UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

GEOMETRICKÁ PRAVDEPODOBNOSŤ

2011 **Slavomíra Gregušová**

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

GEOMETRICKÁ PRAVDEPODOBNOSŤ

Bakalárska práca

Evidenčné číslo: cfad8131-059b-4f79-a8c4-db64694f462c

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika

Študijný odbor: 9.1.9 Aplikovaná matematika

Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Vedúca bakalárskej práce: RNDr. Beáta Stehlíková, PhD.

Bratislava 2011 **Slavomíra Gregušová**

Prehlásenie:

Čestne prehlasujem, že túto prácu som vypracovala samostatne pod vedením RNDr. Beáty Stehlíkovej, PhD a uviedla v zozname literatúry všetky použité zdroje.

V Bratislave, 2. júna 2011 ....

Podpis autora

Poďakovanie:

Chcela by som poďakovať vedúcej svojej bakalárskej práce Beáte Stehlíkovej za pomoc pri vypracovávaní, za užitočné rady a pripomienky. Ďalej by som rada poďkovala svojmu bývalému učiteľovi Ivanovi Tepličkovi za ochotné poskytnutie zbierok príkladov, ktoré mi pomohli pri vypracovávaní mojej bakalárskej práce. V neposlednom rade by som chcela poďakovať Petrovi Pažákovi za pomoc pri práci s LaTeX-om a prácou s obrázkami, svojim rodičom za možnosť študovať a kamarátom za podporu pri písaní.

Abstrakt

Gregušová, Slavomíra: Geometrická pravdepodobnosť [Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky.

Školiteľ: RNDr. Beáta Stehlíková, PhD.

Bakalárska práca obsahuje riešené a neriešené príklady z oblasti geometrickej pravdepodobnosti. Za väčšinou z riešených príkladov je uvedených niekoľko príkladov na samostatné počítanie. Slúžia na pochopenie daného príkladu a na precvičenie postupov, ktoré sa v riešení používajú.

Po úvodnej časti, ktorá je venovaná vysvetleniu princípu geometrickej pravdepodobnosti a riešeniu jednoduchých príkladov, nasledujú kapitoly obsahujúce tematicky zoradené úlohy - geometrické úlohy, náhodné čísla, stretnutia a rozdelenia. Za nimi nasledujú dve kapitoly s príkladmi zaujímavými z historického hľadiska - Buffonova úloha a Bertrandov paradox. Na záver sú spomenuté simulácie metódou Monte Carlo.

Kľúčové slová: geometrická pravdepodobnosť, zbierka úloh

Abstract

Gregušová, Slavomíra: Geometric probability [Bachelor thesis], Comenius University Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics, and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics.

Thesis Consultant: RNDr. Beáta Stehlíková, PhD.

Bachelor thesis contains solved and unsolved problems in the geometric probability. After most of the solved problems follows a couple of problems for an independent work. They serve to understand the example and to practice the procedures used in solutions.

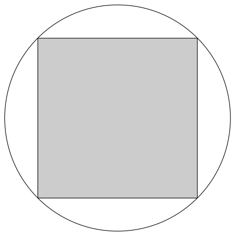
After the introduction, which is devoted to explaination of the principles of geometric probability and solving simple examples, follow chapters containing thematically ordered problems - geometric problems, random numbers, meetings and divisions. They are followed by two chapters with interesting examples from the historical point of view - Buffon needle and Bertrand's paradox. At the end Monte Carlo simulations are mentioned.

Keywords: geometric probability, problem book

Obsah

1 Úvod

Majme nasledovnú úlohu: *Vpíšme do kruhu štvorec. Aká je pravdepodobnosť, že náhodne vybraný bod kruhu bude bodom štvorca?*



Obr. 1: Vpísaný štvorec do kruhu

Označme A udalosť, že bod kruhu bude bodom štvorca. Klasická teória pravdepodobnosti (ak máme konečný počet prvkov množiny A) hovorí, že pravdepodobosť udalosti A je podiel počtu prvkov množiny A k celkovému počtu možných výsledkov. Ale čo ak množina vyhovujúcich riešení (množina A) nie je konečná? O tom ako sa takáto pravdepodobnosť počíta nám hovorí **geometrická pravdepodobnosť**. Vráťme sa k nášmu príkladu. Máme určiť pravdepodobnosť, že bod kruhu bude bodom vpísaného štvorca. Intuitívne, ak by sme chceli zahrnúť všetky vyhovujúce možnosti, tak vezmeme obsah plochy do ktorej sa treba trafiť. Potom pravdepodobnosť udalosti A bude podiel obsahu vyhovujúcej časti ku obsahu ploche všetkých možných výsledkov (označme si túto plochu $S(\Omega)$). Teda: $P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}$.

