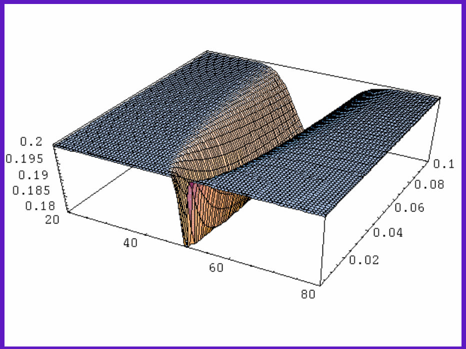
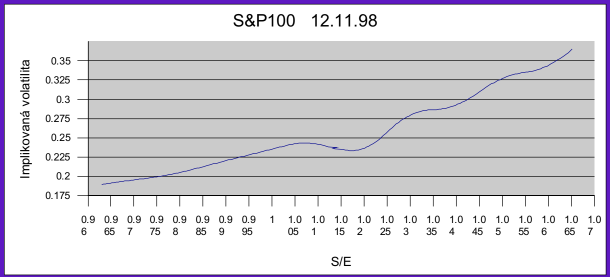
Oceňovanie finančných derivátov

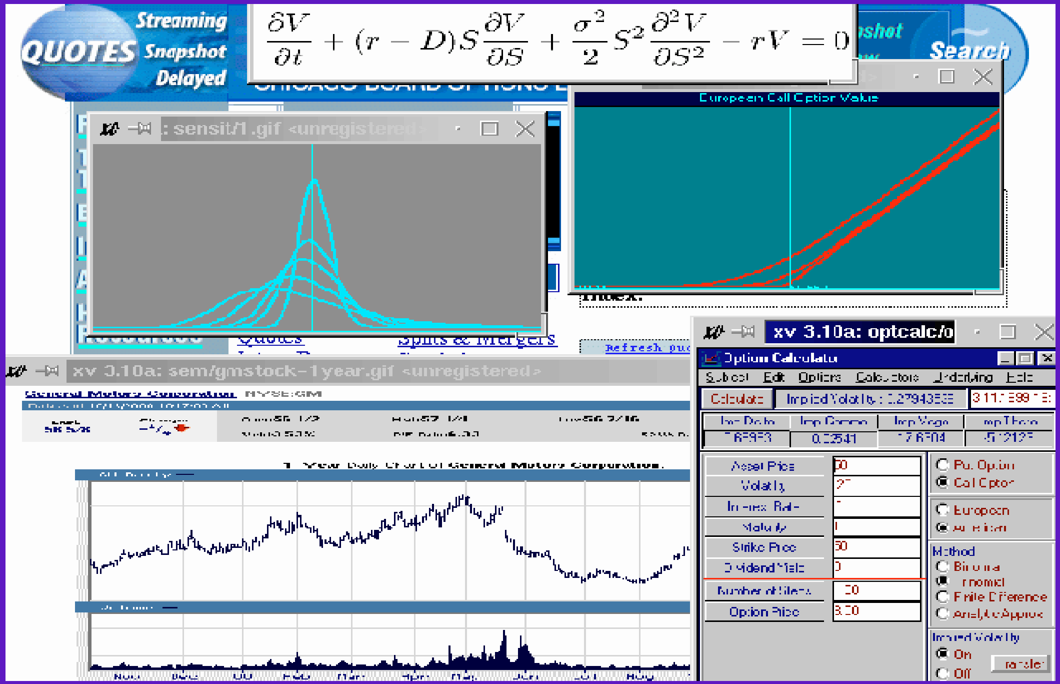
Daniel Ševčovič

Ústav aplikovanej matematiky,

Katedra ekonomických a finančných modelov, FMFI UK Bratislava







Obsah

1. Význam zaisťovania portfólia pomocou derivátov.
Stochastický charakter vývoja cien aktív. Základné nástroje zaisťovania portfólia - Call a Put opcie.

2. Oceňovanie derivátov. Black-Scholesov model.
Východiská odvodenia modelu. Itôova lema. Princíp arbitráže a samofinancovania portfólia.

3. Jednoduché a kombinované opčné stratégie.
Jednoduché opcie typu Call a Put. Kombinované stratégie. Oceňovanie jednoduchých a kombinovaných stratégii.

4. Analýza citlivosti a rizika
Faktory citlivosti opcií - Delta a Gama faktor. Implikovaná volatilita a volatility smile

5. Americké typy derivátov. Problém voľnej hranice.
Americké *versus* európske opcie. Optimálny čas uplatnenia opcie.

6. Riziko zahrňujúca metodológia oceňovania derivátov
Zahrnutie transakčných nákladov a rizika do Black-Scholesovho modelu. Lelandov a Kratkov model.

Význam zaisťovania portfólia pomocou derivátov

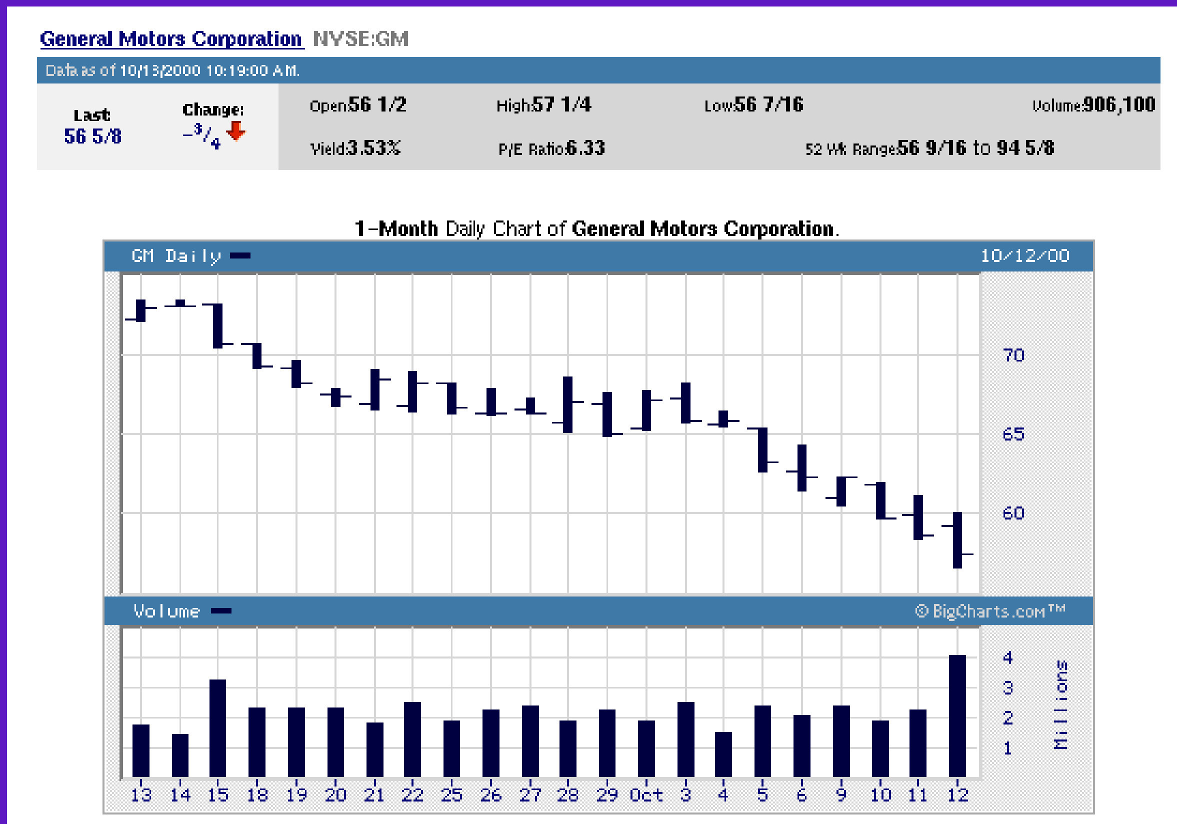
Stochastický charakter vývoja cien aktív. Základné nástroje zaisťovania portfólia - Call a Put opcie

Ceny aktív (akcie, indexy, atď) majú stochastický charakter časového vývoja.

General Motors, vývoj ceny na CBOE v roku 2000

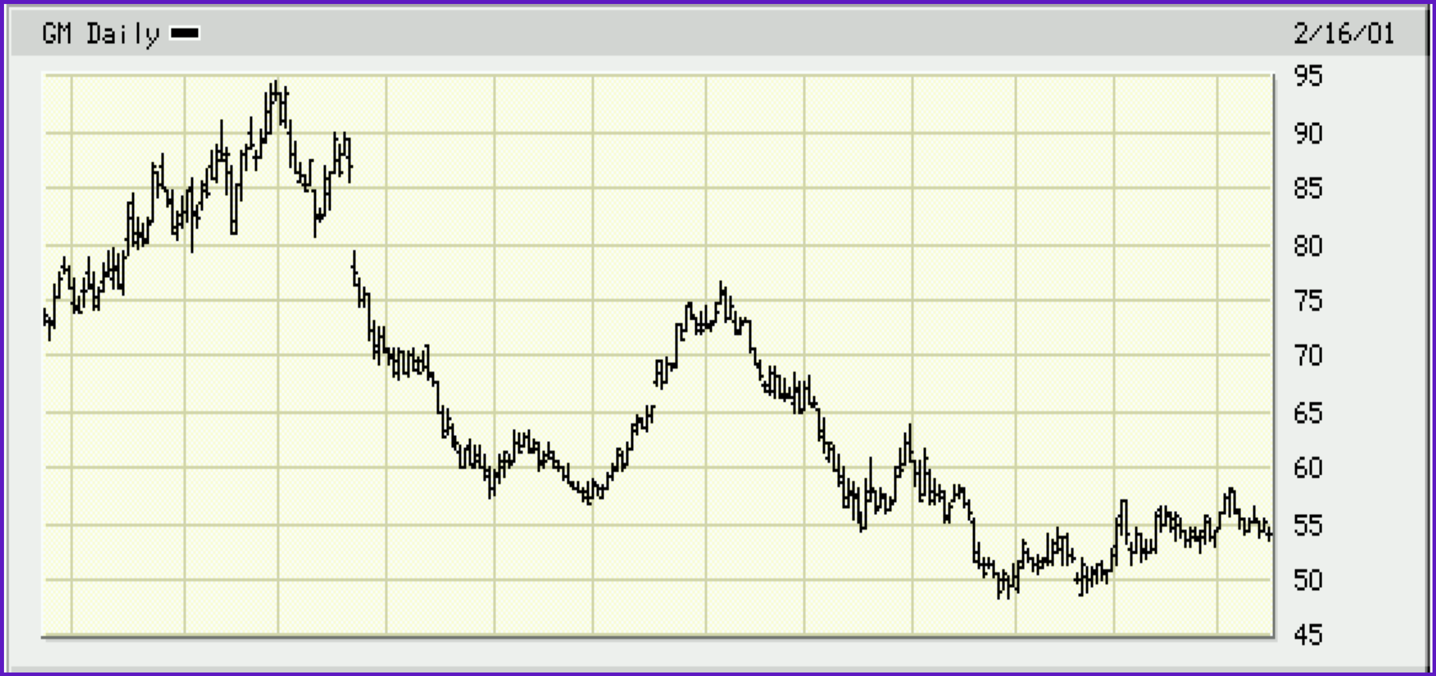
Význam zaisťovania portfólia pomocou derivátov

General Motors, vývoj ceny na CBOE 13.9-13.10.2000



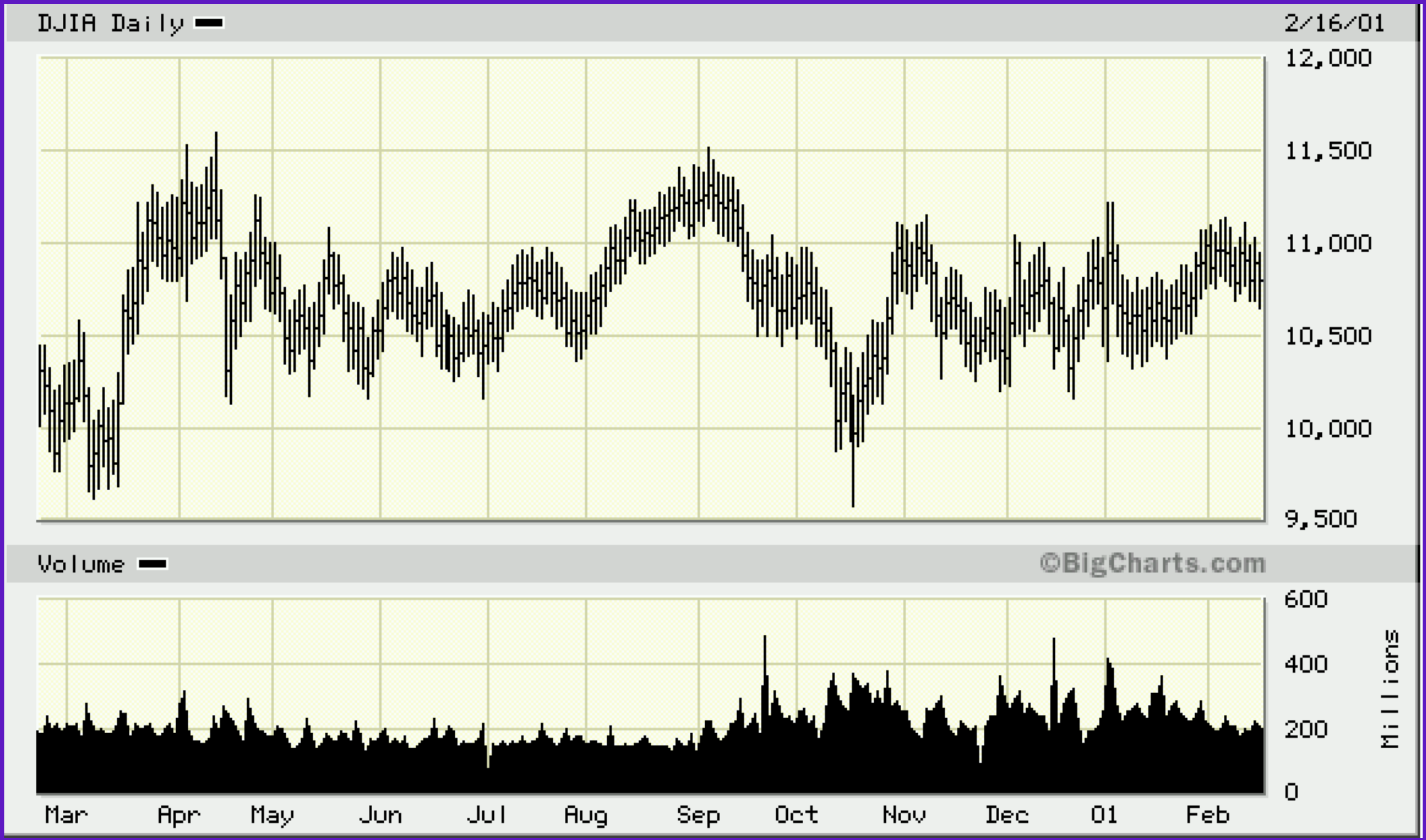
Význam zaisťovania portfólia pomocou derivátov

