2. séria úloh

1. Nech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkcia taká, že kedykoľvek $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentý rad reálnych čísel, potom $\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n)$ tiež konverguje. Dokážte, že $f'(0)$ existuje a je konečná.

2. Dokážte, že existuje nespočítateľný systém $\mathcal{F}$ podmnožín množiny prirodzených čísel taký, že prienik ľubovoľných dvoch rôznych množín z $\mathcal{F}$ je konečná množina.

3. Existuje spojitá funkcia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ktorá má ostré lokálne maximum v každom racionálnom čísle?

4. Nájdite kladné reálne číslo α také, že pre každé kladné celé číslo n platí

$$\lfloor \alpha^n \rfloor \equiv n \mod 2,$$

kde $\lfloor x \rfloor$ znamená (dolnú) celú časť čísla x.

5. Nech $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť reálnych čísel zadaná vzťahmi $x_0 = 1000$, $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$. Vypočítajte $x_{1000000}$ s absolútnou chybou menšou ako 10^{-8}.