Zadania súťažných úloh

Prvý deň

Príklad 1. 10b.
Nech $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť kladných reálnych čísel taká, že $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Nájdite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n} + \varepsilon_n\right),$$

kde ln označuje prirodzený logaritmus

Príklad 2. 10b.
Predpokladajme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Konvergujú nasledovné rady?

a) $a_1 + a_2 + a_4 + a_3 + a_8 + a_7 + a_6 + a_5 + a_{16} + a_{15} + ... + a_9 + a_{32} + ...$

b) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_7 + a_6 + a_8 + a_9 + a_{11} + a_{13} + a_{15} + a_{10} + a_{12} + a_{14} + a_{16} + a_{17} + a_{19} + ...$

Odôvodnite svoju odpoveď.

Príklad 3. 15b.
Nech A a B sú reálne $n \times n$ matice také, že $A^2 + B^2 = AB$. Dokážte, že ak $BA - AB$ je invertovateľná matica, tak nevyhnutne n je deliteľné 3.

Príklad 4. 20b.
Nech α je reálne číslo, $1 < \alpha < 2$.

a) Ukážte, že α má jednoznačnú reprezentáciu v tvare nekonečného súčinu

$$\alpha = \left(1 + \frac{1}{n_1}\right)\left(1 + \frac{1}{n_2}\right)...$$

kde n_i sú prirodzené čísla spĺňajúce $n_i^2 \leq n_{i+1}$.

b) Ukážte, že α je racionálne práve vtedy, keď jeho nekonečný súčin má vlastnosť: existuje m také, že pre každé $k \geq m$ platí $n_{k+1} = n_k^2$.

Príklad 5. 20b.
Pre prirodzené číslo n uvažujme nadrovinu $R_0^n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n : \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\}$ a množinu mrežových bodov $Z_0^n = \{y \in R_0^n : y_i$ sú celé čísla $\}$. Definujme (kvázi-) normu v R^n pomocou $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{1/p}$ keď $0 < p < \infty$ a $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$.

a) Nech $x \in R_0^n$ je také, že $\max_i x_i - \min_i x_i \leq 1$. Pre každé $p \in [1, \infty]$ a $y \in Z_0^n$ dokážte, že platí $\|x\|_p \leq \|x + y\|_p$.

b) Pre každé $p \in (0, 1)$ dokážte, že existuje n a $x \in R_0^n$ s vlastnosťou $\max_i x_i - \min_i x_i \leq 1$ a a $y \in Z_0^n$ také, že $\|x\|_p > \|x + y\|_p$.

Príklad 6. 25b.
Nech F je množina pozostávajúca z konečných podmnožín prirodzených čísel taká, že $A \cap B \neq \emptyset$ pre každé $A, B \in F$.

a) Je pravda, že existuje konečná podmnožina $Y \subset N$ taká, že pre každé $A, B \in F$ je $A \cap B \cap Y \neq \emptyset$?

b) Je tvrdenie a) pravdivé ak naviac predpokladáme, že všetky množiny v F majú rovnakú veľkosť?

Druhý deň

Príklad 1. 10b.

Nech f je $C^3(R)$ nezáporná funkcia, $f(0) = f'(0) = 0 < f''(0)$. Nech $g(x) = \left(\frac{\sqrt{f(x}}{f'(x)}\right)'$ pre $x \neq 0$, $g(0) = 0$. Ukážte, že g je ohraničená v nejakom okolí bodu 0. Platí toto tvrdenie pre funkciu $f \in C^2(R)$?

Príklad 2. 15b.

Nech M je invertovateľná matice rozmeru $2n \times 2n$ reprezentovateľná v blokovej forme

$$M = \begin{pmatrix} AB \\ CD \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} EF \\ GH \end{pmatrix}.$$

Ukážte, že $\det(M).\ \det(H) = \det(A)$.

Príklad 3. 15b.

Ukážte, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\sin(\log n)}{n^\alpha}$ konverguje práve vtedy keď $\alpha > 0$.

Príklad 4. 15b.

a) Nech zobrazenie $f : M_n \to R$ z priestoru $M_n = R^{n^2}$ reálnych $n \times n$ matíc do reálnych čísel je lineárne, t.j.

$$f(A+B) = f(A) + f(B), \quad f(cA) = cf(A)$$

pre každé $A, B \in M_n, c \in R$. Dokážte, že existuje jediná matica $C \in M_n$ taká, že $f(A) = tr(AC)$ pre všetky $A \in M_n$. ($tr(B)$ je stopa matice B)

b) Ak okrem linearity zobrazenia f naviac predpokladáme, že $f(A.B) = f(B.A)$ pre každé $A, B \in M_n$, tak ukážte, že existuje $\lambda \in R$ s vlastnosťou $f(A) = \lambda tr(A)$.

Príklad 5. 20b.

Nech X je ľubovoľná množina a nech $f : X \to X$ je bijekcia. Ukážte, že existujú zobrazenia $g_1, g_2 : X \to X$ také, že $f = g_1 \circ g_2$ a $g_1 \circ g_1 = id = g_2 \circ g_2$ kde id označuje identické zobrazenie na X.

Príklad 6. 25b.

Nech $f : [0,1] \to R$ je spojité zobrazenie. Hovoríme, že funkcia f pretína os v bode x ak $f(x) = 0$ a v každom okolí x existujú y, z také, že $f(y) < 0 < f(z)$.

a) Nájdite príklad spojitej funkcie, ktorá pretína os nekonečne veľa krát.

b) Môže spojitá funkcia pretínať os nespočítateľne veľa krát?