General Motors, vývoj ceny na CBOE 16.2.2001



Význam zaisťovania portfólia pomocou derivátov

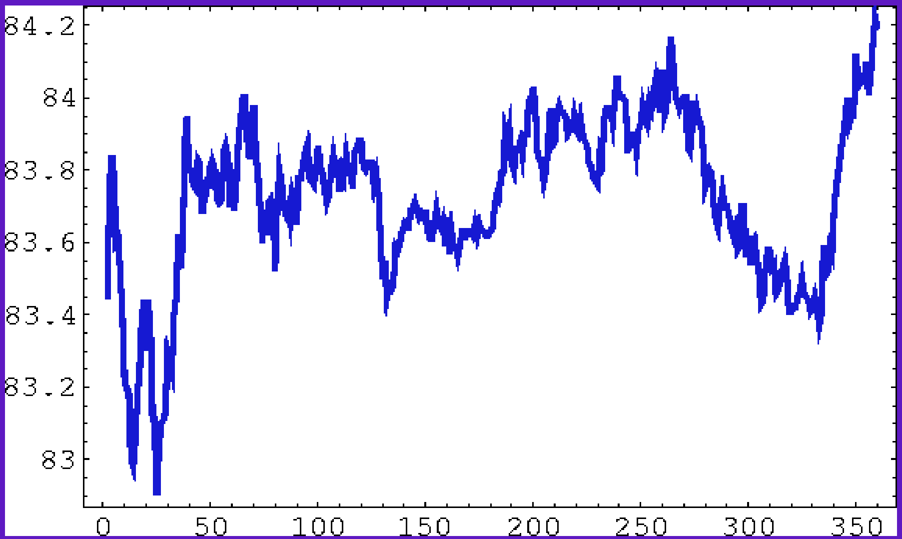
Dow Jones, vývoj ceny na CBOE 16.2.2001

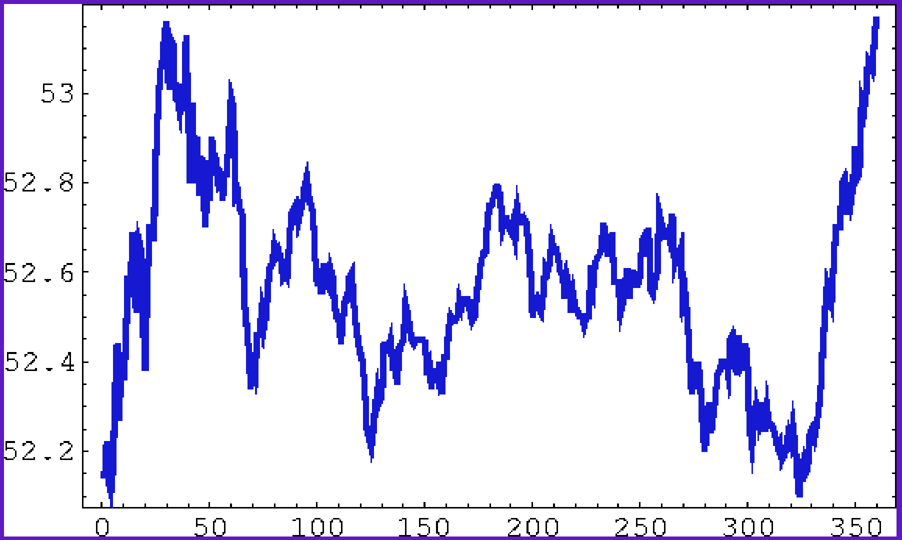


Význam zaisťovania portfólia pomocou derivátov

IBM, vývoj ceny akcie 27.2.2002

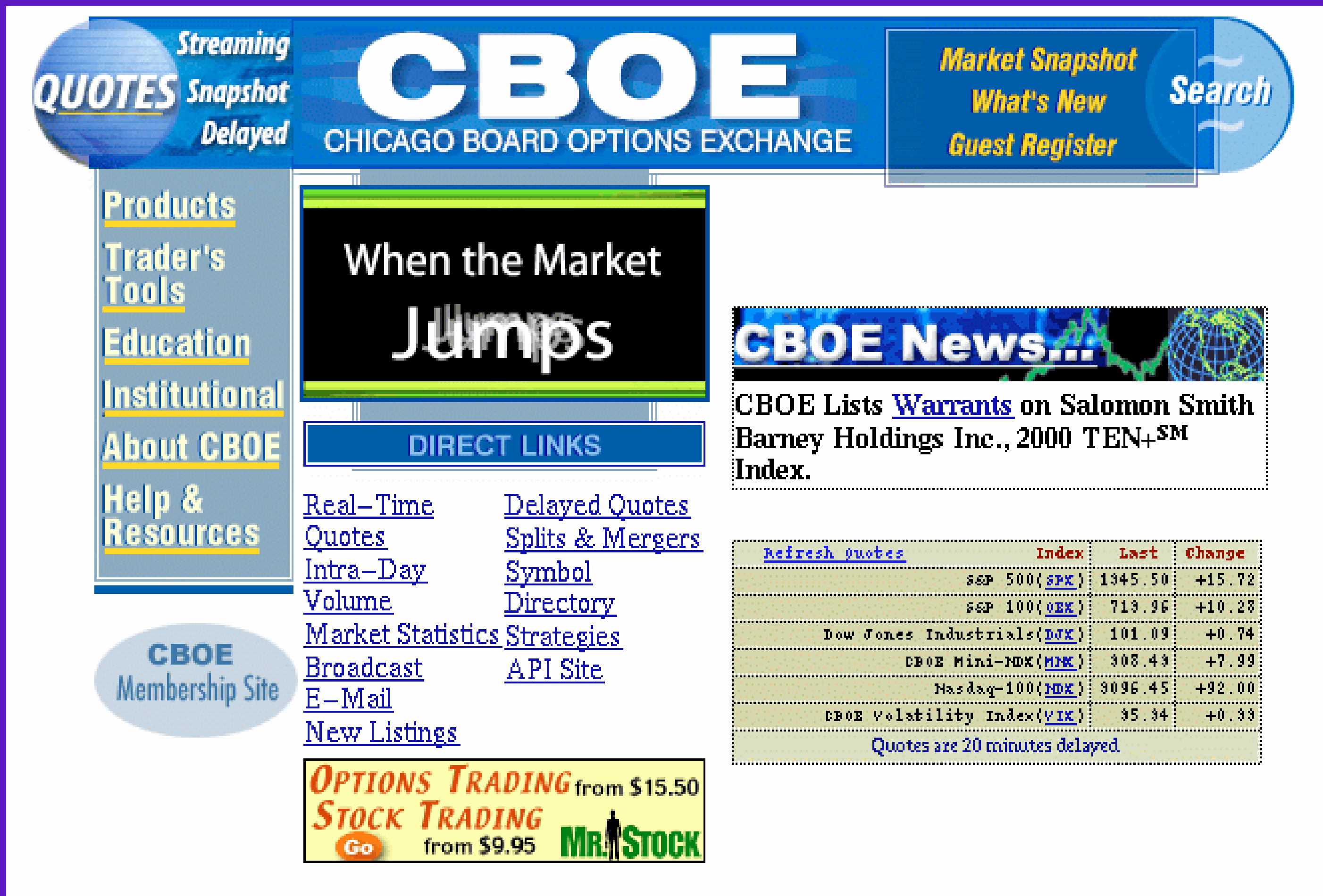
Microsdoft, cena akcie 27.2.2002





Význam zaisťovania portfólia pomocou derivátov

Chicago Board Option Exchange www.cboe.com



Význam zaisťovania portfólia pomocou derivátov

Európska kúpna opcia (Call option) je právo (nie však povinnosť) kúpiť dané aktívum za vopred dohodnutú cenu E vo vopred presne stanovenom čase T.

Európska predajná opcia (Put option) je právo (nie však povinnosť) predať dané aktívum za vopred dohodnutú cenu E vo vopred stanovenom čase T.

Právo nie však povinnosť znamená, že vypisovateľ opcie si bude účtovať od kupujúceho opcie určitú prémiu za svoje riziko spojené s náhodnými výchylkami ceny aktíva

Význam zaisťovania portfólia pomocou derivátov

IBM, ceny Call a Put opcií z 16.2.2001
Cena akcie IBM = 118.86

118.86 +1.42

ET (Data 20 Minutes Delayed) **Bid** N/A **Ask** N/A **Size** N/AxN/A **Vol** 3357300

	Last Sale	Net	Bid	Ask	Vol	Open Int	Puts	Last Sale	Net	Bid	Ask	Vol	Open Int
M FB-E)	9.30	pc	10.30	10.80	0	1537	01 Jun 110.0 (IBM RB-E)	1.25	-0.55	1.05	1.30	268	3959
M FC-E)	6.70	+1.10	6.50	7.00	142	13583	01 Jun 115.0 (IBM RC-E)	2.40	-0.80	2.10	2.30	126	12376
M FD-E)	3.40	+0.40	3.40	3.70	1344	7270	01 Jun 120.0 (IBM RD-E)	4.60	-0.90	4.00	4.40	21	1462
M FE-E)	1.60	+0.15	1.60	1.75	642	27086	01 Jun 125.0 (IBM RE-E)	7.50	-2.80	7.10	7.70	4	174
M GB-E)	11.90	pc	12.60	13.20	0	11806	01 Jul 110.0 (IBM SB-E)	3.30	-0.50	2.95	3.30	19	10406
M GC-E)	8.70	+0.20	9.20	9.70	2	15414	01 Jul 115.0 (IBM SC-E)	5.00	-0.50	4.50	4.80	3	7865
M GD-E)	6.10	+0.30	6.30	6.70	44	22459	01 Jul 120.0 (IBM SD-E)	7.00	-1.30	6.50	7.00	37	6644
M GE-E)	4.20	+0.50	4.10	4.50	111	18164	01 Jul 125.0 (IBM SE-E)	9.60	-3.40	9.30	9.90	17	733

Význam zaisťovania portfólia pomocou derivátov

Microsoft, ceny Call a Put opcií z 16.2.2001 Cena akcie MSFT = 69.74

69.74 +1.65

ET (Data 15 Minutes Delayed)

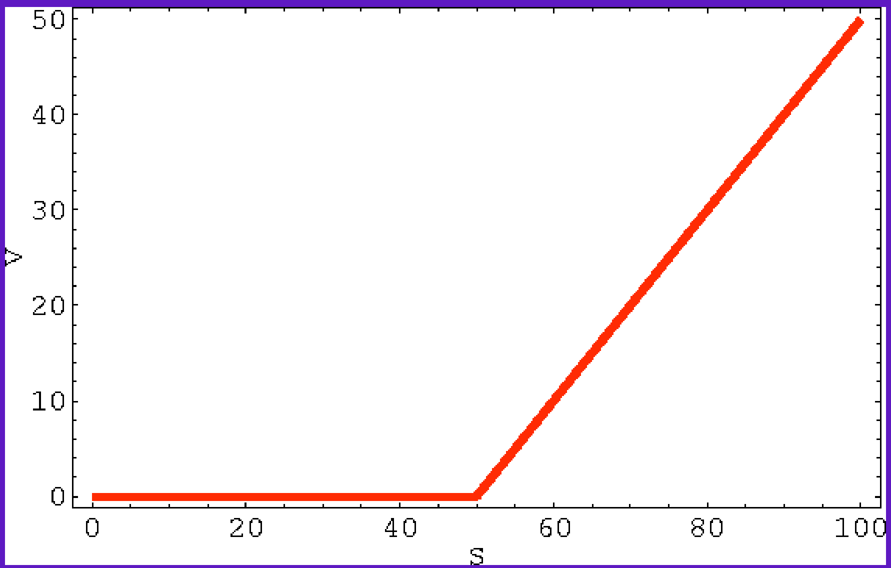
Bid 69.74 **Ask** 69.75 **Size** 8x10 **Vol** 17959500

