F_2(x, y, z) = x + y + z - 2$, ktoré sú diferencovateľné v ľubovoľnom okolí bodu $M_0(1, -1, 2)$. Parciálne derivácie

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = 2x, \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2y, \frac{\partial F_2}{\partial x} = 1, \frac{\partial F_2}{\partial y} = 1$$

sú spojité funkcie v bode M_0. Ďalej platí, že $F_1(1, -1, 2) = 0, F_2(1, -1, 2) = 0$. Nakoniec Jakobián zobrazenia

$$\frac{D(F_1, F_2)}{D(x, y)}/(1, -1, 2) = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

Teda sú splnené predpoklady vety o implicitnej funkcii. Keďže $F_1(x,y,z), F_2(x,y,z)$ sú dvakrát diferencovateľné v ľubovoľnom okolí M_0, tak aj $x(z), y(z)$ sú dvakrát diferencovateľné funkcie v nejakom okolí bodu $z = 2$. Systém rovníc

$$x^2(z) + y^2(z) = 0,5z^2$$

$$x(z) + y(z) + z = 2$$

derivujeme podľa z. Dostaneme

$$2xx' + 2yy' = z, \qquad x' + y' + 1 = 0.$$

Ak dosadíme do týchto vzťahov hodnoty $x = 1, y = -1, z = 2$, dostávame systém rovníc vzhľadom na neznáme $x'(2), y'(2)$:

$$x'(2) - y'(2) = 1, \qquad x'(2) + y'(2) = -1.$$

Riešením tejto sústavy rovníc napokon dostávame: $x'(2) = 0, y'(2) = -1$. Ak pôvodný systém rovníc derivujeme podľa z dvakrát, dostaneme:

$$2(x')^2 + 2xx'' + 2(y')^2 + 2yy'' = 1, \qquad x'' + y'' = 0.$$

Opäť položíme $x = 1, y = -1, z = 2, x' = 0, y' = -1$. Dostaneme systém rovníc vzhľadom na neznáme $x''(2), y''(2)$:

$$x''(2) - y''(2) = -0,5 \qquad x''(2) + y''(2) = 0.$$

Riešením dostaneme $x''(2) = -0,25, y''(2) = 0,25$.

Príklady na samostatné riešenie

7.1 Ukážte, že dané rovnice určujú jedinú funkciu $y(x)$ v okolí bodu (x_0, y_0):

a) $x^2 + yx + y^2 = 3,\ x_0 = y_0 = 1;$ b) $xy + \ln(xy) = 1,\ x_0 = 2,\ y_0 = \frac{1}{2};$
c) $e^{x+y} + y - x = 0,\ x_0 = \frac{1}{2},\ y_0 = -\frac{1}{2}.$

7.2 . Ukážte, že dané rovnice určujú jedinú funkciu $z(x,y)$ v okolí bodu (x_0, y_0, z_0):

a) $x + y + z = \sin xyz,\ x_0 = y_0 = z_0 = 0;$
c) $x^y + x^z + z^x = 3,\ x_0 = y_0 = z_0 = 1.$

7.3 Ukážte, že v bode $(1,1,1,1,1)$ vzťahy

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 5 &= 0 \\ x_1 - x_2 + y_1^3 - y_2^3 + y_3^3 - 1 &= 0 \\ x_1^3 + 2x_2^3 + y_2 y_3 - 4 &= 0 \end{aligned}$$

nevyhovujú predpokladom vety o existencii zobrazenia $\varphi : (y_3, y_2) \to (x_1, x_2, y_1)$, avšak vyhovujú predpokladom existencie zobrazenia φ: $(x_1, x_2) \to (y_1, y_2, y_3)$.

7.4 Ukážte, že dané vzťahy určujú jediné zobrazenie $\varphi : X \to Y$ v okolí bodu M_0, ak a)

$$\begin{aligned} x_1y_1 + x_2y_2 - y_3y_2 - 1 &= 0 \\ (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) - y_1y_2y_3 - 1 &= 0 \\ (x_1^2 + x_2^2)(y_3^2 - y_1^2) + y_1y_2 &= 0, \end{aligned}$$

$X = \{(x_1, x_2)\},\ Y = \{(y_1, y_2, y_3)\},\ M_0 \equiv (1, 2, 1, 0, 1)$

b)

$$\begin{aligned} \sin(\pi x_1y_1) + \sin(\pi x_2y_2) + \sin(\pi x_3y_3) &= 1 \\ \cos\frac{\pi}{2}(x_1 - y_2) + \cos\frac{\pi}{2}(x_2 - y_1) + \cos\frac{\pi}{2}(x_3 - y_1) - 2 &= 0, \end{aligned}$$

$X = \{(x_1, x_2, x_3)\},\ Y = \{(y_1, y_2)\},\ M_0 \equiv (0, 1, 0, 1, 0)$

c)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\text{arctg}\,\frac{x_1y_1}{x_2y_2} - x_1x_2y_1y_2 &= 0 \\ x_2^2y_2^2 - x_1^2y_1^2 + \frac{1}{x_1y_1} - \frac{1}{x_2y_2} &= 0 \end{aligned}$$

$X = \{(x_1, x_2)\},\ Y = \{(y_1y_2)\},\ M_0 \equiv (1, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}).$

7.5 Nech je daná rovnica

$$x^2 = y^2 \quad (1)$$

a

$$y = y(x), kde - \infty < x < +\infty \quad (2)$$

je funkcia, spĺňajúca rovnicu (1).

1. Koľko funkcií (2) spĺňa rovnicu (1) ?
2. Koľko spojitých funkcií (2) spĺňa rovnicu (1) ?
3. Koľko diferencovateľných funkcií (2) spĺňa rovnicu (1) ?
4. Koľko spojitých funkcií (2) spĺňa rovnicu (1), ak: a) $y(1) = 1$; b) $y(0) = 0$?
5. Koľko spojitých funkcií $y = y(x)$ $(1 - \delta < x < 1 + \delta)$ spĺňa rovnicu (1), ak $y(1) = 1$ a δ je dostatočne malé?

7.6 Predpokladajúc, že v nejakom jeho okolí bodu $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ je jednoznačne implicitne určená spojitá dvakrát diferencovateľná funkcia $z(x, y)$, nájdite hodnoty uvedených derivácií v tomto bode:

a) $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, ak $x^2 + y^2 + z^2 = \mathbb{R}^2$;

b) $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, ak $\text{arctg}\,\dfrac{z}{x} = z + x + y$;

c) $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, ak $x + ty + z = \ln xyz,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0$;

d) $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, ak $x + y + z = \cos(xyz)$.

7.7 Dokážte, že pre funkciu $y = f(x)$ určenú implicitne rovnicou

$$1 + xy = k(x - y),$$

kde k je konštanta, platí rovnosť

$$\frac{dx}{1+x^2} = \frac{dy}{1+y^2}.$$

7.8 Dokážte, že pre funkciu $y = f(x)$ určenú implicitne rovnicou

$$x^2y^2 + x^2 + y^2 - 1 = 0 \tag{1}$$

pre $xy > 0$ platí rovnosť

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = 0.$$

7.9 Nech

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0 \quad (1)$$

a $f(x, y, z) = xy^2z^3$.

Nájdite: a) $f'_x(1, 1, 1)$, ak $z = z(x, y)$ je funkcia určená implicitne rovnicou (1) ; b) $f'_x(1, 1, 1)$, ak $y = y(x, z)$ je funkcia určená implicitne rovnicou (1). Vysvetlite, prečo sú tieto derivácie rôzne.

7.10 Nech $z = z(x, y)$ je tá diferencovateľná funkcia, určená rovnicou $z^3 - xz + y = 0$, ktorá pre $x = 3, y = -2$ nadobúda hodnotu $z = 2$. Nájdite $dz(3, -2)$ a $d^2z(3, -2)$.

Nájdite lokálne extrémy funkcie $y = f(x)$ danej implicitne:

7.11 $y^2 - ay - \sin x = 0,\ 0 \le x \le 2\pi$.

7.12 $x^2 + xy + y^2 = 27$.

7.13 $(y - x)^3 + x + 6 = 0$.

7.14 O funkcii $y = y(x)$ je známe, že vyhovuje rovnici $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$. Koľko takých diferencovateľných funkcií môže byť definovaných na okolí bodu $x = 1$? Určte ich derivácie $y'(x)$ a $y''(x)$ v bode $x = 1$ (pokiaľ existujú).

Kapitola 8

Viazané extrémy funkcie viac premenných

Význam a využitie viazaných extrémov funkcie viac premenných

Geometrická interpretácia viazaného extrému a Lagrangeovho multiplikátora

Lagrangeova funkcia

Nutné podmienky existencie viazaného extrému

Postačujúce podmienky viazaného maxima a minima

Všeobecná postačujúca podmienka viazaného extrému a ohraničený Hessián

Dôležité pojmy a tvrdenia

Definícia viazaného extrému Nech $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, a nech $g : D(g) \subset D(f) \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je väzba. Pod viazaným lokálnym maximom (resp. minimom) rozumieme bod $\overline{x} \in M = \{x, g(x) = 0\}$ pre ktorý platí: $f(x) \leq f(\overline{x})$ (resp. $f(x) \geq f(\overline{x})$) pre $\forall x \in O \cap M$, kde O je nejaké okolie bodu $\overline{x}$.

Definícia Lagrangeovej funkcie. $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, a nech $g : D(g) \subset D(f) \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je väzba. Pod Lagrangeovou funkciou

$$L(x, \lambda) = f(x) - \lambda g(x),$$

definovanou na $(D(g), \mathbb{R})$.

Nutná podmienka viazaného extrému Nech $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je C^1 hladká funkcia (t. j. má spojité derivácie, a nech $g : D(g) \subset D(f) \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je C^1 hladká väzba. Predpokladajme, že $\nabla g(x) \neq 0$ pre $\forall x \in M = x, g(x) = 0$ - podmienka nedegenerovanosti. Ak bod bod $\overline{x} \in D(g)$je viazané lokálne maximum (resp. minimum) úlohy max (resp. min) $f(x)$, pri väzbe $g(x) = 0$, t. j. ak $\overline{x}$ je kandidát na viazaný extrém, tak nutne existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ (Lagrangeov multiplikátor)tak, že platí:

$$\forall i = 1, 2, ..N : \frac{\partial L}{\partial x_i}(\overline{x}, \lambda) = 0, g(\overline{x}) = 0,$$

kde $L(x, \lambda) = f(x) - \lambda g(x)$ je Lagrangeova funkcia.

Geometrická interpretácia viazaného lokálneho extrému a Lagrangeovho multiplikátora

V tejto časti si priblížime geometrickú interpretáciu Lagrangeovho multiplikátora na príklade úlohy

$$\max_M f(x)$$
$$M = \{x \in R^2 : g(x) = 0\}$$

kde $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sú hladké funkcie, pričom g je regulárna väzba. Na obrázku 8.1 sú ako príklad naznačené množina M, ako nulová úrovňová množina funkcie g, t. j.

$$M = E^{=}_{c=0}(g) = \{x \in R^2 : \; g(x) = 0\}$$

a niekoľko úrovňových množín $E^{=}_c(f) = \{x \in R^2 : f(x) = c\}$ funkcie f pre rôzne hodnoty hladiny c. Lokálny viazaný extrém funkcie f pri väzbe $g = 0$ zrejme nastane v tom bode $\bar{x}$, kde sa úrovňová množina $E^{=}_c(f)$ dotkne väzby, t. j množiny $E^{=}_{c=0}(g) = \{x \in R^2 : g(x) = 0\}$. Normálové vektory k množinám $E^{=}_c(f)$ resp. $E^{=}_{c=0}(g)$ v bode $\bar{x}$ sú dané gradientmi funkcie f resp. g a teda

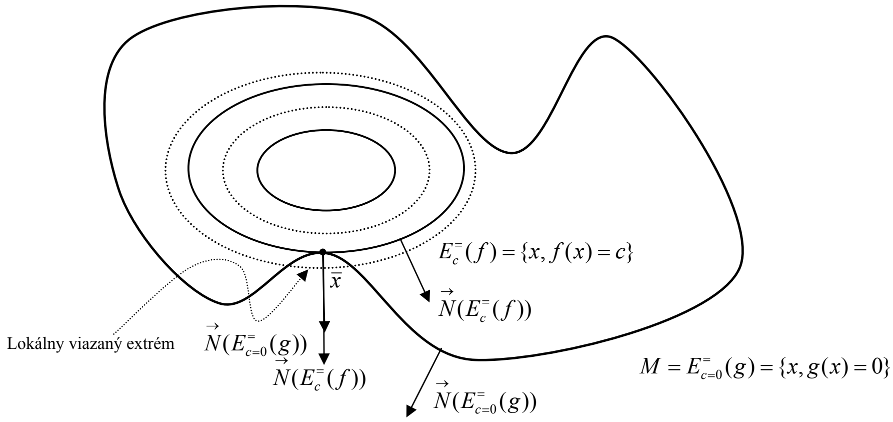
$$\vec{N}(E^{=}_c(f)) = \nabla f(\bar{x}), \qquad \vec{N}(E^{=}_{c=0}(g)) = \nabla g(\bar{x}).$$

Potom v bode lokálneho extrému $\bar{x}$ dostávame, že tieto dva vektory musia byť navzájom kolineárne (paralelné). To znamená, že existuje konštanta λ (Lagrangeov multiplikátor), pre ktorý platí

$$\nabla f(\bar{x}) = \lambda \nabla g(\bar{x}).$$

Táto podmienka je však zrejme identická s nutnou podmienkou viazaného extrému

$$\nabla L(x, \lambda) = 0 \quad \text{v bode } \bar{x}, \quad \text{kde } L(x, \lambda) = f(x) - \lambda g(x).$$



Obr. 8.1: Znázornenie geometrickej interpretácie Lagrangeovho multiplikátora.

Vo vyššej dimenzii resp. pre viacero väzieb sa dá previesť podobná geometrická úvaha vysvetľujúca geometrický význam Lagrangeovho multiplikátora vyjadrujúceho vzťah lineárnej závislosti gradientov optimalizovanej funkcie f a gradientov väzby g.

Postačujúca podmienka viazaného lokálneho extrému PP1. Nech sú splnené predpoklady na f a g z predošlého tvrdenia a nech bod $\overline{x}$ je kandidát na extrém a λ je vypočítaný Lagrangeov multiplikátor Lagrangeovej funkcie $L(x, \lambda)$. Potom ak funkcia $x \mapsto L(x, \lambda)$ má v bode $\overline{x}$ lokálne maximum (resp. lokálne minimum), tak aj funkcia $f(x)$ má v bode $\overline{x}$ viazané lokálne maximum (resp. viazané lokálne minimum).

Definícia oblúkovo súvislej množiny. Množinu $M \subset \mathbb{R}^N$ nazývame oblúkovo súvislou, ak pre každé dva body $x, y \in M$ existuje oblúk $\widehat{XY}$ spájajúci bod X s bodom Y celý ležiaci v množine M, t. j. existuje interval $I \subset \mathbb{R}$ a spojité zobrazenie

$$\varphi : I \mapsto \mathbb{R}^N, x = \varphi(a), y = \varphi(b), \varphi(t) \in M \;\; \forall t \in [a, b].$$

Postačujúca podmienka viazaného lokálneho extrému PP2. Nech M je oblúkovo súvislá kompaktná množina $M \subset \mathbb{R}^N$ a nech $f : M \subset \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$ je spojitá. Potom f nadobúda svoje maximum aj minimum na M (dôsledok kompaktnosti) a f zároveň nadobúda ktorúkoľvek hodnotu medzi minimom a maximom (t. j. obraz $f(M)$ je uzavretý interval).

Definícia obkoleseného Hessiánu pre $N = 2$ Nech $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je C^1 hladká funkcia (t. j. má spojité derivácie, a nech $g : D(g) \subset D(f) \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je C^1 hladká väzba. Predpokladajme, že $\nabla g(x) \neq 0$ pre $\forall x \in M = \{x, g(x) = 0\}$ - podmienka nedegenerovanosti. Nech $N = 2$. Obkolesený Hessián je matica

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}.$$

Postačujúca podmienka viazaného lokálneho extrému PP3. Nech sú splnené predpoklady na f a g z predošlého tvrdenia a nech bod $\overline{x}$ je kandidát na extrém a λ je vypočítaný

Lagrangeov multiplikátor Lagrangeovej funkcie $L(x,\lambda)$. Nech $N=2$. Na to aby kandidát $\overline{x}$ na viazaný extrém bol minimum stačí aby determinant

$$|H| = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} < 0$$

Na to aby kandidát $\overline{x}$ na viazaný extrém predstavoval lokálne viazané maximum, stačí aby determinant $|H| > 0$.

Definícia obkoleseného Hessiánu pre $N \geq 2$ Nech $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je C^1 hladká funkcia (t. j. má spojité derivácie, a nech $g : D(g) \subset D(f) \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je C^1 hladká väzba. Predpokladajme, že $\nabla g(x) \neq 0$ pre $\forall x \in M = x, g(x) = 0$ - podmienka nedegenerovanosti.

Obkolesený Hessián je matica

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_N} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \frac{\partial g}{\partial x_N} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_N} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_N} \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_N \partial x_N} \end{pmatrix}.$$

Postačujúca podmienka viazaného lokálneho extrému PP3 pre N Nech $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je C^1 hladká funkcia (t. j. má spojité derivácie, a nech $g : D(g) \subset D(f) \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je C^1 hladká väzba. Predpokladajme, že $\nabla g(x) \neq 0$ pre $\forall x \in M = x, g(x) = 0$ - podmienka nedegenerovanosti. Nech bod $\overline{x}$ je kandidát na extrém a λ je vypočítaný Lagrangeov multiplikátor Lagrangeovej funkcie $L(x,\lambda)$. Označme $H_3, H_4, ...H_N$ postupnosť hlavných minorov počítaných v $\overline{x}$ a prislúchajúcich k λ. Pokiaľ

$$H_3 < 0, H_4 < 0, ..., H_N < 0,$$

tak $\overline{x}$ je bod lokálneho viazaného lokálneho minima. Pokiaľ

$$H_3 > 0, H_4 < 0, ..., (-1)^N H_N < 0,$$

tak $\overline{x}$ je bod lokálneho viazaného lokálneho maxima.

Úloha viazaného extrému s viacerými väzbami. Nech $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je C^1 hladká funkcia (t. j. má spojité derivácie, a nech $g_i : D(g_i) \subset D(f) \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ sú C^1 hladké väzby pre $i = 1, 2, ...M$. Predpokladajme, že $M < N$. Nech $g_i, i = 1, 2, ...m$, spĺňajú podmienku regularity: Hodnosť matice $g'(x)$, pre všetky body $x \in \{x, g_i x = 0 \ \ pre \ \ i = 1, 2, ...M\}$ je M. Pritom

$$g'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_N}(x) \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_M}{\partial x_1}(x) \dots & \frac{\partial g_M}{\partial x_N}(x) \end{pmatrix}.$$

Definícia Lagrangeovej funkcie. Nech $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, a nech $g_i : D(g_i) \subset D(f) \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ sú C^1 hladké väzby pre $i = 1, 2, ...M$. Predpokladajme, že $M < N$. Pod Lagrangeovou funkciou

$$L(x, \lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^{M} \lambda_i g_i(x),$$

definovanou na $(x, \lambda) \in (\bigcap_{i=1}^{M} D(g_i), \mathbb{R}^M)$.

Nutná podmienka viazaného extrému Nech $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, a nech $g_i : D(g_i) \subset D(f) \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ sú C^1 hladké väzby pre $i = 1, 2, ...M$. Predpokladajme, že $M < N$. Nech rovnice väzby spĺňajú podmienku regularity. Nech $\overline{x}$ je bod viazaného lokálneho extrému. Nech $L(x, \lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^{M} \lambda_i g_i(x)$ je Lagrangeova funkcia. Potom musí platiť, že existuje $\lambda \in \mathbb{R}^M$ také, že

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}(\overline{x}, \lambda) = 0 \;\; pre \;\; j = 1, 2, ...N \;\; a \;\; g_i(\overline{x}) = 0 \;\; pre \;\; i = 1, 2, ...N.$$

Poznámka. Pri zisťovaní, či daný kandidát je alebo nie je viazaný lokálny extrém úlohy s viacerými väzbami používame analógiu s PP1, s PP2 a s PP3, pričom obkolesený Hessián vyzerá :

$$H = \begin{pmatrix} \vec{0} & . & \nabla g_1^T(\overline{x}) \\ \vec{0} & . & \nabla g_2^T(\overline{x}) \\ . & . & . \\ . & . & . \\ \vec{0} & . & \nabla g_M^T(\overline{x}) \\ \nabla g_1(\overline{x})... & \nabla g_M(\overline{x}) & L''_x(\overline{x}, \lambda) \end{pmatrix}.$$

Pritom $\vec{0}$ je M rozmerný nulový vektor, $\nabla g_i(\overline{x})$ je N rozmerný stĺpcový vektor a $L''_x(\overline{x}, \lambda)$ je reprezentovaná maticou $N \times N$.

Riešené príklady.

Príklad 1. Kruh o polomere 1 rozdeľte spojnicami stredu a hranice kruhu na n-uholník s vnútornými uhlami pri strede kruhu $x_1, x_2, ...x_n$ (v radiánoch). Nájdite také hodnoty $x_1, x_2, ...x_n$, pri ktorých je obvod n-uholníka maximálny.

Riešenie. Označme vnútorné uhly $n-$uholníka $x_1, x_2, ...x_n$, tak pre obvod vpísaného $n-$uholníka do kružnice o polomere 1 platí:

$$O(x_1, x_2, ...x_n) = 2 \sum_{i=1}^{n} \sin \frac{x_i}{2}.$$

Pritom hľadáme $\max_{K_n} O(x_1, x_2, ...x_n)$ na množine

$$K_n = \{(x_1, x_2, ...x_n), \forall i = 1, 2, ..., n : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} x_i = 2\pi\}.$$

Označme

$$A_n = \{x, \forall i = 1, 2, ..n : x_i > 0, \sum_{i=1}^{n} x_i = 2\pi\}, B_n = \{x, \exists \;\, i : x_i = 0, \sum_{i=1}^{n} x_i = 2\pi\}.$$

Keďže $K_n$je kompaktná množina, určite nadobúda O spojitá funkcia na nej maximum. Z geometrického názoru, t. j. použijúc trojuholníkovú nerovnosť vyplýva, že sa dané maximum musí nadobúdať na množine A_n. Teda hľadáme viazané lokálne maximum funkcie $O(x)$ na množine

$$\{x, \forall i = 1, 2, ..n : x_i > 0\}$$

s väzbou

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 2\pi.$$

Teraz zostrojíme Lagrangeovu funkciu

$$L(x,\lambda) = O(x) - \lambda(\sum_{i=1}^{n} x_i - 2\pi) = 2\sum_{i=1}^{n} \sin\frac{x_i}{2} - \lambda(\sum_{i=1}^{n} x_i - 2\pi).$$

Keď použijeme nutnú podmienku lokálneho extrému, t. .j.

$$\forall i \in \{1, 2, ...n\} : \frac{\partial L}{\partial x_i}(\overline{x}) = \cos\frac{x_i}{2} - \lambda = 0,$$

tak dostávame, že

$$\forall i \in \{1, 2, ...n\} : \cos\frac{x_i}{2} = \cos\frac{x_1}{2}.$$

Z podmienky väzby vyplýva, že $\overline{x_i} \in (0, 2\pi)$ a teda

$$\frac{\overline{x_i}}{2} \in (0, \pi).$$

Keďže funkcia $\cos$ je na $(0, \pi)$ prostá funkcia, platí $\forall i \in \{1, 2, ...n\}\overline{x_i} = \frac{2\pi}{n}$. Teda jediný kandidát na viazaný lokálny extrém je

$$\overline{x} = (\frac{2\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, ...\frac{2\pi}{n}).$$

Viem, že maximum $\max_{K_n} O$ sa nadobúda na množine A_n a teda v bode $\overline{x}$. Ukázali sme, že obvod $n-$uholníka je maximálny, keď sa jedná o pravidelný $n-$uholník.

Príklad 2. Rozložte dané kladné číslo a na n sčítancov tak, aby súčet ich štvorcov bol minimálny.

Riešenie Nech $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, V(a_1, a_2, ..., a_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$. Hľadáme $\min V(a_1, a_2, ..., a_n)$, za podmienky väzby $a_1 + a_2 + ...a_n = a$. Definujme Lagrangeovu funkciu

$$L(a_1, a_2, ..., a_n, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \lambda(a_1 + a_2 + ... + a_n).$$

Dostávame

$$\frac{\partial L}{\partial a_1} = 2a_1 - \lambda,$$

$$\frac{\partial L}{\partial a_2} = 2a_2 - \lambda,$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial L}{\partial a_n} = 2a_n - \lambda,$$

Nutná podmienka existencie viazaného extrému je teda

$$\overline{\lambda} = 2a_1 = 2a_2 = ...2a_n,$$

pri podmienke väzby máme jediný možný bod spĺňajúci podmienku

$$a_i = \frac{a}{n} = \frac{\overline{\lambda}}{2}.$$

Teraz použijeme podmienku PP1. Určíme Hessovu maticu druhých derivácií funkcie $L(x) = L(x, \overline{\lambda})$ v bode

$$(\frac{a}{n}, \frac{a}{n}, ...\frac{a}{n}).$$

Dostávame

$$\forall i \in 1, 2, ...n : \frac{\partial^2 L}{\partial a_i^2} = 2, \forall i, j \in 1, 2, ...n, i \neq j : \frac{\partial^2 L}{\partial a_i a_j} = 0.$$

Z kladnej definitnosti Hessovej matice vyplýva existencia viazaného minima danej funkcie a väzby. Minimum sa nadobúda v bode

$$(\frac{a}{n}, \frac{a}{n}, ...\frac{a}{n}).$$

Na dôvažok doplňme, že týmto príkladom sme nepriamo ukázali aj nerovnosť

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geq \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2.$$

Príklad 3. Na sfére $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ nájdite bod, ktorý má minimálny súčet štvorcov vzdialeností od n daných bodov $M_i(x_i, y_i, z_i), i = 1, 2, ...n$.

Riešenie. Budeme riešiť úlohu na viazaný lokálny extrém funkcie $V : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$,

$$V(x, y, z) = \sum_{i=1}^{n}(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2,$$

kde (x, y, z) spĺňa väzbu $x^2+y^2+z^2 = 1$. Keďže povrch gule je oblúkovo súvislá a kompaktná množina, tak na nej funkcia musí nadobúdať podľa podmienky PP2 ako minimum, tak aj maximum. Nech $L(x, y, z, \lambda) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ je definovaná vzťahom

$$L(x, y, z, \lambda) = \sum_{i=1}^{n}\{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2\} + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1).$$

Nutná podmienka viazaného extrému je

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2\sum_{i=1}^{n}(x - x_i) + 2\lambda x = 0.$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2\sum_{i=1}^{n}(y - y_i) + 2\lambda y = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 2\sum_{i=1}^{n}(z - z_i) + 2\lambda z = 0.$$

Dostávame:

$$x(n+\lambda) = \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$$y(n+\lambda) = \sum_{i=1}^{n} y_i,$$

$$z(n+\lambda) = \sum_{i=1}^{n} z_i.$$

Po umocnení na druhú a sčítaní všetkých troch rovnica využití väzby dostaneme

$$(n+\lambda)^2 = (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 + (\sum_{i=1}^{n} y_i)^2 + (\sum_{i=1}^{n} z_i)^2.$$

Teda máme

$$\lambda_1 = -n + \sqrt{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 + (\sum_{i=1}^{n} y_i)^2 + (\sum_{i=1}^{n} z_i)^2}.$$

$$\lambda_2 = -n - \sqrt{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 + (\sum_{i=1}^{n} y_i)^2 + (\sum_{i=1}^{n} z_i)^2}.$$

a body možného extrému sú $(\overline{x_1}, \overline{y_1}, \overline{z_1})$,$(\overline{x_2}, \overline{y_2}, \overline{z_2})$, kde

$$\overline{x_1} = \frac{1}{n+\lambda_1}\sum_{i=1}^{n} x_i, \overline{y_1} = \frac{1}{n+\lambda_1}\sum_{i=1}^{n} y_i, \overline{z_1} = \frac{1}{n+\lambda_1}\sum_{i=1}^{n} z_i.$$

$$\overline{x_2} = \frac{1}{n+\lambda_2}\sum_{i=1}^{n} x_i, \overline{y_2} = \frac{1}{n+\lambda_2}\sum_{i=1}^{n} y_i, \overline{z_2} = \frac{1}{n+\lambda_2}\sum_{i=1}^{n} z_i.$$

Teraz buď použijeme PP1 alebo PP2. Keďže Hessova matica druhých derivácií funkcie $L(x, y, z, \lambda_1)$ v bode sa ľahko počíta, platí

$$L''(\overline{x_1}, \overline{y_1}, \overline{z_1}) = \begin{pmatrix} n+\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & n+\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & n+\lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & S \end{pmatrix},$$

kde

$$S = \sqrt{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 + (\sum_{i=1}^{n} y_i)^2 + (\sum_{i=1}^{n} z_i)^2}.$$

Podobne

$$L''(\overline{x_2}, \overline{y_2}, \overline{z_2}) = \begin{pmatrix} -S & 0 & 0 \\ 0 & -S & 0 \\ 0 & 0 & -S \end{pmatrix}$$

Teda, ak $S \neq 0$, tak v $(\overline{x_1}, \overline{y_1}, \overline{z_1})$ sa nadobúda viazané minimum a v $(\overline{x_2}, \overline{y_2}, \overline{z_2})$ sa nadobúda viazané maximum. Ak $S \neq 0$, tak minimum sa nadobúda v bode

$$\overline{x_1} = \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{n} x_i,\ \overline{y_1} = \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{n} y_i,\ \overline{z_1} = \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{n} z_i.$$

V prípade, že $S = 0$, platí pre(x, y, z)ktoré spĺňa podmienku väzby

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$V(x,y,z) = \sum_{i=1}^{n}(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 =$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x^2 + y^2 + z^2) - 2x\sum_{i=1}^{n} x_i - 2y\sum_{i=1}^{n} y_i - 2z\sum_{i=1}^{n} z_i + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$$

$$= n + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + y_i^2 + z_i^2,$$

čo vlastne znamená, že V je v tomto prípade konštantná a každý bod (x, y, z) väzby je bodom neostrého lokálneho minima aj maxima.

Príklady na samostatné riešenie

Viazané lokálne extrémy
Nájdite viazané lokálne extrémy funkcií:

8.1 $z(x,y) = x^2 + y^2,\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1.$

8.2 $z(x,y) = x + y,\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{a^2}.$

8.3 $z(x,y) = xy,\ x^2 + y^2 = 1.$

8.4 $z(x,y) = x + y,\ \operatorname{tg} x + 3\operatorname{tg} y = 0,\ |x| < \dfrac{\pi}{2},\ |y| < \dfrac{\pi}{2}.$

8.5 $u(x,y,z) = x - 2y + 2z,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1.$

8.6 $u(x,y,z) = xy^2z^3,\ x + 2y + 3z = 6,\ (x > 0,\ y > 0,\ z > 0).$

8.7 $u(x,y,z) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2},\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ (a > b > c > 0).$

8.8 $u(x,y,z) = xyz,\ x^2 + y^2 + z^2 = 3.$

8.9 $u(x,y,z) = x + y + z^2,\ z - x = 1,\ y - xz = 1.$

8.10 $u(x,y,z) = xyz,\ x + y + z = 5,\ xy + yz + zx = 8.$

8.11 Ako treba zvoliť polomer podstavy r a výšku h kruhového valca, ktorého objem je $V = 54\pi$, aby mal najmenší povrch?

8.12 Nájdite rozmery pravouhlého rovnobežnostena najväčšieho objemu, ktorý je vpísaný do elipsoidu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

8.13 Nájdite najmenšiu vzdialenosť bodu (x_0, y_0, z_0) od roviny $\tau : ax + by + cz + d = 0$.

8.14 Nájdite extrém kvadratickej formy $u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$m kde $a_{ij} = a_{ji}$ sú reálne čísla, pri väzbe $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$.

8.15 Dokážte nerovnosť:

$$\frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^n, \text{ ak } n \geq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0.$$

8.16 Nájdite viazané extrémy funkcie $z = x_1^m + x_2^m + \cdots + x_n^m$, ak rovnica väzby je $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n.a,\ a > 0,\ m > 1$.

8.17 Dokážte Hölderovu nerovnosť

$$\sum_{i=1}^{n} a_ix_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^q\right)^{1/q},\ a_i \geq 0,\ x_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n,\ p > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

8.18 Nájdite viazané lokálne extrémy funkcie

$$f(x, y, z) = x + 2y + 3z$$

pri väzbách $x + y + z = 1$ a $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Globálne extrémy
Nájdite globálne extrémy funkcii na uzavretej ohraničenej oblasti M:

8.19 $z(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y,\ M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 25\}$.

8.20 $z(x, y) = x^2 + 2y^2 + 4xy - 6x - 1,\ M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ y \leq -x + 3\}$.

8.21 $z(x, y) = x^2 - xy + y^2,\ M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$.

8.22 $z(x, y) = x^2 - y^2,\ M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

8.23 $z(x, y) = e^{-x^2-y^2}(3x^2 + 2y^2),\ M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

8.24 $z(x, y) = \frac{xy}{2} - \frac{x^2y}{6} - \frac{xy^2}{8},\ M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x}{3} + \frac{y}{4} \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$.

8.25 $u(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2,\ M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 100\}$.

8.26 $u(x, y, z) = x + y + z,\ M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$.

8.27 $u(x, y, z) = xy + yz + zx,\ M\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$.

8.28 Riešte viazané lokálne extrémy funkcie f pri väzbe g.

$$a)\ f(x, y) = 4x - y \ \ a \ \ g : x^2 - y^2 = 15, \quad b)\ f(x, y) = x^2 - y^2 \ \ a\ g : 2x - y - 3 = 0$$

8.29 Zistite globálne extrémy funkcie u na množine D.

$$u(x, y, z) = x^2 - 2ax + y^2 - 2ay + z^2 - 2az$$

$$D = \{(x, y, z), x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2, z \geq 0\}$$

Návod: Treba si uvedomiť, že množina D je súvislá a kompaktná. Najprv hladáme možné lokálne extrémy(pomocou prvých derivácií vyjde $M_1 = (a, a, a)$. Ďalej hladáme body možných extrémov na hranici $\partial D = D_1 \cup D_2$, kde $D_1 = \{(x, y, z), x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2, z \geq 0\}$ a $D_2 = \{(x, y, z), x^2 + y^2 \leq 4a^2\ a\ z = 0\}$. Na D_1 nám vyjde $M_2 = (\frac{2a}{\sqrt{3}}, \frac{2a}{\sqrt{3}}, \frac{2a}{\sqrt{3}})$. Na D_2 hľadáme globálne extrémy a dostávame nám $M_3 = (a, a, 0)$ a $M_4 = (\sqrt{2}a, \sqrt{2}a, 0)$ a $M_5 = (-\sqrt{2}a, -\sqrt{2}a, 0)$. Teraz spomedzi bodov M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 vyberieme tie v ktorých nadobúda funkcia maximum a minimum.

$\max u(M)\ \ vM_5, u(M_5) = 4a^2(\sqrt{2} + 1),\ \min u(M) = u(M_1) = -3a^2)$

Kapitola 9

Rozvoj funkcií do Fourierovho radu

Rozvoj funkcie do Fourierovho radu, vzťahy pre koeficienty Fourierovho radu

Periodické, párne a nepárne rozšírenia funkcii a ich rozvoj do Fourierovho radu

Besselova nerovnosť a Parsevalova rovnosť

Konvergencia trigonometrického radu, bodová konvergencia Fourierovho radu

Riešenie okrajovej úlohy pre obyčajnú diferenciálnu rovnicu pomocou Fourierovho radu

Dôležité pojmy a tvrdenia

Myšlienka konštrukcie Fourierovych trigonometrických radov je založená na snahe aproximovat' reálne funkcie reálnej premennej pomocou trigonometrických funkcií $\sin$ resp. $\cos$. V tejto časti pripomenieme základné fakty o konštrukcií Fourierovych radov a ich vlastnostiach.

Nech $f : [-l, l] \to \mathbb{R}$ je Riemannovsky integrovateľná funkcia. Pod Fourierovym radom funkcie f na intervale $[-l, l]$ rozumieme funkcionálny rad

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

zložený z tzv. trigonometrických polynómov $\cos \frac{n\pi x}{l}$ a $\sin \frac{n\pi x}{l}$ pre $n = 1, 2, ...,$. Fourierove koeficienty tohto trigonometrického radu vypočítame nasledovne:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) dx, \\ a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \end{aligned}$$

Fourierov rad k funkcii f potom má tvar

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Zámerne sa vyhýbame napísaniu rovnosti vo vyššie uvedenom vzťahu, nakoľko horeuvedený rad nemusí konvergovat'k hodnote $f(x)$ v každom bode x.

Idea odvodenia vzorcov pre koeficienty a_n, b_n je jednoduchá a spočíva vo vynásobení sumy $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l}$ funkciou $\cos \frac{n\pi x}{l}$ resp. $\sin \frac{n\pi x}{l}$ a následnom integrovaní po intervale $[-l, l]$. Potrebujeme ešte využit' integrály

$$\int_{-l}^{l} \cos \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l} dx = \int_{-l}^{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} dx = 0$$

pre $n \neq m$

$$\int_{-l}^{l} \cos \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} dx = 0$$

pre každé n, m a

$$\int_{-l}^{l} \left(\cos \frac{n\pi x}{l}\right)^2 dx = \int_{-l}^{l} \left(\sin \frac{n\pi x}{l}\right)^2 dx = l$$

pre každé n.

V prípade, že funkcia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, kde $[a, b]$ je ľubovolný interval, tak Fourierove koeficienty vypočítame podľa vzorcov

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T}\int_a^b f(x)dx, \\ a_n &= \frac{2}{T}\int_a^b f(x)\cos\frac{2\pi nx}{T}dx, \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_a^b f(x)\sin\frac{2\pi nx}{T}dx. \end{aligned}$$

kde $T = b - a$. V tomto všeobecnom prípade má Fourierov rad funkcie f tvar

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2\pi nx}{T} + b_n \sin\frac{2\pi nx}{T}.$$

Periodické rozšírenie funkcie. Nech $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkcia. Pod T-periodickým rozšírením funkcie f z intervalu $[a, b]$ do $\mathbb{R}$, kde $T = b - a$, rozumieme funkciu

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{ak } x \in [a, b], \\ f(x - kT) & \text{ak } x \notin [a, b], \end{cases}$$

kde $k \in \mathbb{Z}$ je také celé číslo, že $x - kT \in [a, b]$.

Párne rozšírenie funkcie. Nech $f : [0, T] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je daná funkcia. Pod párnym $2T$-periodickým rozšírením funkcie f rozumieme funkciu $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ktorá je periodickým rozšírením funkcie

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{ak } x \in [0, T], \\ f(-x) & \text{ak } x \in [-T, 0). \end{cases}$$

Nepárne rozšírenie funkcie. Nech $f : [0, T] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je daná funkcia. Pod nepárnym $2T$-periodickým rozšírením funkcie f rozumieme funkciu $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ktorá je periodickým rozšírením funkcie

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{ak } x \in [0, T], \\ -f(-x) & \text{ak } x \in [-T, 0). \end{cases}$$

Besselova nerovnosť. Nech $f \in L_2(-l, l)$. T.j. $\int\limits_{-l}^{l} f^2(x)dx < \infty$. Nech f je 2l periodická.Potom platí

$$\int_{-l}^{l} f^2(x)dx \geq l(\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2),$$

presnejšie pre rozdiel $f(x) - s_n(x)$, kde

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}$$

označuje n-tý čiastočný súčet Fourierovho radu, platí:

$$0 \leq \int_0^{2l} |f(x) - s_n|^2 dx = \int_0^{2l} |f(x)|^2 dx - l(\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 + |b_k|^2).$$

Parsevalova rovnosť Nech $f \in L_2(-l,l)$. T.j. $\int\limits_{-l}^{l} f^2(x)dx < \infty$. Nech f je 2l periodická.Potom platí

$$\int_{-l}^{l} f^2(x)dx = l(\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2)$$

Poznámka. Prečo vlastne neudávame len rovnosť? Lebo Besselova nerovnosť platí všeobecnejšie v ľubovoľnom Hilbertovom priestore, kde si zvolíme nejaký ortonormálny systém, podľa ktorého funkciu rozvíjame. V prípade , že tento systém je úplný, dostávame analogickú Parsevalovu rovnosť.

Tvrdenie 1. Ak funkcia *f* je $2l$ - periodická funkcia, spojitá, po častiach C^1 hladká, potom

$$s_n(x_0) \to f(x_0)$$

pre $n \to \infty, \forall x_0 \in [0, 2\pi]$.

Tvrdenie 2. Ak funkcia *f* je $2l$ - periodická funkcia, po častiach C^1 hladká, tak potom

$$s_n(x_0) \to \tilde{f}(x_0),$$

kde

$$\tilde{f}(x_0) = \begin{cases} f(x_0) & \text{a} \quad x_0 \quad \text{je bod spojitosti} \\ \frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2} & \text{a} \quad x_0 \quad \text{je bod nespojitosti.} \end{cases}$$

Tvrdenie 3. (O derivovaní Fourierovho radu) Nech f je spojitá na $(-\infty, \infty)$ periodická funkcia s periódou $T = 2l$, t. j $f(-l) = f(l)$. Nech f' je po častiach spojitá na $[a, a+2l]$. Potom Fourierov rad funkcie f' dostaneme derivovaním *f* Fourierovho radu funkcie *f* člen po člene.

