Riešiteľský seminár
3. séria úloh

1. Existuje spojitá funkcia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taká, že platí $f(f(x)) = -x$ pre každé $x \in \mathbb{R}$?

2. Nech $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť reálnych čísel taká, že $x_{n+1} = x_n - \frac{1}{x_n}$ pre každé $n \in \mathbb{N}$. Dokážte, že postupnosť obsahuje nekonečne veľa záporných členov.

3. Dokážte, že tg 1° je iracionálne číslo.

4. Nájdite všetky dvojice racionálnych čísel $0 < a < b$ takých, že $a^b = b^a$.

5. Nech $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \mathbb{R}^2$. Dokážte, že existuje $i \in \{1, 2, 3\}$ také, že pre množinu A_i platí: Pre každé $d \in (0, \infty)$ existujú $x, y \in A_i$ také, že $\|x - y\| = d$. ($\|\cdot\|$ znamená euklidovskú normu.)

Termín: 20. 12.1996