	Last Sale	Net	Bid	Ask	Vol	Open Int	Puts	Last Sale	Net	Bid	Ask	Vol	Open Int
SQ FL-E)	10.50	+1.90	10.10	10.50	35	1297	01 Jun 60.00 (MSQ RL-E)	0.35	-0.30	0.35	0.40	33	17669
SQ FM-E)	5.80	+1.20	5.70	6.00	86	9774	01 Jun 65.00 (MSQ RM-E)	0.90	-0.50	0.85	0.95	237	58235
SQ FN-E)	2.50	+0.70	2.40	2.50	1621	56961	01 Jun 70.00 (MSQ RN-E)	2.60	-1.20	2.50	2.70	1032	14935
SQ FO-E)	0.70	+0.25	0.60	0.75	1095	54596	01 Jun 75.00 (MSQ RO-E)	5.80	-1.90	5.60	6.00	30	458
Q GL-E)	11.10	+1.70	11.20	11.60	2	29357	01 Jul 60.00 (MSQ SL-E)	1.35	-0.35	1.20	1.35	34	49337
Q GM-E)	6.80	+0.70	7.30	7.70	3	20957	01 Jul 65.00 (MSQ SM-E)	2.25	-0.65	2.25	2.55	64	17524
Q GN-E)	4.40	+0.80	4.20	4.60	193	39716	01 Jul 70.00 (MSQ SN-E)	4.60	-0.80	4.00	4.40	23	11835
Q GO-E)	2.15	+0.35	2.15	2.40	593	31579	01 Jul 75.00 (MSQ SO-E)	6.90	-2.00	6.80	7.30	57	4916

Význam zaisťovania portfólia pomocou derivátov

Európska kúpna opcia (Call option) je právo (nie však povinnosť) kúpiť dané aktívum za vopred dohodnutú cenu E vo vopred presne stanovenom čase T.

Ak chceme kúpiť Call opciu s expiráciou o 1s (1min, 1hod ...), tak je cena je daná výplatným diagramom:



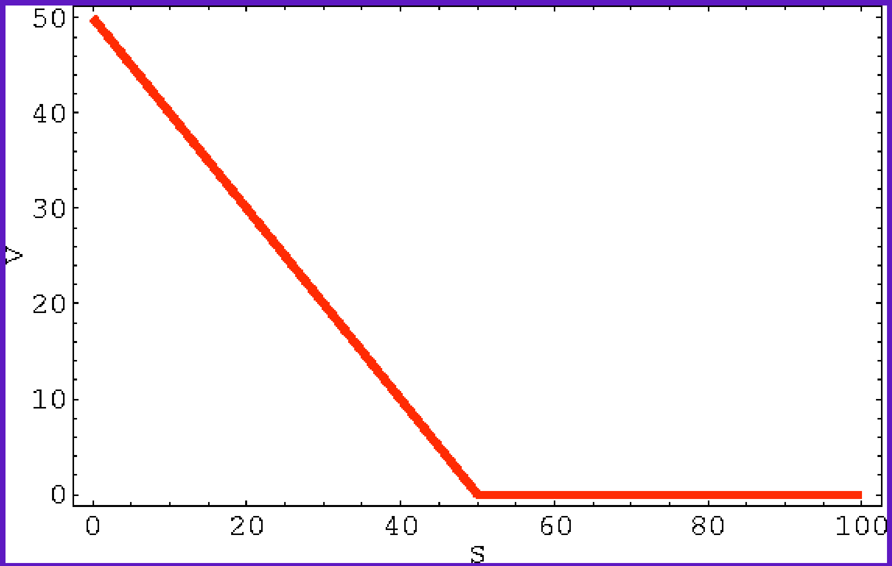
V(S,T)=max(S - E, 0)

Na obrázku: E=50

Význam zaisťovania portfólia pomocou derivátov

Európska predajná opcia (Put option) je právo (nie však povinnosť) predať dané aktívum za vopred dohodnutú cenu E vo vopred presne stanovenom čase T.

Ak chceme kúpiť Put opciu s expiráciou o 1s (1min, 1hod ...), tak je cena je daná výplatným diagramom:



V(S,T)=max(E - S, 0)

Na obrázku: E=50

Význam zaisťovania portfólia pomocou derivátov

Cieľom je oceniť hodnotu opcie v čase t=0 uzatvárania opčného kontraktu, t.j. vypočítať hodnotu

$$V(S,0) = ?$$

pre známu hodnotu ceny akcie S v čase t=0.

Význam zaisťovania portfólia pomocou derivátov

Zaistené portfólio sa skladá z aktív a opcií vypísaných na tieto aktíva.

Portfólio = Opcie + Akcie

$$P = V + \Delta S$$

Príklad: V portfóliu máme 100 ks kúpnych opcií v jednotkovej cene V=6, a dlhujeme 10 akcií v jednotkovej cene S=40. V tomto prípade máme Δ=- 10/100=- 0.1 a hodnota portfólia je: P = 100*(6 - 0.1*40) = 200

Oceňovanie derivátov. Black-Scholesov model

Východiská odvodenia Black - Scholesovho modelu

Cena aktíva sleduje geometrický Brownov pohyb

Cena opcie je hladkou funkciou ceny akcie a času

Zaisťovateľ portfólia má averziu k riziku

Cena opcie nesmie vyvolať arbitrážne príležitosti

F. Black and M. Scholes: The pricing of options and corporate liabilities.
J. Political Economy 81 (1973), 637-654.

Brownov pohyb

Brownov pohyb s driftom je stochastický (Markovov) proces

$$X(t);\ t > 0$$

s nasledujúcimi vlastnosťami :

- každý prírastok $dX(t)=X(t+dt) - X(t)$ je náhodná premenná s normálnym rozdelením pravdepodobnosti so strednou hodnotou $\mu.t$ a varianciou $\sigma^2.dt$, kde μ a σ sú dané parametre,

- pre každé $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, prírastky

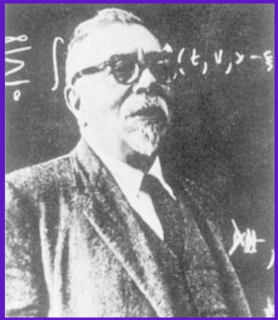
$$X(t_2) - X(t_1),\ \ldots,\ X(t_n) - X(t_{n-1})$$

sú nezávislé náhodné premenné

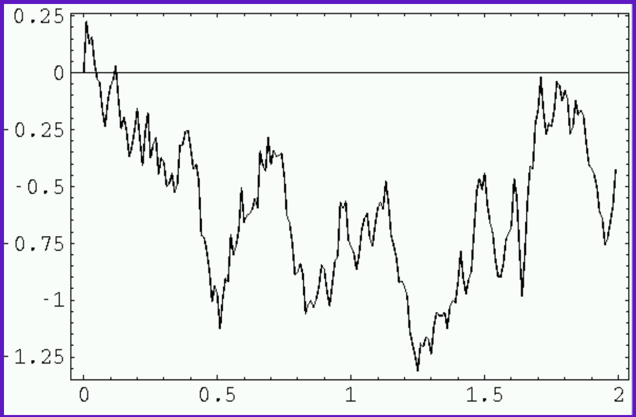
- $X(0) = 0$ a vzorky ciest $X(t)$ sú spojité.

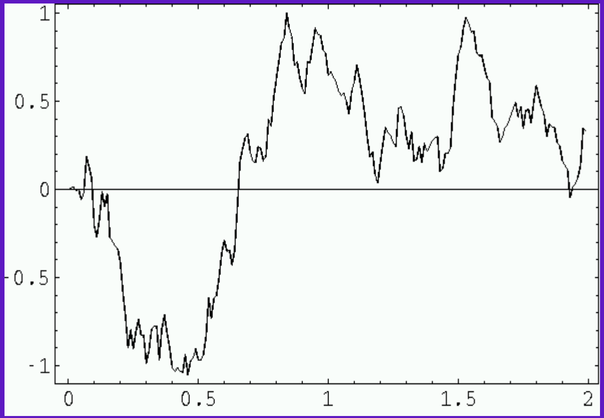
Štandardný Wienerov proces

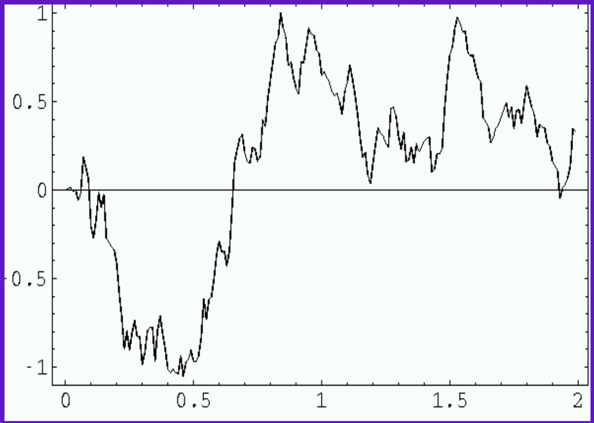
Štandardný Wienerov proces je
Brownov pohyb s driftom $\mu=0$ a varianciou $\sigma^2=1$



Rôzne realizácie štandardného Wienerovho procesu







Oceňovanie derivátov. Black-Scholesov model

Vývoj ceny akcií General Motors

Simulácia geometrického Brownovho pohybu

$$\frac{dS}{S} = \mu \, dt + \sigma \, dX(t)$$

Náhodná premenná S sleduje geometrický Brownov pohyb ak jej logaritmus log(S) sleduje Brownov pohyb s driftom μ a varianciou σ^2.

Oceňovanie derivátov. Black-Scholesov model

$$\frac{dS}{S} = \mu\, dt + \sigma\, dX(t)$$

<u>Predpoklad:</u> Cena S sleduje geometrický Brownov pohyb s driftom μ a str. Hodnotou σ

$$V = V(S,t)$$

<u>Predpoklad:</u>
Cena opcie V je hladkou funkciou ceny aktíva a času

Itôova lema

Nech $V(S,t)$ je spojitá nenáhodná funkcia so spojitými parciálnymi deriváciami podľa premenných S, t, pričom

$$dS = \mu(S,t)\, dt + \sigma(S,t)\, dX(t)$$

je stochastický proces (Itôov proces), kde $dX(t)$ je štandardný Wienerov proces. Potom prvý diferenciál stochastického procesu $V = V(S,t)$ je daný vzťahom:

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu(S,t) \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma(S,t)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma(S,t) \frac{\partial V}{\partial S} dX(t)$$

Oceňovanie derivátov. Black-Scholesov model

Cena S sleduje geometrický Brownov pohyb s driftom μ a volatilitou σ

$$dS = \mu S\, dt + \sigma S\, dX$$

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dX(t)$$

Oceňovanie derivátov. Black-Scholesov model

Syntetické portfólio

$$P = V + \Delta S$$

$$dP = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \left(\Delta + \frac{\partial V}{\partial S} \right) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \left(\Delta + \frac{\partial V}{\partial S} \right) dX(t)$$

Oceňovanie derivátov. Black-Scholesov model

$$\sigma S\left(\Delta+\frac{\partial V}{\partial S}\right)dX(t)=0$$

$$\Delta=-\frac{\partial V}{\partial S}$$

Princíp averzie k riziku

implikuje nutnosť voľby

tzv. Delta hedgingu

Predpoklad:
Vypisovateľ opcie má averziu k riziku a snaži sa eleminovať náhodné výchylky cien aktíva pomocou zaisťovania, t.j. nákupom opcií podľa tzv. Delta hedging stratégie

Oceňovanie derivátov. Black-Scholesov model

Diferenciál bezrizikového portfólia

$$dP = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt$$

Neprípustnosť arbitrážnej príležitosti ("no free lunch")

$$dP = r P\, dt = r (V + \Delta S) dt$$

Predpoklad:
Ani jedna zo strán kontraktu nemôže dospieť k arbitrážnej príležitosti. Zmena portfólia sa musí vyrovnať so zmenou bezrizikového dlhopisu úročeného pevnou sadzbou *r*.