Zovšeobecnene nech Ω je nejaká podmnožina n-rozmerného Euklidovského priestoru (interval, plošný útvar, objemový útvar,uhol) s konečnou mierou μ a $G \subset \Omega$. (Pod mierou množiny budeme rozumieť dĺžku, plošný obsah, objem, veľkosť uhla.) Elementárne náhodne javy sú reprezentované bodmi, ktoré tvoria daný geometrický útvar. Aká je pravdepodobnosť, že náhodne zvolený bod množiny Ω padne do množiny G? Množiny G a Ω sú nekonečné, preto nemožno definovať pravdepodobnosť klasicky pomocou počtu prvkov. Je preto prirodzené definovať pravdepodobnosť náhodného javu A, že náhodne zvolený bod padne do množiny G, ako podiel miery množiny G a množiny Ω. Je zrejmé, že pravdepodobnosť, že náhodne zvolený bod padne do ľubovoľnej časti množiny je úmerná veľkosti tejto časti a nezávisí od jej tvaru ani polohy v útvare Ω. [1]

Definícia 1.1. *Nech Ω je podmnožinou* n*-rozmerného Euklidovského priestoru s konečnou mierou μ a $G \subset \Omega$. Pravdepodobnosť náhodneho javu A, že náhodne zvolený bod množiny Ω je bodom množiny G je potom definovaná*

$$P(A) = \frac{\mu(G)}{\mu(\Omega)}, \tag{1}$$

kde $\mu(G)$ je miera množiny G a $\mu(\Omega)$ je miera množiny Ω. [1]

V tomto úvode sme si vysvetlili základný teoretický princíp počítania príkladov na geometrickú pravdepodobnosť. V nasledujúcej kapitole je na jednoduchých príkladoch vysvetlený postup počítania príkladov na túto tému. V tretej kapitole sa venujeme geometrickým úlohám, čo znamená, že budeme náhodne voliť body v rôznych geometrických útvaroch a skúmať pravdepodobnosti rôznych udalostí. Kapitola štvrtá je venovaná náhodným číslam, v ktorej budeme voliť náhodne čísla z určitého intervalu a hľadať pravdepodobnosti rôznych udalostí. V piatej kapitole sa budeme zaoberať príkladmi na stretnutia. Šiesta kapitola bude venovaná rozdeleniam, kde budeme deliť úsečky alebo intervaly na časti a skúmať pravdepodobnosti rôznych udalostí s tým spojenými. V kapitole siedmej rozoberieme príklad Buffonovej ihly a v ôsmej kapitole Bertrandovu úlohu, známu ako Bertrandov paradox. V poslednej deviatej kapitole sú spomenuté simulácie pomocou metódy Monte Carlo, ktoré sa dajú využiť na približné overenie vypočítanej pravdepodobnosti.

2 Jednoduché príklady

V tejto časti vysvetlíme princíp počítania geometrickej pravdepodobnosti.

2.1 Prerušené telefónne spojenie

Medzi miestami K a L vzdialenými 10 km bolo prerušené telefónne spojenie. Aká je pravdepodobnosť, že miesto poruchy je od miesta K vzdialené menej ako 500 metrov? [2]

RIEŠENIE:

Označme A udalosť, že spojenie sa prerušilo na mieste najviac 500 metrov od miesta K. Množina všetkých možných miest prerušení, teda množina Ω zo vzťahu (1), sú všetky body telefónneho spojenia. Množina vyhovujúcich miest porušení, teda množina G, je množina bodov, ktoré sú od miesta K vzdialené menej ako 500 metrov. Mierou množín je dĺžka, resp. vzdialenosť. Teda

$$P(A) = \frac{\mu(G)}{\mu(\Omega)} = \frac{l(G)}{l(\Omega)}.$$

Dĺžka celého telefónneho spojenia, teda $l(\Omega)$, je 10 km teda 10 000 m, $l(G)$ je 500 m. Potom

$$P(A) = \frac{\mu(G)}{\mu(\Omega)} = \frac{l(G)}{l(\Omega)} = \frac{500}{10000} = \frac{1}{20}.$$

Pravdepodobnosť, že miesto poruchy je od miesta K vzdialené menej ako 500 metrov je $\frac{1}{20}$.