Riešené príklady.

Príklad 1. Nech $(X, .)$ je LVP so skalárnym súčinom $(.,.)$. Norma $\|.\|$ na X je definovaná pomocou skalárneho súčinu $(x,y) \mapsto \mathbb{R} : \|x\| = \sqrt{(x,x)}$.

Nech $(\phi_1, \phi_2, ...\phi_n, ...)$ je systém navzájom ortogonálnych prvkov v X. Nech $f \in X$, f ľubovoľný. Potom pod Fourierovými koeficientami funkcie *f* rozumieme postupnosť

$$\{\gamma_m\}_{m=1}^{\infty}, \gamma_m \in \mathbb{R},$$

takú, že

$$\gamma_m = \frac{(f, \phi_m)}{\|\phi_m\|^2}.$$

Toto je zovšeobecnenie Fourierovych radov do ľubovoľného LVP priestoru so skalárnym súčinom. Označme teraz

$$s_n = \sum_{m=1}^{n} \gamma_m \phi_m \in X$$

ako $n-$ čiastočný súčet Fourierovho radu. Nech

$$t_n = \sum_{m=1}^{n} c_m \phi_m \in X, c_m \in \mathbb{R}$$

je ľubovoľná lineárna kombinácia bázických funkcií $(\phi_1, ..., \phi_n$. Potom platí

$$\|f - s_n\|^2 \le \|f - t_n\|^2.$$

To znamená, že aproximácia s_n funkcie f skonštruovaná pomocou Fourierovych koeficientov, je najlepšia aproximácia spomedzi všetkých lineárnych kombinácií s pohľadu minimalizácie kvadratickej chyby $\|f - s_n\|^2$.

Dôkaz. Počítajme

$$\|t_n - f\|^2 = (t_n - f, t_n - f) = (\sum_{m=1}^{n} c_m\phi_m - f, \sum_{m=1}^{n} c_m\phi_m - f)$$

$$= \|f\|^2 - 2(f, \sum_{m=1}^{n} c_m\phi_m) + (\sum_{m=1}^{n} c_m\phi_m, \sum_{m=1}^{n} c_m\phi_m)$$

(z ortogonality)

$$= \|f\|^2 - 2\sum_{m=1}^{n} c_m(f, \phi_m) + \sum_{m=1}^{n} c_m^2\|\phi_m\|^2 = \|f\|^2 - 2\sum_{m=1}^{n} c_m\gamma_m\|\phi_m\|^2 + \sum_{m=1}^{n} c_m^2\|\phi_m\|^2$$

$$= \|f\|^2 + \sum_{m=1}^{n} \|\phi_m\|^2(c_m^2 - 2\gamma_m c_m + \gamma_m^2 - \gamma_m^2) = \|f\|^2 + \sum_{m=1}^{n} \|\phi_m\|^2(c_m - \gamma_m)^2 - \sum_{m=1}^{n} \|\phi_m\|^2\gamma_m^2.$$

Teraz dosaďme za $c_m = \gamma_m \forall m = 1, 2, ...n$:

$$\|s_n - f\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{m=1}^{n} \|\phi_m\|^2\gamma_m^2.$$

A teda

$$\|t_n - f\|^2 = \|s_n - f\|^2 + \sum_{m=1}^{n} \|\phi_m\|^2(c_m - \gamma_m)^2 \ge \|s_n - f\|^2.$$

Príklad 2. Vypočítajte postupne Fourierove rady k funkciám na $(0, 2\pi)$ a) x, b) x^2, c) x^3 vzhľadom na ortogonálnu sústavu funkcií $1, \cos nx, \sin nx, n \in \mathbb{N}$.

Riešenie.

a) Funkcia $f(x) = x$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x \ dx = 2\pi, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx \ dx = 0, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nx \ dx = -\frac{2}{n}.$$

Fourierov rad je preto daný:

$$x \sim \pi - \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n}\sin nx.$$

Odtiaľ tiež dostaneme, že na intervale $(0, 2\pi)$ platí:

$$\frac{\pi - x}{2} \sim \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\sin nx.$$

b) Funkcia $f(x) = x^2$:

$$\overline{a_0} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \ \ dx = \frac{8}{3}\pi^2$$

$$\overline{a_n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \cos nx \ \ dx$$

(použijeme per partes)

$$|u = x^2, u' = 2x, v' = \cos nx, v = \frac{\sin nx}{n}|$$

$$\overline{a_n} = -\frac{2}{\pi n}\int_0^{2\pi} \sin nx \ \ dx = \frac{-2}{n} b_n = \frac{4}{n^2}.$$

Tu sme použili b_n z a).

$$\overline{b_n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \sin nx \ \ dx$$

(opät' použijeme per partes)

$$\overline{b_n} = -\frac{4\pi}{n} + \frac{2}{n} a_n = -\frac{4\pi}{n}.$$

Fourierov rad na intervale $(0, 2\pi)$ má tvar

$$x^2 \sim \frac{4}{3}\pi^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{4}{n^2}\cos nx - \frac{4\pi}{n}\sin nx.$$

Porovnaním a), b) dostaneme, že na intervale $(0, 2\pi)$ platí

$$\frac{3x^2 + 2\pi^2 - 6\pi x}{12} \sim \sum_{i=1}^{n} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

c) Funkcia $f(x) = x^3$:

$$\overline{\overline{a_0}} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^3 \ \ dx = 4\pi^3.$$

$$\overline{\overline{a_n}} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^3 \cos nx \ \ dx$$

(použijeme per partes)

$$\overline{\overline{a_n}} = -\frac{3}{n}\overline{b_n} = \frac{12\pi}{n^2}$$

$$\overline{\overline{b_n}} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^3 \sin nx \ \ dx$$

(použijeme per partes)

$$\overline{\overline{b_n}} = -\frac{8\pi^2}{n} + \frac{3}{n}\overline{a_n} = \frac{-8\pi^2}{n} + \frac{12}{n^3}.$$

Teda Fourierov rad na $(0, 2\pi)$ má tvar

$$x^3 \sim 2\pi^3 + \sum_{i=1}^{n} \frac{12\pi}{n^2}\cos nx + (\frac{12}{n^3} - \frac{8\pi^2}{n})\sin nx.$$

Porovnaním a), b), c) dostaneme, že na intervale $(0,2\pi)$ platí:

$$\frac{x^3-3\pi x^2+2\pi^2 x}{12} \sim \sum_{i=1}^{n} \frac{\sin nx}{n^3}.$$

Teraz môžeme použiť Parsevalovu rovnosť na výpočet nasledovných radov:

a) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2}$,

b) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^4}$,

c) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^6}$.

a) Z Parsevalovej rovnosti pre funkciu $\frac{\pi-x}{2}$ na intervale $(0,2\pi)$ dostávame

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (\frac{\pi-x}{2})^2 \ dx = \frac{\pi^2}{6}.$$

b) Z Parsevalovej rovnosti pre $\frac{3x^2+2\pi^2-6\pi x}{12}$ na intervale $(0,2\pi)$ máme

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (\frac{3x^2+2\pi^2-6\pi x}{12})^2 \ dx = \frac{\pi^4}{90}.$$

c) Z Parsevalovej rovnosti pre $\frac{x^3-3\pi x^2+2\pi^2 x}{12}$ na intervale $(0,2\pi)$ dostávame

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^6} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (\frac{x^3-3\pi x^2+2\pi^2 x}{12})^2 dx = \frac{\pi^6}{945}.$$

Príklady na samostatné riešenie

9.1 Zostrojte Fourierove rady funkcií

a) $f(x) = 7 + 4\cos 3x \ na \ (-\pi,\pi)$.
b)

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \ pre \ x \in (0,\pi) \\ f(x) &= 0 \ pre \ x = 0 \\ f(x) &= -2 \ pre \ x \in (-\pi,0) \end{aligned}$$

c) $f(x) = |x|$ pre $x \in [-l,l], l = 1$ vzhľadom k systému funkcií $(1, ..., \cos\frac{n\pi x}{l}, \sin\frac{n\pi x}{l})$
d) $f(x) = \exp(-x)$ $x \in (-l,l)$ vzhľadom k systému funkcií z c)
e) $f(x) = \cos^3 x$
f) $f(x) = 2x^2 - 2 + \cos^2 x$

9.2 Nech $\sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n$ je Fourierov rad funkcie f a $\sum_{n=1}^{\infty} d_n\phi_n$ je Fourierov rad funkcie g, pričom ϕ_n je ortogonálny systém funkcií. Aké sú Fourierove koeficienty funkcie $f+g$?

9.3 Nech je daná funkcia $f(x) = x^2$ na $[0,\pi]$. Rozšírme ju na interval $[-\pi,\pi]$ a napíšme Fourierov rozvoj rozšírenej funkcie f_1

a) Ak f_1 má periódu π na $(-\pi, \pi)$
b) Ak $f_1(x)$ je párna funkcia na $[-\pi, \pi]$
c) Ak $f_1(x)$ je nepárna funkcia na $[-\pi, \pi]$
d) Na základe b) spočítajte

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

Návod: Pre periodické predlženie f_1 funkcie $f = x^2$ definovanej na základnom interval $[-\pi, \pi]$ s periódou 2π platí, že f_1 je spojitá na $(-\infty, \infty)$ a periodická s periódou 2π a preto po spočítaní Fourierovho radu v b) dostaneme, že

$$f_1(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2} \quad \forall x \in (-\infty, \infty)$$

a teda

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2} \quad \forall x, |x| \le \pi.$$

Teraz dosadíme za $x = 0$ a dostaneme, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Ak dosadíme za $x = \pi$, dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

a sčítaním predošlých dvoch radov dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

9.4 Nájdite sínusový trigonometrický rozvoj funkcie $f(x) = x - x^2$ pre $x \in (0, 1)$.
Návod: Rozšírime funkciu na nepárnu na $(-1, 1)$.

9.5 Nájdite kosínusový trigonometrický rad pre funkciu $f(x) = \sin 2x$ pre $x \in (0, 2\pi)$
Návod: Rozšírime funkciu na párnu na $[-2\pi, 2\pi]$.

9.6 Pomocou Parsevalovej rovnosti spočítajte

$$a) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2},$$

$$b) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$$

9.7 Dokážte, že systém $(1, x, \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \frac{1}{2}(5x^3 - 3x))$ je ortogonálny systém v priestore $L^2(-1, 1)$ integrovateľných funkcií s druhou mocninou na intervale $-1, 1)$ s integrálnou normou $\|.\|_2$.

9.8 Metódou rozvoja do Fourierovho radu nájdite riešenie diferenciálnych rovníc

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & -u"(x) = -1, \;\; x \in (0,1) \;\; u(0) = u(1) = 0 \\ \text{b)} & -u"(x) + u(x) = 1 \;\; x \in (0,1) \;\; u(0) = u(1) = 0 \end{array}$$

9.9 Zostrojte 2π periodické predlženie funkcie f, $f(x) = x + 1, x \in (-\pi, \pi)$. K akej funkcii konverguje Fourierov rad a na akých intervaloch? Kedy je konvergencia rovnomerná?

Návod: Keďže funkcia f je po častiach spojitá na $\mathbb{R}$ a 2π periodická, tak potom na intervale $(-\pi, \pi)$ konverguje Fourierov rad k f, v $k\pi$ $k \in Z$ konverguje ku $\frac{f(x)^+ + f(x)^-}{2} = \frac{\pi+1-\pi+1}{2} = 1$. Na každom kompaktnom podintervale $[c, d] \subset (-\pi, \pi)$ je dokonca konvergencia rovnomerná.

9.10 Funkciu

$$f(x) = |x|$$

rozviňte do Fourierovho radu na intervale $(-1, 1)$. Vypočítajte súčet radu

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \ldots.$$

Na základe poznania tohto súčtu nájdite aj súčet:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots.$$

9.11 Funkciu

$$f(x) = \max(x, 0)$$

rozviňte do Fourierovho radu na intervale $(-1, 1)$.

9.12 Funkciu

$$f(x) = \sin(x/2)$$

rozviňte do Fourierovho radu na intervale $(-\pi, \pi)$.

9.13 Funkciu

$$f(x) = x\sin(x)$$

rozviňte do Fourierovho radu na intervale $(0, \pi)$.

9.14 Funkciu

$$\begin{array}{ll} f(x) = x^2 & \text{pre } x > 0 \\ f(x) = 0 & \text{pre } x < 0 \end{array}$$

rozviňte do Fourierovho radu na intervale $(-1, 1)$.

9.15 Funkciu

$$f(x) = \max(x^3, 0)$$

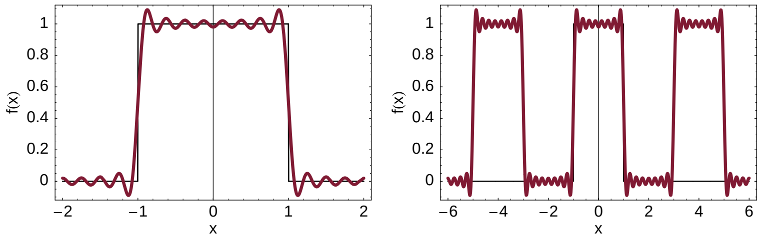
rozviňte do Fourierovho radu na intervale $(-1, 1)$.

Grafické zobrazenia funkcií a ich Fourierovych radov

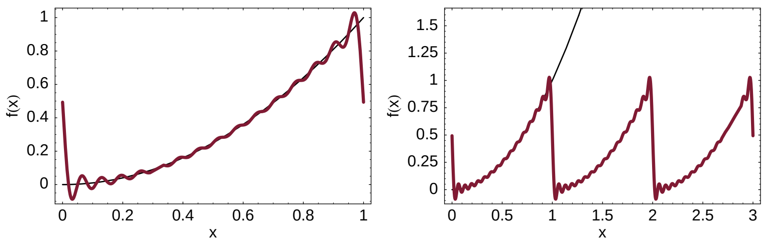
- Grafické zobrazenie funkcie

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

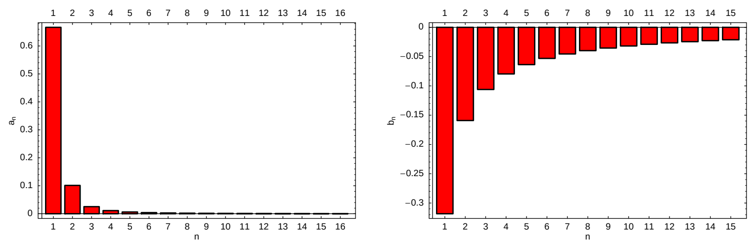
definovanej na intervale $[a, b] = [-2, 2]$ a jej čiastočný Fourierov rad $S_n(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi n x}{T} + b_n \sin \frac{2\pi n x}{T}$ pre $n = 15$. Periodické predĺženie tejto funkcie s periódou $T = b - a$



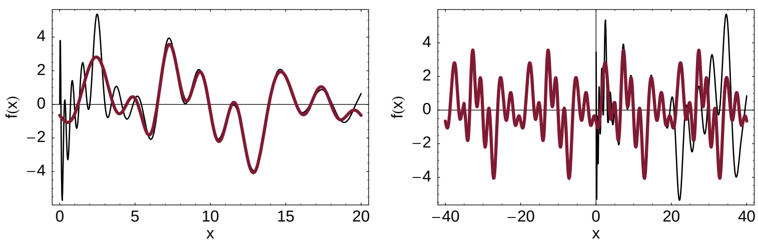
- Grafické zobrazenie funkcie $f(x) = x^2$ definovanej na intervale $[a, b] = [0, 1]$ a jej čiastočný Fourierov rad $S_n(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi n x}{T} + b_n \sin \frac{2\pi n x}{T}$ pre $n = 15$. Periodické predĺženie tejto funkcie s periódou $T = b - a$



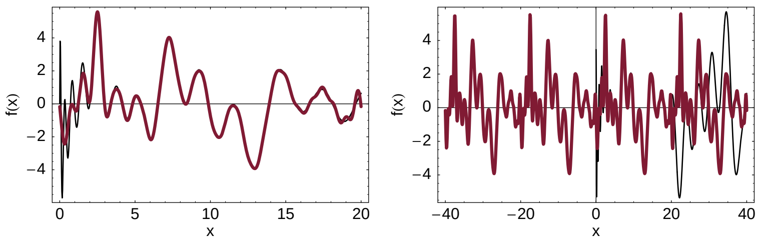
- Spektrum $a_n, n = 0, \ldots,$ a $b_n, n = 1, \ldots,$ funkcie definovanej v predošlom príklade.



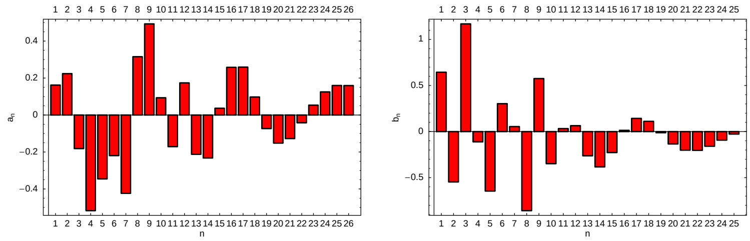
- Grafické zobrazenie funkcie $f(x) = \sum_{n=1}^{20} [\cos(n^2) \sin(n\sqrt{x});$ definovanej na intervale $[a, b] = [0, 20]$ a jej čiastočný Fourierov rad $S_n(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi n x}{T} + b_n \sin \frac{2\pi n x}{T}$ pre $n = 10$. Periodické predĺženie tejto funkcie s periódou $T = b - a$



- Tá istá funkcia ako v predošlom príklade. Čiastočný Fourierov rad $S_n(f)(x)$ pre $n = 25$.



- Spektrum $a_n, n = 0, \ldots,$ a $b_n, n = 1, \ldots,$ funkcie definovanej v predošlom príklade.



Kapitola 10

Riemannov integrál funkcie viac premenných

Definícia Riemannovho integrálu na ohraničnej oblasti

Vlastnosti integrálu funkcii viac premenných

Fubiniho veta

Dôležité pojmy a tvrdenia

Pod čapatcom (ospravedlňujeme sa za nespisovný novotvar) rozumieme konečné zjednotenie kvádrov typu $\Pi_{i=1}^{n} I_i$, kde I_i je interval (otvorený alebo uzavretý).

Nech Ω je oblasť v $\mathbb{R}^n$ (t.j. otvorená a súvislá množina.) Oblasť Ω nazveme merateľnou ak existuje rastúca postupnosť uzavretých "čapatcov" K_n a klesajúca postupnosť otvorených čapatcov G_n takých, že platí $K_n \subset \Omega \subset G_n$ a

$$\lim_{n\to\infty} |G_n - K_n| = 0$$

kde $G_n - K_n$ čapatec predstavujúci rozdiel čapatcov G_n a K_n.

Potom ich spoločnú limitu

$$\lim_{n\to\infty} |K_n| = \lim_{n\to\infty} |G_n| =: |\Omega|$$

nazývame mierou $|\Omega|$ množiny Ω a samotnú množinu Ω merateľnou množinou.

V nasledujúcom sa bude používať aj výraz elementárna oblasť typu $[x, y]$, v 3-rozmernom prípade typu $[x, y, z]$. Elementárne oblasti sú merateľné.

Definícia elementárnej oblasti typu $[x, y]$. Nech $a, b \in \mathbb{R}$. Nech φ, ψ sú spojité funkcie definované na $[a, b]$. Potom pod elementárnou oblasťou typu $[x, y]$ rozumieme množinu

$$\{[x, y], a \le x \le b \wedge \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}.$$

Pod elementárnou oblasťou typu $[y, x]$ rozumiem

$$\{(x, y), c \le y \le d \wedge \varphi(y) \le x \le \psi(y)\},$$

ak (φ, ψ) sú definované na $[c, d]$. Analogicky elementárnu oblasť môžeme definovať aj v $\mathbb{R}^3$:

Pod elementárnou oblasťou typu $[x, y, z]$ rozumieme množinu

$$[x, y, z], a \le x \le b \wedge \varphi_1(x) \le y \le \psi_1(x) \wedge \varphi_2(x, y) \le z \le \psi_2(x, y)\}.$$

Pritom φ_1, ψ_1 sú spojité funkcie definované na $[a, b]$, φ_2, ψ_2 sú spojité funkcie definované na elementárnej oblasti typu $[x, y]$ určenej intervalom $[a, b]$ a funkciami φ_1, ψ_1.

Analogicky sa dá definovať pomocou zámeny premenných aj elementárna oblasť typu $[y, x, z]$, $[z, y, x]$ atď a dokonca aj elementárna oblasť v $\mathbb{R}^n$, kde n je ľubovoľné prirodzené číslo.

Definícia Riemannovho integrálu. Funkciu $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ nazývame Riemannovsky integrovateľná, pokiaľ existuje

$$\lim_{|D|\mapsto 0} S(f, D) = I_f =: \int_\Omega f(x)\, dx,$$

kde $|D|$ je norma delenia

$$|D| = \max_{\Delta S_i \in D} \mathrm{diam}(\Delta S_i)$$

a $S(f, D)$ je ľubovoľný integrálny súčet prislúchajúci funkcii f a deleniu D. $\mathrm{diam}(A) = \max_{x,y\in A} \|x - y\|$ je priemer množiny A.

Pod delením množiny Ω rozumieme ľubovolný konečný systém merateľných množín $\{\Delta S_i, i = 1, ..., m\}$ spĺňajúci

1. $\bigcup_{i=1}^{m} \Delta S_i = \Omega$

2. $\text{int}(\Delta S_i \cap \Delta S_j) = 0$ pre $i \neq j$

Integrálny súčet $S(f, D)$ náležiaci deleniu D je potom definovaný ako

$$S(f, D) = \sum_{i=1}^{m} f(P_i)|\Delta S_i|$$

kde $P_i \in \Delta S_i$ a $|\Delta S_i|$ je miera ΔS_i.

Veta. Nech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je ohraničená merateľná oblasť v $\mathbb{R}^n$. Nech f je spojitá funkcia na $\overline{\Omega}$. Potom f je R-integrovateľná na Ω, t. j. existuje Riemannov integrál $\int_\Omega f(x)dx$.

Elementárne vlastnosti integrálu

1. Ak $f(x) \equiv 1$ tak $\int_\Omega 1\ dx = |\Omega|$, kde $|\Omega|$ je n-rozmerná miera Ω. Keď nie je explicitne povedané $|\Omega|$, nazývame objem oblasti (volume), v $\mathbb{R}^2$- plocha.

2. Ak f je integrovateľná na $\overline{\Omega}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, tak

$$\int_\Omega \alpha f(x)dx = \alpha \int_\Omega f(x)dx$$

3. Ak funkcie f, g sú integrovateľné na $\overline{\Omega}$, tak

$$\int_\Omega f(x) + g(x)\ dx = \int_\Omega f(x)dx + \int_\Omega g(x)dx$$

4. Ak $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\text{int}(\Omega_1 \cap \Omega_2) = \emptyset$,tak

$$\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f(x)\, dx = \int_{\Omega_1} f(x)\ dx + \int_{\Omega_2} f(x)dx.$$

Definícia dvojnásobného integrálu Nech $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je elementárna oblasť typu $[x, y]$, t. j.

$$\Omega = \{(x, y), a \leq x \leq y \wedge \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}.$$

Pod dvojnásobným integrálom rozumieme

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi(x_1)}^{\psi(x_1)} f(x_1, x_2)\, dx_2 \right)\, dx_1.$$

Veta o strednej hodnote. Nech $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je súvislá ohraničená elementárna oblasť, f spojitá na $\overline{\Omega}$, tak existuje bod $P \in \Omega$:

$$f(P) = \frac{1}{|\Omega|} \int_a^b \left(\int_{\varphi(x_1)}^{\psi(x_1)} f(x_1, x_2)\, dx_2 \right)\, dx_1.$$

Fubiniho veta. Ak Ω je elementárna oblasť a f je spojitá na $\overline{\Omega}$, tak platí

$$\int_{\Omega} f(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x_1)}^{\psi(x_1)} f(x_1,x_2)\,dx_2 \right) dx_1.$$

(dvojnásobný integrál)

Rovnako platí Fubiniho veta aj na elementárnej oblasti typu $[x_1, x_2, ...x_n]$ v $\mathbb{R}^n$. A dá sa rozšíriť aj na konečné zjednotenie elementárnych oblastí a dokonca aj na nekonečné.

Riešené príklady

Príklad 1. Zapíšte množinu

$$D = \{[x,y], x^2+y^2 \le 25; 3x \le 4|y|\}$$

ako zjednotenie konečného počtu elementárnych oblastí typu $[x,y]$ aj typu $[y,x]$ a zameňte poradie integrovania v dvojnom integráli

$$\int_D f(x,y)dxdy,$$

pomocou Fubiniho vety v prípade, že f je spojitá na D.

Riešenie Najprv uvažujme oblasť typu $[x,y]$. Podoblasť D_1 je daná ako

$$D_1 = \{(x,y) : x \in \langle -5, 0\rangle,\ y \in \langle -\sqrt{25-x^2}, 0\rangle\} \bigcup \{(x,y) : x \in \langle 0,4\rangle,\ y \in \langle -\sqrt{25-x^2}, \frac{-3x}{4}\rangle\}$$

Druhá podoblasť D_2 je daná

$$D_2 = \{(x,y) :\ x \in \langle -5,0\rangle,\ y \in \langle 0, \sqrt{25-x^2}\rangle\} \bigcup \{(x,y) :\ x \in \langle 0,4\rangle,\ y \in \langle \frac{3x}{4}, \sqrt{25-x^2}\rangle.$$

Teda $D = D_1 \bigcup D_2$ a

$$\iint_D f(x,y)dx\ \ dy = \int_{-5}^{0}\int_{-\sqrt{25-x^2}}^{0} f(x,y)dy\ \ dx + \int_0^4 \int_{-\sqrt{25-x^2}}^{\frac{-3x}{4}} f(x,y)dydx$$

$$+ \int_{-5}^{0}\int_{0}^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)dy\ \ dx + \int_0^4 \int_{\frac{3x}{4}}^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)dydx$$

Teraz oblasť D napíšeme ako zjednotenie oblastí typu $[y,x]$.

$$D = D_1^{\maltese} \bigcup D_2^{\maltese} \bigcup D_3^{\maltese}.$$

Pre podoblasť $D_1^{\maltese}$ máme vyjadrenie

$$D_1^{\maltese} = \{(x,y) : y \in \langle 0,3\rangle,\ x \in \langle -\sqrt{25-y^2}, \frac{4y}{3}\rangle\} \bigcup \{(x,y) : y \in \langle -3,0\rangle,\ x \in \langle -\sqrt{25-y^2}, \frac{-4y}{3}\rangle\}.$$

Podoblasť $D_2^{\maltese}$ je daná ako

$$D_2^{\maltese} = \{(x,y) :\ y \in \langle 3,5\rangle,\ x \in \langle -\sqrt{25-y^2}, \sqrt{25-y^2}\rangle\}$$

Napokon podblasť $D_3^{\maltese}$ je daná ako

$$D_3^{\maltese} = \{(x,y): \ y \in \langle -5,-3\rangle, \ x \in \langle -\sqrt{25-y^2}, \sqrt{25-y^2}\rangle\}.$$

Podľa Fubiniho vety dostávame vyjadrenie pre integrál:

$$\iint_D f(x,y)dx \ dy = \int_0^3 \int_{-\sqrt{25-y^2}}^{\frac{4y}{3}} f(x,y)dx \ dy + \int_{-3}^0 \int_{-\sqrt{25-y^2}}^{\frac{-4y}{3}} f(x,y)dxdy$$

$$+\int_3^5 \int_{-\sqrt{25-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}} f(x,y)dx \ dy + \int_{-5}^{-3} \int_{-\sqrt{25-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}} f(x,y)dx \ dy$$

Príklad 2. Utvorte horný integrálny súčet S_n a dolný integrálny súčet s_n funkcie $f(x,y) = x+y^2$ na $x \in \langle 1,2\rangle, y \in \langle 3,5\rangle$ pre jej delenie na obdĺžniky priamkami

$$x = 1+\frac{i}{n}, i = 0,1,2,...n, \qquad y = 3+\frac{2j}{n}, j = 0,1,...n$$

Potom vypočítajte aj $\lim_{n\to\infty} S_n$, a $\lim_{n\to\infty} s_n$.

Riešenie. Vieme, že platia identity:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Vypočítajme, akú plochu má i,j-tý obdĺžnik. Zrejme každý obdĺžnik zvoleného delenia má plochu

$$S_{i,j} = \frac{1}{n}.\frac{2}{n} = \frac{2}{n^2}.$$

Označme $M_{i,j} = \max f(x,y)$ na i,j-tom obdĺžniku, $m_{i,j} = \min f(x,y)$ na i,j-tom obdĺžniku. Zrejme $M_{i,j} = (1+\frac{i+1}{n}) + (3+\frac{2(j+1)}{n})^2$ a $m_{i,j} = (1+\frac{i}{n}) + (3+\frac{2j}{n})^2$. Teraz vypočítame

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} M_{i,j}.S_{i,j} = \frac{2}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} M_{i,j} = \frac{2}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}(1+\frac{i+1}{n}) + (3+\frac{2(j+1)}{n})^2 \\
&= \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(1+\frac{i+1}{n}) + \frac{2}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(9+\frac{12(j+1)}{n} + \frac{4(j+1)^2}{n^2}) \\
&= \frac{2}{n}(n+\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)) + \frac{2}{n}.9n + \frac{2}{n}.\frac{12}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(j+1) + \frac{8}{n^3}\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)^2 \\
&= 2+\frac{n(n+1)}{n^2} + 18 + \frac{24}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{8}{n^3}.\frac{n.(n+1).(2n+1)}{6} \\
&= 20+13.\frac{n+1}{n} + \frac{4}{3}\frac{(n+1).(2n+1)}{n^2}.
\end{aligned}$$

Preto $S_n = 20+13.\frac{n+1}{n} + \frac{4}{3}\frac{(n+1).(2n+1)}{n^2}$ a

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 20+13+\frac{8}{3} = 35+\frac{2}{3}.$$

Ďalej

$$\begin{aligned}
s_n &= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} m_{i,j}.S_{i,j} = \frac{2}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} m_{i,j} \\
&= \frac{2}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}(1+\frac{i}{n}) + (3+\frac{2j}{n})^2 \\
&= \frac{2}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}(n+i) + \frac{2}{n^2}\sum_{j=0}^{n-1}(9n + \frac{12jn}{n} + \frac{4j^2n}{n^2}) \\
&= 2 + \frac{2}{n^2}.\frac{n(n-1)}{2} + 18 + \frac{2}{n^2}.12\sum_{j=0}^{n-1} j + \frac{8}{n^3}\sum_{j=0}^{n-1} j^2 \\
&= 20 + \frac{n(n-1)}{n^2} + 12.\frac{n(n-1)}{n^2} + \frac{8}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}
\end{aligned}$$

a preto $\lim_{n\to\infty} s_n = 21 + 12 + \frac{16}{6} = 35 + \frac{2}{3}$.Teda

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = 35 + \frac{2}{3}.$$

Príklad 3. Vypočítajte integrál

$$\iint_\Omega \frac{dx\,dy}{\sqrt{2a-x}}, a > 0,$$

ak oblasť Ω je ohraničená kratšou časťou kružnice k so stredom $[a,a]$ a polomerom a, ktorá sa dotýka osí súradníc x, y, a týmito osami.

Riešenie. Napíšeme elementárnu oblasť Ω typu $[x,y] : x \in \langle 0, a\rangle$. Zrejme kratšia časť kružnice je opísaná $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$. Teda elementárna oblasť má tvar

$$x \in \langle 0, a\rangle, y = a - \sqrt{a^2 - (x-a)^2}.$$

Počítajme teda integrál

$$\begin{aligned}
\iint_\Omega \frac{dx\,dy}{\sqrt{2a-x}} &= \int_0^a dx \int_0^{a-\sqrt{a^2-(x-a)^2}} \frac{dy}{\sqrt{2a-x}} \\
&= \int_0^a \frac{adx}{\sqrt{2a-x}} - \int_0^a \frac{\sqrt{a^2-(a^2-2ax+x^2)}\,dx}{\sqrt{2a-x}} \\
&= 2a[\sqrt{2a-x}]_a^0 - \int_0^a \sqrt{x}\,dx = 2\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}} - 2a^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}[x^{\frac{3}{2}}]_0^a = 2a^{\frac{3}{2}}(\sqrt{2} - \frac{4}{3}).
\end{aligned}$$

Príklady na samostatné riešenie

10.1 Vypočítajte obsah oblasti ohraničenej grafmi funkcií

$$xy = 4, y = x, x = 4.$$

10.2 Vypočítajte obsah oblasti ohraničenej krivkami

a) $y = x^2, y = \frac{1}{4}x^2, y = 4.$
b) $y = x^2, y = \frac{1}{4}x^2, \; x \in [-2, 2].$

10.3 Vypočítajte obsah oblasti ohraničenej krivkami

$$x = \frac{y^2}{a}, \; x = \frac{y^2}{16a}, \; x = \sqrt[3]{16ay^2}, \; x = \sqrt[3]{ay^2}$$

10.4 Vypočítajte obsah plochy oblasti ohraničenej krivkou, ktorá má rovnicu

$$y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

Nakreslite si najprv graf.

Elementárne oblasti, prepis elementárnej oblasti v $\mathbb{R}^2$*, Fubiniho veta*

10.5 Prepíšte elementárnu oblasť typu $[x, y]$ na typ $[y, x]$, kde elementárna oblasť je daná vzťahmi:

$$0 \leq x \leq 1,$$
$$x - 1 \leq y \leq 1 - x.$$

10.6 Nakreslite elementárnu oblasť typu $\lfloor x, y \rceil$ a pretransformujte na typ $\lfloor y, x \rceil$, keď je daná vzťahmi

$$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}, \; x^2 \leq y \leq 4 - x^2$$

10.7 Zapíšte vnútro elipsy

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

ako elementárnu oblasť.

10.8 V úlohách napíšte Fubiniho vetu pre dvojný integrál

$$\iint_A f(x, y) dxdy,$$

ak je daná množina A.

a) Množina A je ohraničená hyperbolou $y^2 - x^2 = 1$ a kružnicou $x^2 + y^2 = 9$, pričom obsahuje bod $(0, 0)$.
b) Množina A je ohraničená krivkami $x = 1, \; x = 2, \; y = 2x, \; y = x.$
c) Oblasť A je ohraničená grafmi kriviek $y = x^2, y = x.$
d) Oblasť A je ohraničená grafmi kriviek $y = \sqrt{r^2 - (x - r)^2}, \; y = x.$
e) Oblasť A je ohraničená grafmi kriviek $y = 2x, y = -x + 6, x = 0.$

10.9 Vypočítajte hodnotu dvojného integrálu $\iint_A f(x, y) dxdy$ ak
a) Oblasť A je daná $x^2 + y^2 \leq \mathbb{R}^2$, a $f(x, y) = y^2 x^3.$
b) Oblasť A je ohraničená krivkami $y = x^2, \; y = \sqrt{x}$, a $f(x, y) = x^2 + y.$
c) Oblasť A je určená 3 krivkami $x = 2, y = x, y = \frac{1}{x}$, a $f(x, y) = \frac{x^2}{y^2}.$

10.10 Vypočítajte objem jednotkovej gule. (Návod: Počítajme objem osminy gule len v jednom oktante, teda A je daná vzťahmi

$$x \in [0, 1], y \in [0, \sqrt{1 - x^2}], z \in [0, \sqrt{1 - x^2 - y^2}],$$

čo vedie k integrálu objem celej gule

$$V = 8\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}dy.)$$

10.11 Vypočítajte daný integrál

a)

$$\iint_A \sqrt{xy-y^2}dxdy,$$

ak množina A je daná nerovnosťami $0 \le y \le b,\ \ y \le x \le 10y$.

b)

$$\iint_A (|x|+|y|)dxdy,$$

ak množina A je daná nerovnosťou $|x|+|y| \le 1$

c)

$$\iint_A xydxdy,$$

ak množina A je ohraničená parabolou $y^2 = 2x$ a priamkou $x = 2$.

d)

$$\iint_A \frac{y}{x^2+y^2}dxdy,$$

ak množina A je ohraničená parabolou $y^2 = 2x$ a priamkami $y = x$ a $x = 1$, $y \ge 0$.

e)

$$\iint_A e^{\frac{x}{y}}dxdy$$

ak množina A je ohraničená parabolou $y^2 = x$ a priamkami $x = 0,\ \ y = 1,\ \ y = 2$.

f)

$$\iint_A \frac{x^2}{y^2}dxdy,$$

ak množina A je ohraničená čiarami $y = \frac{1}{x},\ \ y = 4x,\ \ x = 3$.

g)

$$\iint_A |xy|dxdy,$$

kde množina A je kruh so stredom $S = (0,0)$ a polomerom a..

h)

$$\iint_A (12-3x-4y)dxdy,$$

ak množina A je elementárna oblasť daná nerovnosťou $x^2+4y^2 \le 4$.

i)

$$\iint_A \frac{x}{3}dxdy,$$

ak A je ohraničená krivkou $x = 2+\sin y$ a priamkami $x = 0,\ \ y = 0,\ \ y = 2\pi$.

j)

$$\iint_A |xy|dxdy,$$

ak je A daná nerovnosťou $1 \le x^2 \le y^2 \le 4$.

k) $\iint_A \operatorname{sign}(x^2 - y^2 + 2)dxdy$, kde množina A je kruh daný nerovnosťou $x^2 + y^2 \leq 4$.

10.12 Vypočítajte objem telesa ohraničeného plochami

$$z = x^2 + y^2, \quad x + y = 4, x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

10.13 Vypočítajte objem telesa ohraničeného plochami

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad x^2 + z^2 = a^2.$$

10.14 Vypočítajte objem telesa ohraničeného plochami

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, \quad x^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

10.15 Vypočítajte tieto trojné integrály prevodom na trojnásobné:

a)
$$\int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c x + y + zdz$$

b)
$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{x+y+z+1}}.$$

c)
$$\int_0^a xdx \int_0^x ydy \int_0^y zdz.$$

d)
$$\int_0^{e-1} dx \int_0^{e-x-1} dy \int_e^{x+y+e} \frac{\ln(z-x-y)}{(x-e)(x+y-e)}dz.$$

10.16 Znázornite množiny bodov v $\mathbb{R}^3$ dané nerovnosťami, zistite, či sú elementárne oblasti a opíšte ich ako elementárne oblasti.

a) $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0, \quad z \leq 1 - x - 2y.$
b) $0 \leq x \leq y \leq z \leq 1.$
c) $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4.$
d) $x^2 + y^2 \leq z \leq 1.$
e) $|x| + |y| + |z| \leq 1.$
f) $1 \leq |x| + |y| + |z| \leq 2.$
g) $x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2, x^2 + y^2 \leq rx, \quad r > 0.$

10.17 Zameňte poradie integrovania v trojnásobných integráloch

a) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x,y,z)dz.$

b) $\displaystyle\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x,y,z)dz.$

10.18 V integráli

$$\int_0^{\frac{1}{a}} dx \int_0^{1-ax} dy \int_0^{ax+y} f(x,y,z)dz$$

zameňte poradie integrovania na

a) $[dzdydx]$, b) $[dxdzdy]$.

10.19 V integráli

$$\int_0^1 dy \int_0^1 dx \int_0^{2x^2+3y^2} f(x,y,z)dz$$

zamente poradie integrovania na
a) $[dydzdx]$, b) $[dxdzdy]$.