Oceňovanie derivátov. Black-Scholesov model

Black-Scholesova parciálna diferenciálna rovnica (Call opcia)

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0$$

$$V(S,T) = max(S-E,0)$$

PayOff diagram pre Call

$$V_{call}(S,T-\tau) = S\,N(d_1) - E\,e^{-r\tau}N(d_2)$$

Feynman-Kacova formula

$$d_1 = \Big(\ln(S/E) + (r+\sigma^2/2)\tau\Big)/(\sigma\sqrt{\tau}) \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau} \quad N(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u} e^{-x^2/2}\,dx$$

Oceňovanie derivátov. Black-Scholesov model

Black-Scholesova parciálna diferenciálna rovnica (Put opcia)

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0$$

$$V(0,t) = E e^{-r(T-t)}, \quad V(S,t) \to 0 \quad pre \quad S \to \infty$$

$$V(S,T) = max(E - S, 0)$$

σ - historická volatilita aktíva
E - expiračná cena
T - čas expirácie opcie
r - spojite úroková miera bezrizikového dlhopisu

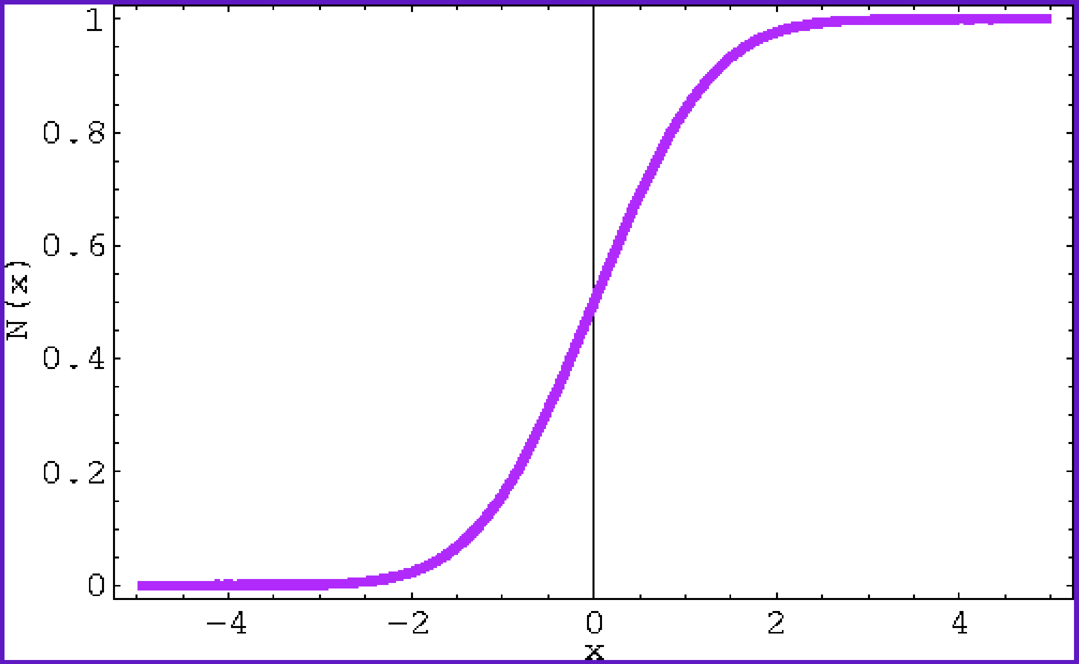
PayOff diagram pre Put

$$V_{put}(S, T-\tau) = E e^{-r\tau} N(-d_1) - S N(-d_2)$$

Feynman-Kacova formula

Oceňovanie derivátov. Black-Scholesov model

Graf distribučnej funkcie normálneho rozdelenia



Oceňovanie derivátov. Black-Scholesov model

Príklad

Cena akcie firmy IBM je $S=115\$$. Jej volatilita je $\sigma=40\%$. Ročná úroková miera dlhopisu predstavuje $r=5\%$.

Uzatvárame opčný obchod na expiračnú cenu akcie $E=110\$$ v expiračnej dobe opcie $T=1/12$ roku.

Dosadením týchto veličín do Feynman-Kacovej formuly dostávame, že cena Call opcie by mala byť

$$V=V(115,\,0)=8.46\$.$$

V skutočnosti sa táto predávala za 8.40$ (tzv. *ask* cena). Príklad z dňa 20.2.2001.