2.2 Meteor

Aká je pravdepodobnosť, že meteor padne na tú časť zemegule, kde je pevnina, keď vieme, že 149 mil. km^2 povrchu zeme je pevnina a 361 mil. km^2 je more? [3]

RIEŠENIE:

Označme A udalosť, že meteor padne na pevninu. Množina všetkých možných miest (množina Ω), kde meteor môže dopadnúť, sú všetky body pevniny aj všetky body mora. Množina vyhovujúcich miest dopadu meteoru, teda množina G sú všetky body pevniny. Mierou množín je obsah. Teda

$$P(A) = \frac{\mu(G)}{\mu(\Omega)} = \frac{S(G)}{S(\Omega)}.$$

Obsah $S(\Omega) = (149 + 361)$ mil. $km^2 = 510$ mil. km^2. $S(G) = 149$ mil. km^2. Potom

$$P(A) = \frac{S(G)}{S(\Omega)} = \frac{149}{510} \doteq 0,292.$$

Pravdepodobnosť, že meteor dopadne na pevninu je približne 0,292.

2.3 Hodiny

Hodiny, ktoré neboli v stanovenú dobu natiahnuté, sa po určitom čase zastavia. Aká je pravdepodobnosť, že sa veľká ručička zastaví medzi šestkou a deviatkou? [3]

RIEŠENIE:

Označme A udalosť, že sa veľká ručička zastaví medzi šestkou a deviatkou. Množina všetkých možných miest zastavenia ručičky (množina Ω) sú všetky body ciferníka. Množina vyhovujúcich miest zastavenia ručičky, teda množina G, sú všetky body ciferníka od šestky po deviatku. Mierou množín je dĺžka. Teda

$$P(A) = \frac{\mu(G)}{\mu(\Omega)} = \frac{l(G)}{l(\Omega)}.$$

Dĺžka $l(\Omega)$ je dĺžka celého ciferníka, $l(\Omega) = 2\pi r$. Dĺžka $l(G)$, teda dĺžka ciferníka od šestky po deviatku, je $l(G) = \frac{1}{4} \times 2\pi r$. Teda

$$P(A) = \frac{l(G)}{l(\Omega)} = \frac{\frac{1}{4} \times 2\pi r}{2\pi r} = \frac{1}{4}.$$

Pravdepodobnosť, že veľká ručička sa zastaví medzi šestkou a deviatkou je $\frac{1}{4}$.

3 Geometrické úlohy

V tejto kapitole sa budeme zaoberať geometrickými úlohami. Budeme voliť rovnomerne náhodne a nezávisle body v rôznych geometrických útvaroch (kruhu, kružnici, štvorci) a budeme skúmať pravdepodobnosť rôznych udalostí. Rovnomerne náhodná voľba bodu bude prebiehať tak, že pravdepodobnosť zasiahnutia akéhokoľvek daného útvaru závisí len od plochy tohoto útvaru a nie od jeho umiestnenia. Nezávislý výber znamená, že výber jedného bodu nijako neovplyvní [1] výber ďalšieho bodu.

3.1 Vpísaný trojuholník do kruhu

Vpíšme do kruhu rovnostranný trojuholník. Aká je pravdepodobnosť, že rovnomerne náhodne vybraný bod kruhu, bude bodom trojuholníka?