10.20 Vypočítajte dané integrály, ak množina je daná nerovnosťami.

a) $\iiint_A xz\, dx\, dy\, dz,$

$A: 0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le \sqrt{1-x^2},\ \ \sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{2-x^2-y^2}$

b) $\iiint_A \frac{1}{z+x+y+1} dx\, dy\, dz,\ \ A: x \ge 0,\ \ y \ge 0,\ \ z \ge 0,\ \ x+y+z \le 1.$

c) $\iiint_A z\, dx\, dy\, dz,\ \ A: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1,\ \ z \ge 0$

d) $\iiint_A \frac{xy}{\sqrt{z}}\, dx\, dy\, dz,\ \ A: x > 0,\ \ y > 0,\ \ 0 < z < c,\ \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < \frac{z^2}{c^2}$

10.21 Vypočítajte integrály, ak je množina ohraničená plochami.

a) $\iiint_A y\cos(z+x)\, dx\, dy\, dz,\ \ A: y = \sqrt{x},\ \ y = 0,\ \ z = 0,\ \ x+z = \frac{\pi}{2}.$

b) $\iiint_A xyz\, dx\, dy\, dz,\ \ A: x^2+y^2+z^2 = 1,\ \ x = 0,\ \ y = 0,\ \ z = 0.$

c) $\iiint_A z\, dx\, dy\, dz,\ \ A: z^2 = h^2\frac{x^2+y^2}{\mathbb{R}^2}, z = h.$

d) $\iiiint_A u^4 e^{y^2}\, dx\, dy\, dz\, du,$

kde množina A je daná nerovnosťami $0 \le z \le u,\ \ 0 \le u \le 1,\ \ 0 \le y \le zu,\ \ 0 \le x \le yzu.$

10.22 Vypočítajte dané integrály

$$\iint \ldots \int_A dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

ak množina A je daná nerovnosťami $x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0, x_1 + x_2 + \ldots x_n \le 1.$

10.23 Vypočítajte dané integrály

$$\iint \ldots \int_A \frac{1}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\ldots x_n^2}} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

ak množina A je daná nerovnosťou $x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2 \le 1.$

Kapitola 11

Metóda substitúcie

Metóda substitúcie pre integrovanie funkcii viac premenných

Lineárne a nelineárne transformácie súradníc

Jakobián transformácie a geometrický význam determinantu Jacobiho matice

Veta o substitúcii pre integrály viac premenných

Polárne a sférické súradnice

Metódy výpočtu viacrozmerných integrálov pomocou transformácie premenných

Dôležité pojmy a tvrdenia

Transformácie viac rozmerných integrálov

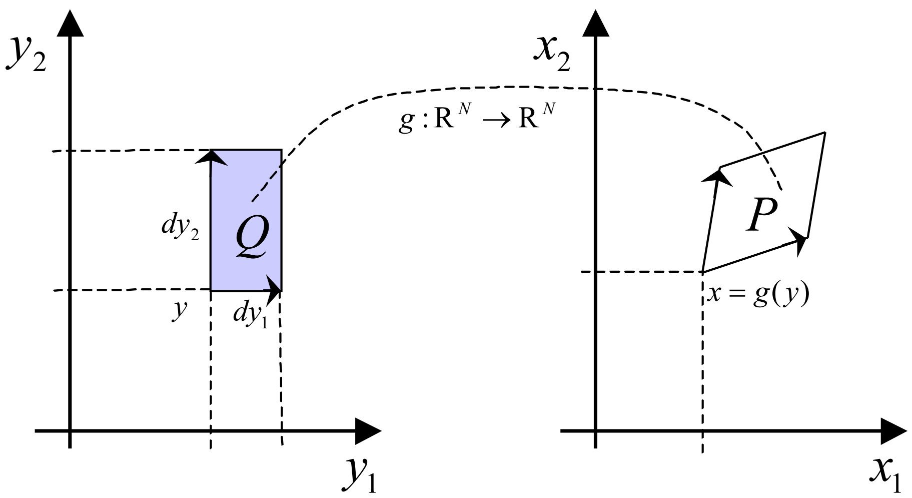
Definícia regulárneho zobrazenia Nech $g : \Omega' \subset \mathbb{R}^n \to \Omega \subset \mathbb{R}^n$ je prosté C^1 zobrazenie, pričom $g(\Omega') = \Omega$. Označme Jacobiho maticu

$$g'(y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y_2} \dots & \frac{\partial g_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial y_1} & \frac{\partial g_n}{\partial y_2} \dots & \frac{\partial g_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

Nech $I_g(y)$ je determinant z horeuvedenej Jacobiho matice, t. j. Jakobián. Ak $I_g(y) \neq 0$, hovoríme, že zobrazenie g je regulárne. Poznamenajme, že v takom prípade je $n \times n$ matica $g'(y)$ invertovateľná (je to teda bijekcia).

Tvrdenie Nech f je Riemannovsky integrovateľná funkcia na oblasti Ω a nech $g : \Omega' \subset \mathbb{R}^n \to \Omega \subset \mathbb{R}^n$ je C^1 difeomorfizmus (t.j. g je regulárne). Potom platí vzťah substitúcie $x = g(y) \in \Omega$ pre integrál vypočítaný pomocou novej premennej $y \in \Omega'$

$$\int_\Omega f(x)\, dx = \int_{\Omega'} f(g(y))|I_g(y)|\, dy.$$



Obr. 11.1: Geometrický význam afínnej transformácie $g(y) = Ay + b$. Pomer plochý zobrazeného kosodĺžnika $P = g(Q)$ a zobrazovaného obdĺžnika je daný práve determinantom matice A, t.j. $\frac{|P|}{|Q|} = |A|$. Z toho môžeme dedukovať vzťah medzi elementárnou plochou $dx_1 dx_2 = |A| dy_1 dy_2$. Idea dôkazu vety o substitúcii pre všeobecný prípad difeomorfizmu $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ potom plynie z aproximácie zobrazenia g v bode $\bar{y}$ pomocou Taylorovho rozvoja $g(y) = Ay + b + o(\|y - \bar{y}\|)$, kde $A = g'(\bar{y})$.

Príklady regulárnych zobrazení

a) Transformácia pomocou pomocou polárnych súradníc na

$$G : \rho > 0, \;\; 0 < \varphi < 2\pi$$

daná: $x = \rho\cos\varphi,\ \ y = \rho\sin\varphi.$

b) Transformácia pomocou pomocou cylindrických súradníc na

$$G : \rho > 0,\ \ 0 < \varphi < 2\pi,\ \ -\infty < u < \infty$$

daná: $x = \rho\cos\varphi,\ \ y = \rho\sin\varphi,\ \ z = u.$

c) Transformácia pomocou pomocou sférických súradníc na

$$G : \rho > 0,\ \ 0 < \varphi < 2\pi,\ \ -\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}$$

daná $x = \rho\cos\varphi\cos\psi,\ \ y = \rho\sin\varphi\cos\psi,\ \ z = \rho\sin\psi.$

d) Transformácia pomocou pomocou eliptických súradníc na

$$G : \rho > 0,\ \ 0 < \varphi < 2\pi$$

daná: $x = a\rho\cos\varphi,\ \ y = b\rho\sin\varphi.$

e) Transformácia pomocou pomocou eliptických súradníc na

$$G : \rho > 0,\ \ 0 < \varphi < 2\pi,\ \ -\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}$$

daná $x = a\rho\cos\varphi\cos\psi,\ \ y = b\rho\sin\varphi\cos\psi,\ \ z = c\rho\sin\psi.$

Riešené príklady

Príklad 1. Vypočítajte objem telesa ohraničeného plochami:

$$x^2 + y^2 - az = 0,$$

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2),$$

$$z = 0,$$

kde $a > 0$ je kladný parameter.

Riešenie. Zrejme prvá plocha je plochou rotačného paraboloidu a druhá plocha je valcová plocha s podstavou lemniskáty v rovine xy. Teleso teda bude mať jednu podstavu vnútro lemniskáty a bude pokračovať v smere osi z, až kým sa nepretne s parabolickou plochou. Keďže z rovníc vidno, že teleso je symetrické vzhľadom na všetky kvadranty roviny xy, v prvom kvadrante v cylindrických súradniciach jeho zápis vyzerá nasledovne:

$$\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{4}\rangle, \qquad r \in \langle 0, a\sqrt{\cos 2\varphi}\rangle, \qquad z \in \langle 0, \frac{r^2}{a}\rangle.$$

Teda

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} r\frac{r^2}{a}dr\ \ d\varphi = \frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^4\cos^2 2\varphi d\varphi = \frac{a^3\pi}{8}.$$

Príklad 2. Vypočítajte objem telesa ohraničeného plochou :

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

a spĺňajúceho nerovnicu $x^2 + y^2 \geq a|x|, a > 0.$

Riešenie. Zrejme z daných rovníc vyplýva, že teleso je symetrické vzhľadom na všetky oktanty a preto stačí počítať objem v prvom oktante a výsledok násobiť ôsmimi. V prvom oktante, po prechode do cylindrických súradníc, sa dá teleso vyjadriť ako elementárna oblasť typu $[\varphi, r, z]$, kde

$$\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle, \quad r \in \langle a\cos\varphi, a \rangle, \quad z \in \langle 0, \sqrt{a^2 - r^2} \rangle.$$

Teda

$$V = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{a\cos\varphi}^{a} r\sqrt{a^2 - r^2}\, dr = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi [-\frac{1}{3}(a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}]_{a\cos\varphi}^{a}$$

$$= \frac{8}{3}a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\, d\varphi = \frac{16a^3}{9}.$$

Príklad 3. Vypočítajte objem telesa ohraničeného plochami

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = b^2,$$

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

$$0 < a < b, z \geq 0,$$

kde $a > 0$ je parameter.

Riešenie. Použijeme sférické súradnice. Potom dané teleso môžeme zapísať pomocou

$$r \in \langle a, b \rangle, \varphi \in (0, 2\pi), \psi \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}).$$

Objem daného telesa teda môžeme vypočítať ako

$$V = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_a^b r^2 \cos\psi \;\, d\varphi\, d\psi\, dr = \pi(\frac{b^3 - a^3}{3})(2 - \sqrt{2}).$$

Príklady na samostatné riešenie

11.1 Uvažujme transformácie dané rovnicami na danej množine, vypočítajte príslušné Jakobiány a zistite, že zobrazenie je na danej množine prosté a regulárne.

a) Transformácia pomocou pomocou polárnych súradníc na

$$G : \rho > 0, \;\; 0 < \varphi < 2\pi$$

daná: $x = \rho\cos\varphi, \;\; y = \rho\sin\varphi$.

b) Transformácia pomocou pomocou cylindrických súradníc na

$$G : \rho > 0, \;\; 0 < \varphi < 2\pi, \;\; -\infty < u < \infty$$

daná: $x = \rho\cos\varphi, \;\; y = \rho\sin\varphi, \;\; z = u$.

c) Transformácia pomocou pomocou sférických súradníc na

$$G : \rho > 0, \;\; 0 < \varphi < 2\pi, \;\; -\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}$$

daná $x = \rho\cos\varphi\cos\psi,\ \ y = \rho\sin\varphi\cos\psi,\ \ z = \rho\sin\psi.$

11.2 Zistite, ktoré zobrazenie je regulárne a prosté na množine A a vypočítajte Jakobián týchto zobrazení.

a) $x = uv,\ \ y = u + v, A = (-1, 1) \times (-1, 1).$

b) $x = u^2 + v^2, y = \frac{u}{v}, A = (0, \infty) \times (0, \infty).$

c) $x = u + \frac{1}{v},\ \ y = v, A = (0, \infty) \times (0, 1).$

11.3 Vypočítajte dané dvojné integrály pomocou vhodnej transformácie

a)

$$\iint_A (1 - 2x - 3y)dx\, dy,$$

kde A je kruh $x^2 + y^2 \leq 2.$

b)

$$\iint_A \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}dx\, dy,$$

kde A je kruh $x^2 + y^2 \leq ax.$

c)

$$\iint_A \frac{\ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}dx\, dy,$$

kde A je medzikružie $1 \leq x^2 + y^2 \leq e.$

d)

$$\int_A \int \operatorname{arctan}\frac{y}{x}dx\, dy,$$

kde A je časť medzikružia $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9,\ \ y \leq x\sqrt{3},\ \ y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}.$

e) Pomocou transformácie $x = a\rho\cos\varphi,\ \ y = b\rho\sin\varphi$ vypočítajte

$$\iint_A \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}dx\, dy,$$

kde A je vnútro elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1.$

11.4 Pomocou transformácie $x = 2\rho\cos^2\varphi,\ \ y = 3\rho\sin^2\varphi,\ \ \varphi \in (0, \frac{\pi}{2}),\ \ \rho \in (0, \cos\varphi\sin\varphi)$ vypočítajte

$$\iint_D \sqrt{xy}dx\, dy$$

kde D je oblasť ohraničená krivkou $(\frac{x}{2} + \frac{y}{3})^4 = \frac{xy}{6}.$

11.5 Vypočítajte dané trojné integrály na množine A pomocou cylindrických súradníc.

a)

$$\iiint_A dx\, dy\, dz,$$

kde $A : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, 0 \leq z \leq 6.$

b)

$$\iiint_A z\sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy\, dz,$$

kde A je oblasť ohraničená rovinami $y = 0,\ \ z = 0,\ \ z = a, (a > 0)$ a valcovou plochou $x^2 + y^2 = 2x.$

c)

$$\iiint_A (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz,$$

kde A je množina ohraničená paraboloidom

$$2z = x^2 + y^2$$

a rovinou $z = 2$.

11.6 Vypočítajte dané trojné integrály na množine A pomocou sférických súradníc.

a)

$$\iiint_A \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz,$$

kde A je časť gule $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \;\; x \geq 0, \;\; y \geq 0, \;\; z \geq 0$.

b)

$$\iiint_A (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz,$$

kde $A : z \geq 0, \;\; 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$.

c)

$$\iiint_A z\, dx\, dy\, dz,$$

kde A je množina ohraničená kužeľovou plochou $z^2 = h^2 \frac{(x^2+y^2)}{\mathbb{R}^2}$ a rovinou $z = h$. (Návod: Po transformácii na sférické súradnice integrujeme cez elementárnu oblasť $\varphi \in [0, 2\pi], \;\; \psi \in [\arctan \frac{h}{R} \frac{\pi}{2}], \;\; \rho \in [0, \frac{h}{\sin \psi}]$.)

11.7 Pomocou transformácie

$$x = a\rho \cos\varphi \cos\psi, \;\; y = b\rho \sin\varphi \cos\psi, \;\; z = c\rho \sin\psi$$

vypočítajte

$$\iiint_A \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) dx\, dy\, dz,$$

$(a > 0, \;\; b > 0, \;\; c > 0)$, pričom A je vnútro elipsoidu $(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}) \leq 1$.

11.8 Nájdite obsah časti roviny ohraničenej danými krivkami transformáciou pomocou polárnych súradníc.

a) $(x - a)^2 + y^2 = a^2, \;\; x^2 + (y - a)^2 = a^2$.

b) Kružnicou $x^2 + y^2 = 5$, jej dotyčnicou v bode $A = (1, 2)$ a priamkou $y = 0$.

c) Lemniskátou $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy$.

d) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}, \;\; x + y = a$.

e) $x^3 + y^3 = axy$, $x > 0, y > 0$

f) $x^4 + y^4 = 2a^2 xy$.

g) $(x^2 + y^2)^3 = a^2(x^4 + y^4)$.

11.9 Pomocou zovšeobecnených polárnych súradníc $x = a\rho \cos^p \varphi, \;\; y = b\rho \sin^p \varphi$, kde a, b, p sú vhodne zvolené konštanty, vypočítajte obsah časti roviny ohraničenej danými krivkami.

a) $(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2})^2 = \frac{xy}{c^2}$.

b) $\sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \sqrt[4]{\frac{y}{b}} = 1, \;\; x = 0, \;\; y = 0$. (Návod: $x = a\rho \cos^8 \varphi, \;\; y = b\rho \sin^8 \varphi$, a Jakobián $J = ab8\rho \sin^7 \varphi \cos^7 \varphi$.

11.10 Nájdite objemy valcovitých telies ohraničených danými plochami pomocou transformácie do polárnych súradníc.

a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

b) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \;\; x^2 + y^2 = ax$ (tzv. Vivianiho úloha).

11.11 Vypočítajte pomocou trojného integrálu objemy telies ohraničených danými plochami.

a) Guľovými plochami $x^2 + y^2 + z^2 = 16, \;\; x^2 + y^2 + z^2 - 8z = 0$.

b) Objem časti gule $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\mathbb{R}^2$, ktorá leží vnútri valcovej plochy

$$x^2 + y^2 = \mathbb{R}^2.$$

c) Nájdite objem časti gule $x^2+y^2+z^2 \leq \mathbb{R}^2$, ktorá je ohraničená rovinami $y = x \tan\beta, \;\; y = x \tan\alpha, 0 < \alpha < \beta, \;\; x \geq 0$.

d) $x^2 + y^2 + z^2 = 2az, \;\; x^2 + y^2 = z^2$.

e) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2)$.

f) $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 3xyz$.

g) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z \exp^{\frac{-(x^2+y^2)}{x^2+y^2+z^2}}$.

11.12 V akom pomere je objem prieniku gule

$$(x^2 + y^2 + z^2) \leq 4az$$

a telesa ohraničeného paraboloidom

$$x^2 + y^2 + az = 4a^2$$

ku zvyšnej časti gule?

Návod: Použite cylindrické súradnice na elementárnej oblasti

$$0 \leq r \leq a\sqrt{3}, \;\; 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \;\; 2a - \sqrt{4a^2 - r^2} \leq u \leq \frac{4a^2 - r^2}{a}.$$

11.13 Vypočítajte hmotnosť m kolmého rotačného valca V s polomerom podstavy R a výškou H, ak hustota v jeho ľubovoľnom bode $M = (x, y, z)$ sa rovná druhej mocnine vzdialenosti tohto bodu od stredu dolnej podstavy valca.

Návod: Valec umiestnite do počiatku a teda os valca je vlastne os z,

$$\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \qquad m = \iiint_A \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

11.14 Vypočítajte súradnice ťažiska homogénneho telesa (t.j. $\rho(x, y, z) = 1$) ohraničeného plochami: $x^2 + y^2 = 2z, \;\; x + y = z$.

Návod: Súradnice ťažiska majú tvar

$$x_T = \frac{S_{yz}}{m}, y_T = \frac{S_{xz}}{m}, z_T = \frac{S_{yx}}{m},$$

kde m je hmotnosť, S_{xy} je statický moment telesa vzhľadom k rovine xy,

$$S_{xy} = \iiint_A z\rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

kde ρ je hustota. Analogicky S_{yz}, S_{xz}. Keďže prienik našej parabolickej plochy a roviny vyhovuje $(x-1)^2+(y-1)^2=2$, použijeme transformáciu pomocou cylindrických súradníc

$$x = 1+\rho\cos\varphi, \quad y = 1+\rho\sin\varphi, \quad z = u$$

kde $0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le r \le \sqrt{2}, \quad 1+\frac{r^2}{2}+r(\cos\varphi+\sin\varphi) \le u \le 2+r(\cos\varphi+\sin\varphi)$. Po výpočtoch dostaneme $T=(1,1,\frac{5}{3})$.

11.15 Určte ťažisko homogénneho kužeľa $\rho(x,y,z)=1$, ktorého vrchol leží v počiatku súradnicovej sústavy a os leží v osi z.

11.16 Nájdite hmotnosť m a určte súradnice ťažiska gule danej vzťahom $x^2+y^2+z^2 \le 2az$, ak hustota v bodoch gule je rozložená tak, že je nepriamo úmerná vzdialenosti týchto bodov od počiatku sústavy súradníc.

Návod:

$$\rho(x,y,z) = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad m = \iiint_{2az \ge x^2+y^2+z^2} \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Použite cylindrické súradnice $\varphi \in (0,2\pi), \quad z \in [0,2a], \quad r \in [0,\sqrt{2az-z^2}]$.

11.17 Vypočítajte hodnotu dvojného integrálu:

$$\int_\Omega \frac{1}{\sqrt{a^2-x_1^2-x_2^2}}\,dx$$

kde $\Omega = \{(x_1,x_2), x_1^2+x_2^2 \le a^2\}$.

11.18 Vypočítajte hodnotu trojného integrálu:

$$\iiint_\Omega \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dxdydz,$$

kde

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \le 1\right\}.$$

11.19 Nájdite objem „kvapky", ktorá vznikne rotáciou polovice Bernoulliho lemniskáty okolo osi symetrie z, t. j. objem určený plochou

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = 4a^2(z^2-(x^2+y^2)),$$

$z \ge 0$, kde $a > 0$ je daná konštanta. Návod: použite sférické súradnice. Pozrite aj zobrazenie a parametrické vyjadrenie Bernoulliho lemniskáty z Kapitoly 7.

11.20 Nájdite ťažisko hornej polovice elipsy s poloosami $a, b > 0$.

11.21 Vypočítajte hodnotu dvojného integrálu: $\iint_\Omega \left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^2 dxdy$, kde

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \le 1\right\}.$$

11.22 Vypočítajte hodnotu dvojného integrálu: $\iint_\Omega \|x-a\|^2\,dx$, kde Ω je kruh so stredom v počiatku a polomerom 1 a bod $a=(2,0)$, $\|.\|$ je Euklidovská vzdialenosť v rovine.

11.23 Vypočítajte hodnotu trojného integrálu: $\iiint_\Omega \|x-a\|^3\,dx$, kde Ω je guľa so stredom v počiatku a polomerom 1 a bod $a=(2,0,0)$. $\|.\|$ je Euklidovská vzdialenosť v $\mathbb{R}^3$.

11.24 Vypočítajte hodnotu trojného integrálu: $\iiint_\Omega \|x-a\|^2\,dx$, kde $\Omega\in\mathbb{R}^3$ je guľa so stredom v počiatku a polomerom 1 a bod $a=(2,0,0)$. $\|.\|$ je Euklidovská vzdialenosť v $\mathbb{R}^3$.

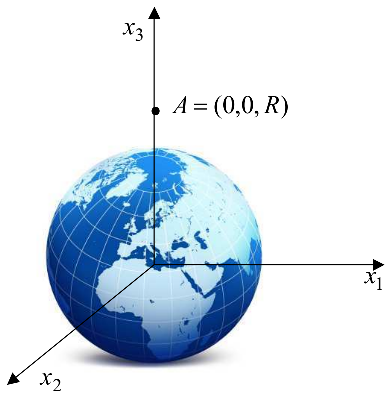
Niektoré aplikácie získaných poznatkov

Príklad výpočtu gravitačného potenciálu

Vo fyzikálnom probléme určenia gravitačného potenciálu hrá dôležitú úlohu výpočet trojného integrálu

$$\iiint_\Omega \frac{1}{\|x-y\|}\,dx,$$

kde $\Omega = B(0, R_z)$ je guľa so stredom v počiatku a polomerom R_z a bod $y \in \mathbb{R}^3$ je bod, v ktorom sa snažíme zistiť veľkosť gravitačného potenciálu, ktorý vzniká pôsobením hmoty v guli so stredom v počiatku a polomerom R_z. Veľkosť potenciálu hľadáme v bode $A = (0, 0, R)$. Vzhľadom na symetriu problému stačí skutočne uvažovať iba body na vertikálnej osi x_3.



Obr. 11.2: Znázornenie Zeme ako gule $B(0, R_z)$ s polomerom R_z.

Podľa Newtonovho gravitačného zákona je gravitačné pole (jeho potenciál) v bode $y \in \mathbb{R}^3$, ktoré je generované hmotou dm v bode $x \in \mathbb{R}^3$ vyjadrené ako

$$\mathcal{V}(y, x, dm) = \frac{\kappa dm}{\|x-y\|}.$$

Potom celkový gravitačný potenciál v bode $y \in \mathbb{R}^3$ generovaný celou hmotou z gule $B(0, R_z)$ je rovný integrálu cez všetky elementárne hmoty dm nachádzajúce sa v guli $B(0, R_z)$, t.j.

$$V(y) = \iiint_{B(0,R_z)} \frac{\kappa dm}{\|x-y\|},$$

kde $\kappa > 0$ je gravitačná konštanta. V prípade, že uvažujeme, že hustota $\varrho > 0$ Zeme je konštantná (čo nie je v realite), tak $dm = \varrho dx_1 dx_2 dx_3$, kde $dx_1 dx_2 dx_3$ reprezentuje objem elementárneho kvádra okolo bodu x so stranami dx_1, dx_2, dx_3. Potom

$$V(y) = \kappa\varrho \iiint_{B(0,R_z)} \frac{1}{\|x-y\|} dx_1 dx_2 dx_3.$$

Na výpočet tohto integrálu môžeme použiť sférické súradnice $x_1 = r\cos\phi\cos\psi, x_1 = r\cos\phi\sin\psi, x_3 = r\sin\phi$ s príslušným Jakobiánom transformácie $J = r^2\cos\phi$. Keďže $y = (0, 0, R)$, tak

$$\|x-y\|^2 = (x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2 = r^2 - 2Rr\sin\phi + R^2.$$

To znamená, že

$$V(y)=\kappa\varrho\int_0^{R_z}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\frac{r^2\cos\phi\ d\psi d\phi dr}{\sqrt{r^2-2Rr\sin\phi+R^2}}=2\pi\kappa\varrho\int_0^{R_z}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{r^2\cos\phi}{\sqrt{r^2-2Rr\sin\phi+R^2}}d\phi dr$$

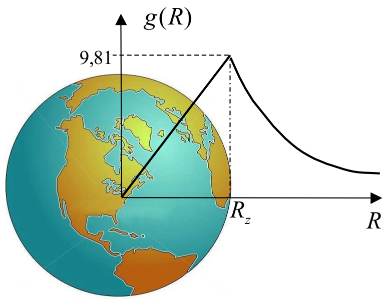
Pomocný integrál $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{r^2\cos\phi\ d\phi}{\sqrt{r^2-2Rr\sin\phi+R^2}}$ vypočítame jednoducho pomocou substitúcie $u=r^2-2Rr\sin\phi+R^2$. Potom $r^2\cos\phi\, d\phi=-\frac{r}{2R}du$ a teda

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{r^2\cos\phi}{\sqrt{r^2-2Rr\sin\phi+R^2}}d\phi=\frac{r}{2R}\int_{(R-r)^2}^{(R+r)^2}u^{-\frac{1}{2}}du=\frac{r}{R}\left(R+r-|R-r|\right)$$

V prípade, že $R>R_z$, tak $R+r-|R-r|=R+r-(R-r)=2r$. Potom

$$V(y)=2\pi\kappa\varrho\int_0^{R_z}\frac{2r^2}{R}dr=\kappa\frac{1}{R}\varrho\frac{4\pi}{3}R_z^3=\frac{\kappa M}{\|y\|}$$

lebo $R=\|y\|$, kde $M=\varrho\frac{4\pi}{3}R_z^3$ je celková hmotnosť gule $B(0,R_z)$ s hustotou ϱ. To zodpovedá klasickej stredoškolskej fyzikálnej poučke, podľa ktorej gravitačné pôsobenie gule počítané mimo nej je rovné gravitačnému pôsobeniu hmotného bodu s celou jej hmotou sústredenou do jej stredu 0.



Obr. 11.3: Znázornenie priebehu gravitačného zrýchlenia vo vnútri Zeme a mimo nej.

V prípade, že $R<R_z$, musíme postupovať obozretnejšie a rozdeliť integračnú oblasť na dve časti $0<r<R$ a $R<r<R_z$. Potom $R+r-|R-r|=R+r-(R-r)=2r$ pre $0<r<R$, kým $R+r-|R-r|=R+r+(R-r)=2R$ pre $R<r<R_z$. To znamená, že

$$\begin{aligned}V(y)&=2\pi\kappa\varrho\int_0^{R_z}\frac{r}{R}\left(R+r-|R-r|\right)dr=2\pi\kappa\varrho\left\{\int_0^{R}\frac{2r^2}{R}dr+\int_R^{R_z}2rdr\right\}\\&=2\pi\kappa\varrho\left\{\frac{2}{3}R^2+(R_z^2-R^2)\right\}=2\pi\kappa\varrho(R_z^2-\frac{1}{3}R^2)\end{aligned}$$

Na koniec tohto výpočtu pripomeňme, že gravitačná sila tejto gule pôsobiaca na bod $A=(0,0,R)$ s hmotnosťou m je rovná gradientu gravitačného potenciálu a teda samotné gravitačné zrýchlenie g v bode $A=(0,0,R)$ vytvorené pôsobením gule $B(0,R_z)$ je potom rovné

$$g=g(R)=\begin{cases}\frac{\kappa M}{R_z^3}R & \text{pre } R<R_z,\\ \kappa M\frac{1}{R^2} & \text{pre } R>R_z.\end{cases}$$

Kapitola 12

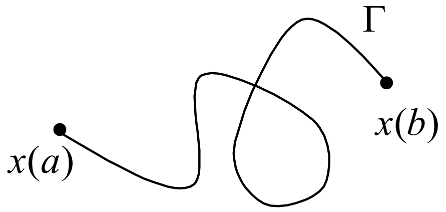
Krivkové a plošné integrály

Integrovanie funkcii definovaných na krivkách

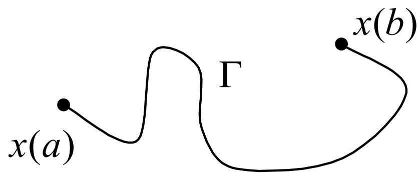
Krivkový integrál prvého a druhého druhu

Integrovanie funkcii definovaných na plochách

Vzťah krivkových, plošných a objemových integrálov

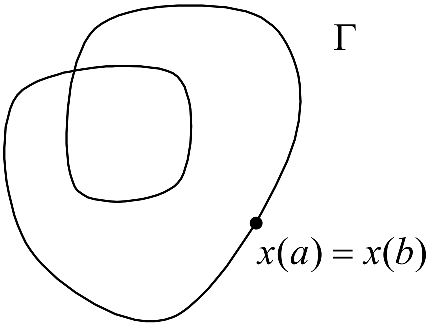


Krivka v rovine

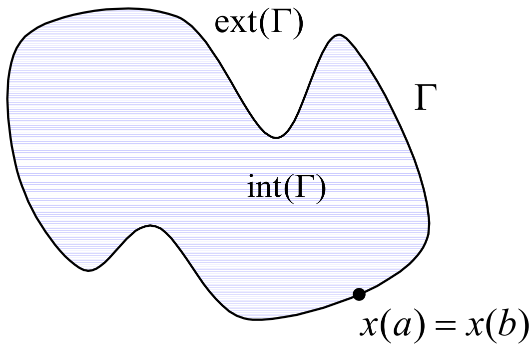


Jednoduchá krivka v rovine

$$\Gamma = \{x(t), t \in I = [a,b]\}$$



Uzavretá krivka v rovine



Jordanova krivka

Dôležité pojmy a tvrdenia

Definícia krivky Nech $x_1, x_2 : I \to \mathbb{R}$ sú spojité funkcie, kde $I \subset \mathbb{R}$ je interval. Krivkou v rovine $\mathbb{R}^2$ nazývame množinu $\Gamma = \{(x_1(t), x_2(t)), t \in I\}$.

Jednoduchá krivka. Krivka $\Gamma = \{x(t), t \in I\} \subset \mathbb{R}^2$ sa nazýva jednoduchá (nepresekajúca sa), ak platí, že zobrazenie $x : I \mapsto \mathbb{R}^2$ je prosté.

Uzavretá krivka. Krivka $\Gamma = \{x(t), t \in I\}$, kde $I = [a, b]$, sa nazýva uzavretá, ak platí $x(a) = x(b)$.

Dĺžka krivky. Nech je daná jednoduchá krivka $\Gamma = \{x(t), t \in I = [a, b]\} \subset \mathbb{R}^2$. Nech $a = t_1 < t_2 < ...t_n = b$ a $x(t_i) = X_i$. Teda $X_i \in \Gamma$. Označme normu delenia $\nu(D) = \max_{i=1,2,...n} dS_i$, kde $dS_i = |X_{i+1} - X_i|$. Ak existuje

$$\lim_{\nu(D)\mapsto 0} \sum_{i=0}^{n} dS_i,$$

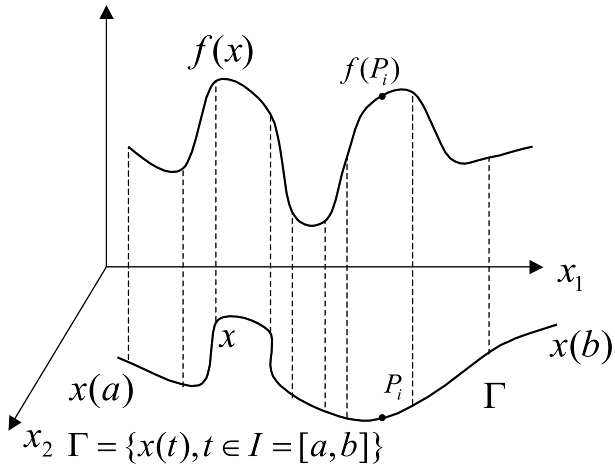
nazývame ju dĺžkou krivky Γ.

Tvrdenie. Nech je daná krivka $\Gamma = \{x(t), t \in I\} \subset \mathbb{R}^2$. a nech sú $x_i = x_i(t)$ sú C^1 diferencovateľné funkcie také, že existuje integrál

$$\int_I \sqrt{|x_1'(t)|^2 + |x_2'(t)|^2}\, dt < \infty.$$

Potom krivka Γ má konečnú dĺžku $|\Gamma|$ (t.j. je rektifikovateľná)

$$|\Gamma| = \int_I \sqrt{|x_1'(t)|^2 + |x_2'(t)|^2}\, dt < \infty.$$



Obr. 12.1: Znázornenie geometrickej interpretácie krivkového integrálu 1. druhu ako plochy pod grafom funkcie $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ definovanej na krivke Γ.

Jordanova krivka. Jednoduchá uzavretá rektifikovateľná krivka sa nazýva Jordanova krivka. Poznamenajme, že sa dá ukázať (Riemann), že každá Jordanova krivka rozsekne rovinu $\mathbb{R}^2$ na dve súvislé množiny int(Γ) - vnútro krivky a ext(Γ) - vonkajšok krivky.

Definícia krivkového integrálu 1.druhu. Nech je daná rektifikovateľná krivka $\Gamma = \{x(t), t \in I\} \subset R^2$. Nech $f : \Gamma \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$. Hovoríme, že funkcia f má krivkový integrál 1. druhu

$$\oint_\Gamma f \, ds$$

pokiaľ exituje jediná limita integrálnych súčtov $\lim_{\nu(D)\mapsto 0} \sum_{i=0}^{n} f(P_i) dS_i$, kde $P_i \in (X_i, X_{i+1})$.

Metóda výpočtu krivkového integrálu 1. druhu Nech je daná rektifikovateľná krivka $\Gamma = \{x(t), t \in I\} \subset \mathbb{R}^2$. Nech $f : \Gamma \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$. Ak existuje Riemannov integrál

$$\int_I f(x_1(t), x_2(t)) \sqrt{|x_1'(t)|^2 + |x_2'(t)|^2} \, dt,$$

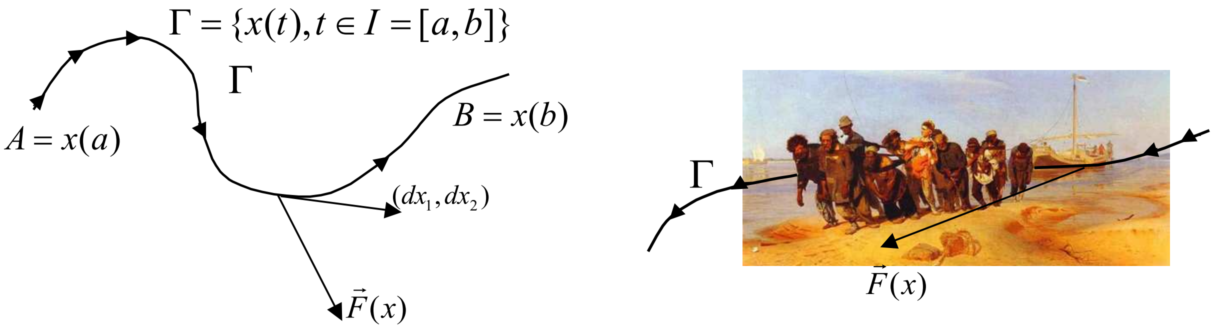
potom krivkový integrál 1. druhu sa dá vypočítať ako

$$\oint_\Gamma f \, ds = \int_I f(x_1(t), x_2(t)) \sqrt{|x_1'(t)|^2 + |x_2'(t)|^2} \, dt.$$

Definícia krivkového integrálu 2. druhu. Nech je daná hladká rektifikovateľná krivka $\Gamma = \{x(t), t \in I = [a,b]\} \subset \mathbb{R}^2$. Nech $F : M \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je spojitá vektorová funkcia. Potom hodnota Riemannovho integrálu $\int_a^b [F_1(x_1(t), x_2(t))x_1'(t) + F_2(x_1(t), x_2(t))x_2'(t)] \, dt$ nezávisí na parametrizácii $x : I \to \mathbb{R}^2$ krivky Γ orientovanej v smere z bodu $A = x(a)$ do bodu $B = x(b)$ a vyjadruje hodnotu tzv. krivkového integrálu 2. druhu

$$\oint_\Gamma F_1(x_1, x_2) \, dx_1 + F_2(x_1, x_2) \, dx_2 = \int_a^b [F_1(x_1(t), x_2(t))x_1'(t) + F_2(x_1(t), x_2(t))x_2'(t)] \, dt$$

vektorovej funkcie $F = (F_1, F_2)$ po orientovanej krivke Γ.



Obr. 12.2: Znázornenie geometrickej interpretácie krivkového integrálu 2. druhu ako práce vykonanej silou $\vec{F} = (F_1, F_2)$ po orientovanej krivke Γ. Vpravo ilustrácia Repinovho obrazu Burlaci na Volge a ich práce pri ťahaní lode po krivke Volgy.

Poznámka. Krivkový integrálu 2. druhu fyzikálne vyjadruje veľkosť práce, ktorú vykoná sila $\vec{F} = (F_1, F_2) : M \subset R^2 \to R^2$ po orientovanej krivke $\Gamma = \{x(t), t \in I = [a, b]\} \subset \mathbb{R}^2$ z bodu $A = x(a)$ do bodu $B = x(b)$. Skutočne, aktívnu prácu pri pohybe po krivke Γ tvorí iba zložka sily $\vec{F} = (F_1, F_2)$ v smere pohybu, ktorý dotykovým vektorom ku krivke Γ v danom bode krivky. Tento dotykový jednotkový vektor $\vec{T}$ môžeme vyjadriť pomocou prírastkov dx_1, dx_2 ako $\vec{T} = \frac{1}{ds}(dx_1, dx_2)$, kde $ds\sqrt{(dx_1)^2 + (dx_2)^2}$. Potom celková práca $\mathcal{A}$ je daná ako súčet pôsobenia súčinu projektovaného vektora sily $\vec{F}$ do smeru pohybu $\vec{T}$ a elementárnej dĺžky ds, t.j. $\mathcal{A} = \oint_\Gamma (\vec{F}, \vec{T}) ds$. Po úprave dostávame

$$\mathcal{A} = \oint_\Gamma (\vec{F}, \vec{T}) ds = \oint_\Gamma F_1 dx_1 + F_2 dx_2.$$

Vlastnosti integrálov 2. druhu.

1. Zmena orientácie krivky zmení znamienko integrálu 2. druhu, t.j.

$$\oint_{\widehat{AB}} P dx_1 + Q dx_2 = -\oint_{\widehat{BA}} P dx_1 + Q dx_2.$$

   Na rozdiel od integrálu 1.druhu, kde sa znamienko nezmení.

2. Aditivita:

$$\oint_{\widehat{AB}} P dx_1 + Q dx_2 + \oint_{\widehat{BC}} P dx_1 + Q dx_2 = \oint_{\widehat{AC}} P dx_1 + Q dx_2$$

   kde $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{AC}$ sú orientované krivky z bodu A do bodu B, resp. z B do C a $\widehat{AC} = \widehat{AB} + \widehat{BC}$

3. Linearita: Ak $F = c_1 F_1 + c_2 F_2$, kde c_1, c_2 sú konštanty a F_1, F_2 sú spojité vektorové funkcie, tak

$$\oint_\Gamma c_1 F_1 + c_2 F_2 d\overrightarrow{s} = c_1 \oint_\Gamma F_1 d\overrightarrow{s} + c_2 \oint_\Gamma F_2 d\overrightarrow{s}.$$

Vzťah krivkového a dvojného integrálu

Pripomeňme, že pre oblasť $\Omega = (a, b)$ (interval) platí známy vzorec pre integráciu po častiach (*per partes*). Pre ľubovoľné funkcie $u, v \in C^1([a, b])$ teda platí $\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + u(x)v(x)|_a^b$. Uvedomme si najprv, že hraničný člen $u(x)v(x)|_a^b$ sa dá chápať ako integrál $\int_{\partial\Omega} uv\vec{n}\,\mathrm{d}S$ cez hranicu $\partial\Omega = \{a, b\}$ intervalu (a, b), pričom $\vec{n}(a) = -1, \vec{n}(b) = 1$ je vektor vonkajšej normály k hranici intervalu. Dá sa ukázať viacrozmerná analógia vzorca *per partes* platná pre oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Nazýva sa Greenov vzorec

Tvrdenie (Greenov vzorec). Nech $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ je oblasť s hladkou hranicou, ktorou je Jordanova krivka $\Gamma = \partial\Omega$. Nech $u, v : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ sú C^1 hladké funkcie v $\bar{\Omega}$. Potom

$$\int_\Omega u(x)\,\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u(x)\,v(x)\,n_i(x)\,\mathrm{d}S\,,$$

kde $\vec{n} = (n_1, ..., n_m)$ je jednotkový vektor vonkajšej normály k $\partial\Omega$ v bode $x \in \partial\Omega$.