Oceňovanie derivátov. Black-Scholesov model

Nobelova cena za ekonómiu 1997

Myron S. Scholes a Robert C. Merton

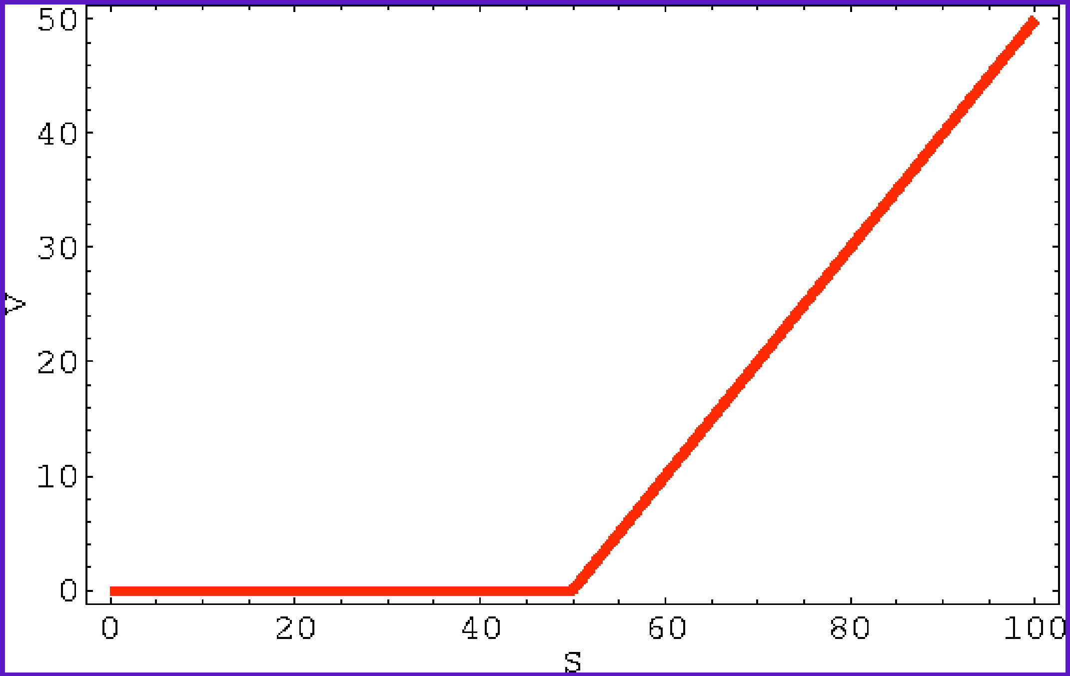
za novú metódu oceňovania derivátov

Myron S.Scholes, *1941,
Stanford University

Robert C. Merton, *1944,
Harward University

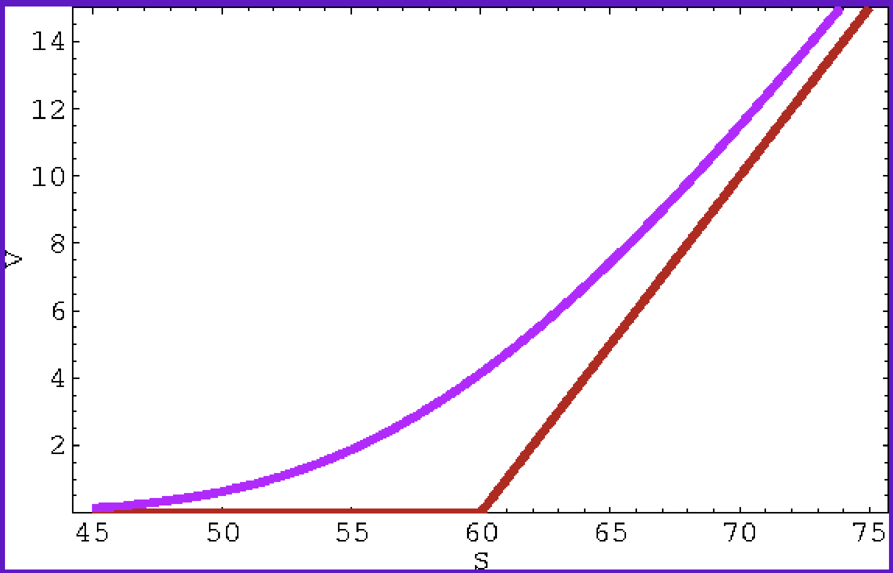
Call opcia a jej oceňovanie

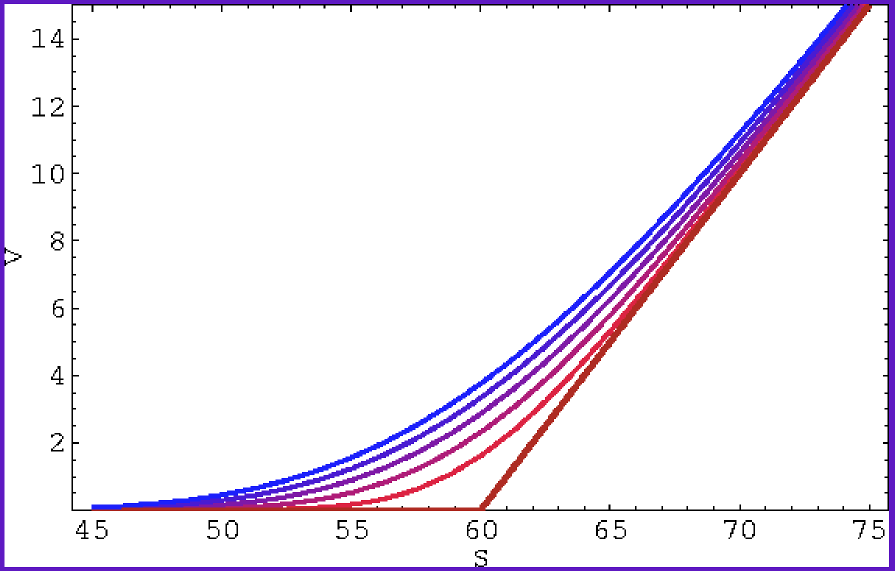
$$V(S,T) = \max(S - E, 0)$$



Jednoduché a kombinované opčné stratégie

Call opcia a jej oceňovanie



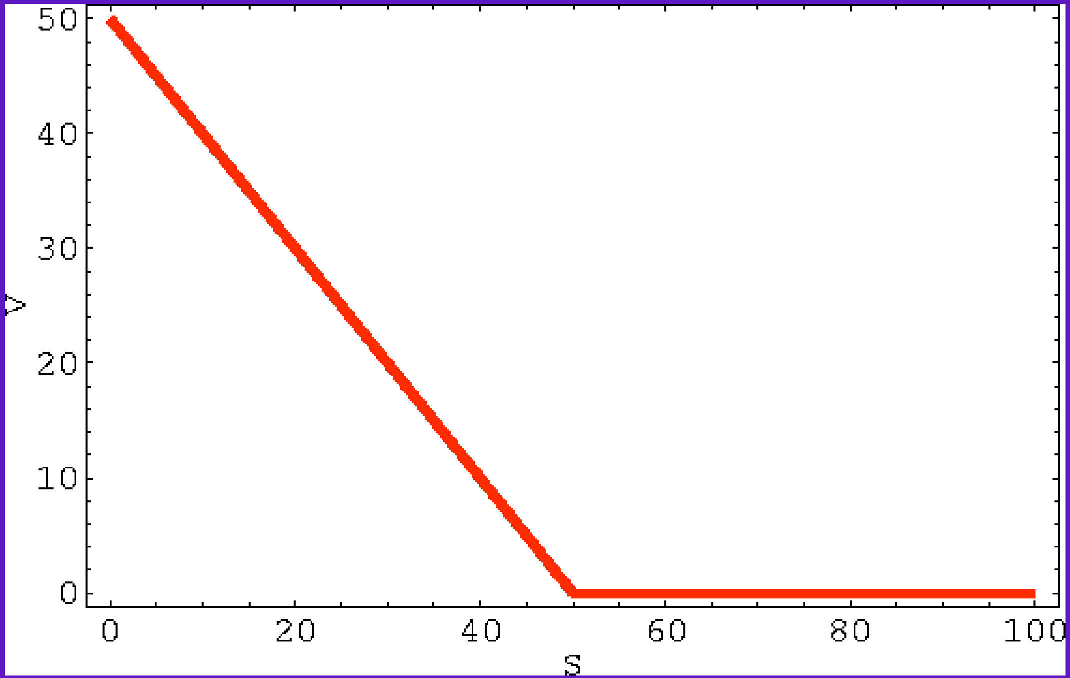


Graf riešenia V(S,0)
v čase t=0

Graf riešenia V(S,t)
v časoch 0<t<T

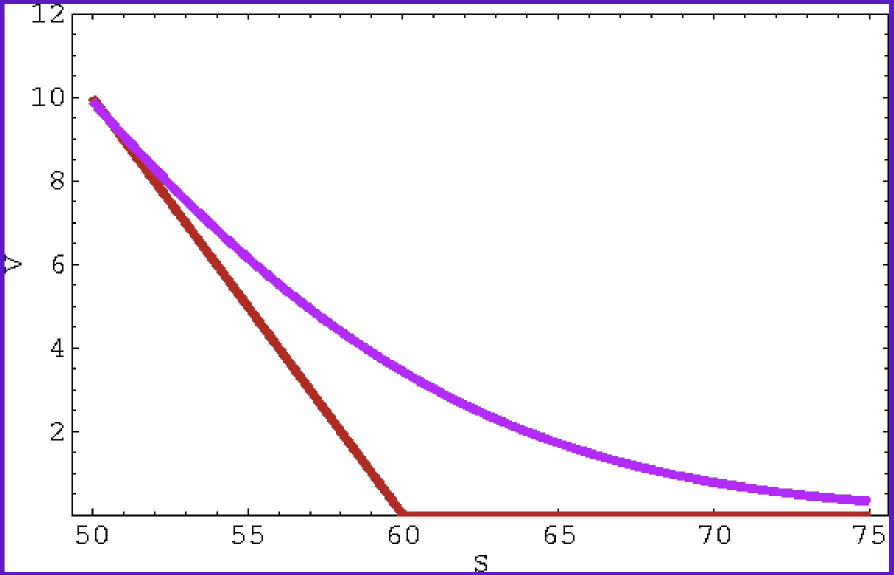
Put opcia a jej oceňovanie

$$V(S,T) = \max(E - S, 0)$$

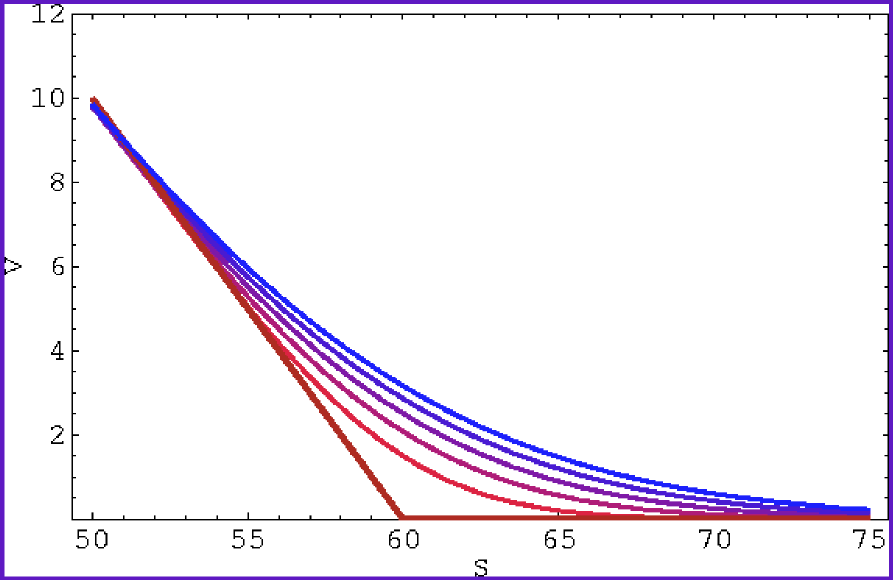


Jednoduché a kombinované opčné stratégie

Put opcia a jej oceňovanie

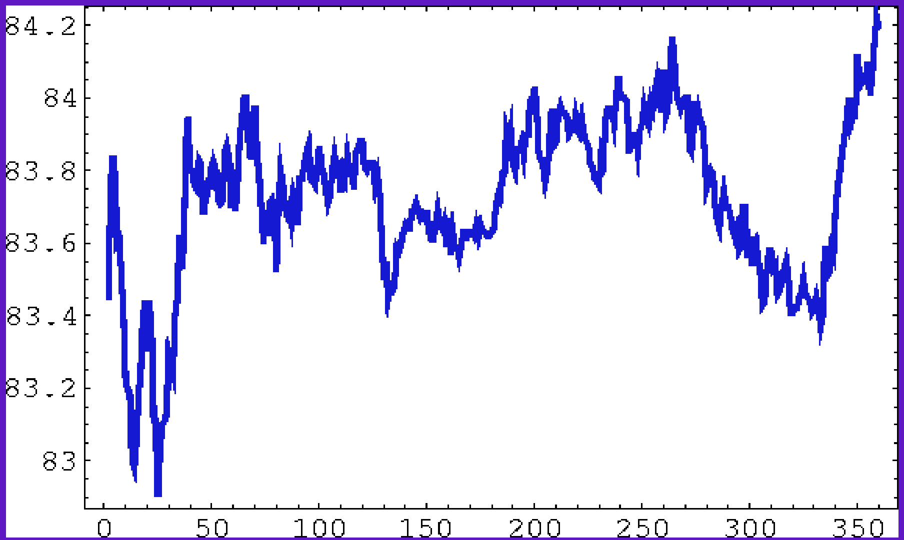


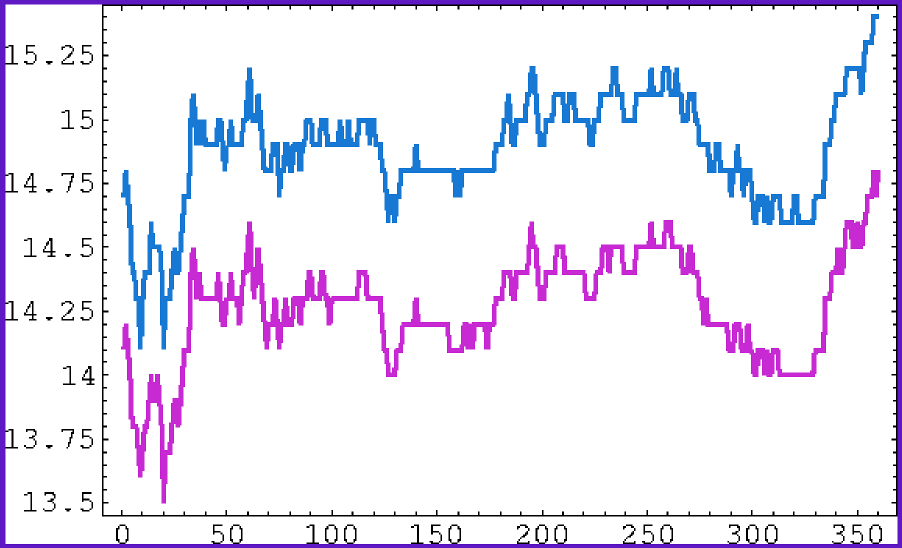
Graf riešenia V(S,0)
v čase t=0



Graf riešenia V(S,t)
v časoch 0<t<T

Porovnanie reálnych a vypočítaných cien Call opcií

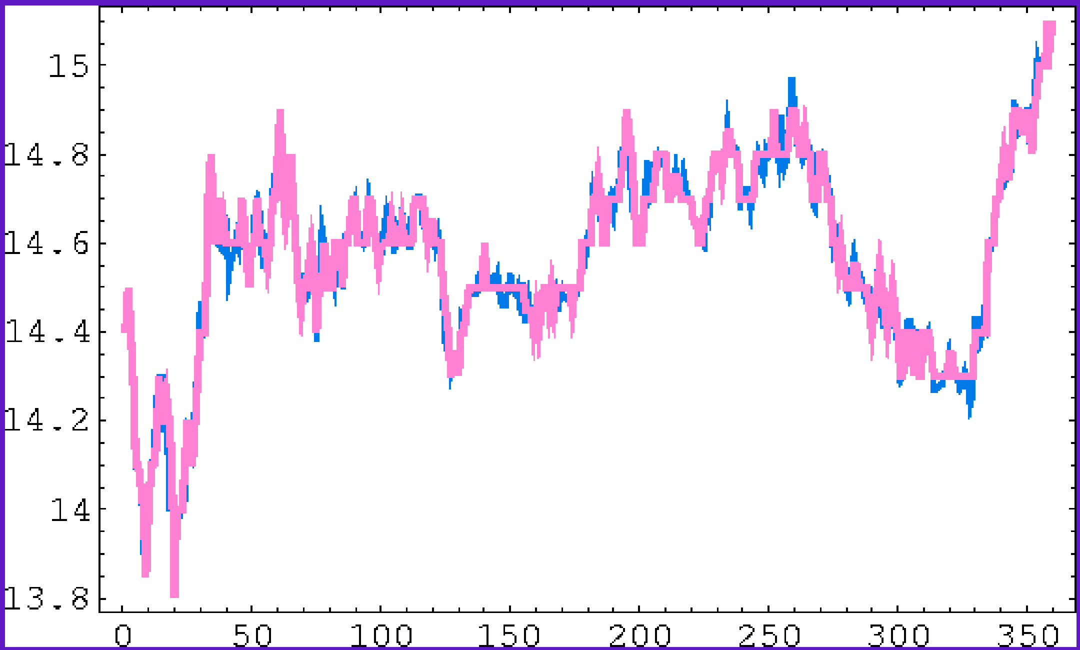




Cena akcie IBM zo dňa 22.5.2002

Bid a Ask ceny Call Opcie na akcie IBM zo dňa 22.5.2002

Porovnanie reálnych a vypočítaných cien Call opcií

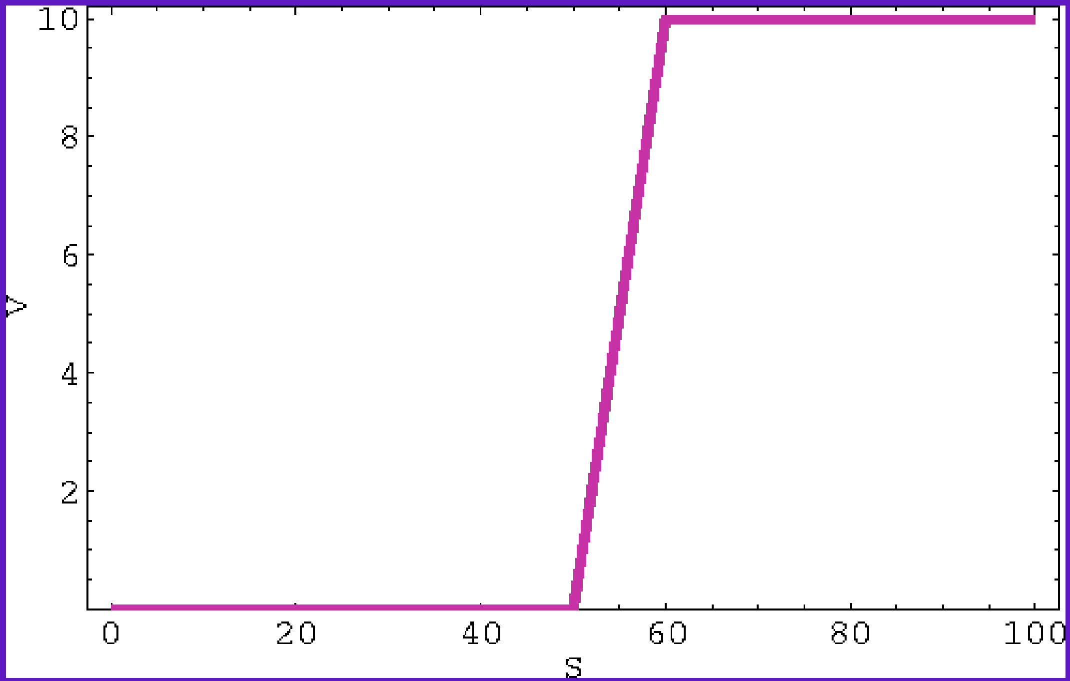


Vypočítaná cena Call opcie akcie IBM zo dňa 22.5.2002 -- modrá

Stredná cena Call Opcie na akcie IBM zo dňa 22.5.2002 -- ružová

Bullish spread opcia a jej oceňovanie

$$V(S,T) = \max(S - E1, 0) - \max(S - E2, 0)$$

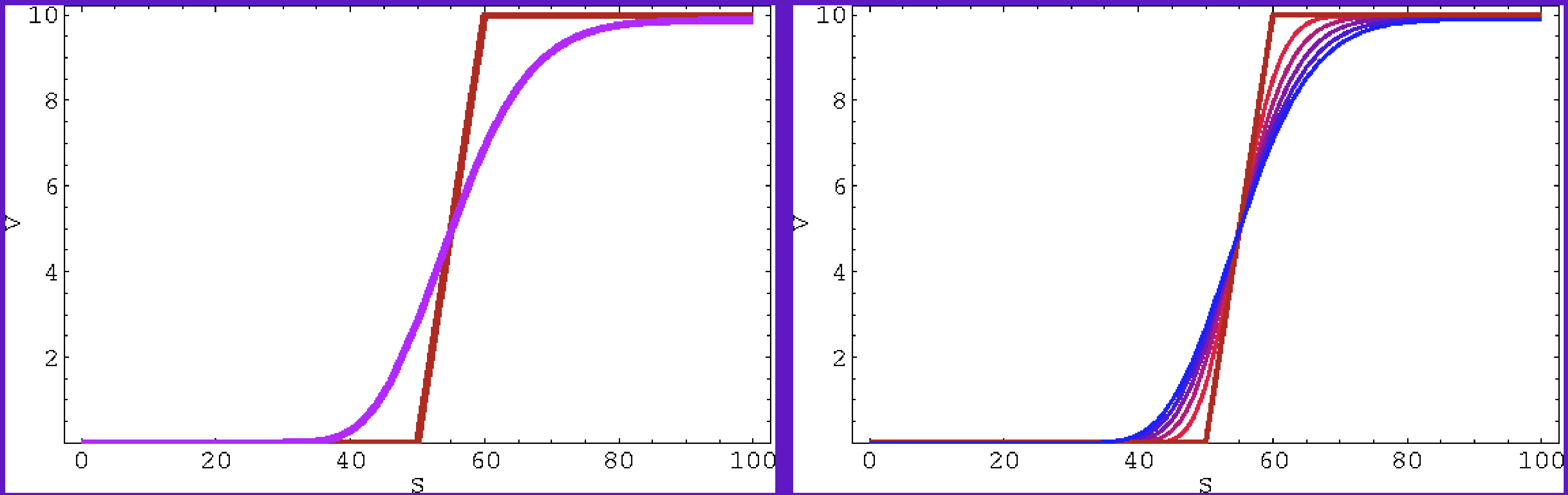


Bullish spread je kombináciou kúpy a predaja dvoch Call opcií vypísaných na tú istú akciu, jedna s nižšou a druhá vyššou expiračnou cenou, E1 <E2. Bullish spread predstavuje stratégiu zameranú na očakávaný nárast ceny akcie

