1. séria úloh, letný semester

1. Nech $c \geq 0$ je daná konštanta. Charakterizujte množinu všetkých spojitých funkcií $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takých, že $f(x) = f(x^2 + c)$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

2. Nájdite pre celé $n \geq 2$ maximálnu hodnotu výrazu

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_1,$$

kde $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ prebieha všetky permutácie množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$.

3. Rozhodnite, či existuje reálna matica A typu 2×2 pre ktorú platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1997 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Pre daný konečný reťazec $\mathcal{S}$ symbolov X a O nech $\Delta(\mathcal{S})$ označuje počet symbolov X mínus počet symbolov O v reťazci $\mathcal{S}$. Reťazec $\mathcal{S}$ nazveme vyvážený, ak každý podreťazec $\mathcal{T}$ (po sebe idúcich symbolov) reťazca $\mathcal{S}$ spĺňa $-2 \leq \Delta(\mathcal{T}) \leq 2$. Nájdite počet vyvážených reťazcov symbolov X a O dĺžky n.

5. Nech $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ sú vrcholy konvexného mnohouholníka, ktorý obsahuje bod $(0, 0)$ vo svojom vnútri. Dokážte, že existujú kladné reálne čísla x a y také, že platí

$$(a_1, b_1)x^{a_1}y^{b_1} + (a_2, b_2)x^{a_2}y^{b_2} + \cdots + (a_n, b_n)x^{a_n}y^{b_n} = (0, 0).$$

Termín odovzdania: do 10.3.1997, do priečinku D.Ševčoviča, sekretariát ÚAM, M204.