Použitím Greenovho vzorca na funkciu u a $\partial v/\partial x_i$ dostaneme

$$\int_\Omega u\,\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,v\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u\,\frac{\partial v}{\partial x_i}\,n_i\,\mathrm{d}S$$

a teda

$$\int_\Omega u\sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u\sum_{i=1}^m \frac{\partial v}{\partial x_i}\,n_i\,\mathrm{d}S\,.$$

Nakoniec, ak si uvedomíme, že derivácia funkcie v v smere $\vec{n}$ sa dá vyjadriť ako $\frac{dv}{d\vec{n}} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial v}{\partial x_i} n_i$ a $\nabla u.\nabla v = \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}$, dostávame sumovaním od $i = 1$ do m:

1. Greenova formula

$$\int_\Omega u\Delta v\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \nabla u\nabla v\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u\,\frac{dv}{d\vec{n}}\,\mathrm{d}S \tag{12.1}$$

a podobne vzťah

$$\int_\Omega v\Delta u\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \nabla u\nabla v\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} v\,\frac{du}{d\vec{n}}\,\mathrm{d}S\,,$$

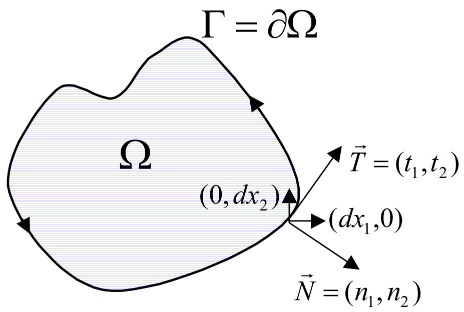
ktorý bol z predošlého získaný zámenou *mutatis mutandis* úloh funkcií u a v. Odčítaním vyššie uvedených vzťahov dostaneme:

2. Greenova formula

$$\int_\Omega u\Delta v - v\Delta u\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u\,\frac{dv}{d\vec{n}} - v\,\frac{du}{d\vec{n}}\,\mathrm{d}S\,. \tag{12.2}$$

Poznamenajme, že 1. Greenova formula platí, ak funkcia u je C^1 hladká v Ω a spojitá na $\bar{\Omega}$ a funkcia v je C^2 hladká v Ω a jej prvé derivácie sú spojité na $\bar{\Omega}$. Na záver uveďme ešte jeden dôsledok Greenovho vzorca. Nech vektorová funkcia $\vec{w} : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ je C^1 diferencovateľná v Ω a spojitá v $\bar{\Omega}$. Pripomeňme, že operátor divergencie je definovaný ako $\operatorname{div}\vec{w} = \sum_{i=1}^m \partial w_i/\partial x_i$. Použijúc Greenov vzorec pre funkciu $u = 1$ (t. j. $\partial u/\partial x_i = 0$) a $v = w_i$, následne sčítaním rovností pre $i = 1, ..., n$ dostaneme tzv. *Gauss-Ostrogradského vetu resp. Stokesovu formulu*:

$$\int_\Omega \operatorname{div}\vec{w}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \sum_{i=1}^m 1.\frac{\partial w_i}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega}\sum_{i=1}^m w_i n_i\,\mathrm{d}S = \int_{\partial\Omega}(\vec{w}.\vec{n})\,\mathrm{d}S\,. \tag{12.3}$$



Obr. 12.3: Znázornenie geometrického vzťahu medzi diferenciálmi dx_1, dx_2 v smeroch osí x_1, x_2, dotykového $\vec{T}$ a normálového vektora $\vec{N}$ ku kladne orientovanej (proti smeru hodinových ručičiek) krivke Γ.

Nakoniec uvedieme vzťah medzi krivkovým integrálom 2. druhu a dvojným integrálom. Na Obr. 12.3 je znázornený geometrickej vzťahu medzi diferenciálmi dx_1, dx_2 v smeroch osí x_1, x_2 a príslušným dotykovým $\vec{T}$ a normálovým vektorom $\vec{N}$ ku krivke Γ. Keďže krivka je orientovaná proti smeru hodinových ručičiek, tak potom pre dotykový a normálový vektor platí

$$\vec{T} = (t_1, t_2) = \frac{1}{ds}(dx_1, dx_2), \quad \vec{N} = (n_1, n_2) = (t_2, -t_1), \qquad \text{kde } ds = \sqrt{(dx_1)^2 + (dx_2)^2}.$$

Preto diferenciály dx_1 a dx_2 v smery osí x_1, x_2 môžu byť vyjadrené prostredníctvom dĺžkového diferenciálu ds nasledovne: $dx_1 = -n_2 ds, dx_2 = n_1 ds$. Tým pádom $F_1 dx_1 + F_2 dx_2 = (F_2 n_1 - F_1 n_2) ds$. Na základe Stokesovej formuly potom dostávame

$$\oint_\Gamma F_1\, dx_1 + F_2\, dx_2 = \iint_\Omega \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2$$

Riešené príklady

Príklad 1. Vypočítajte krivkový integrál 1. druhu

$$\int_C x^2 \ ds,$$

kde C je kružnica daná ako prienik dvoch plôch daných rovnicami: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ a $x + y + z = 0$, kde $a > 0$ je parameter.

Riešenie. Zrejme C je kružnica o polomere a. Zo symetrie vyplýva, že

$$\int_C x^2\, ds = \int_C y^2\, ds = \int_C z^2\, ds.$$

Teda

$$\int_C x^2\, ds = \frac{1}{3}\int_C x^2 + y^2 + z^2\, ds, = \frac{1}{3}\int_C a^2\, ds = \frac{2}{3}\pi a^3.$$

Príklad 2. Zistite dĺžku priestorovej krivky danej rovnicami

$$(x-y)^2 = a(x+y),\ x^2 - y^2 = \frac{9}{8}z^2$$

z bodu $O(0,0,0)$ do bodu $A(x_0, y_0, z_0)$.

Riešenie. Zvoľme $t = x - y$. Teda $x + y = t + 2y$. Potom má rovnica krivky parametrické vyjadrenie

$$x = \frac{t^2+at}{2a}, y = \frac{t^2-at}{2a}, z^2 = \frac{8}{9}.\frac{4at^3}{4a^2} = \frac{8t^3}{9a}.$$

To znamená, že

$$x' = \frac{2t+a}{2a}, y' = \frac{2t-a}{2a}, (z')^2 = \frac{2t}{a},$$

odkiaľ dostávame

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = \frac{4t^2+a^2+4at}{2a^2} = \frac{(2t+a)^2}{2a^2}.$$

Dĺžka krivky C je preto

$$\int_0^{x_0-y_0} \frac{2t+a}{\sqrt{2}a}\ dt = \frac{1}{\sqrt{2}a}[t^2+at]_0^{x_0-y_0} = \frac{1}{\sqrt{2}a}((x_0-y_0)^2 + a(x_0-y_0)).$$

Príklad 3.O koľko sa líšia krivkové integrály I_1 a I_2 2.druhu, kde C_1 je úsečka, spájajúca body $A(1,1), B(2,6)$ a C_2 je časť paraboly, idúcej cez body $A(1,1), B(2,6), O(0,0)$, pričom začiatok krivky je $A(1,1)$ a koniec $B(2,6)$? Integrály sú definované ako:

$$I_1 = \int_{C_1} (x+y)^2\,dx - (x-y)^2\ dy, \qquad I_2 = \int_{C_2} (x+y)^2\,dx - (x-y)^2\ dy.$$

Riešenie. Označme $V(x,y) = \frac{x^3}{3} + x^2y + y^2x - \frac{y^3}{3}$. Zrejme

$$I_1 = \int_{C_1} (x+y)^2\,dx - (x-y)^2\ dy = \int_{C_1} \frac{\partial V}{\partial x}\ dx + \frac{\partial V}{\partial y}\ dy - 2\int_{C_1} x^2\ dy.$$

Podobne

$$I_2 = \int_{C_2} (x+y)^2\,dx - (x-y)^2\ dy = \int_{C_2} \frac{\partial V}{\partial x}\ dx + \frac{\partial V}{\partial y}\ dy - 2\int_{C_2} x^2\ dy.$$

Zrejme

$$\int_{C_2} \frac{\partial V}{\partial x}\ dx + \frac{\partial V}{\partial y}\ dy = \int_{C_1} \frac{\partial V}{\partial x}\ dx + \frac{\partial V}{\partial y}\ dy.$$

Teda

$$I_2 - I_1 = 2\int_{C_1} x^2\ dy - 2\int_{C_2} x^2 dy.$$

Tieto integrály už vypočítame z definície. Krivku C_1 vyjadríme parametricky $x = 1 + t, y = 1 + 5t$. Potom $dx = 1, dy = 5$ a

$$2\int_{C_1} x^2\ dy = 2\int_0^1 (1+t)^2 5\ dt = \frac{70}{3}.$$

Krivka C_2 je parabola prechádzajúca cez body $A(1,1), B(2,6), O(0,0)$. Táto parabola má rovnicu $y = 2x^2 - x$ a teda jej parametrické vyjadrenie je $x = t, y = 2t^2 - t$ a $dx = 1, dy = 4t - 1$ pre $t \in \langle 1, 2\rangle$. Potom

$$2\int_{C_1} x^2 \ dy = 2\int_1^2 t^2(4t-1)\,dt = 2\int_1^2 4t^3 - t^2 \ dt = \frac{76}{3}$$

a teda

$$I_2 - I_1 = 2\int_{C_1} x^2 \ dy - 2\int_{C_2} x^2 \ dy = -2.$$

Príklad 4. Vypočítajte krivkový integrál 2. druhu

$$\int_C [\varphi(y)e^x - my] \ dx + [\varphi\prime(y)e^x - m] \ dy,$$

kde $\varphi(y), \varphi\prime(y)$ sú spojité funkcie a C je ľubovoľná hladká krivka, spájajúca body $B(x_2, y_2)$ a $A(x_1, y_1)$, ktorá spolu s orientovanou úsečkou AB tvorí po častiach hladkú jednoduchú uzavretú krivku súhlasne orientovanú, ohraničujúcu oblasť s veľkosťou plochy S.

Riešenie. Označme oblasť, ktorú ohraničuje C spolu s úsečkou AB, ako K a $C_1 = C \bigcup AB$. Teda

$$\int_C [\varphi(y)e^x - my] \ dx + [\varphi\prime(y)e^x - m]\,dy$$

$$= \int_{C_1} [\varphi(y)e^x - my]\,dx + [\varphi\prime(y)e^x - m] \ dy - \int_{AB} [\varphi(y)e^x - my] \ dx + [\varphi\prime(y)e^x - m] \ dy.$$

Na výpočet $\int_{C_1}$ použijeme Greenov vzorec:

$$\int_{C_1} [\varphi(y)e^x - my] \ dx + [\varphi\prime(y)e^x - m] \ dy = \int\int_K -\varphi'(y)e^x + m + \varphi'(y)e^x dxdy = mS$$

$$\int_{AB} [\varphi(y)e^x - my] \ dx + [\varphi\prime(y)e^x - m] \ dy$$

$$= \int_{AB} [\varphi(y)e^x - my] \ dx + [\varphi\prime(y)e^x - mx]\,dy + \int_{AB} (mx - m)dy$$

$$= V(x_2, y_2) - V(x_1, y_1) + \int_{AB} (mx - m)dy.$$

Pritom

$$V(x, y) = \varphi(y)e^x - mxy$$

je potenciál vektorovej funkcie $(\varphi(y)e^x - my, \varphi\prime(y)e^x - mx)$. To znamená, že

$$\int_{AB} [\varphi(y)e^x - my] \ dx + [\varphi\prime(y)e^x - m] \ dy$$

$$= \varphi(y_2)e^{x_2} - mx_2y_2 - \varphi(y_1)e^{x_1} + mx_1y_1 + m\int_0^1 [x_1 + t(x_2 - x_1) - 1].(y_2 - y_1)dt$$

$$= \varphi(y_2)e^{x_2} - mx_2y_2 - \varphi(y_1)e^{x_1} + mx_1y_1 + m(y_2 - y_1)(\frac{x_1 + x_2}{2} - 1)$$

Dostávame

$$\int_C [\varphi(y)e^x - my] \ dx + [\varphi\prime(y)e^x - m] \ dy$$

$$= mS - [\varphi(y_2)e^{x_2} - mx_2y_2 - \varphi(y_1)e^{x_1} + mx_1y_1 + m(y_2 - y_1)(\frac{x_1 + x_2}{2} - 1)]$$

$$= mS - \varphi(y_2)e^{x_2} + \varphi(y_1)e^{x_1} - \frac{m}{2}(y_2 + y_1)(x_1 - x_2) + m(y_2 - y_1).$$

Príklady na samostatné riešenie

12.1 Vypočítajte krivkový integrál:

$$\oint_\Gamma (x_1 - x_2)dx_1 + (x_1 + x_2)dx_2,$$

kde Γ je krivka predstavujúca strany trojuholníka ABC orientovaná proti smeru hodinových ručičiek, kde

$$A = (0,0)^T, B = (2,0)^T, C = (1,1)^T$$

12.2 Nech $a > 0$ a nech C je krivka asteroidy,

$$C = \{(x,y), x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}\ \}.$$

Vypočítajte dĺžku C.

12.3 Vypočítajte krivkový integrál:

$$\oint_\Gamma x_2 dx_1 - x_1 dx_2,$$

kde Γ je elipsa s poloosami $a, b > 0$ orientovaná proti smeru hodinových ručičiek.

12.4 Vypočítajte hodnotu dvojného integrálu:

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\, dx_1 dx_2$$

kde

$$\Omega = \{(x_1, x_2), x_1^2 + x_2^2 < 1\}.$$

12.5 Vypočítajte krivkový integrál:

$$\oint_\Gamma x_1^2 x_2 dx_1 + x_1 x_2^2 dx_2,$$

kde krivka Γ predstavuje hrany štvorca s vrcholmi

$$(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)$$

orientovaná proti smeru hodinových ručičiek.

12.6 Vypočítajte krivkový integrál:

$$\oint_\Gamma (x_1 - x_2)dx_1 + (x_1 + x_2)dx_2,$$

kde Γ je krivka predstavujúca hrany pravidelného n - uholníka s vrcholmi v bodoch

$$(\cos(2\pi i/n), \sin(2\pi i/n)), i = 0, 1, ..., n - 1.$$

Aká je limita tohto integrálu pre počet vrcholov idúci do nekonečna?

12.7 Vypočítajte dĺžku oblúka paraboly

$$y = x(1 - x)$$

spájajúcej body $(0, 0)$ a $(1, 0)$.

12.8 Vypočítajte krivkový integrál:

$$\oint_\Gamma x_2 dx_1 + x_1 dx_2,$$

kde Γ je elipsa s poloosami $a, b > 0$ orientovaná proti smeru hodinových ručičiek.

12.9 Vypočítajte krivkové integrály prvého druhu

a)

$$\oint_C \frac{1}{x - y}\, ds,$$

kde C je úsečka AB, $A = (0, -2), B = (4, 0)$.

b)

$$\oint_C (x + y)\, ds,$$

kde C je obvod trojuholníka s vrcholmi $A = (1, -1), B = (2, -1), C = (1, 0)$.

c)

$$\oint_C xy\, ds,$$

kde C je obvod rovnobežníka určeného priamkami $x = 0, x = 4, y = 0, y = 2$.

d)

$$\oint_C x\, ds,$$

kde C je oblúk AB paraboly $y = x^2, A = (2, 4), B = (1, 1)$.

e)

$$\oint_C x^2\, ds,$$

kde C je oblúk AB krivky $y = lnx, A = (2, ln2), B = (1, 0)$

f)

$$\oint_C x^2 y\, ds,$$

kde C je oblúk kružnice $x^2 + y^2 = a^2$ s koncovými bodmi $A = (a, 0), B = (0, a)$.

g)

$$\oint_C \sqrt{x^2 + y^2}\, ds,$$

kde C je kružnica $x^2 + y^2 - ax = 0, a > 0$.

h)

$$\oint_C x\, ds,$$

kde C je oblúk logaritmickej špirály $\rho = ae^{b\varphi}, b > 0$,ktorý je vnútri kruhu $\rho \le a$.

i)

$$\oint_C \frac{z^2}{x^2 + y^2}\, ds,$$

kde C je oblúk skrutkovice $r = a[i \cos t + j \sin t + tk], \quad t \in [0, 2\pi]$.

12.10 Vypočítajte krivkové integrály druhého druhu

$$\oint_C [(x - y)\vec{i} + (x + y)\vec{j}]ds = \oint_C (x - y)\, dx + (x + y)\, dy,$$

kde

a) C je úsečka $AB, A = (2, 3), B = (3, 5)$, pričom A je jej prvý bod.

b) C je oblúk paraboly $y = x^2$,ktorého prvý bod je $A = (0, 0)$, a koncový bod $B = (2, 4)$.

c) C je oblúk paraboly $x = y^2$ od bodu $A = (0, 0)$ po bod $B = (4, 2)$.

12.11 Vypočítajte krivkové integrály druhého druhu

a)

$$\oint_\Gamma (x^2 + y^2)\, dx + (x^2 - y^2)\, dy,$$

kde Γ je obvod trojuholníka ABC, $A = (0, 0),\ B = (1, 0),\ C = (0, 1)$, pričom (A, B, C) je trojica usporiadaná v zmysle orientácie krivky Γ.

b)

$$\oint_\Gamma \frac{dx + dy}{|x| + |y|},$$

kde Γ je obvod štvorca ABCD, $A = (1, 0),\ B = (0, 1),\ C = (-1, 0),\ D = (0, -1)$, pričom (A, B, C) je trojica usporiadaná v zmysle orientácie krivky $C\Gamma$.

c)

$$\oint_C (x^2 + y^2)\, dx + (x^2 - y^2)\, dy,$$

kde C je krivka $y = 1 - |1 - x|,\ x \in [0, 2]$, ktorej prvý bod je $A = (0, 0)$.

d)

$$\oint_C (x + y)\, dx + (x - y)\, dy,$$

kde C je elipsa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

orientovaná tak, že body $A = (a, 0),\ B = (0, b),\ C = (-a, 0)$ je trojica usporiadaná v zmysle orientácie krivky C.

e)

$$\oint_C (-dx + \arctan\frac{y}{x}\,dy),$$

kde krivka C sa skladá z oblúkov $\widehat{AB}, \widehat{BA}$, pričom $\widehat{AB}$ je oblúk paraboly

$$y = x^2,\ A = (0, 0),\ B = (1, 1),$$

$\widehat{BA}$ je úsečka a body $A, B, D,\ D = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ tvoria usporiadanú trojicu v zmysle orientácie krivky C.

12.12 Vypočítajte krivkové integrály druhého druhu v $\mathbb{R}^3$.

a)

$$\oint_C x\,dx + y\,dy + (x + y - 1)\,dz,$$

kde C je úsečka AB, $A = (1, 1, 1)$, je jej prvý bod a $B = (2, 3, 4)$.

b)

$$\oint_C (x\vec{i} + y\vec{j} + (xz - y)\vec{k})ds,$$

kde C je oblúk krivky $r = t^2\vec{i} + 2t\vec{j} + 4t^3\vec{k}$, od bodu $A = (0, 0, 0)$ po bod $B = (1, 2, 4)$.

c)

$$\oint_C yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz,$$

kde C je oblúk skrutkovice

$$r = (a\cos t, a\sin t, \frac{bt}{2\pi})$$

od bodu $A = (a, 0, 0)$ po bod $B = (a, 0, b), t \in [0, 2\pi]$.

d)

$$\oint_C y\,dx + z\,dy + x\,dz,$$

kde C je priesečnica plôch

$$z = xy, x^2 + y^2 = 1$$

a trojica $A = (1, 0, 0),\ B = (0, 1, 0),\ C = (-1, 0, 0)$ je usporiadaná v zmysle orientácie krivky C.

e)

$$\oint_C y^2\,dx + z^2\,dy + x^2\,dz,$$

kde C je časť Vivianiho krivky

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 = ax,$$

$z \geq 0, a > 0$ a body $A = (a, 0, 0),\ B = (\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{\sqrt{2}}),\ D = (0, 0, a)$ tvoria usporiadanú trojicu v zmysle orientácie krivky C.

Nezávislosť integrálu od integrálnej cesty

12.13 Vypočítajte

$$\oint (2y - 6xy^3)\,dx + (2x - 9x^2y^2)\,dy,$$

ak krivka C, ktorej prvý bod je $A = (0,0)$ a posledný bod $B = (2,2)$, je
a) úsečka b) parabola $y = \frac{x^2}{2}$ c) parabola $x = \frac{y^2}{2}$ d) kubická parabola $y = \frac{x^3}{4}$.

12.14 Zistite, či dané integrály sú závislé od integračnej cesty v E_2 resp v E_3.
a)

$$\oint_C (2x + 3y)\,dx + (3x - 4y)\,dy$$

b)

$$\oint_C (x^4 + 4xy^3)\,dx + (6x^2y^2 - 5y^4)\,dy$$

c)

$$\oint_C (3x^2 + \frac{y}{(x+z)^2})\,dx + \frac{dy}{x+z} + \frac{y}{(x+z)^2}\,dz$$

12.15 Zistite, či krivkový integrál

$$\oint_C (\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4})\,dx - \frac{2y}{x^3}\,dy$$

po ľubovoľnej uzavretej po čiastkach hladkej krivke sa rovná nule, ktorá neobsahuje $(0,0)$ ani vo vnútri.

12.16 Vypočítajte krivkový integrál

$$\oint_C \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$$

po ľubovoľnej jednoduchej uzavretej po čiastkach hladkej krivke.

12.17 Presvedčte sa o tom, že dané integrály po ľubovoľnej jednoduchej uzavretej po čiastkach hladkej krivke sa rovnajú nule.
a)

$$\oint_C f(xy)y\,dx + f(xy)x\,dy,$$

kde funkcia f je spojitá.
b)

$$\oint_C f(x^2 + y^2 + z^2)(x\,dx + y\,dy + z\,dz),$$

kde funkcia f je spojitá.

12.18 Vypočítajte krivkové integrály po krivke spájajúcej body A, B

a)

$$\oint_A^B 2xy\,dx + x^2\,dy,$$

kde $A = (0,0),\ B = (2,1)$.

b)

$$\oint_A^B (x^4 + 4xy^3)\,dx + (6x^2y^2 - 5y^4)\,dy,$$

kde $A = (-2,-1),\ B = (3,0)$.

c)

$$\oint_A^B \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2},$$

kde $A = (3,4),\ B = (5,12)$ a množina $G = E_2 - O, O = (0,0)$.

d)

$$\oint_A^B \frac{x\,dx}{(x+y)^2} + \frac{2x+y}{(x+y)^2}\,dy,$$

kde $A = (1,1), B = (3,2)$ a množina G je oblasť $y > -x$.

e)

$$\oint_A^B 2y\sin 2x\,dx - \cos 2x\,dy,$$

kde $A = (\frac{\pi}{4}, 2),\ B = (\frac{\pi}{6}, 1)$.

f)

$$\oint_A^B x\,dx + y^2\,dy - z^3\,dz,$$

kde $A = (1,1,1),\ B = (2,3,-4)$.

12.19 Nájdite potenciál V funkcie f, ak

a)

$$f(x,y) = (x^2 + 2xy - y^2)\vec{i} + (x^2 - 2xy - y^2)\vec{j}$$

b)

$$f(x,y) = (\frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{x})\vec{i} + (\frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x-y)^2})\vec{j}$$

na oblasti G, pre ktorú platí $y > x$.
Greenova veta

12.20 Použitím Greenovej vety vypočítajte

$$\oint_C y^2\,dx + x\,dy,$$

ak krivka C je:
a) obvod štvorca ohraničeného priamkami $x = 1,\ x = -1,\ y = 1,\ y = -1$ súhlasne orientovaný so súradnicovým systémom.

b) kružnica s polomerom 2 so stredom v bode $O = (0,0)$ orientovaná súhlasne so súradnicovým systémom.

c) $r = 2\cos^3 t\vec{i} + 2\sin^3 t\vec{j},\ t \in [0, 2\pi]$ a je cyklicky orientovaná súhlasne s parametrickým vyjadrením.

12.21 Vypočítajte

$$\oint_C xe^{-y^2}\,dx + \left(-x^2ye^{-y^2} + \frac{1}{x^2+y^2}\right)\,dy,$$

ak C je obvod štvorca daného nerovnosťami $|x| \leq a, |y| \leq a$, súhlasne orientovaný so súradnicovým systémom.

12.22
Použitím Greenovej vety vypočítajte

$$\oint_C \frac{1}{x}\arctan\frac{y}{x}\,dx + \frac{2}{y}\arctan\frac{x}{y}\,dy,$$

kde C je hranica oblasti

$$1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y \leq x\sqrt{3},$$

súhlasne orientovaná so súradnicovým systémom.

12.23
Vypočítajte

$$\oint_C (e^x \sin y - 16y)\,dx + (e^x \cos y - 16)\,dy,$$

kde C je polkružnica

$$x^2 + y^2 = ax,\ y \geq 0,$$

s prvým bodom $A = (a,0)$ a posledným bodom $O = (0,0)$tak, že doplníte oblúk $\widehat{AO}$ úsečkou $\overline{OA}$ na uzavretú krivku a použijete Greenovu vetu.

12.24 Použitím Greenovej vety vypočítajte dané integrály

a)

$$\oint_C (1+xy)e^{xy}\,dx + x^2(1+e^{xy})\,dy,$$

ak C je obvod obdĺžnika s vrcholmi

$$A_1 = (0,0),\ A_2 = (2,0),\ A_3 = (2,1),\ A_4 = (0,1),$$

súhlasne orientovaný so súradnicovým systémom.

b)

$$\oint_C (3x^2\cos y - y^3)\,dx + (x^3 - 3x^2\sin y)\,dy,$$

kde C je kružnica

$$x^2 + y^2 = 1$$

súhlasne orientovaná so súradnicovým systémom.

c)

$$\oint_C (x+y)\,dx - (x-y)\,dy,$$

kde C je elipsa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

súhlasne orientovaná so súradnicovým systémom.

12.25 Dokážte, že

$$\oint_C (yx^3 + e^y)\,dx + (xy^3 + xe^y - 2y)\,dy = 0,$$

kde C je jednoduchá uzavretá , po čiastkach hladká krivka, stredovo súmerná podľa začiatku súradnicového systému.

12.26 Dokážte, že

$$\oint_C (2xy - y)\,dx + x^2\,dy,$$

kde C je jednoduchá uzavretá, po čiastkach hladká krivka súhlasne orientovaná so súradnicovým systémom, rovná sa obsahu oblasti A ohraničenej krivkou C.

12.27 Pomocou Greenovej vety odvodte vzorec pre obsah jednoduchej súvislej oblasti ohraničenej krivkou C.

12.28 Ak krivka C, množina A a funkcie f, g spĺňajú predpoklady Greenovej vety, dokážte že platí:

$$\oint_C fg\,dx + fg\,dy = \iint_A g(f'_x - f'_y) + f(g'_x - g'_y)dx\,dy.$$

12.29 Dvakrát diferencovateľná funkcia u sa nazýva harmonickou v oblasti G, ak

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Dokážte, že u je harmonická v oblasti G vtedy a len vtedy, keď $\oint_C \frac{du}{dn}\,ds = 0$, kde C je ľubovoľná, hladká uzavretá krivka v G, pričom $\frac{du}{d\vec{n}}$ označuje deriváciu v smere vonkajšej $\vec{n}$ normály ku krivke C.

12.30 Pomocou prvej Greenovej formuly

$$\oint_C f\frac{dg}{dn}ds = \iint_\Omega (f\Delta g + \nabla f.\nabla g)\,dx\,dy,$$

dokážte druhú Greenovu formulu

$$\oint_C (f\frac{dg}{dn} - g\frac{df}{dn})ds = \iint_\Omega [f\Delta g - g\Delta f)]dx\,dy,$$

kde f a g sú dvakrát diferencovateľné funkcie na ohraničenej oblasti Ω, ktorej hranica je hladká, uzavretá krivka C.

12.31 Dokážte, že

$$\int_\Omega\int \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2 dx\,dy = -\int_\Omega\int u\Delta u dx\,dy + \oint_C u\frac{du}{dn}ds,$$

kde hladká, uzavretá krivka C je hranicou ohraničenej oblasti Ω a u je dvakrát diferencovateľná funkcia na množine Ω.

12.32 Dokážte vetu o strednej hodnote pre harmonické funkcie

$$u(M) = \frac{1}{2\pi a} \oint_C u(P)\, ds,$$

kde C je kružnica so stredom v bode M a polomerom a.

Aplikácie krivkových integrálov

12.33 Pomocou krivkového integrálu nájdite obsah vnútra jednoduchej uzavretej krivky, ak krivka je:

a) elipsa s polosami a, b.

b) Jeden oblúk cykloidy

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t), t \in [0, 2\pi]$$

a príslušná časť osi o_x.

c)

$$y^2 = x^2 - x^4$$

d) Asteroida

12.34 Pomocou krivkového integrálu nájdite ťažisko

a) homogénneho oblúka kružnice

$$\varrho = a,\ \ 0 \le \varphi \le 2\alpha$$

b) homogénneho oblúka cykloidy

$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t),\ \ t \in [0, 2\pi].$$

c) obvodu sférického trojuholníka

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ \ x \ge 0,\ \ y \ge 0,\ \ z \ge 0.$$

d) homogénneho oblúka parametrizovaného pomocou

$$(x, y) = e^t(\cos t, \sin t, 1),\ t \in (-\infty, 0].$$

Návod: Hmotnosť krivky C je:

$$M = \oint_C \mu(p) ds,$$

kde $\mu = \mu(P)$ je lineárna hustota v ľubovoľnom bode P krivky C. Súradnice ťažiska $T = (\xi, \eta, \zeta)$ krivky C sú:

$$\xi = \frac{1}{M} \oint_C x\mu(P) ds,\ \ \eta, = \frac{1}{M} \oint_C y\mu(P) ds,\ \ \zeta = \frac{1}{M} \oint_C z\mu(P) ds.$$

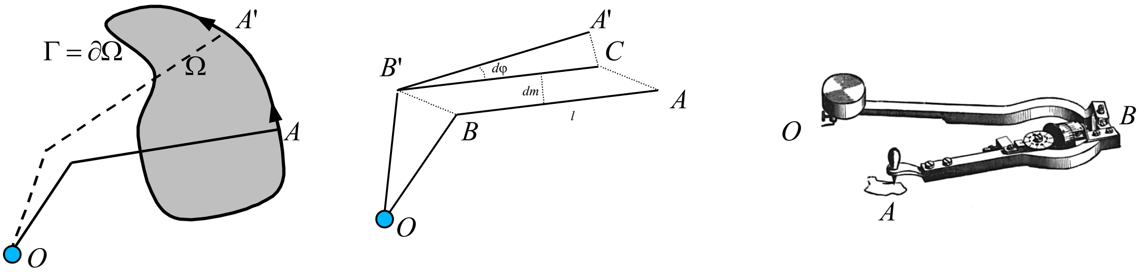
Poznámka. Ak počítame hmotnosť M prútu tvaru krivky C s hustotou ϱ, tak $M = \int_C \varrho\, ds$.

Niektoré aplikácie získaných poznatkov

Princíp merania plochy planimetrom

Gauss-Ostrogradského formula poskytujúca vzťah medzi krivkovým integrálom druhého druhu po krivke $\Gamma = \partial\Omega$ a dvojným integrálom po oblasti Ω nám umožňuje vypočítať plochu oblasti Ω z informácie, ktorú máme k dispozícií obchádzajúc dokola jej hranicu $\Gamma = \partial\Omega$. Táto vlastnosť je základom princípu geodetického prístroja - planimetra, ktorý skonštruoval švajčiarsky matematik J. Laffon. Myšlienka je veľmi jednoduchá a spočíva v počítaní plochy, ktorú vymedzí rameno planimetra $\widehat{AB}$ pri pohybe z bodu $A \in \Gamma$ do bodu $A' \in \Gamma$. Dĺžka ramena $\widehat{AB} = l$ je pevná. Pohyb z $A \in \Gamma$ do $A' \in \Gamma$ možno rozložiť na paralelný posun ramena $\widehat{AB}$ do ramena $\widehat{CB'}$ o dĺžku dm a následné otočenie ramena $\widehat{CB'}$ do ramena $\widehat{A'B'}$ o ohol $d\phi$. Výsledná zmena plochy dP útvaru $ACA'B'B$ je potom rovná

$$dP = l\,dm + \frac{1}{2}l^2\,d\phi,$$



Obr. 12.4: Znázornenie geometrickému princípu merania plochy $|\Omega|$ pomocou obiehania hrotu planimetra okolo jej hranice $\Gamma = \partial\Omega$ proti smeru hodinových ručičiek.

kde sme využili fakt, že pre malé uhly $d\phi$ platí $\sin(d\phi) \approx d\phi$ a preto plocha trojuholníka $CA'B'$ je rovná $\frac{1}{2}l\,l\sin(d\phi) \approx \frac{1}{2}l^2\,d\phi$. Nakoniec si uvedomme, že obídením celej krivky $\Gamma = \partial\Omega$ proti smeru hodinových ručičiek a sčitovaním prírastkov plochy dP, dôjde ku postupnému vzájomnému odčitovaniu plochy nepatriacej do Ω, vďaka pohybovaniu sa najprv po vzdialenejšej časti krivky od fixného bodu planimetra O a následnému pohybu po bližšej časti krivky Γ z pohľadu bodu O. Planimeter je schopný svojim rotačným krokomerom zachytiť celkový súčet $M = \oint_\Gamma dm$ paralelných posunov dm, ktoré môžu byť kladné i záporné. Planimeter však nedokáže už integrovať hodnoty prírastkov uhla $d\phi$. Určite však po jednom obehnutí krivky proti smeru hodinových ručičiek z bodu A do bodu A bude platiť, že $\oint_\Gamma d\phi = \phi(A) - \phi(A) = 0$. To znamená, že celková plocha $|\Omega| = \oint_\Gamma dP$ sa dá vypočítať pomocou vzťahu:

$$|\Omega| = \oint_\Gamma dP = \oint_\Gamma l\,dm + \frac{1}{2}l^2\,d\phi = l\oint_\Gamma dm + \frac{1}{2}l^2\oint_\Gamma d\phi = lM$$

a teda $|\Omega| = lM$, kde M je údaj z krokomeru (otočné koliesko) planimetra a l je pevná dĺžka ramena planimetra.

Kapitola 13

Parametrické integrály

Definícia parametrického integrálu

Priklady parametrických integrálov

Spojitosť a diferencovateľnosť parametrických integrálov

Metódy výpočtu parametrických integrálov

Gama, Beta funkcia a ich vlastnosti

Dôležité pojmy a tvrdenia

Definícia parametrického integrálu Nech $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \times \sigma(y_0) \to \mathbb{R}$, kde $O(y_0) \subset \mathbb{R}^M$, $\sigma(y_0)$ je okolie bodu y_0. Predpokladajme, že pre každé $y \in O(y_0)$ je funkcia $x \mapsto f(x,y)$ je integrovateľná na oblasti Ω. Potom funkciu $O(y_0) \ni y \mapsto F(y)$, kde

$$F(y) = \int_\Omega f(x,y)\,dx$$

nazývame parametrický integrál.

Spojitosť parametrického integrálu. Nech $F(y) = \int_\Omega f(x,y)\,dx$ je parametrický integrál definovaný na okolí $O(y_0)$ bodu y_0. Predpokladajme, že

1. $y \mapsto f(x,y)$ je spojitá na $O(y_0)$ pre každé $x \in \Omega$
2. existuje integrovateľná funkcia $g : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ taká, že $\int_\Omega g(x)\,dx < \infty$ a

$$|f(x,y)| \le g(x), \qquad \text{pre každé} \quad x \in \Omega, y \in O(y_0)$$

Potom parametrický integrál $F(y) = \int_\Omega f(x,y)\,dx$ je spojitá funkcia na okolí $O(y_0)$ bodu y_0.

Poznámka. Nech $\Omega \subset \mathbb{R}, O = (c,d) \subset \mathbb{R}$. Nech $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkcia (a teda je aj ohraničená). Potom parametrický integrál

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$$

je spojitá na $[c,d]$.

Diferencovateľnosť parametrického integrálu. Nech funkcia f je taká, že existuje parametrický integrál $F(y) = \int_\Omega f(x,y)\,dx$ definovaný na okolí $O(y_0) \subset \mathbb{R}$ bodu $y_0 \in \mathbb{R}$, pričom

1. pre každé $y \in O(y_0)$ je zobrazenie $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ integrovateľná funkcia na oblasti Ω
2. existuje integrovateľná funkcia $g : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ taká, že $\int_\Omega g(x)\,dx < \infty$ a

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \le g(x) \qquad \text{pre každé} \quad x \in \Omega, y \in O(y_0)$$

Potom, pre každé $y \in O(y_0)$ existuje derivácia pre $F'(y)$ a platí

$$F'(y) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx.$$

To znamená, že v takom prípade môžeme prejsť s derivovaním podľa parametra z pred integrálu za integrál, t.j

$$\frac{d}{dy}\int_\Omega f(x,y)\,dx = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\ \ dx.$$

Lebesgueova veta o limitnom prechode. Nech $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je oblasť. Nech $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ je postupnosť Riemannovsky integrovateľných funkcií, pre ktoré platí:

1. pre každé $x \in \Omega : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

2. existuje funkcia $g(x)$ taká, že pre každé $x \in \Omega, n \in \mathbb{N} : |f_n(x)| \le g(x)$ a g je integrovateľná na Ω, $\int_\Omega g(x)\,dx < \infty$.

Potom

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\,dx \left(= \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \right),$$

t.j. môžeme prejsť's limitovaním z pred integrálu za integrál.

Eulerove funkcie.

Eulerova Gama funkcia Γ. Funkciu

$$\Gamma(y) = \int_0^\infty x^{y-1}e^{-x}\ \ dx$$

pre $y > 0$, nazývame Eulerovou Gama funkciou.

Beta funkcia B. Funkciu

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ \ ,dt$$

ktorá je definovaná pre $x > 0, y > 0$, nazývame Eulerovou Beta funkciou.

Niektoré vlastnosti Eulerovych integrálov.

1. Γ je konvexná nekonečne diferencovateľná funkcia
2. $B(x,y) = B(y,x)$
3. $B(x,y) = \frac{y-1}{x+y-1}B(x,y-1)$
4. $B(x,n) = \frac{(n-1)!}{x(x+1)(x+2)...(x+n+1)}$ pre $n = 1, 2, ...$
5. $B(x,y) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\,dt$
6. $B(x,1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}, 0 < x < 1$
7. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
8. $\Gamma(n) = (n-1)!$ pre prirodzené číslo $n \in \mathbb{N}$
9. $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$, $\quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$
10. $\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}\Gamma(2x)$
11. $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$ pre prirodzené číslo $n \in \mathbb{N}$
12. $B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$
13. $\Gamma(x) = \lim_{n\mapsto\infty} \frac{(n-1)!}{x(x+1)(x+2)...(x+n-1)}n^x$
14. Stirlingova formula

$$\Gamma(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{z}}\left(\frac{z}{e}\right)^z(1+O(z^{-1}))$$

pre $z \to \infty$

Definícia Laplaceovej transformácie. Danej funkcii $f(t)$ sa priradí jej Laplaceov obraz (Laplaceova transformácia)

$$L[f](p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}\, dt$$

Niektoré vlastnosti Laplaceovej transformácie.

1.
$$L[\alpha f](p) = \alpha L[f](p),$$
pokiaľ exituje $L[f](p)$ a $\alpha \in \mathbb{R}$.

2.
$$L[f_1 + f_2](p) = L[f_1](p) + L[f_2](p),$$
pokiaľ existuje $L[f_1](p)$ a existuje $L[f_2](p)$.

3. *Laplaceov obraz derivácie.* Nech $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ je diferencovateľná ohraničená funkcia. Potom
$$L[f'(t)](p) = -f(0) + pL[f](p).$$

4. *Slovník Laplaceovej transformácie.*

$$\begin{aligned} L[t^m](p) &= \frac{m!}{p^{m+1}}, m \in N, m \geq 0. \\ L[e^{-at}](p) &= \frac{1}{a+p} \\ L[\sin \omega t](p) &= \frac{\omega}{\omega^2 + p^2} \\ L[\cos \omega t](p) &= \frac{p}{\omega^2 + p^2}. \end{aligned}$$

Riešené príklady

Príklad 1. Zistite dĺžku krivky definovanej vzťahom

$$r^n = a^n \cos n\varphi.$$

Riešenie. Zrejme kvetinka krivky je tvorená n jednoduchými krivkami, lebo $\cos n\varphi > 0$. Teda definičný obor pre krivku je

$$\bigcup_{k=0}^{n-1} (\frac{-\pi}{2n} + k\frac{2\pi}{n}, \frac{\pi}{2n} + k\frac{2\pi}{n}).$$

Krivka je parametrizovaná

$$x = a \cos^{\frac{1}{n}} n\varphi. \cos\varphi, y = a \cos^{\frac{1}{n}} n\varphi \sin\varphi,$$

pre

$$\varphi \in \bigcup_{k=0}^{n-1} (\frac{-\pi}{2n} + k\frac{2\pi}{n}, \frac{\pi}{2n} + k\frac{2\pi}{n}).$$

Potom

$$x' = -a\cos^{\frac{1}{n}-1} n\varphi. \sin n\varphi. \cos\varphi - a\cos^{\frac{1}{n}} n\varphi. \sin\varphi.$$

$$y' = -a\cos^{\frac{1}{n}-1} n\varphi. \sin n\varphi. \sin\varphi + a\cos^{\frac{1}{n}} n\varphi. \cos\varphi.$$

To znamená, že

$$\sqrt{(x')^2 + (y')^2} = a\cos^{\frac{1}{n}-1} n\varphi.$$

Keďže $\sqrt{(x')^2 + (y')^2}$ je periodická funkcia s periódou $\frac{2\pi}{n}$, tak dĺžka krivky je

$$2n \int_0^{\frac{\pi}{2n}} a\cos^{\frac{1}{n}-1} n\varphi \; d\varphi = 2a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{1}{n}-1} t \;\; dt.$$

Napokon použijeme substitúciu $|\cos t = u, -\sin t dt = du|$. Dostaneme

$$l = 2a \int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{n}-1}}{\sqrt{1-u^2}} \; du = a \int_0^1 s^{\frac{1}{2n}-1}(1-s)^{-\frac{1}{2}} \; ds = aB(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2}).$$

Príklad 2. Zistite plochu oblasti K, ktorá je ohraničená krivkou C danou rovnicou $|x|^n + |y|^n = a^n, n > 0, a > 0$.