Jednoduché a kombinované opčné stratégie

Bullish spread opcia a jej oceňovanie

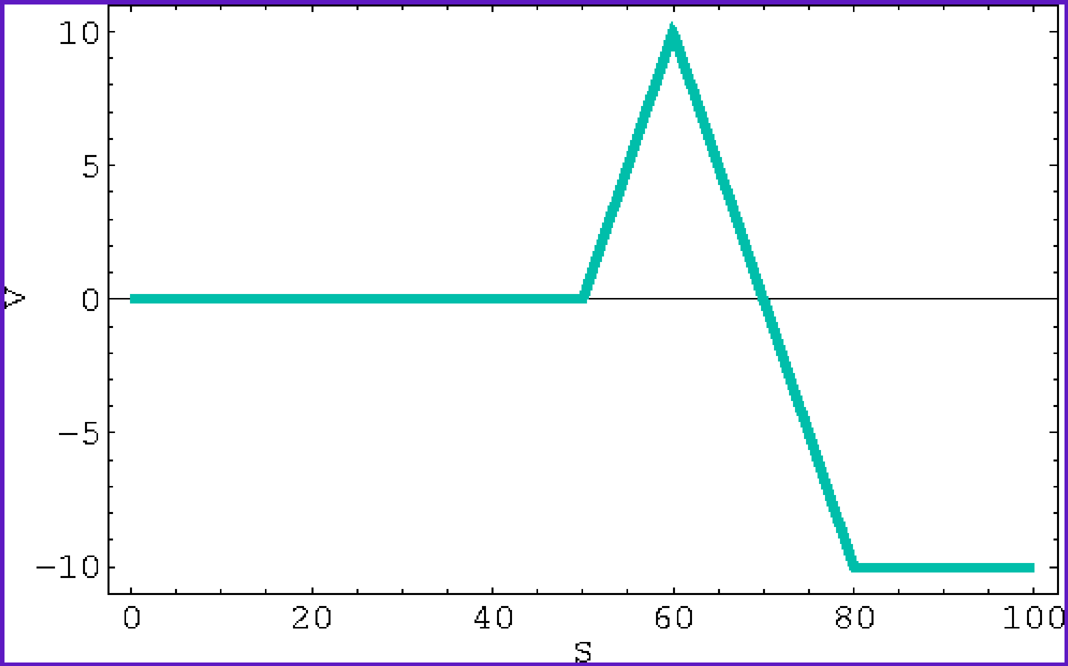
$$V(S,T) = \max(S - E1, 0) - \max(S - E2, 0)$$



Bullish spread stratégia je zisková v prípade, že očakávaná cena akcie je väčšia ako E2

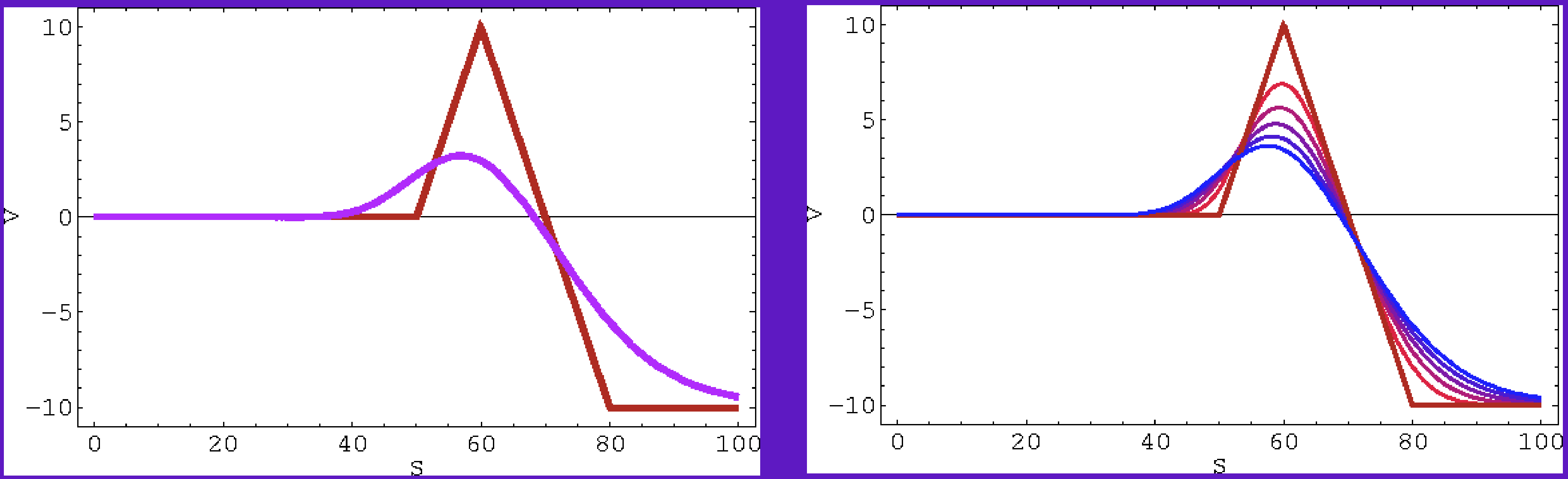
Jednoduché a kombinované opčné stratégie

Butterfly opcia a jej oceňovanie



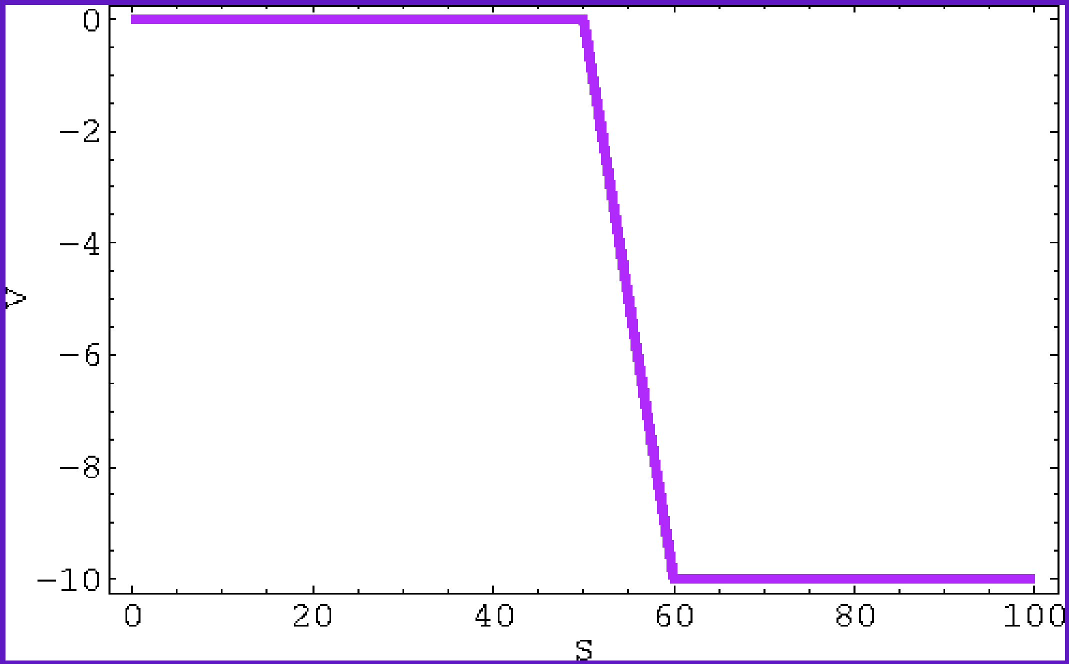
Butterfly je kombinovaná stratégia, ktorá pozostáva z kúpy dvoch Call opcií, jednej s nízkou E1 a jednej s vysokou E4 expiračnou cenou a predaja dvoch Call opcií s expiračnými cenami E2, E3 pričom E2= E3 a
$E1 < E2=E3 < E4$.

Butterfly opcia a jej oceňovanie



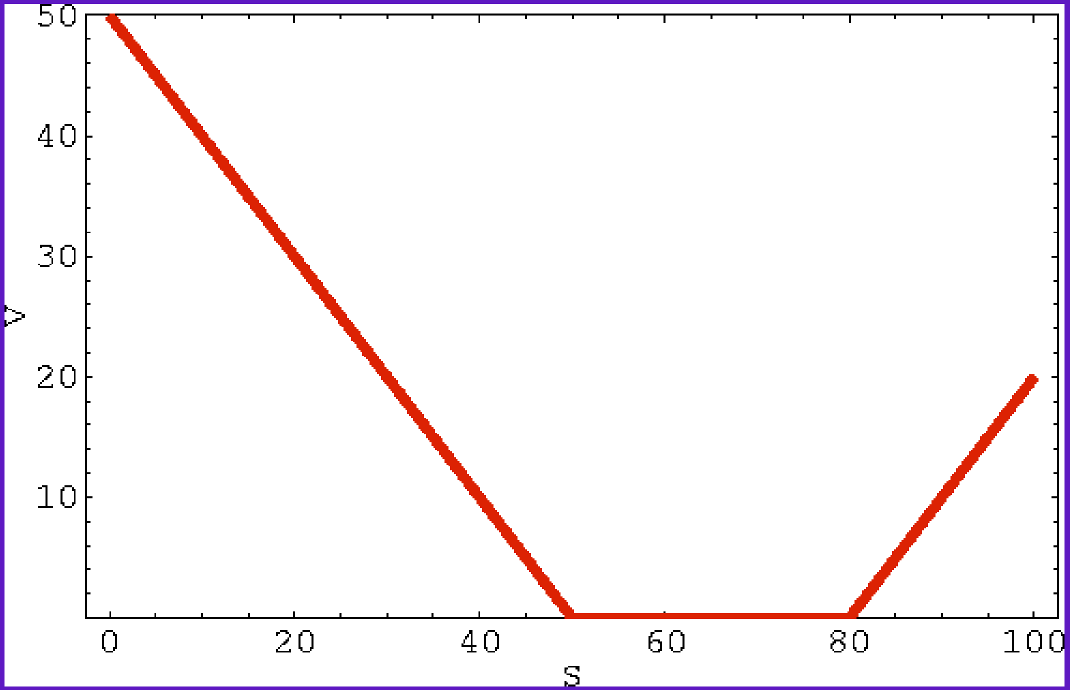
Butterfly je kombinovaná stratégia, ktorá je zisková v prípade, že cena očakávame cenu akcie v okolí hodnoty E2=E3

Ďalšie stratégie



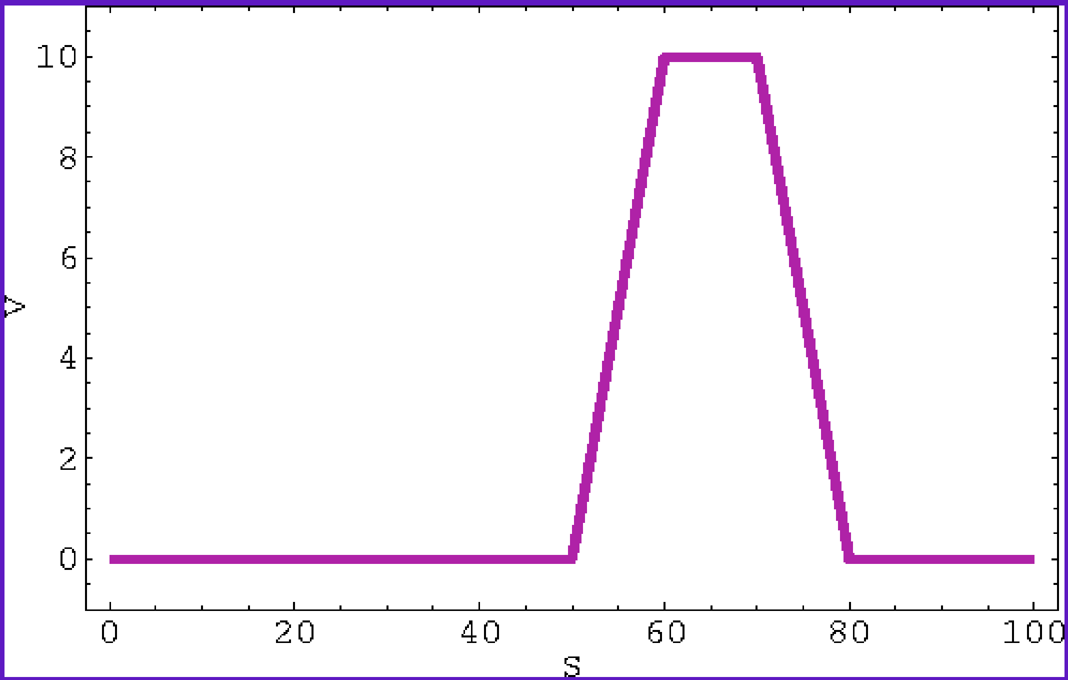
Bearish spread

Ďalšie stratégie



Bought strangle

Ďalšie stratégie



Condor

Analýza a faktory citlivosti opcií

Analýza citlivosti ceny derivátu vzhľadom na rôzne parametre úlohy je základný nástroj na budovanie zaisťovacích stratégií (hedging strategies).