RIEŠENIE:

Zaveďme označenie podľa obrázku 2: Máme kružnicu k so stredom S a polomerom r a do nej vpísaný rovnostranný trojuholník ABC so stranou a a výškou v. Označme udalosť X, že náhodne vybraný bod kruhu bude bodom do kruhu vpísaného trojuholníka. Množina všetkých možných umiestnení bodu (množina Ω), sú všetky body v kruhu. Množina vyhovujúcich umiestnení (množina G) sú všetky body vo vpísanom trojuholníku. Mierou je obsah. Teda

$$P(X) = \frac{\mu(G)}{\mu(\Omega)} = \frac{S(G)}{S(\Omega)}.$$

Obsah kruhu $S(\Omega) = \pi r^2$. Obsah vpísaného trojuholníka $S(G)$ vypočítame nasledovne: Keďže trojuholník je rovnostranný a vpísaný do kružnice, tak stred kružnice je ťažiskom trojuholníka. Z toho vyplýva, že polomer kružnice tvorí dve tretiny výšky trojuholníka, t. j. $r = \frac{2}{3}v$. Teda výška trojuholníka je $v = \frac{3}{2}r$. Pomocou polomeru kružnice vyjadríme aj dĺžku strany trojuholníka. Trojuholník je rovnostranný, teda všetky vnútorné uhly trojuholníka sú zhodné a rovné 60°. Keďže výška rovnostranného trojuholníka je zároveň aj osou prislúchajúceho uhla, tak uhol, ktorý zviera výška trojuholníka so základňou trojuholníka, je 30°. Teda stranu trojuholníka už vyjadríme jednoducho pomocou funkcie kosínus a polomeru kružnice:

$$a = 2r\cos(30^\circ) = 2r\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}r.$$

Obsah trojuholníka $S(G)$ potom je

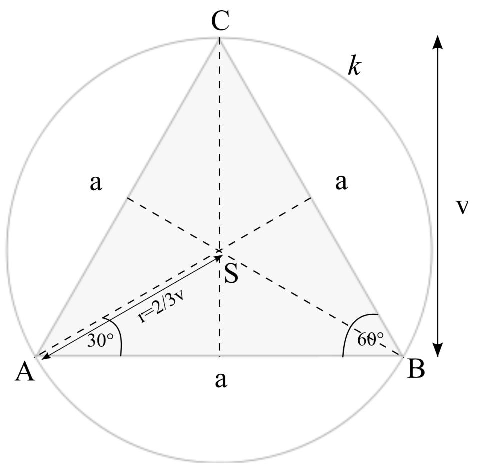
$$S(G) = \frac{a \times v}{2} = \frac{\sqrt{3}r \times \frac{3}{2}r}{2} = \frac{3\sqrt{3}r^2}{4}.$$

Teda pravdepodobnosť udalosti X je

$$P(X) = \frac{S(G)}{S(\Omega)} = \frac{\frac{3\sqrt{3}r^2}{4}}{\pi r^2} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \doteq 0,413.$$

Pravdepodobnosť, že náhodne vybraný bod kruhu bude bodom do kruhu vpísaného trojuholníka, je približne 0,413.

[1]"nijako neovplyvní"sa dá definovať aj presne matemeticky, ale príklady na geometrickú pravdepodobnosť sa počítajú na začiatku predmetu Teórie pravdepodobnosti, kedy potrebné pojmy ešte nie sú zavedené, preto zostávame pri takomto intuitívnom vysvetlení.



Obr. 2: Trojuholník v kruhu

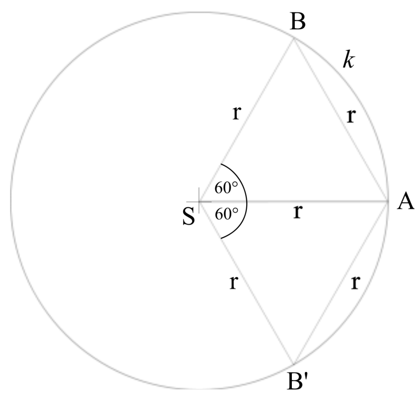
Príklady na precvičenie

1. *Vpíšme do kruhu rovnostranný šesťuholník. Aká je pravdepodobnosť, že náhodne vybraný bod kruhu, bude bodom šesťuholníka?* ($\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$)

2. *Opíšme kružnici s polomerom r rovnostranný trojuholník. Aká je pravdepodobnosť, že náhodne vybraný bod trojuholníka, bude patriť kruhu?* ($\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$)