Riešenie. Zrejme ak $(x,y) \in K$, tak aj $(-x,y) \in K, (x,-y) \in K, (-x,y) \in K$. A teda stačí uvažovať $x > 0, y > 0$. Zrejme budeme uvažovať elementárnu oblasť typu $[x,y]$:

$$x \in \langle 0, a\rangle, y \in \langle 0, (a^n - x^n)^{\frac{1}{n}}\rangle.$$

Plocha K je daná pomocou

$$\begin{aligned}
K &= 4\int_0^a \int_0^{(a^n-x^n)^{\frac{1}{n}}} 1dy\, dx \\
&= \frac{4a^2}{n}\int_0^1 (1-z)^{\frac{1}{n}} z^{\frac{1-n}{n}} dz = \frac{4a^2}{n}\int_0^1 (1-z)^{1+\frac{1}{n}-1} z^{\frac{1}{n}-1} dz = \frac{4a^2}{n} B(1+\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \\
&= \frac{4a^2}{n}\frac{\Gamma(1+\frac{1}{n})\Gamma(\frac{1}{n})}{\Gamma(1+\frac{2}{n})} = \frac{2a^2}{n}\frac{\Gamma^2(\frac{1}{n})}{\Gamma(\frac{2}{n})}
\end{aligned}$$

Príklad 3 Nájdite limitu

$$\lim_{R\mapsto\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta} \, d\theta.$$

Riešenie. Použijeme Lebesgueovu vetu o limitnom prechode. Zrejme platí

$$\forall\theta \in (0,\pi) : \lim_{R\mapsto\infty} e^{-R\sin\theta} = 0.$$

Keďže $0 \le e^{-R\sin\theta} \le 1$, môžeme považovať 1 zaintegrovateľnú majorantu.Splnené sú teda podmienky Lebesgueovej vety a preto

$$\lim_{R\mapsto\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta} \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{R\mapsto\infty} e^{-R\sin\theta} \, d\theta = 0.$$

Príklad 4. Vypočítajte integrál

$$A = \int_0^1 \sin(\ln \frac{1}{x}) \frac{x^b - x^a}{\ln x} \; dx.$$

Riešenie.

$$\int_0^1 \sin(\ln \frac{1}{x}) \frac{x^b - x^a}{\ln x} \; dx = \int_0^1 \sin(\ln \frac{1}{x}) \int_a^b x^t \; dt \; dx = \int_a^b \int_0^1 x^t \sin(\ln \frac{1}{x}) \; dx \; dt.$$

Teraz vypočítame

$$I = \int_0^1 x^t \sin(\ln \frac{1}{x}) \; dx.$$

Použijeme dvakrát integrovanie per partes

$$\left| u' = x^t, v = \sin(\ln \frac{1}{x}), u = \frac{x^{t+1}}{t+1}, v' = -\cos(\ln \frac{1}{x}).\frac{1}{x} \right|, 2. \left| u' = x^t, v = \cos(\ln \frac{1}{x}) |, u = \frac{x^{t+1}}{t+1}, v' = \sin(\ln \frac{1}{x}).\frac{1}{x} \right|.$$

$$I(t) = \frac{1}{t+1} \int_0^1 x^t \cos(\ln \frac{1}{x}) \; dx = \frac{1}{t+1} ([\frac{\cos(\ln \frac{1}{x}).x^{t+1}}{t+1}]_0^1 - \frac{1}{t+1} \int_0^1 x^t \sin(\ln \frac{1}{x}) \;\; dx).$$

Máme

$$I = \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{(t+1)^2} I,$$

a teda $I(t) = \frac{1}{1+(t+1)^2}$. Teraz dosadíme

$$A = \int_a^b I(t) dt = \int_a^b \frac{1}{1+(t+1)^2} \; dt = \text{arctg}\,(b+1) - \text{arctg}\,(a+1).$$

Keďže

$$\text{tg}\,(\alpha - \beta) = \frac{\text{tg}\,(\alpha) - \text{tg}\,(\beta)}{1 + \text{tg}\,\alpha \text{tg}\,\beta},$$

$$A = \text{arctg}\,(b+1) - \text{arctg}\,(a+1) = \text{arctg}\, \frac{b-a}{1+(b+1)(a+1)}.$$

Príklady na samostatné riešenie

13.1 Nájdite definičný obor funkcie $F(y) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + y^2}$.

13.2 Zistite, kde sú spojité nasledujúce funkcie:

a) $F(y) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{\pi}{4}} (x^2 + y^2 + 1)}$,

b)

$$F(y) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{y^2}{(x+|y|)\sqrt{\text{tg}\, \frac{y}{2}}} dx, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0, \end{cases}$$

c)

$$F(y) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\operatorname{arctg}\,(x^2+y^2)\sin x} dx, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

13.3 Zistite, pre ktoré hodnoty argumentu y je spojitá funkcia

$$F(y) = \int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2} dx,$$

kde funkcia f je spojitá a kladná na intervale $< 0, 1 >$.

13.4 Dokážte, že funkcia

$$F(y) = \int_0^{\pi} \frac{2\cos x + 2y}{1 + 2y\cos x + y^2} dx$$

nie je spojitá v bodoch $y = 1$ a $y = -1$.

13.5 Ukážte, že integrál $F(y) = \displaystyle\int_0^1 f(x,y)dx$ z nespojitej funkcie $f(x,y) = \operatorname{sgn}\,(x-y)$ je spojitou funkciou. Zostrojte graf funkcie F.

13.6 Nájdite:

a) $\displaystyle\lim_{y\to 0} \int_{-1}^{1} \sqrt{x^2+y^2}dx,\ |y| < \frac{1}{2},$

b) $\displaystyle\lim_{y\to 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x+y)}{x^2y^2+xy+1} dx,$

c) $\displaystyle\lim_{y\to 0} \int_0^2 x^2 \cos xy dx,$

d) $\displaystyle\lim_{y\to +\infty} \int_1^2 \frac{y}{x+y} e^{-x^2 y} dx,$

e) $\displaystyle\lim_{y\to 0} \int_y^{1+y} \frac{dx}{1+x^2+y^2},\ |y| < 1,$

f) $\displaystyle\lim_{n\to \infty} \int_0^1 \frac{dx}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n},$

g) $\displaystyle\lim_{y\to \infty} \int_1^2 \frac{\ln(x+|y|)}{\ln(x^2+y^2)} dx\,.$

13.7 Nájdite $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta} d\theta.$

13.8 Je možné uskutočniť limitný prechod za znakom integrálu vo výraze

$$\lim_{y\to 0} \int_0^1 \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y^2}} dx?$$

13.9 Vypočítajte $F'(y)$, ak

$$F(y) = \int_0^1 \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) dx,\ y > 0.$$

Existuje derivácia v bode $y = 0$?

13.10 Nájdite $F'(y)$, ak a) $F(y) = \int_y^{y^2} e^{-x^2 y} dx$,

b) $F(y) = \int_{y^2}^{3y^2+1} \frac{e^{xy}}{x} dx,\ y \neq 0$,

c) $F(y) = \int_{\sin y}^{\cos y} e^{y\sqrt{1-x^2}} dx$,

d) $F(y) = \int_{a+y}^{b+y} \frac{\sin xy}{x} dx$,

e) $F(y) = \int_0^y \frac{\ln(1+xy)}{x} dx$,

f) $F(y) = \int_0^y f(x+y, x-y) dx$,

g) $F(y) = \int_0^{y^2} dx \int_{x-y}^{x+y} \sin\left(x^2 + t^2 - y^2\right) dt$.

13.11 Nájdite $F''(y)$, ak

a) $F(y) = \int_0^y (x+y) f(x) dx$, kde f je diferencovateľná funkcia,

c) $F(y) = \frac{1}{h^2} \int_0^h d\xi \int_0^h f\left(y + \xi + \eta\right) d\eta\ (h > 0)$, kde f je spojitá funkcia.

13.12 Nájdite $F^{(n)}(y)$, ak

$$F(y) = \int_0^y (y-x)^{n-1} f(x) dx$$

a f je spojitá funkcia.

13.13 Funkciu $f(x) = x^2$ na intervale $[1, 3]$ približne zameňte lineárnou funkciou $a + bx$ tak, aby hodnota integrálu

$$\int_1^3 \left(a + bx - x^2\right)^2 dx$$

bola minimálna.
Návod: Definujme si

$$I(a, b) = \int_1^3 \left(a + bx - x^2\right)^2 dx$$

a hľadajme globálne minimum. Zrejme $\frac{\partial I}{\partial a} = 4a + 8b - \frac{52}{3}$. Analogicky dostaneme $\frac{\partial I}{\partial b} = 8a + \frac{52b}{3} - 40$. Hessova matica druhých derivácií

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & \frac{52}{3} \end{pmatrix}$$

je kladne definitná a teda vieme, že funkcia $I(a, b)$ nadobúda svoje minimumu pre $b = 4, a = -\frac{11}{3}$.

13.14 Vypočítajte $\int_1^2 x^n dx$ pre $n \neq -1$ a potom pomocou derivovania podľa parametra vypočítajte $\int_1^2 x^n \ln x dx$.

13.15 Vyjdúc z rovnosti

$$\int_0^b \frac{dx}{1+ax} = \frac{1}{a} \ln(1+ab)$$

odvoďte pomocou derivovania podľa parametra vzorec

$$\int_0^b \frac{xdx}{(1+ax)^2} = \frac{1}{a^2} \ln(1+ab) - \frac{b}{a(1+ab)}.$$

13.16 Pomocou derivovania podľa parametra vypočítajte nasledujúce integrály:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(a^2 - \sin^2 x\right) dx,\ a > 1$,

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x\right) dx$,

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1 + a\cos x}{1 - a\cos x} . \frac{dx}{\cos x},\ |a| < 1.$

Návod a): Keďže $f'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2adx}{a^2 - \sin^2 x}$, po substitúcii $\tan x = t$ dostaneme

$$f'(a) = \int_0^{\infty} \frac{2a}{(a^2-1)t^2 + a^2} dt = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Po integrovaní dostávame, že $f(a) = \pi \ln(a + \sqrt{a^2-1}) + C$. Zostáva vypočítať konštantu C zo hodnoty integrálu $f(1)$, ktorý vieme vypočítať.

13.17 Použijúc vzorec

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \int_0^1 \frac{dy}{1 + x^2 y^2},$$

vypočítajte integrál

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

13.18 Pomocou integrovania podľa parametra vypočítajte integrál

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx, a > 0, b > 0.$$

Nevlastné integrály

13.19 Vypočítajte
a)

$$\iint_A \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy,$$

ak množina je daná nerovnosťou $x^2 + y^2 \leq x$.

b)

$$\iint_A \frac{dx \ dy}{\sqrt[3]{xy - x - y + 1}},$$

ak A je štvorec so stredom v bode $S = (1, 1)$ a jedným vrcholom v začiatku $O = (1, 1)$.

c)

$$\iint_A \frac{dx \ dy}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}},$$

ak A je množina daná nerovnosťami

$$x \geq 0, \ \ y \geq 0, \ \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1.$$

d)

$$\iint_A \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx \ \ dy,$$

ak A je kruh $x^2 + y^2 \leq 1$.

e)

$$\iint_A e^{\frac{x}{y}} dx \ \ dy,$$

ak množina A je ohraničená krivkami $y = 0, \ \ y = 1, \ \ x = 0, \ \ y = \sqrt{x}$.

13.20 Vypočítajte

a)

$$\iint_{E_2} \frac{dx \ dy}{1 + x^2 + y^2}$$

b)

$$\iint_A \frac{dx \ dy}{(x^2 + y^2)^\alpha},$$

$\alpha > 1$, ak množina A je daná nerovnosťou $x^2 + y^2 \geq 1$.

c)

$$\iint_A \frac{dx \ dy}{(x^2 + y^2 + a^2)^2},$$

kde $A = [0, \infty) \times [0, \infty)$.

d)

$$\iint_A e^{-(x+y)} dx \ \ dy,$$

ak množina A je daná nerovnosťami $0 \leq x \leq y, \ \ 0 < y < \infty$.

e)

$$\iint_{E_2} e^{-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx \ \ dy.$$

f)

$$\iint_{E_2} e^{-|x| - |y|} dx \ \ dy.$$

13.21 Dokážte, že objem telesa, ohraničeného plochami

$$z = 0 \;\; a \;\; z = e^{-x^2-y^2},$$

rovná sa π.

13.22 Vypočítajte

a)

$$\iiint_A \frac{dx\ dy\ dz}{x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{4}}z^{\frac{1}{5}}},$$

ak $A = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$.

b)

$$\iiint_A \frac{dx\ dy\ dz}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}},$$

ak A je guľa $x^2+y^2+z^2 \le 1$.

c)

$$\iiint_A \frac{dx\ dy\ dz}{\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2}},$$

kde A je guľa $(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2 \le r^2$.

d)

$$\iiint_A \frac{xyz\,dx\ dy\ dz}{\sqrt{\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2}},$$

$\alpha > \beta > \gamma > 0$, ak množina A je daná nerovnosťami

$$x \ge 0,\;\; y \ge 0,\;\; z \ge 0,\;\; x^2+y^2+z^2 \le r^2.$$

13.23 Vypočítajte

a)

$$\iiint_A \frac{dx\ dy\ dz}{(x^2+y^2+z^2)^3},$$

ak množina A je daná nerovnosťou $x^2+y^2+z^2 \ge 1$.

b)

$$\iiint_A \frac{dx\ dy\ dz}{(1+x+y+z)^7},$$

kde $A = [0,\infty) \times [0,\infty) \times [0,\infty)$.

c)

$$\iiint_A \ln((x^2+y^2+z^2)dx\ \ dy\ \ dz,$$

kde A je guľa $x^2+y^2+z^2 \le a^2$.

d)

$$\iiint_{E_3} e^{-(x^2+y^2+z^2)}dx\ \ dy\ \ dz.$$

13.24 Vypočítajte integrál:

$$\int_0^\infty \sqrt{\frac{t}{e^t}}\,dt.$$

13.25 Pomocou Gama funkcie nájdite číselnú hodnotu súčinu $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

13.26 Nech $\lambda, \alpha > 0$ sú dané konštanty. Pre ktorú hodnotu kladnej konštanty $C = C(\lambda, \alpha) > 0$ je funkcia $f(x) = Cx^\lambda e^{-\alpha x}$ pre $x > 0$ a $f(x) = 0$ pre $x \leq 0$ funkciou hustoty tzv. Gama rozdelenia? Nájdite potom derivácie $\phi'(0)$ a $\phi''(0)$ charakteristickej funkciu tohto rozdelenia, t. j. funkcie

$$\phi(\xi) = E(e^{i\xi X}) = \int_{-\infty}^\infty e^{i\xi x} f(x)\,dx.$$

Pomocou nich určite strednú hodnotu a disperziu tohto Gama rozdelenia.

13.27 Pomocou Eulerovych integrálov vypočítajte nasledujúce integrály:

$$\begin{array}{ll}
a)\ \displaystyle\int_0^1 \sqrt{x-x^2}dx & b)\ \displaystyle\int_0^1 x^3\left(1-x^3\right)^{\frac{1}{3}}dx \\
c)\ \displaystyle\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx,\ a>0 & d)\ \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt[5]{x}}{(1+x^3)^2}dx \\
e)\ \displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3} & f)\ \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4}dx \\
g)\ \displaystyle\int_0^\infty x^{2n}e^{-x^2}dx,\ n\in N &
\end{array}$$

13.28 Určte oblasť existencie a vyjadrite pomocou Eulerovych integrálov:

$$\begin{array}{ll}
a)\ \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n}dx,\ n>0 & b)\ \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^n}dx \\
c)\ \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^m}{(a+bx^n)^p}dx,\ a>0,\ b>0,\ n>0 & d)\ \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^m}},\ m>0 \\
e)\ \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\cos^n x dx & f)\ \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{tg}^{\,n} x dx \\
g)\ \displaystyle\int_0^\infty x^m e^{-x^n}dx & h)\ \displaystyle\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^p dx \\
i)\ \displaystyle\int_0^\infty x^p e^{-ax}\ln x dx,\ a>0 & j)\ \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}dx \\
k)\ \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{(1+x)\ln x}dx &
\end{array}$$

13.29 Vypočítajte:

$$\begin{array}{llll}
a) & \displaystyle\int_0^1 \ln\Gamma(x)dx, & b) & \displaystyle\int_a^{a+1} \ln\Gamma(x)dx,\ a>0 \\
c) & \displaystyle\int_0^1 \ln\Gamma(x)\sin\pi x dx & d) & \displaystyle\int_0^1 \ln\Gamma(x)\cos 2n\pi x dx,\ n \text{ je prirodzené číslo.}
\end{array}$$

13.30 Dokážte, že ak $I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}}$ a $I_2 = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^{2n}}}dx$, n je prirodzené číslo, tak $I_1 I_2 = \frac{\pi}{2n}$.

Kapitola 14

Výsledky

Lineárne normované priestory

Pri dôkaze, že $\|.\|$ je norma na nejakej množine, treba dokázať 3 vlastnosti normy.

[- 1.1 -] Prvé dve vlastnosti normy zrejmé, pri 3. (Δ. nerovnosť) treba využiť platnosť Δ. nerovnosti v R:

$$|u_1 + v_1 + u_2 + v_2| \leq |u_1 + u_2| + |v_1 + v_2| \leq \|u\| + \|v\|.$$

Analogicky s $|2(u_1 + v_1) - (u_2 + v_2|$.

[- 1.2 -] Dôkaz ako v predošlom príklade.

[- 1.3 -] Prvé dve vlastnosti normy zrejmé, pri 3. použijeme

$$\|u + v\| = a_1|u_1 + v_1| + ... + a_n|u_n + v_n| \leq a_1|u_1| + a_1|v_1| + ...a_n|u_n| + a_n|v_n| = \|u\| + \|v\|.$$

[- 1.4 -] Analogicky ako predošlý príklad.

[- 1.5 -] Prvé dve vlastnosti normy zrejmé,

$$\|f + g\| \leq |f(0) + g(0)| + \max_{x \in [0,1]} |f(x)| + \max_{x \in [0,1]} |g(x)|.$$

[- 1.6 -] Zrejmé tvrdenie.

[- 1.7 -] Matematickou indukciou vzhľadom na k. Použijeme trojuholníkovú nerovnosť.

[- 1.8 -] Keďže $\|a - b\| = \|(a - c) + (c - d) + (d - b)\| \leq \|a - c\| + \|b - d\| + \|c - d\|$, tak

$$\|a - b\| - \|c - d\| \leq \|a - c\| + \|b - d\|.$$

Podobne sa dokáže pre $\|c-d\| - \|a-b\|$.

[- 1.9 -] Z definície ekvivalentných noriem máme ukázať, že $\exists C_1, C_2 > 0, \quad \forall f \in C([0,1]) :$ $\|f\| \leq C_1\|f\|_\infty \leq C_2\|f\|$. Zrejme: $\|f\| \leq \|f\|_\infty$, a že $\|f\|_\infty \leq e^\alpha\|f\|$.

[- 1.10 -] Zostrojme postupnosť f_n nasledovným spôsobom

$$\begin{aligned} f_n(x) &= nx \ \ na \ \ \langle 0, \frac{1}{n}\rangle \\ f_n(x) &= -nx+2 \ \ na \ \ (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\rangle \\ f_n(x) &= 0 \ \ na \ \ (\frac{2}{n}, 0\rangle \end{aligned}$$

Zrejme $\|f_n\|_\infty = 1$, ale $\|f_n\| = \frac{1}{n}$.

[- 1.11 -] a) Vnútro kosodĺžnika s vrcholmi $(\frac{1}{2},0),(0,\frac{1}{5}),(-\frac{1}{2},0),(-\frac{1}{5},0)$; b) rovnobežník; c) pravidelný šesťuholník.

[- 1.12 -] $m > \frac{2}{\pi\varepsilon}$, kde n ľubovoľné.

[- 1.13 -] Pre (c,d) musí platiť $|b-d| < \varepsilon, |c+d-a-b| < \varepsilon$.

[- 1.14 -] Prvé dve vlastnosti normy zrejmé, tretia vyplýva z Minkowského nerovnosti

$$(\sum_{i=1}^{n}|f_i+g_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{i=1}^{n}|f_i|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^{n}|g_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

ak dosadíme za $f_i = \frac{x_i}{a_i}, g_i = \frac{y_i}{a_i}$. Gule v $\mathbb{R}^2$ sú potom elipsy a v $\mathbb{R}^3$ sú elipsoidy.

[- 1.15 -] Stačí ukázať ekvivalenciu normy z predošlého príkladu s normou $\|.\|_2$. Zrejme

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{x_i}{a_i}\right|^2} \leq \sqrt{\left(\max_{i=1,2,\ldots N}\frac{1}{a_i}\right)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{N}|x_i|^2}$$

a tiež $\sqrt{\sum_{i=1}^{N}|x_i|^2} \leq \sqrt{(\max_{i=1,2,\ldots N}|a_i|)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{x_i}{a_i}\right|^2}$.

[- 1.16 -] Dôkaz opakovaným použitím trojuholníkovej nerovnosti.

[- 1.17 -] Pri dôkaze použijeme $|\eta_i| \leq |\eta|_\infty$.

[- 1.18 -] Pre $1 \leq p \leq \infty$ $\|x\|_p = (\sum|x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq n^{\frac{1}{p}}\|x\|_\infty$. Tiež platí $\|x\|_\infty \leq (\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$. A teda $C = n^{\frac{1}{p}}$.

[- 1.19 -] Vyplýva z predošlého príkladu.

[- 1.20 -] Riemannov integrál si môžeme napísať ako limitu integrálnych súčtov s normou delenia idúcou k nule. Použijeme Hölderovu nerovnosť $\sum|\xi_i\eta_i| \leq (\sum|\xi_i|^p)^{\frac{1}{p}}(\sum|\eta_i|^q)^{\frac{1}{q}}$, kde za $\xi_i = f(x_i).(\Delta(x_i))^{\frac{1}{p}}$ a za $\eta_i = g(x_i).(\Delta(x_i))^{\frac{1}{q}}$. Tu x_i sú deliace body s normou delenia idúcou k nule. Limitovaním dostaneme požadovaný vzťah.

[- 1.21 -] Viď návod.

[- 1.22 -] Neexistuje. Ukážeme to matematickou indukciou vzhľadom na n. Nech $n=2$ a nech $\|.\|$ je norma, ktorá nie je ekvivalentná s $\|.\|_\infty$. Nech $\{e_1, e_2\}$ je báza v $\mathbb{R}^2$. Zrejme

$\forall x \in \mathbb{R}^2 \ \ \|x\| \leq \|x\|_\infty(\|e_1\| + \|e_2\|)$. Teraz ukážeme, že existuje konštanta C tak, že $\forall x \in \mathbb{R}^2 : \|x_1e_1 + x_2e_2\| \geq C\|x_1e_1\| = C|x_1|.\|e_1\|, \ \ \|x_1e_1 + x_2e_2\| \geq C\|x_2e_2\| = C|x_2|\|e_2\|$ a teda $\|x_1e_1 + x_2e_2\| \geq \frac{C}{2}(|x_1|\|e_1\| + |x_2|\|e_2\|) \geq \frac{C}{2}\min\{\|e_1\|, \|e_2\|\}\|x\|_\infty$, čo by dokazovalo, že $\|.\|$ a norma $\|.\|_\infty$ sú ekvivalentné.
Postupujme sporom a predpokladajme, že taká konštanta C neexistuje. To znamená, že potom

$$\forall n \in N \exists (x_1^n, x_2^n) : \|x_1^ne_1 + x_2^ne_2\| < \frac{1}{n}\|x_1^ne_1\|$$

a teda $\|e_1 + \frac{x_2^n}{x_1^n}e_2\| < \frac{1}{n}\|e_1\|$. Potom $\forall n \in N \exists y_n \in \mathbb{R} : \|e_1 + y_ne_2\| < \frac{1}{n}\|e_1\|$. Odtiaľ dostávame, že y_n bude Cauchyovská postupnosť a teda z vlastnosti reálnych čísel dostávame, že $\exists y_0 : y_n \to y_0$. Limitným prechodom dostaneme $\|e_1 + y_0e_2\| = 0$ a preto $e_1 + y_0e_2 = 0$. To je spor s lineárnou nezávislosťou e_1, e_2. Pre vyššie dimenzie n postupujeme podobne.

Topologické vlastnosti LNP

[- 2.1 -]
a) A_1 uzavretá, nie otvorená
b) A_2 nie uzavretá, nie otvorená
c) A_3 otvorená, nie uzavretá

[- 2.2 -]
B_1 uzavretá, nie otvorená
B_2 uzavretá, nie otvorená

[- 2.3 -]
a) uzavretá, nie otvorená
b) nie uzavretá, nie otvorená

[- 2.4 -]
a) A nie otvorená, lebo $f \equiv 1$ nie je vnútorný bod A, lebo $g \equiv 1 + \frac{\varepsilon}{2}$ nepatrí do A pre žiadne $\varepsilon > 0$, ale $g \in B(f, \varepsilon)$.
A je uzavretá, lebo ak f_0 nepatrí do A, t. j. $f_0(0) \neq 1$ tak $\exists \varepsilon > 0 \forall g \in B(f_0, \varepsilon) : g(0) \neq 1$ a teda $C \setminus A$ je otvorená.
b) A nie je otvorená. Uvažujme $f \equiv 1$. Pýtame sa, či $\exists \varepsilon > 0, B(f_0, \varepsilon) \subset A$. Nie, lebo ak $g \equiv f_0 + \frac{\varepsilon}{2}$, tak $g \in B(f_0, \varepsilon)$, ale g nepatrí do A.
Množina A nie je uzavretá. Zoberme $f_0 \equiv 0$. Zrejme f_0 nepatrí do A. Zostrojme postupnosť funkcií $f_n \in C((0, 1))$:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= -nx + 1 \text{ pre } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ f_n(x) &= 0 \text{ pre } \frac{1}{n} \leq x < 1 \end{aligned}$$

Zrejme $f_n \in A$. Ale

$$\|f_n - f_0\|_1 = \int_0^1 |f_n - f_0| dx = \frac{1}{2n} \to 0.$$

Teda $X - A$ nie je otvorená.

VNÚTORNÉ BODY, HRANIČNÉ BODY, UZÁVER MNOŽINY

[- 2.5 -]
1. int$A_1 = \{(x_1, x_2); x_1+x_2 < 1 \wedge x_2 > 0\}$. Potom $\partial A_1 = B_1 \cup B_2$, kde $B_1 = (x_1, x_2), x_1 + x_2 \leq 1 \wedge x_2 = 0$
$B_2 = (x_1, x_2), x_1 + x_2 = 1 \wedge x_2 \geq 0$
$\overline{A} = A_1 \cup \partial A_1 = \{(x_1, x_2), x_1 + x_2 < 1 \wedge x_2 \geq 0\} \cup \{(x_1, x_2), x_1 + x_2 \leq 1 \wedge x_2 = 0\} \cup \{(x_1, x_2), x_1 + x_2 = 1 \wedge x_2 \geq 0\}$

2. int$A_2 = \emptyset$

$\partial A_2 = \{(x_1, x_2), x_1^2 + x_2^2 = 1 \bigwedge x_2 \geq 0\}$

$\overline{A_2} = \partial A_2$

3. int$A_3 = \emptyset$

$$\partial A_3 = \cup_{m=1}^{\infty}\{(\frac{1}{m}, 0); m \in N\} \cup_{n=1}^{\infty} \{(0, \frac{1}{n}\} \cup \{(0,0)\} \cup \ A_3$$

$\overline{A_3} = A_3 \cup \partial A_3$

[- 2.6 -]
1. Postupujme sporom. Nech $f \in A$ je vnútorný bod množiny A, potom $\exists \varepsilon > 0 : B(f, \varepsilon) \subset A$. Zvoľme $g_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon x$. Zrejme $g_\varepsilon \in B(f, \varepsilon)$, ale $g_\varepsilon(0) = f(0) = f(1) \neq f(1) + \varepsilon = g_\varepsilon(1)$. Teda g nepatrí do A, čo je spor.

2. $\partial A = A$ Platí totiž $A \subset \partial A$ na základe 1.. Naopak, ak g nepatrí do A, dá sa ukázať, že je vnútorný bod $C([0,1]) \setminus A$: Zvoľme $\varepsilon > 0 : 2\varepsilon < |g(0) - g(1)|$ Potom pre $f \in G(g, \varepsilon)$: $|f(0)-f(1)| > |g(0)-g(1)|-|g(0)-f(0)|-|g(1)-f(1)| > 2\varepsilon-|g(0)-f(0)|-|g(1)-f(1)| > 0$. Teda f nepatrí do A.

3. $\overline{A} = A$

[- 2.7 -] Keďže $\overline{A} = A \cup \partial A$, treba ukázať, že A je uzavretá práve keď $\partial A \subset A$.

[- 2.8 -] Zrejmé z definície hranice množiny.

[- 2.9 -] Najprv ukážte pomocné tvrdenia:
Lema 1. Ak A_1, A_2 sú uzavreté v $(X, \|.\|)$ LNP, tak $\partial(A_1 \cap A_2) = (\partial A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap \partial A_2)$.
Táto lema sa dá rozšíriť na n množín:
Lema 2. Ak $A_1, A_2, ...A_n$ sú uzavreté množiny v $(X, \|.\|)$ LNP, tak

$$\partial(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) =$$

$$(\partial A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) \cup (A_1 \cap \partial A_2 \cap ... \cap A_n) \cup ...(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap \partial A_n)$$

Teraz sa vráťme k našej úlohe. Nech

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}... & a_{2n} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2}... & a_{mn} \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$$

Zrejme $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n, Ax \leq b\} = \bigcap_{i=1}^{m} \{x; a_{i1}x_1 + ...a_{in}x_n \leq b_i\}$. Na základe Lemy 2 potom platí:

$$\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^{m} \{x, a_{i1}x_1 + ...a_{in}x_n = b_i, a_{k1}x_1 + ...a_{kn}x_n \leq b_k \forall k \neq i\}.$$

[- 2.10 -] Dôkaz vyplýva zo vzťahu $X \setminus \bigcap_{i\in S} A_i = \bigcup_{i\in S}(X \setminus A_i)$, kde S je ľubovoľný systém množín. Tvrdenie o konečnom zjednotení vyplýva z $X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{n}(X \setminus A_i)$.

[- 2.11 -]
1. postupnosť konverguje k $(0,0)^T$
2. postupnosť nekonverguje
3. postupnosť konverguje k $(1,0)^T$

[- 2.12 -] Konvergencia v priestore $(C([a,b]), \|.\|_\infty)$ znamená rovnomernú konvergenciu na $[a,b]$.
a) Keďže f_n konverguje rovnomerne k 0 na $[0,1]$, tak $f_n \to 0$ na X.

b) Keďže $f_n \to f$ na $[0,1]$, kde f je nespojitá na $[0,1]$, tak konvergencia na $[0,1]$, nie je rovnomerná a teda f_n nekonverguje v X.

[- 2.13 -] Áno, konverguje $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = (\frac{60}{11}, \frac{70}{11})$.

[- 2.14 -] Priestor je úplný, ak ľubovoľná Cauchyho postupnosť má limitu. Nech f_n je Cauchyho v X a teda $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall m, n > n_0 \quad \|f_n - f_m\| < \varepsilon$. Teraz $f_n(x)$ je Cauchyho v $\mathbb{R}$ $\forall x \in [a,b]$. $\mathbb{R}$ je úplný a teda $\forall x \in [a,b] \exists f(x) : f_n(x) \to f(x)$. Teraz treba ukázať rovnomernú konvergenciu na $[a,b]$. Nech $\varepsilon > 0$ ľubovoľné, z Cauchyovskosti f_n v X vezmeme n_0a $n > n_0$. Nech teraz $x \in [a,b]$. Zoberme $m > n_0$, kde m závislé na x. Potom $|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon$,. Tým pádom

$$|f_n(x) - f(x)| < |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \|f_n - f_m\| + |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon + \varepsilon.$$

Teda f_n konverguje k f rovnomerne na $[a,b]$, odkiaľ tiež vyjde, že f je spojitá.

[- 2.15 -] Viď návod.

Konvergencia v LNP

[- 2.16 -] a) nekonverguje b) konverguje k $(1,1)^T$ c) konverguje k $(e,0)^T$

[- 2.17 -] $f_n(\frac{\pi}{2}) \to 1$ a pre $x < \frac{\pi}{2} f_n(x) \to 0$, tak z nespojitosti f vyplýva nerovnomerná konvergencia f_n. Teda f_n nemá limitu v $(C([0,\pi]), \|.\|_\infty)$.

[- 2.18 -] Z rovnomernej konvergencie na $[-1,1]$ vyjde $f_n \to f$ v $(C([-1,1]), \|.\|_\infty)$, kde $f(x) = |x|$.

[- 2.19 -]
a) Nekonverguje, lebo bodovo konverguje k nespojitej funkcii a teda rovnomerne nekonverguje a teda ani v $(C([0,1]), \|.\|_\infty)$.
b) V priestore $(C([0,1]), \|.\|_1)$ postupnosť konverguje k 0, pretože $\int_0^1 |e^{\frac{-n}{2}x} - 0|dx = -\frac{2}{n}(e^{-\frac{n}{2}} - 1) \to 0$ pre $n \to \infty$.

[- 2.20 -]
1) Pre $x > \frac{1}{n_0}$ alebo pre $x = 0 : f_n(x) = 0 \ \forall n > n_0$ a teda $\forall x \in [0,1] \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.
2) Máme vlastne ukázať, že nekonverguje rovnomerne na $[0,1]$ k 0. $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 0|$ sa nadobúda v $(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1})\frac{1}{2}$. Ukážte že

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 0|$$

nekonverguje k 0 a teda konvergencia nie je rovnomerná.

3) Keby $f_n \to f$ v $(C([0,1]), \|.\|_1)$, tak

$$\int_0^1 |f_n - f|dx| \geq \int_a^1 |f_n - f|dx \;\; pre \;\; 0 < a < 1$$

Keďže pre $n_0 > \frac{1}{a} : f_{n_0}(x) = 0, \;\; f_n \to 0$ v $C([a,1]), 1)$. A teda keby $f_n \to f$ v $(C([0,1]), \|.\|_1)$, tak $f = 0$. Teraz

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} -n^6(x - \frac{1}{n+1})(x - \frac{1}{n})dx = \frac{n^6}{6n^3(n+1)^3} \to 1$$

a teda f_n nekonverguje v $(C([0,1]), \|.\|_1)$.

[- 2.21 -] Viď návod.

[- 2.22 -] Na otvorenosť O_1 treba ukázať, že $\{x \in \mathbb{R}^n; \sum a_i x_i \leq 0\}$ je uzavretá v $(X, \|.\|)$. Ukážte, že z $x_n \to x \;\; v \; X$, kde $x_n \in A$ vyplýva $x \in A$. Množina O_2 je špeciálny prípad množiny typu O_1.

[- 2.23 -] Ukážte, že $\|.\|$ je spojitá v LNP. Potom ak $x_n \in B_r(x), \;\; a \;\; x_n \to x, \|x_n - y\| \leq r$, tak aj

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - y\| = \|x - y\| \leq r.$$

Kompaktné množiny

[- 2.24 -] **1.** Keďže v $\mathbb{R}^n$ na to, aby množina bola kompaktná je nutné a stačí, aby bola uzavretá a ohraničená, dostaneme

1) A_1 kompaktná
2) A_2 nie je kompaktná, lebo nie je uzavretá
3) A_3 kompaktná

[- 2.25 -] Daná množina nie je ohraničená v danom priestore.

[- 2.26 -] Daná množina nie je uzavretá, zoberme postupnosť $f_n(x) = \frac{1}{n}$. Potom $f_n \in$ tej množiny a $f_n \to 0$ v $(C([0,1]), \|.\|_\infty)$.

[- 2.27 -]
a) Nech a_n je ľubovoľná postupnosť prvkov z $A_1 \cup A_2 \cup ..A_k$. Teraz $\exists$ vybraná podpostupnosť a_{n_s} tak, že $a_{n_s} \in A_i$ pre nejaké pevné $i \in \{1, 2, k\}$. Z kompaktnosti A_i vyplýva existencia vybranej konvergentnej podpostupnosti z tejto postupnosti.
b) Napr $A_n = [n, n+1]$

[- 2.28 -] Treba ukázať uzavretosť a ohraničenosť. Uzavretosť: Nech $x_n \to x, x_n \in K$. Z kompaktnosti K je zrejmé, že $x \in K$. Ohraničenosť: Nech nie je, potom $\forall n \exists x_n : \|x_n\| \geq n$, z kompaktnosti K vyplýva existencia konvergentnej a teda ohraničenej podpostupnosti a to je spor.

[- 2.29 -] Viď návod.

[- 2.30 -] Uzavretosť je zrejmá. Ohraničenosť dostaneme: $x_i = \frac{a_i x_i}{a_i} \leq \sum_{i=1}^n a_i x_i \frac{1}{a_i} \leq \frac{b}{a_i}$ a teda množina M je ohraničená.

[- 2.31 -] Viď návod.

Spojitosť funkcií v LNP

[- 3.1 -] Použijeme Banachovu vetu o pevnom bode. Ako priestor zvolíme $X = R$. Uzavretá množina $M = [1, \infty)$ a zobrazenie $T : [1, \infty) \to [1, \infty)$,dané vzťahom $T(x) = \sqrt{2 + \ln x}$. Nakoniec overte, že T je kontrakcia s $\theta = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

[- 3.2 -] Použijeme Banachovu vetu o pevnom bode. Za $X = R = M$. Definujme $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,vzťahom: $T(x) = \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{3} \cos x$. Ukážte, že zobrazenie T je kontrakcia: $|T(x) - T(y)| = |T'(\theta)(x - y)| = |\frac{1}{2} \cos \theta - \frac{1}{3} \sin \theta||x - y| \leq \frac{5}{6}|x - y|$.

[- 3.3 -] Pre riešenie x^* platí $|x_n - x^*| \leq \frac{\theta^n}{1-\theta}|x_1 - x_0|$, kde $x_0 \in M$ je počiatočný bod, $x_n = T(x_{n-1})$. a) Pre príklad 1: $x_0 = 1, x_1 = \sqrt{2} \geq 1$. Potom platí: $|x^* - x_n| \leq \frac{\theta^n}{1-\theta}|x^1 - x_0|$. Hľadáme, pre aké n platí $|x^* - x_n| \leq 10^{-3}$. Po dosadení za $n = 7$ dostaneme $x^* \doteq 1.5644$.
b) Riešime ako a) .$x_0 = 0, x_1 = T(0) = \frac{1}{3}, \theta = \frac{5}{6}, |x^n - x_\nabla| \preceq \frac{\theta^n}{1-\theta}|x_1 - x_0| \leq (\frac{5}{6})^n.2 < 10^{-3}$ pre $n > 42$. Výpočtom dostávame $n = 42, x^* \approx 0.543995227$.

[- 3.4 -] Použijeme Banachovu vetu o pevnom bode. Za $X = R, M = [0, \infty)$. Koeficient kontrakcie: $k = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Teraz podľa Banachovej vety $\exists \lim x_n = x^*$. a teda $x^* = \sqrt{2 + x^*}$ a teda $x^* = 2$.

[- 3.5 -] Použijeme Banachovu vetu o pevnom bode. Ako priestor uvažujme $X = \mathbb{R}^2 = M$, Na X uvažujme normu $\|.\|_\infty$ a definujme operátor $T((x, y)) = (\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \sin(x+y), \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \cos(x-y))$, $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Po výpočte koeficient kontrakcie $\theta = \frac{3}{4}$.

[- 3.6 -] Nech existuje riešenie. Potom $x > 0$, lebo $e^{-\frac{x}{2}} > 0$ a $e^{-\frac{x}{2}} < 1$ a teda $x \in [0, 1]$ Teda $X = R, M = [0, 1]$. Zoberme $Tx = e^{-\frac{x}{2}}$.Koeficient kontrakcie $\theta = \frac{1}{2}$. Približná hodnota iteráciami $x_\nabla = 0.703467$.

[- 3.7 -] Viď návod.

[- 3.8 -] Použijeme Banachovu vetu o pevnom bode. Za $X = C[t_0, t_0 + \delta]$, s normou $\|.\|_\infty$. Teda X je úplný LN. $M = X$ Nech $x, y \in C_\infty[t_0, t_0 + \delta]$. Teraz

$$\|Tx - Ty\|_\infty \leq L\delta\|x - y\|_\infty.$$

Keďže $L\delta < 1$,tak predpoklady Banachovej vety sú splnené.

[- 3.9 -] Definujme si $f : f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{3}{x})$. Zrejme ak $x_1 = 1$, tak $x_2 = 2, x_3 = \frac{7}{4}$. Teraz

$$f'(x) = \frac{1}{2x^2}(x^2 - 3)$$

Pre $x \geq \sqrt{3} : f$ je rastúca a $f : [\sqrt{3}, \infty) \to [\sqrt{3}, \infty)$. Teda $\forall n \geq 2 : x_n \in [\sqrt{3}, \infty)$ a je klesajúca postupnosť, lebo $x_3 \leq x_2$. Teda postupnosť $\{x_n\}$ je zdola ohraničená a klesajúca a teda má limitu x_∇ pre ktorú zo spojitosti platí $f(x) = x$, odkiaľ $x_\nabla = \sqrt{3}$.

[- 3.10 -] a) $\sqrt{2}, \sqrt{5}$; b) Nie je definovaná, $\frac{\pi}{2}$.

