Kategória I

Úloha 1 [10 bodov]
Nájdite limitu

$$\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+n}\right)^{e^{\frac{1999}{n}}-1}.$$

Úloha 2 [8 bodov]
Nájdite všetky prirodzené čísla n také, že platí nasledujúca podmienka:
Ak pre nejaké prirodzené čísla a, b platí $11 \mid a^n + b^n$, potom $11 \mid a$ a $11 \mid b$.

Úloha 3 [14 bodov]
Nech $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sú body elipsoidu v $\mathbb{R}^n$ so stredom O, pričom priamky OA_i (pre $i = 1, 2, \ldots, n$) sú navzájom kolmé. Dokážte, že vzdialenosť bodu O od nadroviny $A_1A_2\ldots A_n$ nezávisí od výberu bodov $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Úloha 4 [8 bodov]
Dokážte, že pre ľubovoľné komplexné čísla x, y platí:
Ak sú čísla $x + y$, $x^2 + y^2$, $x^3 + y^3$, $x^4 + y^4$ celé, tak pre každé prirodzené číslo n je číslo $x^n + y^n$ celé.

Kategória II

Úloha 1 [12 bodov]
Nájdite najmenšie prirodzené číslo k také, že každá množina k navzájom rôznych priamok v $\mathbb{R}^3$ obsahuje tri navzájom rovnobežné priamky alebo tri navzájom mimobežné priamky alebo tri navzájom rôznobežné priamky.

Úloha 2 [7 bodov]
Nech a, b sú reálne čísla také, že $a \leq b$. Nech funkcia $f : [a, b] \to [a, b]$ spĺňa pre každé $x, y \in [a, b]$ nerovnosť $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$. Nech $x_1 \in [a, b]$. Pre $n = 1, 2, \ldots$ definujme $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + f(x_n))$. Dokážte, že postupnosť $\{x\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k nejakému pevnému bodu funkcie f.

Úloha 3 [11 bodov]
V $\mathbb{R}^3$ je daná spočítateľná množina gúľ A a jednotková kocka. Dokážte, že ak pre ľubovoľnú konečnú podmnožinu B množiny A možno všetky gule z B uložiť do tejto kocky tak, že každé dve majú disjunktné vnútra, potom možno všetky gule z množiny A uložiť do tejto kocky tak, že každé dve majú disjunktné vnútra.

Úloha 4 [10 bodov]
Nech $u_1, u_2, \ldots, u_n \in C([0,1]^n)$ sú nezáporné funkcie také, že funkcia u_j nezávisí od j-tej premennej (pre $j = 1, 2, \ldots$). Dokážte, že

$$\left(\int\limits_{[0,1]^n}\prod_{j=1}^{n}u_j\right)^{n-1} \leq \prod_{j=1}^{n}\int\limits_{[0,1]^n}u_j^{n-1}.$$