3.2 Tetiva

Na danej kružnici umiestnime rovnomerne náhodne a nezávisle na sebe dva body A, B. Aká je pravdepodobnosť toho, že dĺžka tetivy AB bude kratšia než polomer tej kružnice? [4]



Obr. 3: Tetiva

RIEŠENIE:

Zaveďme nasledovné označenie. Na obrázku 3 máme načrtnutú kružnicu k so stredom S a polomerom r a tri body na kružnici A, B, B'. Pre daný bod A hľadáme také polohy bodu B, pri ktorých dĺžka tetivy nebude väčšia ako polomer kružnice. Aby to platilo, bod B môžeme voliť na obe strany od bodu A

do vzdialenosti r, teda polomeru kružnice. Množina takýchto bodov zodpovedá kružnicovému oblúku BB'.

Označme T udalosť, že dĺžka tetivy AB bude menšia, nanajvýš rovná polomeru kružnice. Množina všetkých možných umiestnení bodu B (množina Ω) je celá kružnica. Množina vyhovujúcich umiestnení bodu B, t. j. množina G, je kružnicový oblúk BB'. Mierou množiny je jej dĺžka. Teda

$$P(T) = \frac{\mu(G)}{\mu(\Omega)} = \frac{l(G)}{l(\Omega)},$$

kde l je dĺžka.

Trojuholníky SAB a SAB' sú rovnostranné trojuholníky, preto $|\sphericalangle BSA| = |\sphericalangle B'SA| = 60°$. Celej kružnici prislúcha plný uhol $360°$, oblúku BB' prislúcha uhol BSB', ktorého veľkosť je $120°$, čo je tretina plného uhla. Dĺžka oblúku BB' je teda tretina dĺžky kružnice. Takže

$$P(T) = \frac{\mu(G)}{\mu(\Omega)} = \frac{l(G)}{l(\Omega)} = \frac{\frac{1}{3}l(\Omega)}{l(\Omega)} = \frac{1}{3}.$$

Pravdepodobnosť, že dĺžka tetivy AB bude menšia, nanajvýš rovná polomeru kružnice, je $\frac{1}{3}$.

Príklady na precvičenie

1. *Na danej kružnici umiestnime rovnomerne náhodne a nezávisle na sebe dva body A, B. Nájdite pravdepodobnosť, že dĺžka tetivy AB bude kratšia než* $\sqrt{2}r$. $(\frac{1}{4})$

2. *Na danej kružnici umiestnime rovnomerne náhodne a nezávisle na sebe dva body A, B. Nájdite pravdepodobnosť, že dĺžka tetivy AB bude dlhšia než* $\frac{\sqrt{2}}{2}r$. $(1 - \frac{\sin^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{4})}{\pi})$

3.3 Štvorec

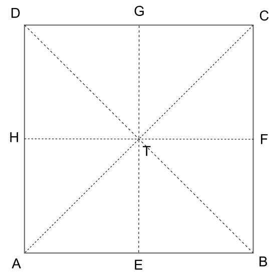
Vo vnútri štvorca so stranou dĺžky a zvolíme rovnomerne náhodne bod.
a) A_1 je udalosť, že náhodný bod padne bližšie k ťažisku štvorca ako k najbližšiemu z vrcholov,
b) A_2 je udalosť, že náhodný bod padne bližšie k najbližšej zo strán štvorca než k najbližšej uhlopriečke.
Určte pravdepodobnosť udalostí A_1, A_2. [5]

RIEŠENIE:

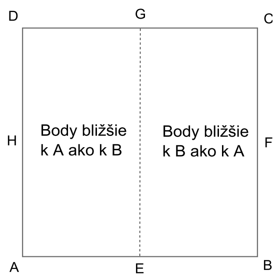
Zaveďme označenie podľa obrázku 4: máme štvorec $ABCD$ so stranou dĺžky a, stredy strán štvorca sú E, F, G, H a bod T je ťažisko štvorca, teda priesečník uhlopriečok AC, BD a takisto priesečník úsečiek HF, EG.

a) Najskôr si rozdelíme body štvorca $ABCD$ podľa toho, ktorý vrchol je k nim najbližšie. Vezmime dva vrcholy, napríklad A, B. Množina bodov, ktoré sú rovnako vzdialené od bodov A, B, je os úsečky AB. Táto os rozdeľuje štvorec na body, ktoré sú bližšie k bodu A ako k bodu B, resp. naopak (pozri obrázok 5). Keď to zopakujeme pre ostatné dvojice vrcholov štvorca $ABCD$, dostaneme rozdelenie štvorca, ktoré je na obrázku 6 .