[- 3.11 -] a) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq r^2\}$;
b) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$;

c) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 > 4x - 8\}$;
d) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x \geq 0 \wedge 2k\pi \leq y \leq (2k+1)\pi,\ k \in Z) \vee (x \leq 0 \wedge (2k+1)\pi \leq y \leq (2k+2)\pi,\ k \in Z)\}$;
e) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (|x| \leq 1 \wedge |y| \leq 1) \vee (|x| \geq 1 \wedge |y| \geq 1)\}$;
f) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \wedge 2k\pi \leq y \leq (2k+1)\pi,\ k \in Z\}$;
g) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x > 0 \wedge 1 - x \leq y \leq 1 + x) \vee (x < 0 \wedge 1 - x \geq y \geq x + 1\}$;
h) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x > 0 \wedge y > 0 \wedge y \leq x) \vee (x < 0 \wedge y < 0 \wedge y \geq x)\}$;
i) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (1 < x^2 + y^2 < 9) \wedge [(x > 0 \wedge -x \leq y \leq x) \vee (x < 0 \wedge x \leq y \leq -x)]\}$;
j) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |y| + |z| \neq 0\}$;
k) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x > 0 \wedge y > 0 \wedge z > 0) \vee (x > 0 \wedge y < 0 \wedge z < 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0 \wedge z > 0) \vee (x < 0 \wedge y > 0 \wedge z < 0)\}$;
l) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.

[- 3.12 -]
a) Paraboly o rovniciach $y = k,\ z = x^2 - k^2;\ x = k,\ z = k^2 - y^2$, kde $k \in \mathbb{R}$.
b) Paraboly $x = k,\ z = k.y^2$; priamky $y = k,\ z = k^2.x$, kde $k \in \mathbb{R}$.

[- 3.13 -]
a) Pre $0 \leq k < 1$ je vrstevnicou kružnica o rovnici $x^2 + y^2 = 1 - k^2,\ z = k$; pre $k = 1$ je vrstevnicou bod $[0, 0, 1]$; pre $k > 1$ graf funkcie a rovina $z = k$ nemajú spoločné body.
b) Pre $k > 0$ je vrstevnica elipsa o rovnici $3x^2 + 2y^2 = k,\ z = k$; pre $k = 0$ je vrstevnicou bod $[0, 0, 0]$; pre $k < 0$ graf funkcie a rovina $z = k$ nemajú spoločné body
c) Pre $k \neq 0$ je vrstevnicou hyperbola o rovnici $xy = k,\ z = k$; pre $k = 0$ je vrstevnicou os x a os y.

[- 3.14 -] a) Rovina, b) rovina, c) eliptický paraboloid, d) hyperbolický paraboloid, e) rotačný paraboloid, f) časť guľovej plochy $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0$, g) časť kužeľovej plochy $z^2 = x^2 + y^2,\ z \geq 0$, h) parabolická valcová plocha.

[- 3.15 -] 1) 5; 2.) $\frac{1}{4}$; 3.) 2; 4.) a; 5.) ∞, použite vzorec $\lim\limits_{n \to 0} \dfrac{\sin n}{n} = 1$; 6.) 4; 7.) 0, najprv urobte odhad uvedenej funkcie zhora i zdola pomocou vhodných funkcií, ktorých limity viete vypočítať ($0 < \frac{x+y}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y},\ \forall (x, y) \neq (0, 0)$); 8.) 0, urobte odhad $0 < (x^2 + y^2)e^{-(x+y)} < \frac{x^2}{e^x} + \frac{y^2}{e^y}$ pre $x > 0,\ y > 0$; 9.) 0, urobte odhad $0 < \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2} \leq (\frac{1}{2})^{x^2}$; 10.) 1, $x^2y^2 \leq \frac{1}{4}(x^2 + y^2)^2,\ 1 \geq \left(x^2 + y^2\right)^{x^2y^2} \geq \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2}$ pre $0 < x^2 + y^2 \leq 1,\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2} = \lim\limits_{t \to 0^+} t^{t^2} = 1$, kde $t = x^2 + y^2$; 11.) 0, najprv upravte funkciu takto: $\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = x\left(1 - \frac{y^2}{x^2+y^2}\right) + y\left(1 - \frac{x^2}{x^2+y^2}\right)$ a potom použite vetu o limite súčinu dvoch funkcií, z ktorých jedna konverguje k nule a druhá funkcia je ohraničená; 12.) e^2, upravte funkciu na tvar $\left[(1 + xy)^{\frac{1}{xy}}\right]^{\frac{2y}{x+y}}$ a položte $t = xy,\ t \to 0$ pre $x \to 0,\ y \to 2$; 13) 0, využite nerovnosť $x^4 + y^4 \geq \frac{(x^2+y^2)^2}{2}$ a položte $t = x^2 + y^2$.

[- 3.16 -] a) Neexistuje, využite vetu 1. 4. 1. a zvoľte postupnosť $\{(x, l.x_k)\}_{k=1}^{\infty}$, kde $x_k \to 0,\ x_k \neq 0,\ l \in \mathbb{R}$.
b) 0, využite nerovnosť $|\sin xy| \leq |xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

[- 3.17 -] Postupujte podobne ako v predošlom príklade a voľte vhodné postupnosti bodov, ktoré budú protirečiť Heineho definícii limity.

[- 3.18 -] Použite definíciu a položte $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, potom urobte odhad funkcie: $|(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}|$ zhora, $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ ak $x : \varrho(x,0) < \sqrt{x^2+y^2}$, tak $|x| < \delta,\ |y\ |< \delta$ a $|f(x,y) - 0| = |(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}| \leq |x| + |y| < 2\delta = \varepsilon$.

[- 3.19 -] a) $1, -1$. b) $1, 1$. c) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$. d) $0, 1$.

[- 3.20 -] Zvolte si dve postupnosti $\{(\frac{1}{k}, \frac{1}{k})\}_{k=1}^{\infty}$ a $\{(\frac{1}{k}, -\frac{1}{k})\}_{k=1}^{\infty}$.

[- 3.21 -] Obidve dvojnásobné limity sa rovnajú 0, k dôkazu toho, že limita neexistuje, zvoľte postupnosť $\{(x_k, x_k)\}_{k=1}^{\infty},\ x_k \to \infty$.

[- 3.22 -] Neexistujú, upravte funkciu na tvar $f(x,y) = x\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ a uvážte existenciu limity obidvoch sčítancov pri pevnom $y \neq 0,\ y \neq \frac{1}{k\pi},\ k \in Z$ a $x \to 0$. Analogicky uvažujte existenciu limity obidvoch sčítancov pre $y \to 0$ pri pevnom $x \neq 0,\ x \neq \frac{1}{k\pi},\ k \in Z$.

[- 3.23 -] 1.)Nedá sa dodefinovať na spojitú v $(0,0)$. 2.) $(0,0)$; 3.) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \geq 4\}$; 4.) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$; 5.)Dá sa dodefinovať na spojitú na R^2. 6.) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2-z^2 = 0\}$; 7.) $(1,2,-1)$.

[- 3.24 -] Uvažujte prírastok funkcie v bode $(0,0)$ prislúchajúci prírastku Δx premennej x, t. j. $\Delta_x f = f(\Delta x, 0) - f(0,0) = 0,\ \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta_x f = 0$, t. j. $f(x,y)$ je spojitá v bode $(0,0)$ vzhľadom k premennej x. Analogicky možno dokázať spojitosť $f(x,y)$ v bode $(0,0)$ vzhľadom k obidvom premenným (pozri výsledok príkladu 3. 16 a)).

[- 3.25 -] Funkciu upravte takto: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}.\frac{\sin y}{y}, & xy \neq 0 \\ 1, & xy = 0 \end{cases}$, pretože $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 1 = f(0,0)$ je f spojitá v bode $(0,0)$ a spojitá podľa jednotlivých premenných zvlášť. Uvažujte funkciu $f(x,0)$. Podľa definície $f(x,0) = 1$ pre všetky x. Táto funkcia je spojitá v bode $x = 1$ a $f(x,y)$ je spojitá v bode $(1,0)$ vzhľadom na premennú x. Uvažujte ďalej funkciu $f(1,y)$. Pretože $\lim\limits_{y\to 0} \neq f(1,0)$, tak $f(1,y)$ nie je spojitá v bode $y = 0$. Funkcia $f(x,y)$ nie je spojitá v bode $(1,0)$ vzhľadom na premennú y. Funkcia $f(x,y)$ nie je spojitá v $(1,0)$.

[- 3.26 -] Postupujte podľa návodu.

[- 3.27 -] $f(x,y,z) = \begin{cases} 3x+4y-2z+5, & x \neq 0,\ y \neq 1,\ z \neq 2 \\ 5, & x = 0,\ y = 1,\ z = 2. \end{cases}$

[- 3.28 -] Uvažujte ľubovoľný bod (x_0, y_0), pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ zvolíte $\delta_1 > 0$ tak, aby pre $|y - y_0| \leq \delta_1$ platilo $|f(x_0,y_0) - f(x_0,y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Zo spojitosti funkcie $f(x,y)$ vzhľadom k x vyplýva, že dá sa zvoliť $\delta_2 > 0$ tak, aby pre $|x - x_0| \leq \delta_2$ platilo $|f(x, y_0 \pm \delta_1) - f(x_0, y_o \pm \delta_1)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Predpokladajte, že $f(x,y)$ monotónne rastie vzhľadom k y. Potom pre $|x - x_0| \leq \delta_2,\ |y - y_0| \leq \delta_1$ dostanete $f(x, y_0 - \delta_1) \leq f(x,y) \leq f(x, y_0 + \delta_1)$, pričom $|f(x, y_0 \pm \delta_1) - f(x_0,y_0)| \leq| f(x, y_0 \pm \delta_1) - f(x_0, y_0 \pm \delta_1)| + |\ f(x_0, y_0 \pm \delta_1) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon$, odkiaľ dostanete, že $|f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon$, teda $f(x,y)$ je spojitá v bode (x_0,y_0).

[- 3.29 -] Upravte $|f(x,y) - f(x_0,y_0)|$ takto: $|f(x,y) - f(x_0,y_0)| \leq |f(x,y) - f(x,y_0)| + |f(x,y_0) - f(x_0,y_0)|$. Využite Lipschitzovu podmienku vzhľadom na y pre funkciu f a spojitosť $f(x,y)$ vzhľadom na x (t. j. $f(x,y_0)$ je spojitá v bode x_0).

[- 3.30 -] $\sup\limits_M f = \max\limits_M f = 81$, napríklad v bode $(0,3)$; $\inf\limits_M f = 0,\ \min\limits_M f$ neexistuje.

[- 3.31 -] $\sup\limits_M f = \max\limits_M f = \dfrac{1}{e}$, napríklad v bode $(1,1)$; $\inf\limits_M f = \min\limits_M f = 0$, napríklad v bode

$(0,0)$.

[- 3.32 -] Využite definíciu rovnomernej spojitosti funkcie a pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ zvoľte $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$.

[- 3.33 -] Funkcia $f(x,y)$ je spojitá na množine M, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0$, položte $f(0,0) = 0$, potom $f(x,y)$ bude rovnomerne spojitá na $\overline{M}$.

[- 3.34 -] Funkcia $f(x,y)$ nie je rovnomerne spojitá na M. Uvažujte dve postupnosti bodov (pre k prirodzené) $a_k = (0, \frac{1}{k})$ $b_k = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$, ktoré patria do oboru definície funkcie $f(x,y)$. Zistite, že $|a^k - b^k| \to 0$ pre $k \to \infty$ ale $|f(a^k) - f(b^k)| = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ pre všetky k.

[- 3.35 -] Funkcia $f(x,y)$ nie je rovnomerne spojitá na M. Zostrojme postupnosti pre k prirodzené $a_k = (0, \sqrt{1 - \frac{1}{2k}}), b_k = (0, \sqrt{1 - \frac{2}{4k+1}})$. Potom $|a_k - b_k| \to 0$ pre $k \to \infty$, ale $|f(a_k) - f(b_k)| = 1.$.

[- 3.36 -] Funkcia $f(x,y)$ je rovnomerne spojitá na M.

[- 3.37 -] Funkcia $f(x,y)$ je rovnomerne spojitá na M.

[- 3.38 -] Funkcia $f(x,y)$ je rovnomerne spojitá na M. Upravte rozdiel $|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)|$ takto:

$$\left|\sqrt{x_1^2 + y_1^2} - \sqrt{x_2^2 + y_2^2}\right| = \frac{|(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + (y_1 - y_2)(y_1 + y_2)|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

$$\leq |x_1 - x_2\ | \frac{|x_1| + |x_2|}{\sqrt{x_1^2} + \sqrt{x_2^2}} + |y_1 - y_2| \frac{|y_1\ | + |y_2|}{\sqrt{y_1^2} + \sqrt{y_2^2}} = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2\ |$$

a zvoľte $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

Diferencovateľnosť funkcií viac premenných

[- 4.1 -]

a) $\frac{\partial z}{\partial x} = e^x \left[\cos(xy) - y\sin(xy)\right];\ \frac{\partial z}{\partial y} = -xe^x \sin(xy)$;

b) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^2 - 2xy - x^2 + 1}{(x^2+y^2+1)^2};\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2 - 2xy - y^2 + 1}{(x^2+y^2+1)^2}$;

c) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{2x^2+y^2};\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{2x^2+y^2}$;

d) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}};\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$;

e) $\frac{\partial z}{\partial x} = 2(x+y)e^{(x+y)^2};\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2(x+y)e^{(x+y)^2}$;

f) $\frac{\partial z}{\partial x} = \cos 2x;\ \frac{\partial z}{\partial y} = \cos 2y$;

g) $\frac{\partial z}{\partial x} = 8xy^4(x^2+1)^3;\ \frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3(x^2+1)^4$;

h) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^2}{\cos^2(xy)};\ \frac{\partial z}{\partial y} = \mathrm{tg}\ (xy) + \frac{xy}{\cos^2(xy)}$;

i) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2};\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{x^2+y^2}$;

j) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{x(x^2+y^2)}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2-y^2}{y(x^2+y^2)}$;

k) $\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy}(1+xy)$; $\frac{\partial z}{\partial y} = xe^{xy}(1+xy)$;

l) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2y}{(x-y)^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x}{(x-y)^2}$;

m) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}$;

n) $\frac{\partial z}{\partial z} = \frac{1}{y}\frac{1}{\sin\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{\cos\frac{x}{y}} = \frac{1}{y}\operatorname{cosec}\frac{x}{y}.\sec\frac{x}{y}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}\sec\frac{x}{y}\operatorname{cosec}\frac{x}{y}$;

o) $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y\ln x$;

p) $\frac{\partial z}{\partial x} = \left[2x\ln\frac{xy}{x^2+y^2} + \frac{x(y^2-x^2)}{x^2+y^2}\right]\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2(x^2-y^2)}{y(x^2+y^2)}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$.

[- 4.2 -]
a) $\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2yz^2$; $\frac{\partial u}{\partial y} = x^3z^2$; $\frac{\partial u}{\partial z} = 2x^3yz$;
b) $\frac{\partial u}{\partial x} = 2anx\left(ax^2+by^2+xz^2\right)^{n-1}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = 2bny\left(ax^2+by^2+cz^2\right)^{n-1}$;
$\frac{\partial u}{\partial z} = 2cnz\left(ax^2+by^2+cz^2\right)^{n-1}$;
c) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{|z|y}{z\sqrt{z^2-x^2y^2}}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{|z|x}{z\sqrt{z^2-x^2y^2}}$; $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{xy}{|z|\sqrt{z^2-x^2y^2}}$;
d) $\frac{\partial u}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2+z^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2+z^2}$; $\frac{\partial u}{\partial z} = 2ze^{x^2+y^2+z^2}$;
e) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{z\cos xy}{1+x^2z^2} - y\sin(xy)\operatorname{arctg}(xz)$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -x\sin(xy)\operatorname{arctg}(xz)$; $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{x\cos(xy)}{1+x^2z^2}$;
f) $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{z}{x}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{z}{y}$; $\frac{\partial u}{\partial z} = \ln\frac{y}{x}$;
g) $\frac{\partial u}{\partial x} = e^{xyz}\cos y(yz\sin x + \cos x)$; $\frac{\partial u}{\partial y} = e^{xyz}\sin x(xz\cos y - \sin y)$; $\frac{\partial u}{\partial z} = xye^{xyz}\sin x\cos y$;
h) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{z}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^z$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{z}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z$; $\frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{x}{y}\right)^z\ln\frac{x}{y}$;
i) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{xz}x^{y/z}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = x^{y/z}\frac{\ln x}{z}$; $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{y}{z^2}x^{y/z}\ln x$.

[- 4.3 -] a) $z = 6x-1, y = 2$; b) $z = 8y+1, x = 3$.

[- 4.4 -] a) $z = 13-12y, x = 2$; b) $z = 8x-15, y = 1$.

[- 4.5 -] a) $\begin{pmatrix} v & u \\ 2u & 2v \\ 2u & -2v \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{v}, -\frac{u}{v^2} \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} \operatorname{tg} u + \frac{u}{\cos^2 u} \\ \sin u + u\cos u \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 2u & 2v & 2w \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

[- 4.6 -] a) r; b) $\frac{2y}{x(x^2+y^2)}$; c) $r^2\cos\psi$; d) $\frac{2y}{x}$; e) $2ur$.

[- 4.7 -]
a) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{3xy^2}{(x^2+y^2)^{5/2}}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{x(x^2-2y^2)}{(x^2+y^2)^{5/2}}$; , $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{y(2x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^{5/2}}$;
b) $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2x\sin x^2}{y}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\cos x^2}{y^2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2\sin x^2+4x^2\cos x^2}{y}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{2x\sin x^2}{y^2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2\cos x^2}{y^3}$;
c) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{y}\sec^2\frac{x^2}{y}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2}\sec^2\frac{x^2}{y}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2}{y}\sec^2\frac{x^2}{y} + \frac{8x^2}{y^2}\sin\frac{x^2}{y}\sec^3\frac{x^2}{y}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} =, -\frac{2x}{y^2}\sec^2\frac{x^2}{y} - \frac{4x^2}{y^3}\sin\frac{x^2}{y}\sec^3\frac{x^2}{y}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2x^2}{y^3}\sec^3\frac{x^2}{y} + \frac{2x^4}{y^4}\sin\frac{x^2}{y}\sec^3\frac{x^2}{y}$
d) $\frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = x^y\ln x$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^y\ln^2 x$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = x^{y-1}(1+y\ln x)$; $x > 0$;
e) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{1+x^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{1+y^2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = 0$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{2y}{(1+y^2)^2}$;

f) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{|y|}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x\text{sgn}\, y}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{(x^2-y^2)\text{sgn}\, y}{(x^2+y^2)^2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2}$; pre $y \neq 0$;
g) $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$; $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2y^2-x^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{3xz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{3yz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{2z^2-x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$;
h) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{z}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^z$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{z}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z$; $\frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{x}{y}\right)^z \ln\frac{x}{y}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{z(z-1)}{x^2}\left(\frac{x}{y}\right)^z$; $u_{yy} = \frac{z(z-1)}{y^2}(\frac{x}{y})^z$, $u_{zz} = (\frac{x}{y})^z.\ln^2(\frac{x}{y})$, $u_{xy} = -\frac{z^2}{xy}(\frac{x}{y})^z$, $u_{yz} = -\frac{1}{y}(\frac{x}{y})^z - \frac{z}{y}(\frac{x}{y})^z.\ln(\frac{x}{y})$, $u_{xz} = \frac{1}{x}(\frac{x}{y})^z + \frac{z}{x}(\frac{x}{y})^z.\ln(\frac{x}{y})$

[- 4.8 -] Riešte dosadením.

[- 4.9 -] 0.

[- 4.10 -] $\frac{(-1)^m 2(m+n-1)!(nx+my)}{(x-y)^{m+n+1}}$.

[- 4.11 -] $p!q!$.

[- 4.12 -] $(x+p)(y+q)(z+r)e^{x+y+z}$.

[- 4.13 -] $\sin\frac{n\pi}{2}$.

[- 4.14 -] a) $Au = -u,\ A^2u = u$; b) $Au = 1,\ A^2u = 0$.

[- 4.15 -]
a) $\Delta_1 u = \frac{1}{r^4}$, kde $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\Delta_2 u = 0$
b) $\Delta_1 u = 9\left[(x^2-yz)^2 + (y^2-xz)^2 + (z^2-xy)^2\right]$, $\Delta_2 u = 6(x+y+z)$.

[- 4.16 -] Pri dôkaze spojitosti využijeme definíciu spojitosti funkcie f v bode $(0,0)$; parciálne derivácie $f'_x(0,0),\ f'_y(0,0),\ f''_{xy}(0,0),\ f''_{yx}(0,0)$ vypočítajte podľa definície.

[- 4.17 -] Použite vzorec na výpočet diferenciálu k - tého rádu pre $k = 2,\ n = 2$ (resp. $n = 3$).
a) $du = mx^{m-1}y^n dx + nx^m y^{n-1} dy,\ d^2u = m(m-1)x^{m-2}y^n(dx)^2 + 2mnx^{m-1}y^{n-1}dxdy + n(n-1)x^m y^{n-2}(dy)^2 = x^{m-2}y^{n-2}\left(m(m-1)y^2(dx)^2 + 2mnxydxdy + n(n-1)x^2(dy)^2\right)$; b) $du = \frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}},\ d^2u = \frac{(ydx-xdy)^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$; c) $du = \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$,
$d^2u = \frac{(y^2-x^2)\left[(dx)^2-(dy)^2\right]-4xydxdy}{(x^2+y^2)^2}$; d) $du = (y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz, d^2u = 2dxdy + 2dxdz + 2dydz$; e) $du = \frac{-2xzdx-2yzdy+(x^2+y^2)dz}{(x^2+y^2)^2}$,
$d^2u = \frac{2z\left[(3x^2-y^2)(dx)^2+8xydxdy+(3y^2-x^2)(dy)^2\right]}{(x^2+y^2)^3} - \frac{4(x^2+y^2)(xdx+ydy)dz}{(x^2+y^2)^3}$.

[- 4.18 -] $df(1,1,1) = (x-1) - (y-1) = dx - dy$,
$d^2f(1,1,1) = 2(dy+dz)(dy-dx)$.

[- 4.19 -] Riešte dosadením.

[- 4.20 -] Riešte dosadením.

[- 4.21 -] $F(r) = f''(r) + \frac{2}{r}f'(r)$. Použite pritom vetu o derivovaní zloženej funkcie. Pomocou nej dostanete napr. $\frac{\partial u}{\partial x_1} = f'(r)\frac{\partial r}{\partial x_1}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = f''(r)\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)^2 + f'(r)\frac{\partial^2 r}{\partial x_1^2}$. Podobne nájdite výrazy pre parciálne derivácie zloženej funkcie podľa ostatných premenných.

[- 4.22 -] Dosadením dostanete výsledok 1.

[- 4.23 -] Riešte dosadením.

[- 4.24 -] Riešte dosadením.

[- 4.25 -] Návod: Z vety o derivácii zloženej funkcie máme: $\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(v)\frac{\partial v}{\partial x} + \psi'(w)\frac{\partial w}{\partial x}$; $\frac{\partial u}{\partial t} = \varphi'(v)\frac{\partial v}{\partial t} + \psi'(w)\frac{\partial w}{\partial t}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi''(v)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \varphi'(v)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \psi''(w)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \psi'(w)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \varphi''(v)\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \varphi'(v)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \psi''(w)\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + \psi'(w)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$, kde v, w sú vnútorné zložky zložených funkcií. V našom prípade a) je $v = x - at,\ w = x + at$.

[- 4.26 -] Položte $y = 2x$. Potom prvú podmienku derivujte dvakrát podľa x a druhú podmienku raz podľa x ako zloženú funkciu. Tým dostanete systém lineárnych algebrických rovníc vzhľadom na hľadané druhé parciálne derivácie. Výsledok je potom $u''_{xx}(x, 2x) = u''_{yy}(x, 2x) = -\frac{4}{3}x$; $u''_{xy}(x, 2x) = \frac{5}{3}x$.

[- 4.27 -] Integrujte rovnicu postupne n - krát podľa y, pričom namiesto konštanty integrovania budeme mať vždy funkciu premennej x.
$z = \varphi_0(x) + y\varphi_1(x) + \cdots + y^{n-1}\varphi_{n-1}(x)$.

[- 4.28 -] $z = x^2y + y^2 - 2x^4 + 1$.

[- 4.29 -] $z = 1 + xy + y^2$.

[- 4.30 -] $z = x + y^2 + 0,5xy(x + y)$.

Transformácie, pravidlo reťazenia

[- 4.31 -] Uvažujte zloženú funkciu premennej t: $u(t) = y(x)$, kde $x = e^t$. Postupným derivovaním funkcie $u(t)$ vyjadrite derivácie $y'(x),\ y''(x)$ pomocou derivácií $u'(t),\ u''(t)$ funkcie $u(t)$. Nájdené výrazy pre $y'(x),\ y''(x)$ a $x = e^t$ dosadíte do danej rovnice. Tak dostanete transformovanú rovnicu: $\frac{d^2u}{dt^2} + u = 0$.

[- 4.32 -] $\frac{d^3u}{dt^3} - 3\frac{d^2u}{dt^2} + 2\frac{du}{dt} - 6u(t) = 0$. Návod: Pretože $t = \ln|x|,\ |x| = e^t$. Ďalej postupujeme, ako v úlohe 4.31.

[- 4.33 -] $\frac{d^2u}{dt^2} + n^2u = 0$.

[- 4.34 -] $\frac{d^2u}{dt^2} + m^2u = 0$. Návod: Úlohy riešime podobným spôsobom, ako úlohu 4. 31.

[- 4.35 -] Dvojnásobným derivovaním výrazu pre y, v ktorom u je funkcia premennej x, dostanete výrazy pre y' a y'', ktoré dosadíte do danej rovnice. Tak dostanete rovnicu: $u'' + \left[g(x) - \frac{1}{4}p^2(x) - \frac{1}{2}p'(x)\right]u = 0$.

[- 4.36 -] $u''(t) + u'(t)\,(3 + u(t)) + 2u(t) = 0$. Návod: Pre vyjadrenie $\frac{dy}{dx}$ v nových premenných využijeme vzorec, uvedený v odseku 1, pričom $x = f(t),\ y = g(t)$, kde $g(t)$ je súčin funkcií premennej t. Tak dostaneme $\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$. Ďalej derivujeme získanú rovnosť pre $\frac{dy}{dx}$ podľa t, pričom ľavú stranu derivujeme ako zloženú funkciu premennej t (vnútorná zložka je $x = e^t$). Výrazy pre $x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2}$ v nových premenných dosadíme do danej rovnice.

[- 4.37 -] $u''(t) + 8u\,(u'(t))^3 = 0$. Postupujeme podobne ako v úlohe 4.36.

[- 4.38 -] Na vyjadrenie $\frac{dy}{dx}$ pomocou nových premenných r a φ a vezmite do úvahy, že f a g sú súčiny funkcií premennej φ : $f(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi, g(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi$. Preto sa derivácia $\frac{dy}{dx}$ vyjadrí v nových premenných vzorcom, uvedeným v návode k úlohe 4. 36. Po dosadení nájdeného výrazu pre $\frac{dy}{dx}$ a výrazov pre x a y do danej rovnice dostanete algebrickú rovnicu vzhľadom na deriváciu $\frac{dr}{d\varphi}$. Napokon dostanete výsledok: $\frac{dr}{d\varphi} = r$.

[- 4.39 -] $\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1-\sin 2\varphi}{\sin 2\varphi} r^2$.

[- 4.40 -] Funkcia z je zložená funkcia premenných x a y, t. j. $z = z(\xi, \eta)$, kde $\xi = x + y,\ \eta = x - y$. Podľa pravidla derivovania zloženej funkcie vyjadrite parciálne derivácie $\frac{\partial z}{\partial x}$ (resp. $\frac{\partial z}{\partial y}$) pomocou parciálnych derivácií $\frac{\partial z}{\partial \xi}$ a $\frac{\partial z}{\partial \eta}$. Dosadením do danej rovnice dostanete parciálnu diferenciálnu rovnicu 1. rádu $\frac{\partial z}{\partial \eta} = 0$. Jej integrovaním podľa η dostanete $z = \varphi(\xi) = \varphi(x+y)$, kde φ je ľubovoľná diferencovateľná funkcia.

[- 4.41 -] Pri derivovaní zloženej funkcie $z = z(\xi, \eta)$, kde $\xi = x,\ \eta = y - bz$, podľa x (resp. podľa y) vezmite do úvahy, že v druhej zložke $\eta = y - bz$ je z funkciou x a y. Riešenie rovnice je: $z(x, y) = \frac{x}{a} + \varphi(y - bz)$, kde φ je ľubovoľná diferencovateľná funkcia.

[- 4.42 -] Podobným spôsobom, ako v úlohe 4. 40 vyjadríme derivácie $\frac{\partial z}{\partial x}$ a $\frac{\partial z}{\partial y}$ pomocou derivácií $\frac{\partial z}{\partial \xi}$ a $\frac{\partial z}{\partial \eta}$. Dosadením do danej rovnice dostaneme: $\xi \frac{\partial z}{\partial \xi} = z$ alebo $\frac{\frac{\partial z}{\partial \xi}}{z} = \frac{1}{\xi}$, odkiaľ integrovaním podľa ξ máme $\ln|z(\xi, \eta)| = \ln|\xi| + \ln|\varphi(\eta)|$. Teda: $z = \xi\varphi(\eta) = x\varphi(\frac{y}{x})$, kde φ je ľubovoľná diferencovateľná funkcia.

[- 4.43 -] Položte $z = z(u, v)$, kde u a v sú uvedené v úlohe funkcie premenných x a y. Podľa pravidla derivovania zloženej funkcie nájdete výrazy pre $\frac{\partial z}{\partial x}$ a $\frac{\partial z}{\partial y}$. Vezmite do úvahy, že $x = e^u,\ y = \sinh v$ a vyjadrite $\frac{\partial z}{\partial x}$ a $\frac{\partial z}{\partial y}$ v nových premenných. $\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = e^u \sinh v$.

[- 4.44 -] $\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} = 0$.

[- 4.45 -] $3\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} = 0$. Uvažujte zloženú funkciu premenných x a y: $z = z(u, v)$, kde $u = x + 2y + 2$, $v = x - y - 1$. Dvojnásobným derivovaním tejto funkcie podľa pravidla derivovania zloženej funkcie vyjadrite všetky v rovnici uvedené parciálne derivácie z podľa premenných x a y cez parciálne derivácie funkcie z podľa premenných u a v.

[- 4.46 -] a)Pozrite si riešený príklad, $n = 2$. $\Delta u = \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr}$; b)Využite a). $\Delta(\Delta u) = \frac{d^4u}{dr^4} + \frac{2}{r}\frac{d^3u}{dr^3} - \frac{1}{r^2}\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r^3}\frac{du}{dr}$.

[- 4.47 -] $\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$. Návod: Uvažujte v zloženej funkcii premenných $x, y, z : u = u(\xi, \eta, \zeta)$, kde $\xi = x,\ \eta = y - x,\ \zeta = z - x$ a použite pravidlo derivovania zloženej funkcie podľa x, podľa y, resp. podľa z.

[- 4.48 -] $w = \frac{\partial u}{\partial \varphi}$. Návod: Nech $u(r, \varphi) = u(x(r, \varphi), y(r, \varphi))$, potom dostanete (nezávislé premenné sú r a φ):

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial r}, \qquad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial \varphi},$$

pričom $\frac{\partial x}{\partial r}$ (resp. $\frac{\partial x}{\partial \varphi}$), $\frac{\partial y}{\partial r}$ (resp. $\frac{\partial y}{\partial \varphi}$) dostanete derivovaním podľa r (resp. podľa φ) daných vzťahov pre x a y. Rozriešením získaného systému rovníc vzhľadom na $\frac{\partial u}{\partial x}$ a $\frac{\partial u}{\partial y}$ dostaneme, že

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{r}\left(r\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial r} - \sin\varphi\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right), \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{r}\left(r\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial r} + \cos\varphi\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right).$$

Ďalej dosaďte tieto výrazy a $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$ do výrazu w.

[- 4.49 -] $w = r\frac{\partial u}{\partial r}$.

[- 4.50 -] $w = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}$. Návod: Derivovaním 1. rovnosti podľa r a 2. rovnosti podľa φ, ktoré sú uvedené na začiatku návodu k úlohe 4. 48, podľa pravidla derivovania zloženej funkcie nájdeme:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.\frac{\partial x}{\partial r}.\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial^2 x}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial^2 y}{\partial r^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.\frac{\partial x}{\partial \varphi}.\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}.$$

Dosadíme nájdené výrazy pre $\frac{\partial u}{\partial x}$ (resp. $\frac{\partial u}{\partial y}$) v nových premenných v úlohe 4.48 a výrazy pre $\frac{\partial x}{\partial r}$ (resp. $\frac{\partial x}{\partial \varphi}$), $\frac{\partial y}{\partial r}$ (resp. $\frac{\partial y}{\partial \varphi}$), $\frac{\partial^2 x}{\partial r^2}$ (resp. $\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2}$), $\frac{\partial^2 y}{\partial r^2}$ (resp. $\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}$) nájdené na základe rovnosti $x = \cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$. Spočítaním prvého získaného vzťahu vynásobeného r^2 s druhým vzťahom dostanete algebrickú rovnicu s neznámou w.

[- 4.51 -] Postupovať treba podľa návodu k úlohe 4.50. Dostanete $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\varphi + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin^2\varphi$. Vynásobením tohto výrazu r^2 a berúc do úvahy, že $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$ nájdete, že $w = r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$.

[- 4.52 -] Postupom uvedeným v návode k úlohe 4.50 vypočítate: $\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} = r^2\sin^2\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2r^2\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + r^2\cos^2\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - r\frac{\partial u}{\partial r}$. Berúc do úvahy tento vzťah, výsledok z úlohy 4.48 a vzťahy $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$ dostanete $w = \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$.

[- 4.53 -] $I = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}.\frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\partial u}{\partial \varphi}.\frac{\partial v}{\partial r}\right)$.

Vlastnosti diferencovateľných funkcií

[- 5.1 -] $1 - \sqrt{3}$.

[- 5.2 -] Vyjdite zo vzťahu $-|\nabla z(M)| \leq \frac{\partial z}{\partial \vec{l}}(M) \leq |\nabla z(M)\ |$, ktorý je dôsledkom vlastnosti gradienta funkcie z v bode M.
$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}(1,1) = \cos\alpha + \sin\alpha$; a) $\alpha = \frac{\pi}{4}$; b) $\alpha = \frac{5\pi}{4}$; c) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ a $\alpha = \frac{7\pi}{4}$.

[- 5.3 -] Gradient funkcie je kolmý na vrstevnicu. Teda počítame deriváciu v smere gradientu. $\frac{2}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$.

[- 5.4 -] $\frac{1}{ab}\sqrt{2(a^2+b^2)}$.

[- 5.5 -] $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(1,1,1) = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma,\ |\nabla u| = \sqrt{3}$.

[- 5.6 -] $|\nabla u| = \frac{1}{r_0^2},\ \cos\alpha = -\frac{x_0}{r_0},\ \cos\beta = -\frac{y_0}{r-0},\ \cos\gamma = -\frac{z_0}{r_0}$, kde $r_0 = \sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$.

[- 5.7 -] $\frac{\pi}{2}$, sú na seba kolmé

[- 5.8 -] ≈ 3142.

[- 5.9 -] Priamo vypočítajte dané gradienty a pomocou kosínusovej vety vypočítajte ich uhol, ktorý. v limite ide k nule, t.j gradienty sa stávajú temer paralelnými.

[- 5.10 -] $\frac{\partial^2 u}{\partial \vec{l}^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\alpha + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos^2\beta + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cos^2\gamma + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cos\alpha\cos\beta + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\cos\alpha\cos\gamma + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cos\beta\cos\gamma.$

[- 5.11 -] Vypočítajte diferenciál funkcií v bode $(0,0)$.
a) $1+mx+ny$; b) $x+y$.

[- 5.12 -] a) $\frac{2}{\sqrt{3}}.0,55$; b) $-3,4$; c) $0,8+12,8ln2$; d) $-\frac{1}{30}$; e) $0,3$;.

[- 5.13 -] a) $218,268$; b) $2,95$; c) $0,502$; d) $0,97$.

[- 5.14 -] Nie je. Najprv zistite, či sú splnené nutné podmienky diferencovateľnosti funkcie v bode $(0,0)$, potom ak áno, tak využite podmienku diferencovateľnosti, z ktorej nájdete zvyškovú funkciu $\omega(x,y)$. Napokon zistite, či funkcia $\omega(x,y)$ vyhovuje podmienkam definície diferencovateľnosti funkcie f. Parciálne derivácie $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ počítajte podľa definície.

[- 5.15 -] a) Najprv vypočítajte $f'_x(0)$=0, $f'_y(0)=0$z definície b) pri dôkaze nespojitosti f'_x, f'_y stačí ukázať na základe Heineho definície limity, že f'_x, f'_y nemajú limitu v bode $(0,0)$; c) neohraničenosť f'_x, f'_y v okolí bodu $(0,0)$ možno ukázať tak, že ak si zvolíme postupnosť $\{(x_n,y_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^2$, ktorá konverguje k $(0,0)$, príslušné postupnosti

$$\left\{f'_x(x_n,y_n)\right\}_{n=1}^{\infty},\ \left\{f'_y(x_n,y_n)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

majú nevlastnú limitu; d) pre dôkaz diferencovateľnosti funkcie v $(0,0)$ stačí využiť

$$f'_x(0)=0, f'_y(0)=0$$

a definíciu.

[- 5.16 -] Nech (x_1,y_1), (x_2,y_2) sú ľubovoľné body z E. Uvažujte pomocnú funkciu $\varphi(t) = f\left(x_2+t(x_1-x_2), y_2+t(y_1-y_2)\right)$ na intervale $<0,1>$. pretože E je konvexná oblasť, bod $\left(x_2+t(x_1-x_2), y_2+t(y_1-y_2)\right), t \in <0,1>$, patrí do E. Podľa Lagrangeovej vety aplikovanej na $\varphi(t)$ a ohraničenosti derivácií f'_x, f'_y odhadnite $|\varphi(1)-\varphi(0)| = | f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)|$.Dostaneme tak rovnomernú spojitosť.

[- 5.17 -] Nech $(x_0,y_0) \in G$ je ľubovoľný bod. K dôkazu spojitosti funkcie f v bode (x_0,y_0) vzhľadom na obidve premenné využite definíciu spojitosti, pričom v nerovnosti

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)| \le |f(x,y)-f(x,y_0)\ | + |f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|$$

pre prvý sčítanec použite Lagrangeovu vetu. Potom zohľadníte tieto skutočnosti: a) existuje číslo $M>0$ také, že $|f'_y(x,y)| \le M$ pre všetky $(x,y)\in G$; b) spojitosť funkcie f podľa premennej x pre $y=y_0$, čo znamená, že ak $\frac{\varepsilon}{2}>0$ je nejaké ľubovoľné číslo, tak k nemu existuje $\delta_1=\delta_1(\varepsilon,y_0)$ také, že $|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$, keď $|x-x_0|<\delta_1$.

[- 5.18 -]

$$f(x,y) = 5 + \frac{2(x-1)^2-(x-1)(y+2)-(y+2)^2}{2}.$$

[- 5.19 -] $f(x,y,z) = 3\left[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2-(x-1)(y-1)-(x-1)(z-1)- -(y-1)(z-1)\right] + (x-1)^3+(y-1)^3+(z-1)^3-3(x-1)(y-1)(z-1).$

[- 5.20 -] Návod: V Taylorovom vzorci (1) položte $x_1=1+h,\ x_2=-1+k$ a $x_1^0=1, x_2^0=-1$.
$f(x_2,y_2)-f(x_1,y_1) = h-3k-h^2-2hk+k^2+h^2k+hk^2.$

[- 5.21 -] $1+(x-1)+(x-1)(y-1).$

[- 5.22 -] $1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{8}(x^2 + y^2)^2$.

[- 5.23 -] $x + 5y - z - 5 = 0,\ \frac{x-5}{1} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-5}{-1}$.

[- 5.24 -] $x + 4y - 4z - \frac{11}{2} = 0,\ \frac{x-2}{1} = \frac{y-\frac{1}{2}}{4} = \frac{z+\frac{3}{8}}{-4}$.

[- 5.25 -] $x + y + z - 3 = 0,\ \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$.

[- 5.26 -] $2x + y + z = 0,\ \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+1}{1}$.

[- 5.27 -] $12x - 9y + 2z - 9 = 0,\ \frac{x-3}{12} = \frac{y-5}{-9} = \frac{z-9}{2}$.

[- 5.28 -] $x - y + \sqrt{2}z - \frac{\pi\sqrt{2}}{4} = 0,\ \frac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = \frac{y-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-1} = \frac{z-\frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}}$.

[- 5.29 -] $(e+1)x - (e+\pi)y + (e+1)z = 0,\ \frac{x-e}{e+1} = \frac{y-(e+1)}{-(e+\pi)} = \frac{z-\pi}{e+1}$.

[- 5.30 -] $x-y+2z-2 = 0,\ x-y+2z+2 = 0$. Návod: Označte $F(x,y,z) = x^2+y^2+2z^2-1$. Body dotyku nájdete z podmienky rovnobežnosti dotykovej roviny a danej roviny: $\frac{F'_x(x_0,y_0,z_0)}{1} = \frac{F'_y(x_0,y_0,z_0)}{-1} = \frac{F'_z(x_0,y_0,z_0)}{2} = k$, kde (x_0, y_0, z_0) je hľadaný bod dotyku.