Základné faktory analýzy citlivosti sú:

Delta - zmena ceny derivátu vzhľadom na zmenu ceny akcie

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$$

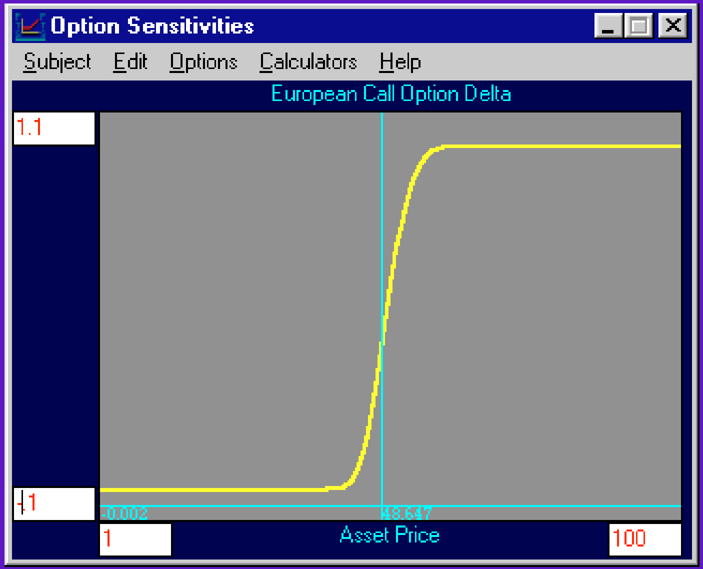
Gama - zmena hodnoty Delta vzhľadom na zmenu ceny akcie

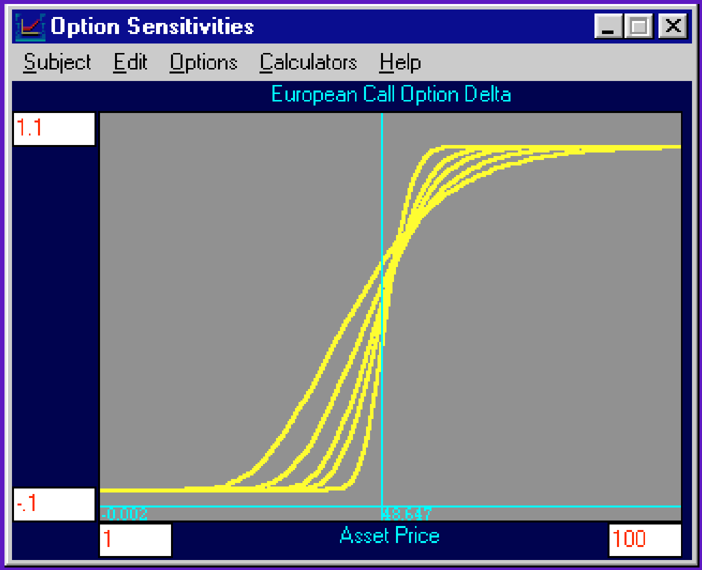
$$\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$$

Analýza a faktory citlivosti opcií

Delta - zmena ceny derivátu vzhľadom na zmenu ceny akcie

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$$





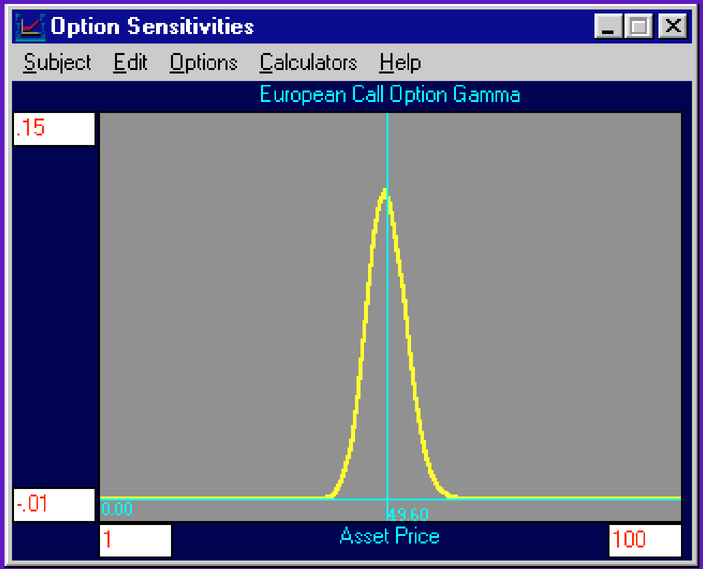
Delta európskej Call opcie
v čase t=0

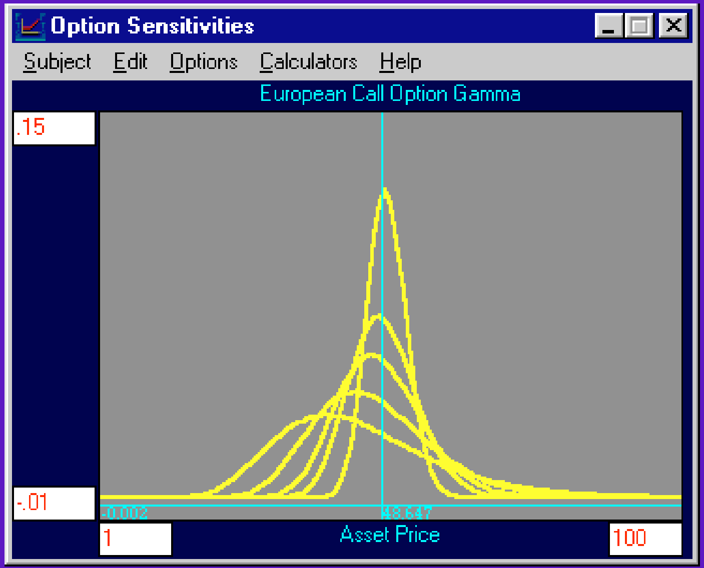
v rôznych časoch 0<t<T

Analýza a faktory citlivosti opcií

Gama - zmena hodnoty Delta vzhľadom na zmenu ceny akcie

$$\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$$





Gama európskej Call opcie
v čase t=0

v rôznych časoch 0<t<T

Analýza a faktory citlivosti opcií

Doplňujúce faktory analýzy citlivosti sú:

Vega - zmena ceny derivátu vzhľadom na zmenu historickej volatility

$$Vega = \frac{\partial V}{\partial \sigma}$$

Theta - zmena ceny derivátu vzhľadom na zmenu expiračnej doby

$$\Theta = \frac{\partial V}{\partial T}$$

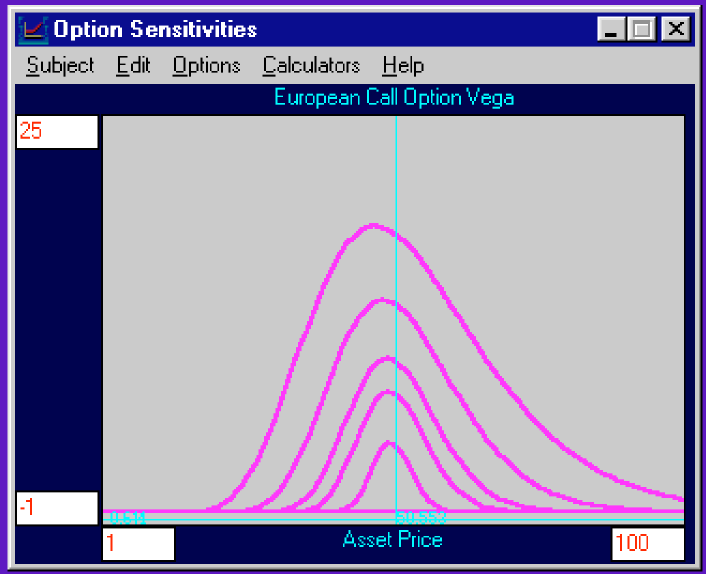
Rho - zmena ceny derivátu vzhľadom na zmenu úrokovej miery neutrálna stratégia.

$$P = \frac{\partial V}{\partial r}$$

Analýza a faktory citlivosti opcií

Vega - zmena ceny derivátu vzhľadom na zmenu historickej volatility

$$Vega = \frac{\partial V}{\partial \sigma}$$



Delta európskej Call opcie v rôznych časoch 0<t<T

Analýza a faktory citlivosti opcií

Najdôležitejšími veličinami sú Delta a Gamma. Pomocou znalosti hodnoty Delta môžeme konštruovať tzv. Delta neutrálne portfólio

Portfolio = Opcia - Delta * Akcia

Gamma sa používa na meranie expozície portfólia voči riziku a taktiež sa použiva na generovanie signálu na prerovnanie portfolia.

Veličina Vega je dôležitá pri analýze vplyvu zmeny volatility na cenu akcie. Jej vzrast môže generovať signál na prerovnanie portfólia

Derivátové debakle

V druhej polovici 90-tych rokov bolo zaznamenaných niekoľko derivátových debaklov, ktorých aktérmi sa stali popredne svetové inštitúcie.

Britská spoločnosť Barings stratila stovky miliónov GBP vďaka riskantnej stratégii svojho brokera Nicka Leesona, ktorý sa snažil uplatnením kombinovanej opčnej stratégie zameranej na očakávaný nárast ceny dosiahnuť dominantné postavenie na trhu s opciami a stať sa tak dominantným investorom. Pri realizovaní tejto stratégii „pumpoval" obrovské finančné čiastky s cieľom ovládnuť opčný trh a následne diktovať ceny. Táto stratégia mu nakoniec nevyšla a Barings zaznamenali veľké straty.

Derivátové debakle

Americká spoločnosť NatWest prišla o stovky miliónov dolárov vďaka zlému odhadu rizika plýnuceho z výrazných fluktuácii cien akcií.

Švajčiarska banka Union Bank of Swiss prišla o 400 miliónov dolárov kvôli nesprávnemu oceneniu komplikovaného derivátu, ktorý predávala na trhu za nižšiu cenu. Deriváty sa viazali na vývoj cien dvoch aktív s rôznymi dobami splatnosti.

Častým zdrojom omylov pri oceňovaní podobných komplikovaných finančných derivátov je podcenenie rizikových faktorov, variabilných korelácii medzi jednotlivými aktívami a celý rad ďalších faktorov, ktoré poväčšinou sú dôsledkom zlej východiskovej štatistickej analýzy predmetných dát.

Americké typy derivátov. Problém voľnej hranice

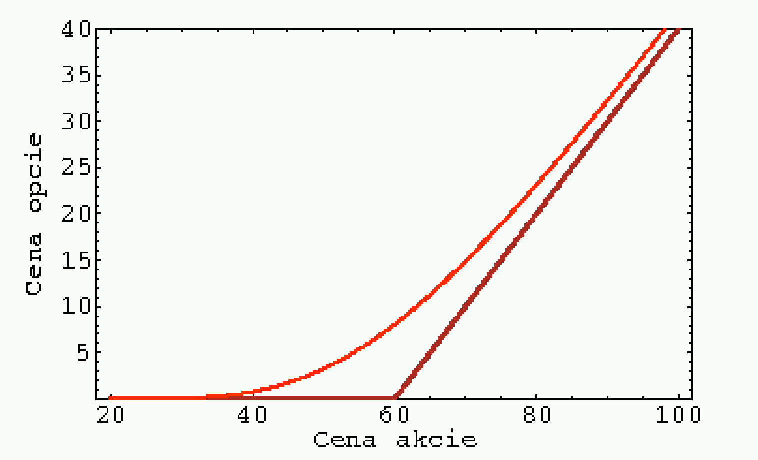
Americká kúpna opcia (Call option) je právo (nie však povinnosť) kúpiť dané aktívum za vopred dohodnutú cenu X v lehote kedykoľvek pred stanoveným časom T.

Americká predajná opcia (Put option) je právo (nie však povinnosť) predať dané aktívum za vopred dohodnutú cenu X v lehote kedykoľvek pred stanoveným časom T.

Americká kúpna alebo predajná opcia nemôže mať hodnoty pod PayOff diagramom nakoľko možnosťou kúpy opcie a jej okamžitého uplatnenia by mohlo dôjsť k arbitrážnej príležitosti = bezrizkovému zisku.

Americké typy derivátov. Problém voľnej hranice

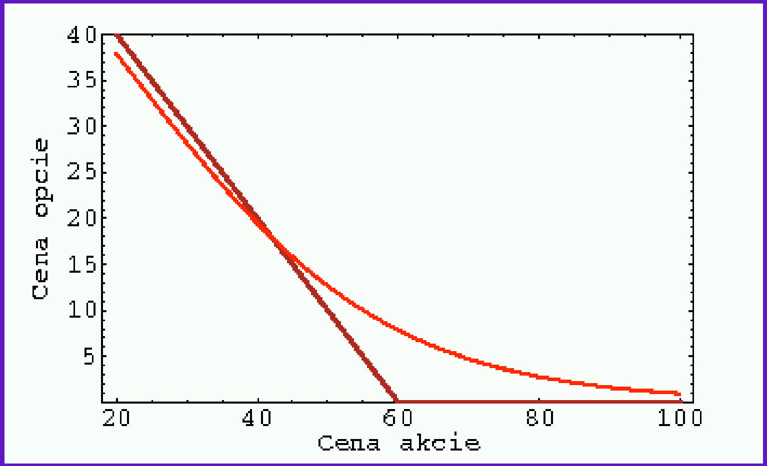
Oceňovanie európskej Call opcie na akciu s nulovými dividendami



Cena európskej Call opcie na akciu, ktorá nevypláca dividendy je vždy väčšia ako koncový PayOff diagram. Dôsledkom je, že cena americkej a európskej Call opcie je tá istá.