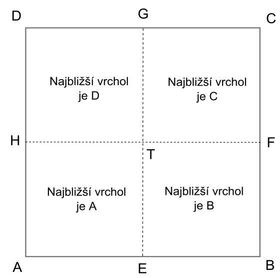
Úlohou je nájsť také body, pre ktoré platí, že sú bližšie k ťažisku štvorca ako k najbližšiemu z vrcholov. Najskôr nájdeme body, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od ťažiska T aj od najbližšieho vrcholu



Obr. 4: Označenie k riešeniu príkladu 3.3



Obr. 5: Vzdialenosť bodu štvorca od vrcholov A,B



Obr. 6: Vrchol najbližší k danému bodu

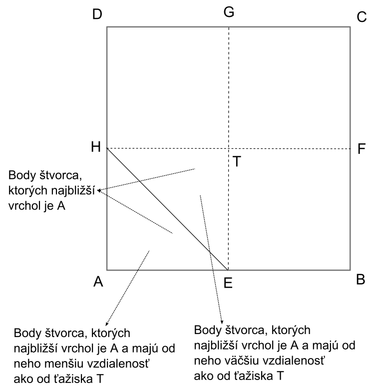
štvorca. Nech ten najbližší vrchol je A. Body, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od vrcholu A a ťažiska T sú body na osi úsečky AT. Z nich ale berieme len tie, ktoré ležia v kvadrante obsahujúcom body, pre ktoré je najbližším vrcholom práve vrchol A, viď obrázok 7 . Takúto úvahu zopakujeme aj pre ostatné vrcholy štvorca. Dostaneme, že body, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od ťažiska a najbližšieho vrcholu štvorca, ležia na obvode štvorca $EFGH$, pozri obrázok 8. Body v oblasti AEH na obrazku 8 sú také body, ktorých najbližší vrchol je A a sú bližsie k vrcholu ako k ťažisku. Body v oblasti ETH sú také body, že najbližší vrchol je A a sú bližšie k ťažisku ako k vrcholu A. Takúto úvahu zopakujeme aj pre zvyšné 3 oblasti. My hľadáme také body, ktoré sú bližšie k ťažisku ako k vrcholu štvorca. Také body teda ležia vo vnútri štvorca $EFGH$.

Bod môžeme voliť ľubovoľne vo štvorci, teda množina Ω je množina všetkých bodov štvorca $ABCD$. Označme A_1 udalosť, že náhodný bod padne bližšie k ťažisku štvorca ako k najbližšiemu z vrcholov. Množina vyhovujúcich zvolení bodu (množina G_1) je množina všetkých bodov vpísaného štvorca $EFGH$. Mierou je obsah. Obsah štvorca $EFGH$ možno jednoducho vyjadriť ako polovicu súčinu uhlopriečok. [2] Dĺžka jeho uhlopriečky je dĺžka strany pôvodného štvorca, t. j. a.
Takže hľadaná pravdepodobnosť bude

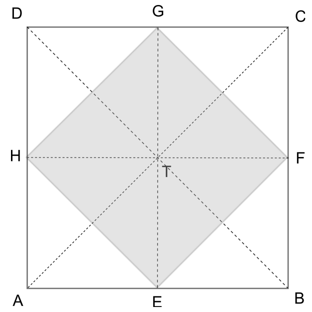
$$P(A_1) = \frac{\mu(G_1)}{\mu(\Omega)} = \frac{S(G_1)}{S(\Omega)} = \frac{\frac{a^2}{2}}{a^2} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Pravdepodobnosť, že náhodný bod padne bližšie k ťažisku štvorca ako k najbližšiemu z vrcholov je teda $\frac{1}{2}$.

[2] Obsah štvorca sa dá vyjadriť ako súčet 4 pravouhlých rovnoramenných trojuholníkov, na ktoré nám uhlopriečky štvorec rozdelia. Teda obsah bude $4 \times \frac{\frac{u}{2} \times \frac{u}{2}}{2} = \frac{u^2}{2}$, kde u je dĺžka uhlopriečky.