[- 5.31 -] Návod: Položte $F(x,y,z) = (x+z)^2 + (y-z)^2 - 18$. Potom smernice normály v danom bode (x,y,z) plochy budú: $m = F'_x,\ n = F'_y,\ p = F'_z$. Ak vezmeme do úvahy rovnicu roviny v tvare $Ax+By+Cz = 0$, tak rovnica roviny xOy je $z = 0$, t. j. $A = B = D = 0, C = 1$. Z podmienky rovnobežnosti priamky a roviny $Am + Bn + Cp = 0$ dostanete rovnice, ktoré určujú hľadané geometrické miesto bodov. Geometrické miesto bodov je určené rovnicami $x + z = y - z = \pm 3$.

[- 5.32 -] $\nabla\varphi\ \ v(1,1,-1) = (y_0z_0 - 2x_0, x_0z_0 - 2y_0, x_0y_0 - 2z_0) = (-3,-3,3)$ $\|\nabla\varphi\|$ v bode $(1,1,-1) = \sqrt{27}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{yz}{y^2 + x^2z^2}, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-xz}{y^2 + x^2z^2}, \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{yx}{y^2 + x^2z^2} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

Derivácia f v bode M v smere $\nabla\varphi$ v bode M sa rovná

$$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}).(-3,-3,3)^T.\frac{1}{\sqrt{27}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

[- 5.33 -] $\frac{\partial u}{\partial x} = yz,\ \frac{\partial u}{\partial y} = xz,\ \frac{\partial u}{\partial z} = xy$. Smer normály k elipsoidu je potom rovný $\kappa(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2})$, kde $\kappa = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}$. Teda

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = x_0y_0z_0(\frac{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}{\sqrt{x_0^2b^4c^4 + y_0^2a^4c^4 + z_0^2a^4b^4}})$$

Extremálne vlastnosti funkcií viac premenných

[- 6.1 -] Lokálne minimum: $z\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{108}$.

[- 6.2 -] Lokálne minimum: $= z\,(1,1) = -1$.

[- 6.3 -] Lokálne minimum: $z\,(-1,-1) = z\,(1,1) = -2$.

[- 6.4 -] Lokálne maximum: $z\,(0,0) = 0$, Lokálne minimum: $z\left(\frac{1}{2},1\right) = z\left(\frac{1}{2},-1\right) = z\left(-\frac{1}{2},1\right) = z\left(-\frac{1}{2},-1\right) = -\frac{9}{8}$.

[- 6.5 -] Lokálne maximum: $z\,(2,3) = 108$. V bodoch $(0,y)$, kde $-\infty < y < 0$ alebo $6 < y < +\infty$ má u maximum; v bodoch $(0,y)$, kde $0 < y < 6$ má u minimum; v bodoch $(0,0),\ (0,6),\ (x,0)$, kde $-\infty < x < +\infty$ nemá u extrémy.

[- 6.6 -] Lokálne minimum: $z\,(5,2) = 30$.

[- 6.7 -] Lokálne maximum: $z\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}}\right) = z\left(-\frac{a}{\sqrt{3}},-\frac{b}{\sqrt{3}}\right) = \frac{ab}{3\sqrt{3}},\ z_{\text{l.min}} = z\left(\frac{a}{\sqrt{3}},-\frac{b}{\sqrt{3}}\right) = z\left(-\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{ab}{3\sqrt{3}}$.

[- 6.8 -] Stacionárne body neexistujú; v $(0,0)$ neexistujú parciálne derivácie, $z\,(x,y) - z\,(0,0) = -\sqrt{x^2+y^2} < 0,\ z_{\max} = z\,(0,0) = 1$.

[- 6.9 -] Hodnota lokálneho minima: $2r\pi - 2 - \sqrt{3} - \frac{\pi}{6},\ r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, Hodnota lokálneho maxima: $(2r-1)\pi + 2 + \sqrt{3} + \frac{\pi}{6},\ r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Stacionárne body dostanete riešením rovníc $z'_x = 0,\ z'_y = 0$, ktoré upravte nasledovne:
$1 - 2\sin(x-y) + 2\sin(x+y) = 0$
$1 + 2\sin(x-y) + 2\sin(x+y) = 0$ odkiaľ
$x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{12} + (k+m)\frac{\pi}{2}$
$y = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{12} + (k-m)\frac{\pi}{2},\ k, m = 0 \pm 1, \pm 2, \ldots,$ uvažujte a) $k = 2r,\ m = 2l-1$ a b) $k = 2r-1,\ m = 2l,\ r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,\ l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

[- 6.10 -] Lokálne minimum: $z\,(0,0) = 0$, Lokálne maximum e^{-1} sa nadobúda pre body (x,y) ležiace na kružnici $x^2 + y^2 = 1$ Zaveďte substitúciu $t = x^2 + y^2$ a nájdite lokálne extrémy funkcie $z = te^{-t}$.

[- 6.11 -] Lokálne minimum: $z\left(\frac{1}{\sqrt{2e}},\frac{1}{\sqrt{2e}}\right) = z\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}},-\frac{1}{\sqrt{2e}}\right) = -\frac{1}{2e};\ z_{\text{l.max}} = z\left(\frac{1}{\sqrt{2e}},-\frac{1}{\sqrt{2e}}\right) = z\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}},\frac{1}{\sqrt{2e}}\right) = \frac{1}{2e}$.

[- 6.12 -] Funkcia nemá lokálne extrémy.

[- 6.13 -] Lokálne minimum: $z(x,0) = 0$, kde $0 < x < 4$; $z_{\text{l.max}} = z(x,0) = 0$, kde $(x < 0) \vee (x > 4),\ z_{\text{l.max}} = z(1,2) = 4$.

[- 6.14 -] Lokálne minimum: $u\,(-1,-2,3) = -14$.

[- 6.15 -] Lokálne minimum: $u\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right) = -\frac{13}{27}$.

[- 6.16 -] Lokálne minimum: $u\left(\frac{1}{2},1,1\right) = 4$.

[- 6.17 -] Lokálne maximum: $u\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}$.

[- 6.18 -] Lokálne maximum: $u\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{256}$.

[- 6.19 -] Lokálne minimum: $u\,(0,0-1) = 2$.

[- 6.20 -]

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 - 2x - y,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2 - 4y - x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -1,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1,$$

Stacionárne body: $\left(\frac{2}{7},\frac{3}{7}\right)$. Funkcia f má v $\left(\frac{2}{7},\frac{3}{7}\right)$ ostré lokálne maximum.

[- 6.21 -]

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 12y, \frac{\partial u}{\partial y} = 2y + 12x, \frac{\partial u}{\partial z} = 2z + 2$$

Druhé derivácie:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x, \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 2, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 12, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0$$

Dostaneme tak dva stacionárne body $(0, 0, -1), (24, -144, -1)$. V prvom bode $u(0, 0, -1) = -1, u(\varepsilon, 0, -1) = \varepsilon^3 - 1$ a preto v $(0, 0, -1)$ nie je ani maximum ani minimum. V druhom bode je matica druhých derivácií:

$$M = \begin{pmatrix} 144 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Teraz pre hlavné minory dostávame $\Delta_1 = 144, \Delta_2 = 144, \Delta_3 = 288$ a teda v bode $(24, -144, -1)$ funkcia f nadobúda ostré lokálne minimum.

Funkcie zadané implicitným vzťahom

[- 7.1 -] Overením platnosti predpokladov vety o implicitnej funkcii.

[- 7.2 -] Overením platnosti predpokladov vety o implicitnej funkcii.

[- 7.3 -] Overením platnosti predpokladov vety o implicitnej funkcii.

[- 7.4 -] Overením platnosti predpokladov vety o implicitnej funkcii.

[- 7.5 -] 1. Nekonečne veľa. Napríklad, ak $x_k = -1 + \frac{2k}{n}, \ k = 0, 1, \ldots, n, \ n = 2, 3, \ldots$. tak pre každé $n = 2, 3, \ldots$ definujte funkciu

$$y(x) = \begin{cases} -|x|, & \text{ak } x < -1 \\ |x|, & \text{ak } x_k < x \le x_{k+1} \\ -|x|. & \text{ak } x > x_{k+1}, \end{cases}$$

kde $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Táto funkcia je definovaná pre všetky x a spĺňa rovnicu (1).
2. štyri funkcie: $y = x, \ y = -x, \ y = |x|, \ y = -|x|$;
3. dve funkcie: $y = -x, \ y = x$;
4. a) dve funkcie; b) štyri funkcie;
5. jedna funkcia, pretože funkcie $y = x$ a $y = |x|$, ktoré prechádzajú bodom $(1, 1)$ sú identické v intervale $(1 - \delta, 1 + \delta), \ 0 < \delta < 1$.

[- 7. 6 -]
a)

$$\frac{\partial z}{\partial x}(M_0) = -\frac{x_0}{z_0}, \ \frac{\partial z}{\partial y}(M_0) = -\frac{y_0}{z_0}, \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_0) = \frac{x_0 y_0}{z_0^3}$$

b)

$$\frac{\partial z}{\partial x}(M_0)=\frac{x_0^2+z_0^2+z_0}{x_0-x_0^2-z_0^2},\ \frac{\partial z}{\partial y}(M_0)=\frac{x_0^2+z_0^2}{x_0-x_0^2-z_0^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0)=\frac{x_0^2-z_0^2+2x_0z_0-z_0+(z_0^2-x_0^2-x_0z_0-x_0)\frac{\partial z}{\partial x}(M_0)}{(x_0-x_0^2-z_0^2)^2},$$

c)

$$\frac{\partial z}{\partial x}(M_0)=\frac{z_0}{x_0}.\frac{x_0-1}{1-z_0},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}(M_0)=\frac{z_0}{y_0}.\frac{y_0-1}{1-z_0},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0)=\frac{z_0\left[(x_0-1)^2+(1-z_0)^2\right]}{x_0^2(1-z_0)^3},\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(M_0)=\frac{z_0}{x_0y_0}.\frac{(x_0-1)(y_0-1)}{(1-z_0)^3};$$

d)

$$\frac{\partial z}{\partial x}(M_0)=-\frac{1+y_0z_0\sin(x_0y_0z_0)}{1+x_0y_0\sin(x_0y_0z_0)},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}(M_0)=-\frac{1+x_0z_0\sin(x_0y_0z_0)}{1+x_0y_0\sin(x_0y_0z_0)},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(M_0)=\frac{-\cos(x_0y_0z_0)\left[x_0z_0+x_0y_0\frac{\partial z}{\partial x}(M_0)\right]-\left[z_0+x_0\frac{\partial z}{\partial x}(M_0)+y_0\frac{\partial z}{\partial y}(M_0)\right]\sin(x_0y_0z_0)}{1+x_0y_0\sin(x_0y_0z_0)},$$

Návod: Druhé parciálne derivácie hľadajte derivovaním prvých parciálnych derivácii funkcie z podľa vhodnej premennej.

[- 7.7 -] Vychádzajte z toho, že diferenciál $dy=f'(x)dx$ pre funkciu $y=f(x)$ určenú implicitne rovnicou $1+xy=k(x-y)$ (pojem funkcie určenej implicitne je uvedený po vete 3. 1.). Nájdite deriváciu $f'(x)$ podľa vety o implicitnej funkcii, vyjadríte konštantu k z danej rovnice, potom dosaďte to do výrazu pre dy.

[- 7.8 -] Postup dôkazu je podobný ako v úlohe 7. 7. Len tu treba rozriešiť rovnicu (1) vzhľadom na x (resp. na y) a to dosadiť do výrazu pre dy za predpokladu, že $xy>0$.

[- 7.9 -] a) -2; b) -1.

[- 7.10 -] $dz(3,-2)=\frac{1}{9}(2dx-dy),\ d^2z(3,-2)=-\frac{2}{243}\left[2(dx)^2-5dxdy+2(dy)^2\right]$, kde $dx=x-3, dy=y+2$.

[- 7.11 -] $f_{\max}=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\sqrt{a^2+4}$; $g_{\min}=g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}\sqrt{a^2+4}$.

[- 7.12 -] $f_{\text{l.min}}=f(-3)=6$; $g_{\text{l.max}}=g(3)=-6$.

[- 7.13 -] $f_{\text{l.max}}=f\left(-6-\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)=-6+\frac{2}{3\sqrt{3}}$; $f_{\text{l.min}}=f\left(-6+\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)=-6-\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

[- 7.14 -] Pre $x=1$ nám z rovnice $F(x,y)=x^2+y^2-x^4-y^4=0$ vyjde $y=0,1,-1$. $\frac{\partial F}{\partial y}=2y-4y^3\neq 0\ \ pre\ \ y=1, y=-1$ a teda funkcie sú dve, z vety o implicitnej funkcii: jedna idúca cez $[1,1]$ a jedna cez $[1,-1]$. Po výpočte

$$y'=\frac{4x^3-2x}{2y-4y^3},$$

po dosadení pre $[1,-1]: y'(1)=-1$, a pre $[1,1]: y'(1)=-2$. Potom

$$y''=\frac{12x^2-2+(y')^2(12y^2-2)}{2y-4y^3}.$$

Do toho dosadte $x = 1, y(1), y^{'}(1)$.

Viazané extrémy funkcie viac premenných

[- 8.1 -] Lokálne viazané minimum: $z\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2}, \frac{a^2b}{a^2+b^2}\right) = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

[- 8.2 -] Lokálne viazané minimum: $z\left(\sqrt{2}a, \sqrt{2}a\right) = 2\sqrt{2}a$; Lokálne viazané maximum: $a\left(-\sqrt{2}a, -\sqrt{2}a\right) = -2\sqrt{2}a$.

[- 8. 3 -] Lokálne viazané minimum: $z\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = z\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}$; Lokálne viazané maximum: $z\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = z\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

[- 8.4 -] Lokálne viazané minimum: $z\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6}$; Lokálne viazané maximum: $z\left(\frac{\pi}{3}, \frac{-\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$.

[- 8.5 -] Lokálne viazané minimum: $u\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = -3$; Lokálne viazané maximum: $u\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = 3$.

[- 8.6 -] Lokálne viazané maximum: $u\left(1, 1, 1\right) = 1$.

[- 8.7 -] Lokálne viazané minimum: $u\left(-1, 0, 0\right) = u\left(1, 0, 0\right) = a^{-2}$; Lokálne viazané maximum: $u\left(0, 0, -1\right) = u\left(0, 0, 1\right) = c^{-2}$.

[- 8.8 -] Lokálne viazané minimum: $u\left(-1, -1, -1\right) = u\left(-1, 1, 1\right) = u\left(1, -1, 1\right) = u\left(1, 1, -1\right) = -01$; Lokálne viazané maximum: $u\left(1, 1, 1\right) = u\left(1, -1, -1\right) = u\left(-1, 1, -1\right) = u\left(-1, -1, 1\right) = 1$.

[- 8.9 -] Lokálne viazané minimum: $u\left(-1, 1, 0\right) = 0$.

[- 8.10 -] Lokálne viazané minimum: $u\left(2, 2, 1\right) = u\left(2, 1, 2\right) = u\left(1, 2, 2\right) = 4$; Lokálne viazané maximum: $u\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right) = u\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right) = u\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = 4\frac{4}{27}$.

[- 8.11 -] $r = 3,\ h = 6$.

[- 8.12 -] $x = \frac{2a}{\sqrt{3}},\ y = \frac{2b}{\sqrt{3}},\ z = \frac{2c}{\sqrt{3}}$.

[- 8.13 -] Lokálne viazané minimum: $\varrho_{\min} = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

[- 8.14 -] Zostrojte Lagrangeovu funkciu $L(x, \lambda) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + \lambda\left(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)$ a zostavte systém rovníc pre nutné podmienky nadubúdania lokálneho viazaného extrému:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial x_1} = \left(a_{11} - \lambda\right)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial x_2} = a_{21}x_1 + \left(a_{22} - \lambda\right)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial x_n} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + \left(a_{nn} - \lambda\right)x_n = 0$$

Vidíme, že tento systém lineárnych rovníc má netriviálne riešenie $\Longleftrightarrow$ ak λ je koreňom rovnice $\det\,(A-\lambda I)=0$ kde $A=(a_{ij})$ je matica systému a I je jednotková matica. To znamená, že λ je vlastné číslo matice A. Zo symetrie matice A ukážte, že čísla λ sú reálne. Napokon využitím nutných podmienok a väzby, dokážte, že $u_{\max}=\max\limits_{1\le i\le u}\lambda_i,\ u_{\min}=\min\limits_{1\le i\le u}\lambda_i$.

[- 8.15 -] Označte

$$u=\frac{x^n+y^n}{2},\ x+y=s$$

a utvorte Lagrangeovu funkciu $L(x,y,\lambda)=\frac{1}{2}\left(x^n+y^n\right)+\lambda\left(s-x-y\right)$. Z rovníc $\frac{\partial L}{\partial x}=\frac{\partial L}{\partial y}=0,\ x+y=s$ dostanete:

$$\lambda=\frac{n}{2}\left(\frac{s}{2}\right)^{n-1},\ x=y=\frac{s}{2}.$$

Pretože druhá derivácia podľa x,y samotnej Lagrangeovej funkcie je kladne definitná, $d^2L\left(\frac{s}{2},\frac{s}{2}\right)>0$, tak $u_{\min}=u\left(\frac{s}{2},\frac{s}{2}\right)=\left(\frac{s}{2}\right)^n\le u(x,y)$, ak $x+y=s$, čo znamená $\left(\frac{x+y}{2}\right)^n\le\frac{x^n+y^n}{2}$ Alebo jednoducho preto, že $x^n:R\mapsto R$ je konvexná funkcia.

[- 8.16 -] Utvorte funkciu $L(x,\lambda)=\sum_{i=1}^n x_i^m+\lambda\left(\sum_{i=1}^n x_i-na\right)$. Riešením systému rovníc

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}=mx_i^{m-1}+\lambda=0,\ i=1,2,\dots,n,\qquad\sum_{i=1}^n x_i=na,$$

nájdete $\lambda=-ma^{m-1}$ a stacionárny bod $a^0=(a,a,\dots,a)$. Zistite, že druhá derivácia podľa x samotnej Lagrangeovej funkcie je kladne definitná $d^2L>0$ a teda $z_{\min}=na^m$.

[- 8.17 -] Nájdite viazaný lokálny extrém funkcie $u=\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n x_i^q\right)^{1/q}$ pri väzbe $A=\sum_{i=1}^n a_ix_i,\ A=$ konštanta. Zostrojte Lagrangeovu funkciu

$$L(x,\lambda)=\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n x_i^q\right)^{1/q}-\lambda\left(\sum_{i=1}^n a_ix_i-A\right)$$

a nájdite stacionárne body riešením sústavy nelineárnych rovníc. V stacionárnom bode potom ukážte, že funkcia u má minimum $u_{\min}=A$ t.j. $u\ge A$, čo je vlastne Hölderova nerovnosť. Treba samozrejme dokázať, že sa jedná o viazané minimum.

[- 8.18 -] Dosadíme za $z=1-x-y$ a úloha sa pretransformuje na hladanie viazaných extrémov z funkcie $F(x,y)=3-2x-y$ pri väzbe $x^2+y^2-x-y+xy=0$. Potom riešime Lagrangeovou metódou, vyjde $\lambda=\sqrt{3},\lambda=-\sqrt{3}$ Stacionárne body sú: $(\frac{1+\sqrt{3}}{3},\frac{1}{3},\frac{1-\sqrt{3}}{3})$ a $(\frac{1-\sqrt{3}}{3},\frac{1}{3},\frac{1+\sqrt{3}}{3})$. Po výpočte z matice druhých derivácií Lagrangeovej funkcie z funkcie F dostaneme, že v prvom sa nadobúda minimum a v druhom maximum.

[- 8.19 -] $\max\limits_M z=z(-3,4)=125;\ \min\limits_M z=z(3,-4)=-75.$

[- 8.20 -] $\max\limits_M z=z(0,3)=17;\ \min\limits_M z=z(3,0)=-10.$

[- 8.21 -] $\max\limits_M z=z(0,1)=z(1,0)=z(0,-1)=1;\ \min\limits_M z=z(0,0)=0.$

[- 8.22 -] $\max\limits_M z=z(2,0)=z(-2,0)=4;\ \min\limits_M z=z(0,-2)=z(0,2)=-4.$

[- 8.23 -] $\max\limits_M z=z(1,0)=z(-1,0)=\dfrac{3}{e};\ \min\limits_M z=z(0,0)=0.$

[- 8.24 -] $\max\limits_{M} z = z\left(1, \frac{4}{3}\right) = \frac{2}{9}$; $\min\limits_{M} z = 0$ na celej hranici množiny M.

[- 8.25 -] $\max\limits_{M} u = u(0,0,10) = 300$; $\min\limits_{M} u = u(0,0,0) = 0$.

[- 8.26 -] $\max\limits_{M} u = u\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right) = 1 + \sqrt{2}$; $\min\limits_{M} u = u\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) = -\frac{1}{2}$.

[- 8.27 -] $\max\limits_{M} u = u\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}}\right) = u\left(\frac{-a}{\sqrt{3}}, \frac{-a}{\sqrt{3}}, \frac{-a}{\sqrt{3}}\right) = a^2$; $\min\limits_{M} u = -\frac{a^2}{2}$ na celej krivke danej prienikom plôch $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ a $x + y + z = 0$.

[- 8.28 -] a) Lagrangeovou metódou nám vyjdú dva stacionárne body $(4, 1)$ a $(-4, -1)$ Keď si nakreslíme graf väzby $x^2 - y^2$,zistíme, že $4x - y = c$ sú rovnobežky a v bodoch SB_1 a SB_2 sú dotyčnice ku väzbe v poradí $4x - y = 15, 4x - y = -15$. Teda v prvom sa nadobúda lokálne minimum 15 a v druhom sa nadobúda lokálne maximum -15.
b) Lagrangeovou metódou nám vyjde jeden stacionárny bod $(2, 1)$. Nakreslíme graf väzby $2x - y - 3 = 0$. Vrstevnice $x^2 - y^2 = c$. Cez stacionárny bod ide vrstevnica $x^2 - y^2 = 3$ a väzba $2x - y - 3 = 0$ je jej dotyčnica v bode SB_1. Teda v SB_1 sa nadobúda lokálne maximum.

[- 8.29 -] Viď návod.

Rozvoj funkcií do Fourierovho radu

[- 9.1 -] Fourierov rad $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$ k periodickej funkcii f na $(-l, l)$ vypočítame podľa vzorcov na koeficienty Fourierovho radu.
a) To je už Fourierov rozvoj.
b) Funkcia je nepárna a teda rad bude iba sínusový. $f \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{(1+(-1)^{n+1})}{n} \sin nx$
c) $l = 1$ a teda $f \sim \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-4}{(2n+1)^2\pi^2} \cos(2n+1)\pi x$
d) $e^{-x} \sim \frac{1}{l} \sinh l + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2l(-1)^n \sinh l}{l^2+n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi x}{l} + \frac{(-1)^n 2n\pi \sinh l}{l^2+n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi x}{l}$
e) $\cos^3 x = \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x$
f) Uvažujme rozvoj na $(-\pi, \pi)$. Použijeme, že $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ a po výpočte Fourierovho rozvoja

$$x^2 \sim \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

dostaneme

$$2x^2 - 2 + \cos^2 x \sim \frac{2}{3}\pi^2 - 1.5 - 8\cos x + 2.5\cos 2x + 8\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

[- 9.2 -] $c_n + d_n$.

[- 9.3 -]
a) $l = \frac{\pi}{2}$, $\quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos 2kx dx$, $\quad a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx$, $\quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin 2kx dx$. Výpočtom dostaneme:

$$f \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos 2kx - \frac{\pi}{k} \sin 2kx$$

b) a d) pozri návod

c) $a_0 = a_k = 0, \qquad b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 \sin kx dx = \frac{2\pi(-1)^{k+1}}{k} + \frac{4}{\pi k^3}((-1)^k - 1).$

[- 9.4 -] $f \sim \sum_{n=0}^\infty \frac{8}{(2n+1)^3\pi^3}\sin(2n+1)\pi x$

[- 9.5 -] $l = 2\pi, \quad a_0 = b_k = 0, \quad a_k = \frac{8(1-(-1)^k)}{\pi(16-k^2)}$

[- 9. 6 -] Pozri návod. Parsevalova rovnosť $\int_{-l}^l f^2(x)dx = l(\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^\infty |a_n|^2 + |b_n|^2)$.

a)

$$\frac{\pi^2}{8}$$

b) Z Parsevalovej rovnosti $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{16}{\pi^4}\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2k+1)^4}$ dostaneme $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$

[- 9.7 -] Priamym výpočtom treba ukázať, že $\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx = 0$ pre $f, g \in (1, x, \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)), f \neq g$

[- 9.8 -]

a) Podobne ako b).

b) Hľadajme riešenie najprv všeobecnejšie úlohy

$$-u"(x) + u(x) = f(x) \;\; x \in (0,1) \;\; u(0) = u(1) = 0,$$

kde f je nepárna na $(-1, 1)$ po častiach spojitá. Zrejme Fourierov rozvoj $f \sim \sum_{n=1}^\infty f_n \sin n\pi x$ a hľadajme riešenie

$$u = \sum_{n=1}^\infty b_n \sin n\pi x$$

ako nepárnu funkciu na $(-1, 1)$. Potom dostaneme

$$\sum b_n(1 + n^2\pi^2)\sin n\pi x = \sum f_n \sin n\pi x$$

odkiaľ

$$b_n = \frac{f_n}{1 + n^2\pi^2}.$$

Vráťme sa teraz k nášmu problému, kde $f = -1 \;\; na \;\; (-1, 0),\ f = 1$ na $(0, 1)$ a dostaneme

$$f_n = \frac{2}{n\pi}.(1 - (-1)^n).$$

Dosadením dostávame

$$b_n = \frac{2}{n\pi}\frac{(1 - (-1)^n)}{1 + n^2\pi^2}.$$

[- 9.9 -] Pozri návod.

[- 9.10 -] Funkcia je párna. $|x| \sim \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^\infty \frac{-4}{(2k+1)^2\pi^2}\cos(2k+1)\pi x$. Po dosadení za $x = 1$ máme

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{4}{(\pi)^2}\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(2k+1)^2}$$

odkiaľ

$$S = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Teraz $R = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = S + \frac{1}{4}R$ a teda $R = \frac{\pi^2}{6}$.

[- 9.11 -] $a_0 = \frac{1}{2}, \;\; a_n = \frac{((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2}, \;\; b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}$

[- 9.12 -] Funkcia je nepárna, preto

$$a_n = a_0 = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\frac{x}{2}\sin nx dx = \frac{8n}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}.$$

[- 9.13 -] $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x.\sin x dx = 2, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x.\sin x\cos 2nx dx = \frac{2}{1-4n^2}, \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x.\sin x\sin 2nx dx = \frac{-16n}{\pi(2n-1)^2(2n+1)^2}$. Preto

$$x\sin x \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos 2nx + b_n\sin 2nx.$$

[- 9.14 -] $a_0 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}, \quad a_n = \int_0^1 x^2\cos nx\pi \;\; dx = \frac{2.(-1)^n}{n^2\pi^2}, \quad b_n = \int_0^1 x^2\sin nx\pi \;\; dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{2}{n^3\pi^3}((-1)^n - 1)$.

[- 9.15 -] Označme Fourierove koeficienty $\tilde{a}_0, \tilde{a}_n, \tilde{b}_n$, pretože využijeme aj vypočítané koeficienty a_n, b_n, a_0 z predošlého príkladu.

$$\tilde{a}_0 = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}, \tilde{a}_n = \int_0^1 x^3\cos nx\pi \;\; dx = -\frac{3}{n\pi}\int_0^1 x^2\sin nx\pi \;\; dx = -\frac{3}{n\pi}b_n$$

$$\tilde{b}_n = \int_0^1 x^3\sin nx\pi \;\; dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{3}{n\pi}\int_0^1 x^2\cos nx\pi \;\; dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{3}{n\pi}a_n$$

Riemannov integrál funkcie viac premenných

[- 10.1 -] Výsledok $6 - 4\ln 2$

[- 10.2 -]
a) $y \in [0,4], \;\; \sqrt{y} \le x \le 2\sqrt{y}$ a teda $P = 2\int_0^4 dy\int_{\sqrt{y}}^{2\sqrt{y}} 1dx = \frac{32}{3}$.
b) 4

[- 10.3 -]

$$P = \int_a^{2a} dy\int_{\sqrt[3]{ay^2}}^{\frac{y^2}{a}} 1 \;\; dx + \int_{2a}^{8a} dy\int_{\sqrt[3]{ay^2}}^{\sqrt[3]{16ay^2}} 1 \;\; dx + \int_{8a}^{16a} dy\int_{\frac{y^2}{16a}}^{\sqrt[3]{16ay^2}} 1 \;\; dx = a^2\frac{868}{15}$$

[- 10.4 -] $P = 4P_1$,

$$P_1 = \int_0^a dx\int_0^{(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}} 1 \;\; dy = a^2\int_0^1 (1 - u^{\frac{2}{3}})^{1.5} du = 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t(1 - \cos^2 t)dt = \frac{3a^2\pi}{32}.$$

Použili sme substitúciu $u = \sin^3 t$. Napokon $P = \frac{3a^2\pi}{8}$.

[- 10.5 -] $y \in [-1,1],\ \ 0 \le x \le 1-|y|$.

[- 10.6 -] $y \in [0,4],\ \ \varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y)$, kde

$$\varphi_1(y) = \begin{cases} -\sqrt{y} & y \in [0,2] \\ -\sqrt{4-y} & y \in [2,4] \end{cases} \qquad \varphi_2(y) = \begin{cases} \sqrt{y} & y \in [0,2] \\ \sqrt{4-y} & y \in [2,4] \end{cases}$$

[- 10.7 -]
typu $[x,y]$: $\quad -2 \le x \le 2, \qquad -\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2} \le y \le \frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}$.

typu $[y,x]$: $\quad -3 \le y \le 3, \qquad -\frac{2}{3}\sqrt{9-y^2} \le x \le \frac{2}{3}\sqrt{9-y^2}$

[- 10.8 -]
a)

$$\iint_P f(x,y)dxdy = \int_{-2}^{2} dx \int_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} f dy + \int_{-3}^{-2} dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f dy + \int_{2}^{3} dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f dy$$

b)

$$\iint_P f(x,y)dxdy = \int_1^2 dx \int_x^{2x} f(x,y)dy = \int_1^2 dy \int_1^y f(x,y)\ dx + \int_2^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^{2} f(x,y)\ dx$$

c)

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$$

d)

$$\iint_P f(x,y)dxdy = \int_0^r dx \int_x^{\sqrt{r^2-(x-r)^2}} f(x,y)dy = \int_0^r dy \int_{r-\sqrt{r^2-y^2}}^{y} f(x,y)dx$$

e)

$$\iint_P f(x,y)dx\ \ dy = \int_0^2 dx \int_{2x}^{6-x} f(x,y)dy = \int_0^4 dy \int_0^{\frac{y}{2}} f(x,y)dy + \int_4^6 dy \int_0^{6-y} f(x,y)dx$$

[- 10.9 -]
a) 0 b) $\frac{33}{140}$ c) $\frac{9}{4}$

[- 10.10 -] Pozri návod a použite substitúciu $y = a\sin t$ pre výpočet $\int_0^a \sqrt{a^2-y^2}dy$. Výsledok $V = \frac{4}{3}\pi$.

[- 10.11 -]
a) $6b^3$ b) $\frac{4}{3}$ c) 0 d) $\frac{5}{2}\ln 2 - \frac{3}{2}ln3$ e) $I = \int_1^2 dy \int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}} dx = e^2 - \frac{3}{2}$ f) $\frac{1225}{64}$
g) $\frac{a^4}{2}$ h) 24π i) $\frac{3}{2}\pi$
j) Keďže $1 \le |x|^2 \le |y|^2 \Leftrightarrow 1 \le |x| \le |y| \le 2$, tak $I = 4\int_1^2 x\ dx \int_x^2 y\ dy = \frac{9}{2}$.
k) Po nakreslení obrázku máme

$$P_2 = \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x^2+2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy = \int_0^1 \sqrt{4-x^2} - \sqrt{x^2+2}dx.$$

Označme $I_1 = \int_0^1 \sqrt{4-x^2}dx$ a $I_2 = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}dx$. Potom $P_2 = I_1 - I_2$ a $\int_A \operatorname{sign}(x^2-y^2+2)\ dx\ dy = 4(\pi - P_2 - P_2) = 4(\pi - 2I_1 + 2I_2)$ Vypočítajme

$$I_1 = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad I_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

a teda $\int_A \operatorname{sign}(x^2-y^2+2)\ dx\ dy = \frac{4\pi}{3} + 8\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

[- 10.12 -] $V = \int_0^4 dy \int_0^{4-y} dx \int_0^{x^2+y^2} 1dz = \frac{128}{3}$

[- 10.13 -] $V = \int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} 1dz = \frac{16a^3}{3}$

[- 10.14 -] $V = 8\int_0^a dx \int_0^{(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}} dy \int_0^{(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}} 1dz = \frac{128a^3}{105}$

[- 10.15 -]
a) $\frac{a^2bc}{2} + \frac{c^2ab}{2} + \frac{b^2ac}{2}$ b) $\frac{8}{15}.(31+12\sqrt{2}-27\sqrt{3})$ c) $\frac{a^6}{48}$
d) $2e-5$

[- 10.16 -]
a) typu $[x,y,z] : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le \frac{1-x}{2}, 0 \le z \le 1-x-2y,$ typu $[y,x,z] : 0 \le y \le \frac{1}{2}, 0 \le x \le 1-2y, 0 \le z \le 1-x-2y$

b) typu $[x,y,z] : 0 \le x \le 1, x \le y \le 1, y \le z \le 1,$ typu $[z,y,x] : 0 \le z \le 1, 0 \le y \le z, 0 \le x \le y$
c) typu $[z,x,y] : -2 \le z \le 2,\ -\sqrt{4-z^2} \le x \le \sqrt{4-z^2},\ -\sqrt{4-x^2-z^2} \le y \le \sqrt{4-x^2-z^2}$
d) typu $[x,y,z] : -1 \le x \le 1,\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2},\ x^2+y^2 \le z \le 1$
e) typu $[x,y,z] : -1 \le x \le 1,\ |x|-1 \le y \le 1-|x|,\ -1+|x|+|y| \le z \le 1-|x|-|y|$
f) Nie je to elementárna oblasť, ale tzv. medzioktaédrie, ktoré sa dá však napísať ako zjednotenie dvoch elementárnych oblastí $M_1 \cup M_2$, kde

$$M_1 : -2 \le x \le 2,\ |x|-2 \le y \le 2-|x|,\ \max(0, 1-|x|-|y|) \le z \le 2-|x|-|y|$$

$$M_2 : -2 \le x \le 2,\ |x|-2 \le y \le 2-|x|, |x|+|y|-2 \le z \le \min(|x|+|y|-1, 0)$$

g) Predstavuje valcový výrez gule.

$$0 \le x \le r,\ -\sqrt{\frac{r^2}{4} - (x-\frac{r}{2})^2} \le y \le \sqrt{\frac{r^2}{4} - (x-\frac{r}{2})^2},\quad -\sqrt{r^2-x^2-y^2} \le z \le \sqrt{r^2-x^2-y^2}$$

[- 10.17 -]
a) typ $[x,z,y]$: $0 \le x \le 1,\ 0 \le z \le 1,\ \max(0, z-x) \le y \le 1-x$ s integrálom

$$\int_0^1 dx \int_0^x dz \int_0^{1-x} f(x,y,z)\,dy + \int_0^1 dx \int_x^1 dz \int_{z-x}^{1-x} f(x,y,z)dy$$

resp. typ $[z,x,y]$: $0 \le z \le 1,\ 0 \le x \le 1,\ \max(0, z-x) \le y \le 1-x$ s integrálom

$$\int_0^1 dz \int_0^z dx \int_{z-x}^{1-x} f(x,y,z)\,dy + \int_0^1 dz \int_z^1 dx \int_0^{1-x} f(x,y,z)\,dy$$

b) pre typ $[z,y,x]$: $0 \le z \le 1,\ z \le y \le -z,\ -\sqrt{z^2-y^2} \le x \le \sqrt{z^2-y^2}$

[- 10.18 -]

a) typ $[z,y,x]$: $0\le z\le 1, 0\le y\le 1, \max(0,\frac{z-y}{a})\le x\le \frac{1-y}{a}$ s integrálom

$$\int_0^1 dz\int_0^z dy\int_{\frac{z-y}{a}}^{\frac{1-y}{a}} f(x,y,z)dx+\int_0^1 dz\int_z^1 dy\int_0^{\frac{1-y}{a}} f(x,y,z)\,dx$$

b) typ $[x,z,y]$: $0\le x\le \frac{1}{a},\ 0\le z\le 1, \max(z-ax,0)\le y\le 1-ax$ s integrálom

$$\int_0^{\frac{1}{a}} dx\int_0^{ax} dz\int_0^{1-ax} f(x,y,z)\,dy+\int_0^{\frac{1}{a}} dx\int_{ax}^1 dz\int_{z-ax}^{1-ax} f(x,y,z)\,dy$$

[- 10.19 -] a) typ $[y,z,x]$: $0\le y\le 1,\ 0\le z\le 2+3y^2, \max(0,\sqrt{\frac{z-3y^2}{2}})\le x\le 1$ s integrálom

$$\int_0^1 dy\int_0^{3y^2} dz\int_0^1 f(x,y,z)\,dx+\int_0^1 dy\int_{3y^2}^{2+3y^2} dz\int_{\sqrt{\frac{z-3y^2}{2}}}^1 f(x,y,z)\,dx$$

b) typ $[x,z,y]$: $0\le x\le 1,\ 0\le z\le 2x^2+3, \max(0,\sqrt{\frac{z-2x^2}{3}})\le y\le 1$ s integrálom

$$\int_0^1 dx\int_0^{2x^2} dz\int_0^1 f(x,y,z)\,dy+\int_0^1 dx\int_{2x^2}^{2x^2+3} dz\int_{\sqrt{\frac{z-2x^2}{3}}}^1 f(x,y,z)\,dy$$

[- 10.20 -]
a) $\frac{2}{15}$ b) $\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}$

c) $\displaystyle\int_{-a}^a dx\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy\int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} z\,dz=\frac{\pi abc^2}{4}$

d) $\displaystyle\int_0^a xdx\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} ydy\int_{c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}^c \frac{1}{\sqrt{z}}dz=\frac{a^2b^2c^{\frac{1}{2}}}{36}$

[- 10.21 -]
a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} dz\int_0^{\frac{\pi}{2}-z} dx\int_0^{\sqrt{x}}\cos(x+z)y\,dy=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{48}$

c) $\displaystyle\int_{-R}^R dx\int_{-\sqrt{\mathbb{R}^2-x^2}}^{\sqrt{\mathbb{R}^2-x^2}} dy\int_{\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}}^h z\,dz=\frac{\pi h^2\mathbb{R}^2}{4}$

d) $\displaystyle\int u^4\,du\int dz\int e^{y^2}\,dy\int_0^{yzu} 1\,dx=\frac{e}{16}-\frac{5}{32}$

[- 10.22 -] Matematickou indukciou vzhľadom na n ukážte, že platí

$$I_n=\int_0^1 dx_1\int_0^{1-x_1} dx_2...\int_0^{1-x_1-...x_{n-1}} dx_n=\frac{1}{n!}$$

[- 10.23 -] Využívame, že $\int\frac{dt}{\sqrt{a^2-t^2}}=\arcsin\frac{t}{a}$ Potom $I_1=\pi$, $I_2=2\pi$,

$$I_n=\int_{-1}^1 dx_1...\int_{-\sqrt{1-x_1^2-...x_{n-1}^2}}^{\sqrt{1-x_1^2-...x_{n-1}^2}}\frac{1}{\sqrt{1-x_1^2-...x_{n-1}^2-x_n^2}}\,dx_n=\pi.B_{n-1},$$

kde B_{n-1} je objem $n-1$ rozmernej jednotkovej gule

Metoda substitúcie

[- 11.1 -]
a) Jakobián je $D_\Phi(\rho,\varphi)=\rho$
b) Jakobián je $D_\Phi(\rho,\varphi,u)=\rho$
c) Jakobián je $D_\Phi(\rho,\varphi,\psi)=\rho^2\cos\psi$

[- 11.2 -]
a) Zobrazenie nie je regulárne, lebo $J=v-u$ a pre $[u,v], u=v$ platí: $J=0$, zobrazenie prosté nie je lebo napr. $F(0,\frac{1}{2})$=$F(\frac{1}{2},0)$.
b) Jakobián $D(u,v)=-2(\frac{u^2}{v^2}+1)<0$ na A a zobrazenie je prosté.
c) Jakobián $D(u,v)=1$ a zobrazenie je regulárne aj prosté.