Americké typy derivátov. Problém voľnej hranice

Oceňovanie európskej Put opcie na akciu s nulovými dividendami



Cena európskej Put opcie na akciu, ktorá nevypláca dividendy, je pre isté hodnoty S menšia ako koncový PayOff diagram. Dôsledkom je, že cena americkej call opcie je vyššia ako európskej Call opcie.

Americké typy derivátov. Problém voľnej hranice

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0$$

$$V(0,t) = 0, \quad V(S_f(t),t) = E - S_f(t),$$

$$\frac{\partial V}{\partial S}(S_f(t),t) = -1$$

$$V(S,T) = max(E - S, 0)$$

Americká Put opcia

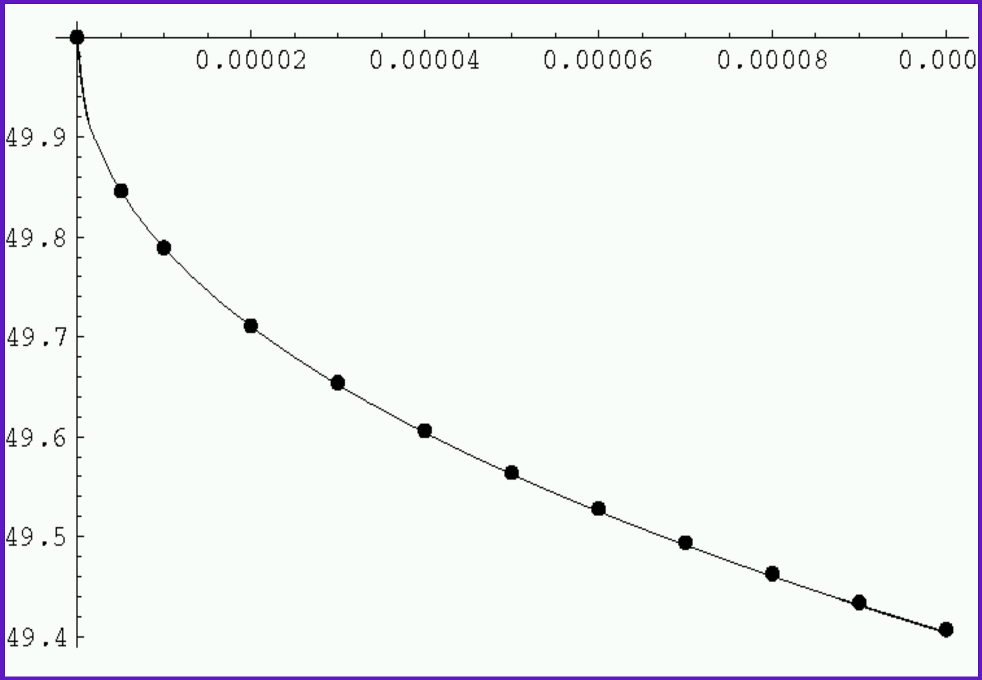
Black - Scholesova rovnica

Okrajové podmienky pre Put opciu

Koncová podmienka pre Put opciu

Problém spočíva v nájdení voľnej hranice (optimálneho času uplatnenia opcie) t.j. funkcie $S_f(t)$ a samotnej funkcie *V(S,t)* opisujúcej cenu derivátu - put opcie

Americké typy derivátov. Problém voľnej hranice



Americká Put opcia

Tvar voľnej hranice $S_f(t)$
Priebeh optimálneho času uplatnenia put opcie

Priebeh voľnej hranice $S_f(t)$ nám súčasne určuje optimálny čas, kedy treba uplatniť opciu - Optimal stopping time

Americké typy derivátov. Problém voľnej hranice

Aproximácia voľnej hranice v blízkosti expiračnej doby

Americký Put

$$S_f(T-\tau) \approx E \exp\left((\sigma^2/2 - r)\tau - \sigma \sqrt{-\tau \ln\left(\frac{8r^2\pi}{\sigma^2} \tau e^{2r\tau}\right)} \right) \qquad \tau = T - t \ll 1$$

Analýza voľnej hranice pre americké Call a Put opcie

D.Ševčovič: Analysis of the free boundary for the pricing of an American Call option. Euro. Journal on Applied Mathematics, 12 (2001), 25--37

R.Stamicar, D.Ševčovič, J.Chadam: The early exercise boundary for the American put near expiry: numerical approximation. Canad. Appl. Math. Quarterly, 7 (1999), 427--444

Analýza voľnej hranice pre Americké Call a Put opcie

Myšlienka zostavenia integrálnej rovnice pozostáva z:

1. odvodenia parciálnej diferenciálnej rovnice rovnice pre syntetické portfólio;

2. aplikácie jednostrannej sínusovej a cosínusovej Fourierovej transformácie a odvodení systému obyčajných diferenciálnych rovníc;

3. zostavenia nelineárnej singulárnej integrálnej rovnice pre hľadanú funkciu voľnej hranice.

Riziko zahrňujúca metodológia oceňovania derivátov

Základné nedostatky Black-Scholesovho modelu:

a) nezohľadnenie transakčných nákladov spojených so zaisťovaním portfólia

b) nezohľadnenie rizika z variancie (fluktuácie) portfólia

c) neschopnosť vysvetliť tzv. volatility smile - t.j. konvexný, nekonštantný priebeh implikovanej volatility

Riziko zahrňujúca metodológia oceňovania derivátov

Zahrnutie transakčných nákladov vedie na

Lelandov model

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\sigma^2}{2}(1 - k_0\, sgn(\Gamma))S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0$$

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \qquad k_0 = \frac{C}{\sigma\sqrt{\delta_t}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

k_0 - Lelandov koeficient, C - koefient transakčných nákladov

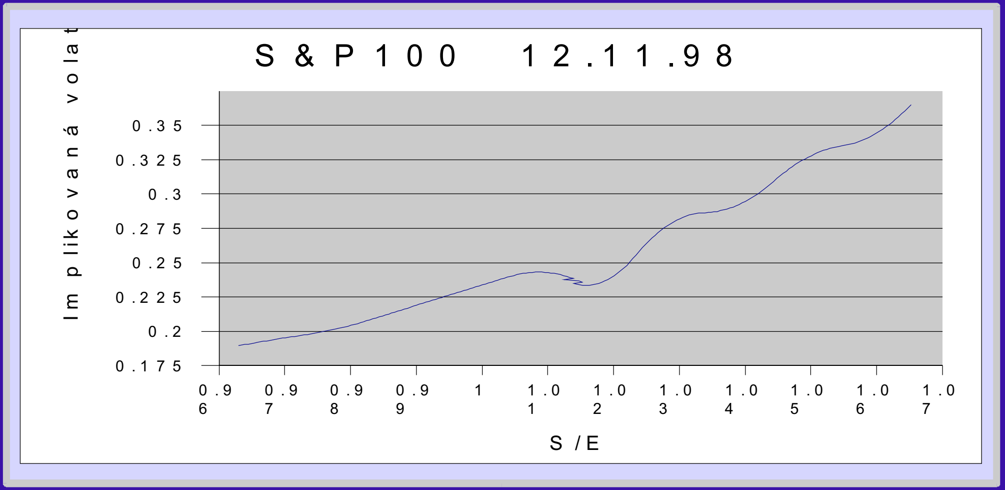
δ_t - čas. Interval medzi jednotlivými zaisteniami portfólia

Nedostatok Lelandovho modelu: Neschopnosť vysvetliť tzv. volatility smile t.j. konvexný, nekonštantný priebeh implikovanej volatility.

Implikovaná volatilita je taká hodnota volatility σ, pre ktorú je vypočítaná hodnota opcie V na základne BS modelu zhodná s trhovou hodnotou opcie

Volatility Smile

konvexný a nekonštantný priebeh implikovanej volatility



Volatility smile pre index Standard and Poor 100 zo dňa 12. 11. 1998

Škálovo invariantný RAPM model

SI-RAPM - Scale Invariant Risk Adjusted Pricing Methodology

Idea odvodenia SI RAPM modelu:

- Zahrnutie transakčných nákladov
- Zahrnutie rizika plynúceho z variancie portfólia (škálovo invariantný model)

$$dP = dV + \Delta\, dS - CS\,|d\Delta|$$

$$C = \frac{S_{ask} - S_{bid}}{S} \qquad |d\Delta| \approx |\Gamma|\, dt$$

C predstavuje koeficient transakčných nákladov

Škálovo invariantný RAPM model

$$\frac{\partial V}{\partial t}+rS\frac{\partial V}{\partial S}+\frac{\sigma^2}{2}(1-m(S\Gamma)^{1/3})S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}-rV=0$$

$$\Gamma=\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \qquad m=3Rk^2=3\left(\frac{2RC^2}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$

R - koeficient rizika z variancie portfólia

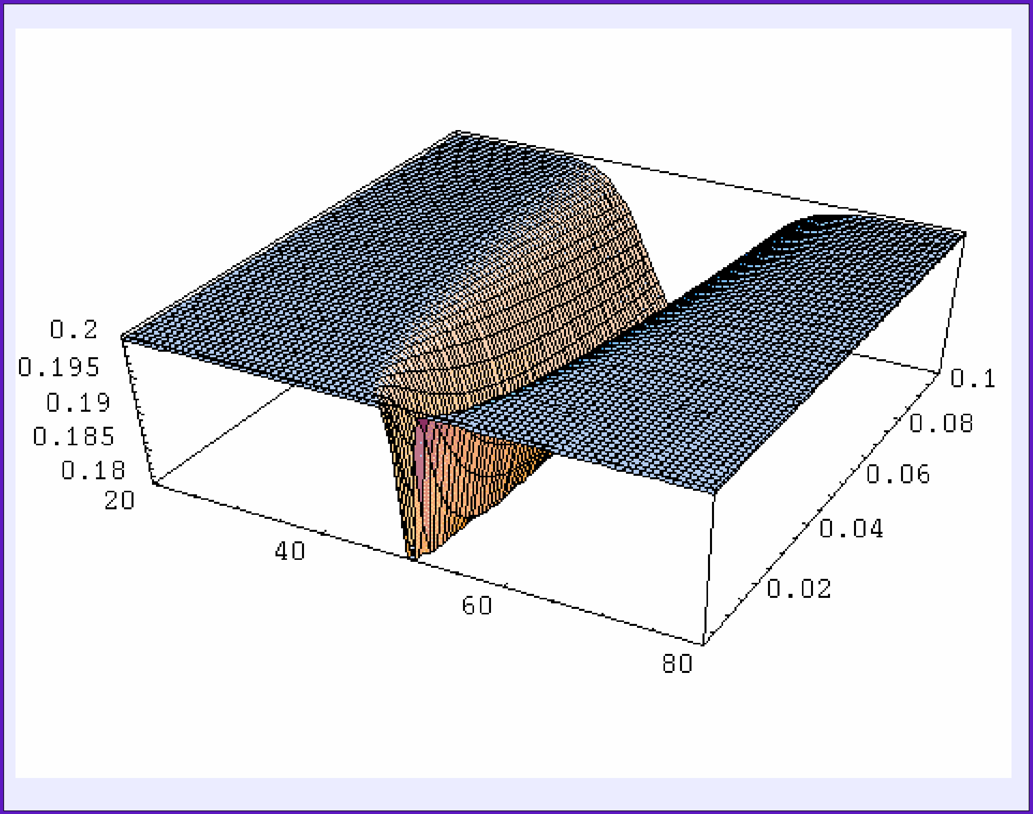
C - koeficient transakčných nákladov

M. Kratka: No Mystery behind the smile. Risk Primer, 9 (1997), 1-4.

M. Jandačka: Uplatnenie PDR v oceňovaní finančných derivátov Diplomová práca, FMFI UK 2001

Riziko zahrňujúca metodológia oceňovania derivátov

Časový priebeh modifikovanej volatility



$$\sigma_m^2 = \sigma^2 \left(1 - m (S\,\Gamma)^{\frac{1}{3}}\right)$$

M. Spusta: Riziko zohľadňujúca metodológia oceňovania opcií.
Diplomová práca, MFF UK 1999.

Zaisťovacia stratégia v SI-RAPM modeli

Gama hedging

$$|dS| = k\,\Gamma^{-\frac{1}{3}} \qquad \delta_t = \frac{k^2}{\sigma^2 S^2}\,\Gamma^{-\frac{2}{3}}$$

$$k = \left(\frac{C}{R} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Poskytuje signál na prerovnanie portfólia v pripade vyrovnania strednej hodnoty zmeny ceny akcie v závislosti na Gama hodnote portfólia

Záver

Priebeh optimálneho času uplatnenia Americkej Call resp. Put opcie sa dá vypočítať riešením nelineárnej integrálnej rovnice.

Model uvažujúci transakčné náklady a riziko (SI - RAPM Model) je nelineárna parabolická rovnica, ktorú možno riešiť numericky.

www.iam.fmph.uniba.sk/institute/sevcovic

Ekonomická a finančná matematika na FMFI UK

www.iam.fmph.uniba.sk/studium/efm