[- 11.3 -]
a) $\displaystyle\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}r(1-2r\cos\varphi-3r\sin\varphi)\,dr=2\pi$
b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{a\cos\varphi}r\sqrt{a^2-r^2}\,dr=\frac{a^3\pi}{3}-\frac{4a^3}{9}$
c) $\displaystyle\int_0^{2\pi}d\varphi\int_1^{\sqrt{e}}\frac{\ln r^2}{r^2}r\,dr=\frac{\pi}{2}$
d) $\frac{\pi^2}{6}$ e) $\frac{2\pi ab}{3}$

[- 11.4 -] Oblasť sa nachádza v prvom a treťom kvadrante, zo súmernosti stačí počítať v prvom kvadráte. Jakobián je rovný $12\rho\sin\varphi\cos\varphi$, a teda $\varphi\in(0,\frac{\pi}{2})$, $\rho\in(0,\cos\varphi.\sin\varphi)$ a $I=\frac{2\sqrt{6}}{15}$

[- 11.5 -]
a) 3π
b) $\displaystyle\int_0^a z\,dz\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\rho^2\,d\rho=\frac{8a^2}{9}$
c) $\displaystyle\int_0^2 dz\int_0^{\sqrt{2z}}\rho^3 d\rho\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{16\pi}{3}$

[- 11.6 -]
a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1\rho^3\cos\psi\,d\rho=\frac{\pi}{8}$
b) $\displaystyle\int_2^3 d\rho\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\rho^4\cos^3\psi\,d\psi=\frac{844\pi}{15}$
c) $\displaystyle\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{\arctan\frac{h}{R}}^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^{\frac{h}{\sin\psi}}\rho^3\sin\psi\cos\psi\,d\rho=\frac{\pi h^2\mathbb{R}^2}{4}$

[- 11.7 -] $\frac{4abc\pi}{5}$

[- 11.8 -]
a) $\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $0\le\rho\le 2a\min(\cos\varphi,\sin\varphi)$ a teda

$$P=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{2a\sin\varphi}\rho\,d\rho=a^2(\frac{\pi}{2}-1)$$

b) Dotyčnica v bode $(1,2)$ má rovnicu $2y+x=5$. Elementárna oblasť pre integrovanie je opísaná pomocou

$$\varphi \in [0, \ \arctan 2], \ \ \sqrt{5} \le \rho \le \frac{5}{\cos\varphi + 2\sin\varphi}$$

$$P = \int_0^{\arctan 2} d\varphi \int_{\sqrt{5}}^{\frac{5}{\cos\varphi+2\sin\varphi}} \rho\, d\rho = -\frac{5}{2}\arctan 2 + 5$$

c)

$$P = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} \rho\, d\rho = a^2$$

d) Použijeme substitúciu $x=\rho\cos^2\varphi, y=\rho\sin^2\varphi, J=2\rho\cos\varphi\sin\varphi$. Elementárna oblasť:

$$\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}], \ \ \rho \in [\frac{a}{1+\sin 2\varphi}, a]$$

$$P = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi d\varphi \int_{\frac{a}{1+\sin 2\varphi}}^{a} 2\rho\, d\rho = \frac{a^2}{3}$$

e) Použijeme substitúciu $x=\rho\cos^{\frac{2}{3}}\varphi, y=\rho\sin^{\frac{2}{3}}\varphi, J=\frac{2}{3}\rho\sin^{\frac{-1}{3}}\varphi\cos^{\frac{-1}{3}}\varphi$ a teda

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a(\cos\varphi\sin\varphi)^{\frac{2}{3}}} \frac{2}{3}\rho\sin^{\frac{-1}{3}}\varphi\cos^{\frac{-1}{3}}\varphi d\rho = \frac{a^2}{6}.$$

f) Použijeme polárne súradnice.

$$P = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^4+\sin^4}}} \rho\, d\rho = \frac{a^2\pi}{2}$$

g) Použijeme polárne súradnice.

$$P = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi}} \rho\, d\rho = \frac{3a^2\pi}{4}$$

[- 11.9 -]

a) Použijeme substitúciu $x=a\rho\cos\varphi, y=b\rho\sin\varphi, J=ab\rho$. Potom

$$S = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt{\frac{ab\cos\varphi\sin\varphi}{c^2}}} ab\rho\, d\rho = \frac{a^2b^2}{2c^2}$$

b) Použijeme substitúciu $x=a\rho\cos^8\varphi, y=b\rho\sin^8\varphi, J=8ab\rho\sin^7\varphi\cos^7\varphi$. Potom

$$P = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 8ab\rho\sin^7\varphi\cos^7\varphi\, d\varphi = \frac{ab}{70}$$

[- 11.10 -]

a) $\frac{4\pi abc}{3}$

b) Uvažujme elementárnu oblasť: $x\in(0,a), \ \ y\in(-\sqrt{ax-x^2}, \sqrt{ax-x^2})$. Potom

$$V = 2\int_0^a \int_{-\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{ax-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}dx\, dy$$

Použijeme transformáciu do polárnych súradníc,

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \rho\sqrt{a^2-\rho^2}\, d\rho = \frac{2a^3\pi}{3} - \frac{8a^3}{9}$$

[- 11.11 -]
a) Uvažujme sférické súradnice a elementárnu oblasť: $0 \le \psi \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \rho \le \min(4, 8\sin\psi)$. Potom

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\psi \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{8\sin\psi} \rho^2\cos\psi\, d\rho + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 \rho^2\cos\psi\, d\rho$$

$$= \frac{16\pi}{3} + \frac{64\pi}{3} = \frac{80\pi}{3}$$

b) Uvažujme elementárnu oblasť: $\rho \in [0, R],\ \varphi \in [0, 2\pi]$. Potom

$$V = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R \rho\sqrt{4R^2-\rho^2}\, d\rho = \frac{4\pi}{3}[(4R^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}]_R^0 = \frac{32\pi R^3}{3} - \frac{12\pi R^3\sqrt{3}}{3}$$

c) $V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_\alpha^\beta d\varphi \int_0^R \rho^2\cos\psi\, d\rho = \frac{2R^3}{3}(\beta-\alpha)$

d) $V = \displaystyle\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{2a\sin\psi} \rho^2\cos\psi\, d\psi = a^3\pi$

e) $V = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\psi \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\psi}} \rho^2\cos\psi\, d\psi = \frac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}$

f) $V = 4\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\sqrt[3]{3\cos\varphi\sin\varphi\cos^2\psi\sin\psi}} \rho^2\ \cos\psi\, d\rho = \frac{1}{2}$

g) $V = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a\sqrt[3]{\sin\psi e^{-\cos^2\psi}}} \rho^2\cos\psi\, d\rho = (1-e^{-1}).\frac{\pi a^3}{3}$

[- 11.12 -] V guli s polomerom $2a = \frac{32\pi a^3}{3}$, objem telesa vypočítame pomocou cylindrických súradníc. Plochy, ktoré tvoria teleso sa pretínajú v rovine $z = a$ a kružnici $r = a\sqrt{3}$ a teda elementárna oblasť je:

$$0 \le r \le a\sqrt{3},\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 2a - \sqrt{4a^2-r^2} \le u \le \frac{4a^2-r^2}{a}.$$

$$V_{telesa} = 4\int_0^{a\sqrt{3}} r dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{2a-\sqrt{4a^2-r^2}}^{\frac{4a^2-r^2}{a}} dz = \frac{37\pi a^3}{6}$$

Objem zvyšnej časti gule je potom $V_2 = \frac{27\pi a^3}{6}$, a hľadaný pomer $\frac{37}{27}$.

[- 11.13 -] Uvažujme cylindrické súradnice.

$$m = \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^H r^2 + z^2\, dz = \frac{\pi H R^2}{6}(3R^2 + 2H^2)$$

[- 11.14 -] Podľa návodu.

$$m = \int_0^{\sqrt{2}} r\, dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{1+\frac{r^2}{2}+r(\cos\varphi+\sin\varphi)}^{2+r(\cos\varphi+\sin\varphi)} dz = \pi$$

$$S_{yz} = \int_0^{\sqrt{2}} r\,dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{1+\frac{r^2}{2}+r(\cos\varphi+\sin\varphi)}^{2+r(\cos\varphi+\sin\varphi)} 1 + r\cos\varphi dz = m$$

Podobne

$$S_{yx} = m$$

$$S_{xy} = \int_0^{\sqrt{2}} r\,dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{1+\frac{r^2}{2}+r(\cos\varphi+\sin\varphi)}^{2+r(\cos\varphi+\sin\varphi)} z\,dz = \frac{5\pi}{3}.$$

Súradnice ťažiska potom sú $T = (1, 1, \frac{5}{3})$.

[- 11.15 -]

$$m = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz \int_0^{\frac{Rz}{h}} r\,dr = \frac{\pi R^2 h}{3}, \quad S_{yz} = S_{xz} = 0,$$

$$S_{xy} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h z\,dz \int_0^{\frac{Rz}{h}} r\,dr = \frac{\pi R^2 h^2}{4}$$

A teda ťažisko

$$T = [0, 0, \frac{3h}{4}].$$

[- 11.16 -] Pozri návod.

$$m = \int_0^{2a} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2az-z^2}} \frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}\,dr = \frac{4\pi a^2}{3}, \quad S_{xz} = S_{yz} = 0$$

$$S_{xy} = \int_0^{2a} z\,dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2az-z^2}} \frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}\,dr = \frac{2^4\pi a^3}{15}$$

Súradnice ťažiska potom sú $T = (0, 0, \frac{4a}{5})$.

[- 11.17 -] Použite polárne súradnice.

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}\,dr = 2\pi a$$

[- 11.18 -] Použijeme transformáciu do eliptických súradníc: $x = ar\cos\varphi\cos\psi$, $y = br\sin\varphi\cos\psi, z = cr\sin\psi$, $J = abcr^2\cos\psi$. Potom

$$I = \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-r^2}.abcr^2\cos\psi\,d\psi = \frac{\pi^2 abc}{4}$$

[- 11. 19 -] Použijeme transformáciu do sférických súradníc. Elementárna oblasť: $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\psi \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, $\rho \in [0, 2a\sqrt{-\cos 2\psi}]$. Potom

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{2a\sqrt{-\cos 2\psi}} \rho^2\cos\psi\,d\rho = \frac{16\pi a^3}{3} \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 (2u^2-1)^{\frac{3}{2}} du = \frac{16\pi a^3}{3\sqrt{2}} \int_1^{\sqrt{2}} (s^2-1)^{\frac{3}{2}}\,ds$$

Jednorozmerný integrál spočítajme pomocou hyperbolickej substitúcie

$$s = \frac{e^t+e^{-t}}{2}, \quad ds = \frac{e^t-e^{-t}}{2}dt, s^2-1 = (\frac{e^t-e^{-t}}{2})^2$$

Po úpravách dostávame $\int_1^{\sqrt{2}}(s^2-1)^{\frac{3}{2}}ds = \frac{3\ln(\sqrt{2}+1)-\sqrt{2}}{8}$. Potom

$$V = \frac{16\pi a^3}{3\sqrt{2}}\frac{3\ln(\sqrt{2}+1)-\sqrt{2}}{8} = \sqrt{2}\pi a^3.(\ln(\sqrt{2}+1)-\sqrt{2}).$$

[- 11.20 -] Použijeme transformáciu

$$x = ar\cos\varphi,\ y = br\sin\varphi, J = abr, \quad S = \int_0^1 abr\ dr \int_0^\pi\ d\varphi = \frac{ab\pi}{2}$$

$$S_y = 0, \quad S_x = \int_0^1 abr\ dr \int_0^\pi\ br\sin\varphi d\varphi = \frac{2ab^2}{3}$$

Súradnice ťažiska $T = (0, \frac{4b}{3\pi})$.

[- 11.21 -] Použijeme transformáciu $x = ar\cos\varphi, y = br\sin\varphi, J = abr$

$$I = \int_0^1 abr\ dr \int_0^{2\pi}(1-r^2)^2\ d\varphi = \frac{2\pi ab}{3}$$

[- 11.22 -]

$$I = \int_0^1 r\ dr \int_0^{2\pi}(r\cos\varphi-2)^2 + r^2\sin^2\varphi\ d\varphi = \frac{9\pi}{2}$$

[- 11.23 -]

$$I = \int_0^1\ dr \int_0^{2\pi}\ d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos\psi((r\cos\varphi\cos\psi-2)^2 + r^2\sin^2\varphi\cos^2\psi + r^2\sin^2\psi)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \int_0^1\ dr \int_0^{2\pi}\ d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos\psi(r^2+4-4r\cos\varphi\cos\psi)^{\frac{3}{2}}\ d\psi$$

[- 11. 24 -]

$$I = \int_0^1\ dr \int_0^{2\pi}\ d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos\psi(r^2+4-4r\cos\varphi\cos\psi)\ d\psi = \frac{4\pi.23}{15}$$

Krivkové a plošné integrály

[- 12.1 -] Počítame priamo alebo pomocou Greenovej vety.

[- 12. 2 -] Použime $x = a\cos^3\varphi, y = a\sin^3\varphi$. Potom $\sqrt{|x'(\varphi)|^2 + |y'(\varphi)|^2} = 3a|\cos\varphi\sin\varphi|, d = 3a\int_0^{2\pi}|\cos\varphi\sin\varphi|\ d\varphi = 6a$.

[- 12.3 -] Pomocou Greenovej vety dostávame $-2\pi ab$.

[- 12.4 -] Pomocou Greenovej vety dostávame $\oint_\Gamma \frac{-x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\ dx_1 + \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\ dx_2 = 2\pi$

[- 12.5 -] Pomocou Greenovej vety dostávame dostávame 0.

[- 12.6 -] Pomocou Greenovej vety dostávame $\oint_\Gamma (x_1 - x_2)\, dx_1 + (x_1 + x_2)\, dx_2 = \int_V 1 + 1\, dx_1\, dx_2 = 2.P = n \sin \frac{2\pi}{n}$,, kde P značí plochu n-uholníka. Potom

$$\lim_{n\to\infty} n \sin \frac{2\pi}{n} = 2\pi$$

[- 12.7 -] Uvažujme parametrizáciu $x = t, y = t(1-t)$. Potom $d = \int_0^1 \sqrt{2 - 4t + 4t^2}\, dt = \int_0^1 \sqrt{s^2+1}\, ds = \frac{\ln(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}}{2}$.

[- 12.8 -] 0

[- 12.9 -]
a) $\sqrt{5}\ln 2$. b) $1+\sqrt{2}$. c) 24. d) $\int_1^2 t\sqrt{1+4t^2}\, dt = \frac{17^{\frac{3}{2}} - 5^{\frac{3}{2}}}{12}$. e) $\int_1^2 t^2 \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}\, dt = \frac{5^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}}{3}$.
f) $\frac{a^4}{3}$.
g) Uvažujme transformáciu $x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos t, y = \frac{a}{2}\sin t$, tak $I = \int_0^{2\pi} \frac{a^2}{2\sqrt{2}} \sqrt{1+\cos t}\, dt = 2a^2$.
h) Uvažujme transformáciu $x = ae^{b\varphi}\cos\varphi,\ y = ae^{b\varphi}\sin\varphi, \varphi \in (-\infty, 0]$. Potom

$$I = \int_{-\infty}^{0} ae^{b\varphi}\cos\varphi.ae^{b\varphi}\sqrt{1+b^2}\, d\varphi = \frac{a^2 b 2\sqrt{1+b^2}}{4b^2+1}$$

i) $\frac{8\pi^3 a\sqrt{2}}{3}$.

[- 12.10 -]
a) $\frac{23}{2}$. b) $\frac{38}{3}$. c) $\frac{22}{3}$.

[- 12.11 -]
a) 0. b) 0. c) $\frac{4}{3}$.
d) Uvažujme substitúciu $x = a\cos\varphi, y = b\sin\varphi$,

$$I = \int_0^{2\pi} (a\cos\varphi + b\sin\varphi, a\cos\varphi - b\sin\varphi).(-a\sin\varphi, b\cos\varphi)\, d\varphi = 0$$

e) $\int_0^1 (-1, \arctan t)(1, 2t)\, dt + \int_0^1 (-1, \arctan t)(-1,-1)\, dt = \frac{\pi}{4} - 1$.

[- 12.12 -]
a) $\int_0^1 (1+t, 1+2t, 1+3t)(1,2,3)\, dt = 13$. b) $\int_0^1 (t^2, 2t, 4t^5 - 2t)(2t, 2, 12t^2) dt = \frac{5}{2}$. c) 0.
d) Uvažujme krivku $K : x = \cos t, y = \sin t, z = \cos t \sin t,\ t \in (0, 2\pi)$ a teda $I = \int_0^{2\pi} (\sin t, \cos t \sin t, \cos t)(-\sin t, \cos t, -\sin^2 t + \cos^2 t)\, dt = -\pi$.
e) Uvažujme krivku $K : x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos t, \frac{a}{2}\sin t, z = \frac{a}{2}\sqrt{2 - 2\cos t},\ I = \int_0^{2\pi} (\frac{a^2 \sin^2 t}{4}, \frac{a^2}{2}(1 - \cos t), \frac{a^2}{4}(1 + \cos^2 t + 2\cos t))(-\frac{a\sin t}{2}, \frac{a\cos t}{2}, \frac{a \sin t}{2\sqrt{2-2\cos t}})\, dt = 2$.

[- 12.13 -] Zistíme, že dané integrály nezávisia od cesty a spočítame potenciál $V(x,y) = 2yx - 3x^2y^3$ a teda vo všetkých prípadoch vyjde $I = V(B) - V(A) = -88$.

[- 12.14 -]
a) Nezávislé, $V(x,y) = x^2 + 3yx - 2y^2$.
b) Nezávislé, $V(x,y) = \frac{x^5}{5} + 2x^2y^3 - y^5$.
c) Závislé, vypočítajte rot f.

[- 12.15 -] Rovná sa nule, ak krivka neobsahuje $(0,0)$. Potom $\operatorname{rot} f = p_y - q_x = \frac{6y}{x^4} - \frac{6y}{x^4} = 0$.

[- 12.16 -] Ak krivka neobsahuje $(0,0)$, tak $p_y - q_x = 0$ a teda sa rovná 0. Ak krivka C obsahuje 0,

$$\oint_C f(x,y)ds + \oint_{u_1} f(x,y)ds = 0,$$

kde u_1 je malá kružnica

$$x = \varepsilon \sin t, y = \varepsilon \cos t,$$

leží celá vo vnútri C a $f(x,y)$ je funkcia zo zadania, príslušné integrály sú integrály 2. druhu.

$$\oint_{u_1} f(x,y)ds = \int_0^{2\pi} (\sin t, -\cos t).(-\sin t, \cos t)dt = -2\pi$$

Teda ak krivka C obsahuje 0

$$\oint_C f(x,y)ds = 2\pi.$$

[- 12.17 -]
a) Zostrojíme potenciál V. Nech $F(t) = \int f(t)dt$. Nech $V(x,y) = F(xy)$. Potom V je potenciál, ukážte derivovaním.
b) Zostrojíme potenciál V. Nech $F(t) = \int f(t)dt$. Nech $V(x,y,z) = \frac{1}{2}F(x^2+y^2+z^2)$. Potom V je potenciál.

[- 12.18 -]
a) Nezávisí od cesty, lebo rot $f = 0$, $I = 4$.
b) Nezávisí od cesty, lebo rot $f = 0$, $I = 62$.
c) $V(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2), I = V(B) - V(A) = \ln\frac{13}{5}$.
d) $V(x,y) = \frac{y}{x+y} + \ln|x+y|, I = \ln\frac{5}{2} - \frac{1}{10}$.
e) $V(x,y) = -y\cos 2x, I = -\frac{1}{2}$.
f) $V(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{z^4}{4}, I = -53\frac{7}{12}$.

[- 12.19 -]
a) $V(x,y) = \frac{x^3}{3} + x^2y - y^2x - \frac{y^3}{3} + C$.
b) $V(x,y) = \ln\frac{y}{x} - \frac{xy}{x-y} + C$.

[- 12.20 -]
a) 4. b) 4π.
c) Použijeme transformáciu $x = \rho\cos^3 t, y = \rho\sin^3 t, J = -3\rho\sin^2 t\cos^2 t, t \in [0,2\pi], \rho \in [0,2]$,

$$\oint_C y^2\, dx + x\, dy = \iint_K -1 + 2ydxdy = \int_0^{2\pi} dt \int_0^2 (-1 + 2\rho\sin^3 t)(-3\rho\sin^2 t\cos^2 t)\, d\rho = \frac{3\pi}{2}$$

[- 12.21 -] Použite Greenovu vetu, $I = 0$

[- 12.22 -] Použite Greenovu vetu a polárne súradnice.

$$I = \int_1^2 \frac{1}{r} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi = \frac{\pi}{12}\ln 2$$

[- 12.23 -] $2\pi a^2$.

[- 12.24 -] a) Použite Greenovu vetu, 4.

b) Použite Greenovu vetu, 0.
c) Použite Greenovu vetu, $-2\pi ab$.

[- 12.25 -] Použite Greenovu vetu a $\int_A y^3 - x^3 \, dx \, dy = 0$, lebo A je stredovo súmerná a x^3, y^3 sú nepárne.

[- 12.26 -] Použite Greenovu vetu,

$$\oint_C (2xy - y) \, dx + x^2 \, dy = \int_{intC} 1 \, dx \, dy = P$$

[- 12.27 -] $|A| = \iint_A 1 \, dx \, dy = \int_C y \, dx + 2x \, dy$

[- 12.28 -] Použite Greenovu vetu a ukážte, že platí

$$\oint_C fg \, dx + fg \, dy = \int_A \int (fg)'_x - (fg)'_y dx \, dy = \int_A \int [g(f'_x - f'_y) + f(g'_x - g'_y] dx \, dy.$$

[- 12.29 -] Dokazujeme ekvivalenciu. Nutná podmienka: Nech u je harmonická v oblasti G a $\partial\Omega$ je ľubovoľná jednoduchá hladká uzavretá krivka v G, podľa druhej Greenovej formuly

$$\oint (f \frac{dg}{dn} - g \frac{df}{dn}) ds = \int_A \int [f\Delta g - g\Delta f)] dx \, dy,$$

dosadíme za $f = 1, g = u$ a máme

$$\int_\Omega \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \, ds = 0$$

Postačujúca podmienka: Naopak, nech pre každú jednoduchú hladkú uzavretú krivku v G platí

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$$

a nech

$$\exists (x_0, y_0) \in A : \Delta u(x_0, y_0) \neq 0$$

potom vezmeme B okolie

$$(x_0, y_0) : \Delta u(x, y) > 0 \; pre \; (x, y) \in B$$

potom zase z 2. Greenovej formuly za $v = 1$ máme

$$0 = \int_{h(B)} 1. \frac{\partial u}{\partial n} = \int_B \Delta u > 0.$$

To je spor.

[- 12.30 -] Odčítaním.

[- 12.31 -] Dosaďte do prvej Greenovej formuly

$$\oint_C f \frac{dg}{dn} ds = \int_A \int (f\Delta g + \nabla \, f \, .\nabla \, g) dx \, dy,$$

za $f = g = u$.

[- 12.32 -] Uvažujme kružnicu $C : x = m + a\cos t, y = n + a\sin t, C' : x = -a\sin t, y = a\cos t, \sqrt{x'^2 + y'^2} = a$. Definujme $g(a) = \int_0^{2\pi} u(m + a\cos t, n + a\sin t)dt = \frac{1}{a}\int_C u(P)ds$ Teraz $g(0) = 2\pi u(m, n) = 2\pi u(M), g'(a) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial x}(m + a\cos t, n + a\sin t)\cos t + \frac{\partial u}{\partial y}(m + a\cos t, n + a\sin t)\sin t\ dt = \frac{1}{a}\int_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$, lebo u je harmonická. Teda g je konštanta $g(a) = g(0) = 2\pi u(M)$. Teda $u(M) = \frac{1}{2\pi a}\int_C u(P)ds$.

[- 12.33 -] Keď počítame obsah vnútra jednoduchej uzavretej krivky, môžeme použiť napr. $P = \frac{1}{2}\int_C x\ dy - ydx$.
a) $P = ab\pi$.
b) $3a^2\pi$.
c) Krivka sa nachádza vo všetkých 4 kvadrantoch a je súmerná podľa osí a preto počítame len v 1. kvadrante a výslednú plochu vynásobíme 4. $t \in [0, 1], x = t, y = t\sqrt{1 - t^2}$. Krivkový integrál $\int_u -\frac{1}{2}\int_C x\ dy - y\ dx$ po časti osi $o_x$je 0. Táto krivka je nesúhlasne orientovaná a preto $P = -\frac{1}{2}\int_C x\ dy - y\ dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 t(\frac{1-2t^2}{\sqrt{1-t^2}}) - t\sqrt{1 - t^2}\ dt = \frac{1}{3}$, a teda výsledná plocha $S = \frac{4}{3}$.
d) $\frac{3\pi a^2}{8}$

[- 12.34 -] Postupujeme podľa návodu.
a) $C : x = a\cos t, y = a\sin t, C' : dx = -a\sin t, dy = a\cos t, |C'| = at \in [0, 2\alpha]$

$$M = 2\alpha a, x_T = \frac{1}{M}\int_0^{2\alpha} a^2\cos\varphi\ d\varphi = \frac{a}{\alpha}\sin\alpha\cos\alpha, y_T = \frac{a}{\alpha}\sin\alpha\sin\alpha$$

b) $T = [a\pi, \frac{4a}{3}]$.
c) $T = [\frac{4a}{3\pi}, \frac{4a}{3\pi}, \frac{4a}{3\pi}]$.
d) $M = \int_{-\infty}^0 e^t\sqrt{3}\ dt = \sqrt{3}$

$$x_T = \frac{1}{M}\int_{-\infty}^0 e^{2t}\sqrt{3}\cos t\ dt = \frac{2}{5}, y_T = \frac{1}{M}\int_{-\infty}^0 e^{2t}\sqrt{3}\sin t\ dt = \frac{-1}{5}, z_T = \frac{1}{2}.$$

Parametrické integrály

[- 13.1 -] $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

[- 13.2 -] a) Spojitá; b) spojitá; c) spojitá pre $y \neq 0$.

[- 13.3 -] Spojitá pre $y \neq 0$.

[- 13.4 -] Pre $F(-1) = -\pi, F(1) = \pi$. Počítame

$$F(y) = \int_0^\pi \frac{2\cos x + 2y}{1 + 2y\cos x + y^2}dx.$$

Najprv substitúciu $t = \tan\frac{x}{2}$ Máme

$$F(y) = 4\int_0^\infty \frac{t^2(y-1) + y + 1}{(1 + t^2)(t^2(y-1)^2 + (y+1)^2)}\ dt$$

$$= \frac{2}{y}\int_0^\infty \frac{dt}{t^2 + 1}\ dt + \frac{2(y^2 - 1)}{y}\int_0^\infty \frac{dt}{(y+1)^2 + (y-1)^2t^2}\ dt = \frac{\pi}{y} + \frac{2}{y}[\arctan\frac{(y-1)t}{y+1}]_0^\infty$$

Teda ak $y \in (-1,1) : F(y) = 0, y \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty) : F(y) = \frac{2\pi}{y}$.

[- 13.5 -] Počítajme jednotlivé integrály.

$$y \geq 1 : F(y) = \int_0^1 -1\, dx = -1, \quad y \leq 0 : F(y) = \int_0^1 1\, dx = 1,$$

$$y \in [0,1] F(y) = \int_0^y \operatorname{sign}(x-y)\, dx + \int_y^1 \operatorname{sign}(x-y)\, dx = 1 - 2y$$

[- 13.6 -] a) 1; b) 1; c) $\frac{8}{3}$; d) 0; e) $\frac{\pi}{4}$; f) $\ln\frac{2e}{1+e}$; g) $\frac{1}{2}$.

[- 13.7 -] 0.

[- 13.8 -] Nie. Ak prejdeme k limite za znakom integrálu dostávame nulu. Ak vypočítame integrál a potom prejdeme k limite, dostávame $\frac{1}{2}$. Všimnite si, že v bode $(0,0)$ integrovaná funkcia nie je spojitá.

[- 13.9 -] $\frac{1}{2}\ln\left[\frac{y^2}{1+y^2}\right]$, pre $y > 0$. V bode $y = 0$ derivácia neexistuje.

[- 13.10 -] a) $2ye^{-y^5} - e^{-y^3} - \int_y^{y^2} x^2 e^{-x^2 y} dx$; b) $e^{(3y^2+1)y}\left[\frac{1}{y} + \frac{6y}{(3y^2+1)}\right] - \frac{3e^{y^3}}{y}$;
c) $-e^{y|\cos y|}\cos y - e^{y|\sin y|}\sin y + \int_{\sin y}^{\cos y}\sqrt{1-x^2}e^{y\sqrt{1-x^2}}dx$; d) $\left[\frac{1}{b} + \frac{1}{(b+y)}\right]\sin[y(b+y)] - \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{(a+y)}\right]\sin[y(a+y)]$;
e) $(\frac{2}{y}\ln(1+y^2)$; f) $f(y,-y) + 2\int_0^y f'_u(u,v)dx$, kde $u = x+y$ a $v = x-y$; g) $2y\int_{y^2-y}^{y^2+y}\sin\left(t^2+y^4-y^2\right)dt +$
$2\int_0^{y^2}\sin 2x^2 . \cos 2xy dx -$
$2y\int_0^{y^2}dx\int_{x-y}^{x+y}\cos\left(x^2+t^2-y^2\right)dt$.

[- 13.11 -] a) $F''(y) = 3f(y) + 2yf'(y)$; b) $F''(y) = 2f(y)$, ak $y \in (a,b)$, $F''(y) = 0$, ak $y \notin (a,b)$;
c) $F''(y) = \frac{\Delta^2 f(y)}{h^2}$, kde $\Delta^2 f(y) = f(y+2h) - 2f(y+h) + f(y)$.

[- 13.12 -] $F^{(n)}(y) = (n-1)! f(y)$.

[- 13.13 -] $4x - \frac{11}{3}$.

[- 13.14 -] $\frac{(n+1)2^{n+1}\ln 2 - 2^{n+1} + 1}{(n+1)^2}$.

[- 13.15 -] Definujme

$$F(a) = \int_0^b \frac{dx}{1+ax} = \frac{\ln(1+ab)}{a}$$

Teda

$$F'(a) = \int_0^b \frac{-x\, dx}{(1+ax)^2} = -\frac{1}{a^2}\ln(1+ab) + \frac{b}{a(1+ab)}.$$

[- 13.16 -] a) $\pi\ln\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{2}$; b) $\pi\ln\frac{|a|+|b|}{2}$; c) 0, ak $|a| \leq 1$; $\pi\ln a^2$, ak $|a| > 1$;
d) $\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} a \ln(1+|a|)$; c) $\pi\arcsin a$.

[- 13.17 -] $\frac{\pi}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

[- 13.18 -] $\ln\frac{b+1}{a+1}$.

[- 13.19 -]
a) Množinu A si aproximujeme množinami A_n, v polárnych súradniciach.

$$A : \varphi \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], r \in [0, \cos\varphi], \quad A_n : \varphi \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], r \in [\frac{\cos\varphi}{n}, \cos\varphi]$$

$$\iint_A \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy = \lim_{n\to\infty}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{\cos\varphi}{n}}^{\cos\varphi}\frac{1}{r}r\;dr = 2.$$

b) $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$, kde napr. A_1 je štvorec so stredom $1.5, 1.5$ a stranou 1, analogicky A_2 je štvorec so stredom $0.5, 1.5$ a stranou 1, atď. Teraz

$$\int_A f\;dx\;dy = \int_{A_1} f\;dx\;dy + \int_{A_2} f\;dx\;dy + \int_{A_3} f\;dx\;dy + \int_{A_4} f\;dx\;dy.$$

Teraz $\int_{A_1} f(x,y)\;dx\;dy = \lim_{n\to\infty}\int_{1+\frac{1}{n}}^{2}\frac{dy}{\sqrt[3]{y-1}}\int_{1+\frac{1}{n}}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \frac{9}{4}$, analogicky

$$\int_{A_3}\frac{dxdy}{\sqrt[3]{y-1}\sqrt[3]{x-1}} = \frac{9}{4}, \qquad \int_{A_2}\frac{dxdy}{\sqrt[3]{y-1}\sqrt[3]{x-1}} = \frac{-9}{4} = \int_{A_4}\frac{dxdy}{\sqrt[3]{y-1}\sqrt[3]{x-1}}$$

a teda $I = 0$.
c) $\frac{\pi ab}{2}$.
d) $I = \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\;d\varphi\int_{\frac{1}{n}}^{1}\rho\;\ln\frac{1}{\rho}\;d\rho = \frac{\pi}{2}$.
e) $I = \lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{1}\;dy\int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}}\;dx = \frac{1}{2}$.

[- 13.20 -]
a) Označme $B(0,n)$ guľu so stredom $(0,0)$ a polomerom n. Teraz

$$I = \lim_{n\to\infty}\int_{B(0,n)}\frac{dx\;dy}{1+x^2+y^2} = \lim_{n\to}\int_0^{2\pi}\;d\varphi\int_0^n\frac{dr\;r}{1+r^2} = \infty$$

I diverguje.
b) $I = \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\;d\varphi\int_1^n\frac{1}{\rho^{2\alpha}}\rho\;d\rho = \frac{\pi}{\alpha-1}$.
c) $I = \lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\;d\varphi\int_0^n\frac{\rho}{(\rho^2+a^2)}\;d\rho = \frac{\pi}{4a^2}$.
d) $I = \lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-y}\;dy\int_0^y e^{-x}\;dx = \frac{1}{2}$.
e) $I = \lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-\rho^2}\rho ab\;d\rho\int_0^{2\pi}\;d\varphi = \pi ab$.
f) 4

[- 13.21 -] Na výpočet objemu použijeme cylindrické súradnice. $A_n : \varphi \in [0,2\pi], \rho \in [0,n], z \in [0, e^{-\rho^2}]$ $V_n = \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^n\;\rho\;d\rho\int_0^{e^{-\rho^2}}\;d\rho = \pi - \pi e^{-n^2} \to \pi$.

[- 13.22 -]
a) $\frac{5}{2}$.
b)

$$I = \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{2\pi}\;d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\;\cos\psi d\psi\int_0^{1-\epsilon}\frac{\rho^2}{\sqrt{1-\rho^2}}\;d\rho = \pi^2.$$

c) Použite posunuté sférické súradnice: $x = a + \rho\cos\varphi\cos\psi, y = b + \rho\sin\varphi\cos\psi, z = \rho\sin\psi$.

$$\rho \in [0,r], \psi \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}], \varphi \in [0,2\pi], \quad I = 2\pi r^2.$$

d) Sférické súradnice, $\frac{r^5}{15}\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma}{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)}$.

[- 13.23 -]

a) Použijeme sférické súradnice, $A_n : \rho \in [1, N], \varphi \in [0, 2\pi], \psi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], J = \cos\psi\rho^2$

$$I_n = \frac{4\pi}{3}(1 - \frac{1}{N^3}) \to \frac{4\pi}{3}, \quad \text{pre } N \to \infty$$

b) $\frac{1}{120}$.
c) Sférické súradnice,

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi \, d\psi \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \ln \rho^2 \rho^2 \, d\rho = \frac{8\pi a^3}{3}(\ln a - \frac{1}{3}).$$

d) $\pi^{\frac{3}{2}}$.

[- 13.24 -] Substitúciou $z = \frac{t}{2}$ dostaneme $I = 2^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2}) = 2^{\frac{1}{2}}.\sqrt{\pi}$.

[- 13.25 -] Substitúciou $x^4 = t$,

$$I = \frac{1}{16}\int_0^1 t^{\frac{1}{4}-1}(1-t)^{\frac{1}{2}-1}\, dt = \int_0^1 t^{\frac{3}{4}-1}(1-t)^{\frac{1}{2}-1}\, dt = \frac{1}{16}B(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})B(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}\Gamma^2(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{4}.$$

[- 13.26 -] Musí platiť, že $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$. Pomocou substitúcie $\alpha x = t$ dostaneme:

$$\int_0^\infty x^\lambda e^{-\alpha x} dx = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\alpha^{\lambda+1}}$$

A teda $C = \frac{\alpha^{\lambda+1}}{\Gamma(\lambda+1)}$. Derivovaním $\phi(\xi) = E(e^{i\xi X}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} f(x)\, dx$ dostaneme

$$\phi'(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} ixe^{i\xi x} f(x) dx,$$

odkiaľ $\phi'(0) = iC\int_0^\infty x^{\lambda+1}e^{-\alpha x}dx = iC\frac{\Gamma(\lambda+2)}{\alpha^{\lambda+2}} = \frac{i(\lambda+1)}{\alpha}$. Rovnako dostaneme $\phi''(0) = \frac{-(\lambda+2)(\lambda+1)}{\alpha^2}$.

[- 13.27 -] a) $\frac{\pi}{8}$; b) $\frac{\sqrt{3}}{60\pi}\Gamma^3\left(\frac{1}{3}\right)$; c) $\pi\frac{a^4}{16}$; d) $\frac{\pi}{(5\sin\frac{2\pi}{5})}$; e) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$; f) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$; g) $\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}$.

[- 13.28 -]
a) $\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}$, $0 < m < n$;
b) $B\left(n-m, m\right)$, $0 < m < n$;
c) $\frac{a^{-p}}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}} B\left(\frac{m+1}{n}, p - \frac{m+1}{n}\right)$, $0 < \frac{m+1}{n} < p$, d) $\frac{1}{m}B\left(\frac{1}{m}, 1-\frac{1}{n}\right)$, $n < 0$ alebo $n > 1$; e) $\frac{1}{2}B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$, $m > -1$, $n > -1$; f) $\frac{\pi}{2\cos\frac{n\pi}{2}}$, $|n| < 1$; g) $\frac{1}{|n|}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$, $\frac{m+1}{n} > 0$; h) $\Gamma\left(p+1\right)$, $p > -1$; i) $\frac{d}{dp}\left[\frac{\Gamma(p+1)}{a^{p+1}}\right]$, $p > -1$; j) $-\frac{\pi^2\cos p\pi}{\sin^2 p\pi}$, $0 < p < 1$; k) $\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{p\pi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{q\pi}{2}}\right|$, $0 < p < 1$, $0 < q < 1$

[- 13.29 -]
a) $\ln\sqrt{2\pi}$ Všimnite si, že daný integrál je možné prepísať v tvare $\frac{1}{2}\int_0^1 \ln\left[\Gamma(x)\Gamma(1-x)\right] dx$. Potom použite vlastnosti Gama funkcie.
b) $\ln\sqrt{2\pi} + a\left(\ln a - 1\right)$. Derivujte daný integrál podľa parametra a.
c) $\frac{1}{\pi}\left(1 + \ln\frac{\pi}{2}\right)$. Prepíšte daný integrál ako $\frac{1}{2}\int_0^1 \ln\left[\Gamma(x)\Gamma(1-x)\right]\sin\pi x dx$ a využite vzorec (iii) pre gama - funkciu.
d) $\frac{1}{4n}$.

[- 13.30 -] Použite vlastnosti Gama funkcií

Literatúra

[1] ARSENIN V. J. , *Matematičeskaja fizika. Osnovnyje uravnenija i funkcii*. Nauka, Moska 1966 (slovenský preklad).

[2] BARNOVSKÁ M., SMÍTALOVÁ K. , *(1991) Matematická analýza III, Skriptá UK, Bratislava.*

[3] BARNOVSKÁ M., SMÍTALOVÁ K. , *(1984) Matematická analýza IV, Skriptá UK, Bratislava.*

[4] BOCK, I., HORNIAČEK, J., *(1990) Matematická analýza III, Alfa.*

[5] KLUVÁNEK, I., MIŠÍK, L., ŠVEC M. , *(1961) Matematika I, II, SVTL Bratislava.*

[6] HORSKÝ, Z. , *(1981) Diferenciální počet, SNTL Praha.*

[7] CHIANG, A. , *(1984) Fundamental methods of mathematical economics, McGraw-Hill, Inc.*

[8] BARNOVSKÁ M. A KOL. , *(1992) Cvičenia z matematickej analýzy III, Skriptá UK, Bratislava. Internet: www. iam. fmph. uniba. sk/skripta*

[9] ELIÁŠ, J., HORVÁTH, J., KAJAN, J. , *(1972) Zbierka úloh z vyššej matematiky III, IV, SNTL Bratislava.*

[10] DEMIDOVIČ, B. P. , *(1977) Sbornik zadač i upražnenij po matematičeskomu analizu, Moskva Nauka (v ruštine).*

[11] BERMAN, G. N. , *(1957) Zbierka úloh z matematickej analýzy, Bratislava, SVTL.*

[12] IVAN, J. , *(1989) Matematika II, Bratislava, Alfa.*

[13] JIRÁSEK, F., CIPERA, S., VACEK, M., *(1989) Sbírka rešených príkladu z matematiky I, II. III. Praha SNTL.*

[14] ŠALÁT, T. , *(1981) Metrické priestory, Alfa Bratislava.*

[15] PULTR, A. , *(1986) Podprostory Euklidovských prostorů, SNTL Praha.*

[16] PISKUNOV, N. S. , *(1985) Diferenciálny a integrálny počet 1., Moskva Nauka (v ruštine).*

[17] KARTAŠEV, A. P., ROŽDESTVENSKIJ B. L. , *(1984) Matematická analýza, Moskva Nauka (v ruštine).*

[18] MIŠÍK, L. , *(1989) Funkcionálna analýza.*

[19] BUTUZOV, V., KRUTICJAJA, N., MEDVEDEV, G.N., ŠIŠKIN, A.A. , *(1984) Matematičeskij analiz v voprosach i zadačach, Moskva Fizmatlit.*

[20] WALTER, W. , *(1995) Analysis 2. Berlin: Springer-Verlag.*

[21] RUDIN, W. , *(1976) Principles of mathematical analysis, McGraw Hill, 3. vydanie, New York.*