Obr. 7: Najbližší vrchol a vzdialenosť bodu od ťažiska

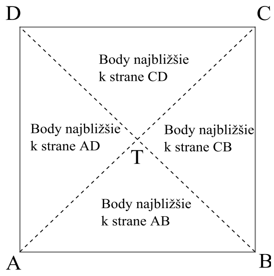


Obr. 8: Množina G_1

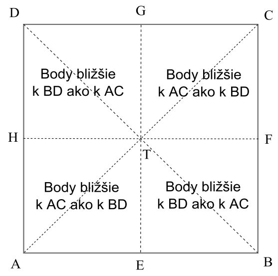
b) Najskôr si rozdelíme body štvorca podľa toho, ku ktorej strane má daný bod najmenšiu vzdia - lenosť. Vezmime si napríklad strany AB a AD. Množina bodov, ktoré sú rovnako vzdialené od oboch úsečiek je os uhla BAD. Táto os rozdeľuje štvorec na body, ktoré sú bližšie k strane AB ako k AD a naopak. Ak to zopakujeme pre zvyšné dvojice strán štvorca, dostaneme rozdelenie štvorca, ktoré je na obrázku 9 .

Ďalej rozdelíme body štvorca podľa toho, či je bod bližšie k uhlopriečke AC alebo BD. Zoberme si oblasť ABT. Body, ktoré sú rovnako vzdialené od AT a BT (AT je časť uhlopriečky AC, BT je časť uhlopriečky BD) sú body ležiace na osi uhla $\sphericalangle ATB$. Zopakujeme pre ostatné tri oblasti: BTC, CTD a DTA a dostaneme rozdelenie znázornené na obrázku 10 . Hľadáme také body, ktorých vzdialenosť k najbližšej strane štvorca je menšia ako k najbližšej uhlopriečke. Spojením rozdelení z obr. 9 a 10 máme štvorec rozdelený na 8 zhodných častí. Vezmine si napríklad oblasť EAT (tu sa nachádzajú body, pre ktoré je najbližšia strana AB a najbližšia uhlopriečka AC). Body ktoré majú rovnakú vzdialenosť od AT a AE sú body na osi uhla $\sphericalangle EAT$. Os uhla nám rozdelí EAT na oblasti, kde sú body bližšie k AT ako k AE a naopak (viď obr. 11). Tento postup opakujeme pre zvyšných 7 oblastí. Dostaneme, že vyhovujúce umiestnenia ležia vo vyfarbenej oblasti na obrázku 12 .

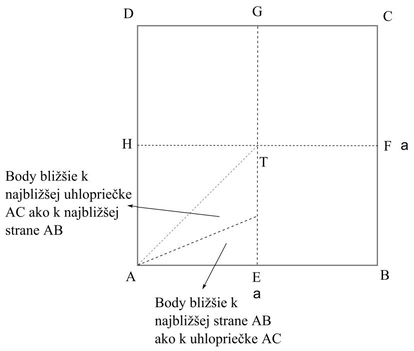
Množina Ω, teda množina všetkých možných umiestnení bodu je množina všetkých bodov štvorca $ABCD$. Označme udalosť A_2, že náhodný bod padne bližšie k najbližšej zo strán štvorca ako k naj - bližšej z uhlopriečok. Množina všetkých vyhovujúcich umiestnení bodu (množina G_2) sú všetky body vo vyfarbenej oblasti na obrázku 12. Mierou je obsah.



Obr. 9: Najbližšia strana štvorca



Obr. 10: Porovnanie vzdialeností bodu od uhlopriečok



Obr. 11: Porovnanie vzdialeností bodu od najbližšej strany a od najbližšej uhlopriečky

Teda:

$$P(A_2) = \frac{\mu(G_2)}{\mu(\Omega)} = \frac{S(G_2)}{S(\Omega)}.$$

Vyfarbená oblasť sa skladá zo 4 rovnakých trojuholníkov, so stranou dĺžky a. Výšku trojuholníka označíme v a vyjadríme ju pomocou funkcie tangens:

$$v = \frac{a}{2}.\tan(22,5^\circ).$$

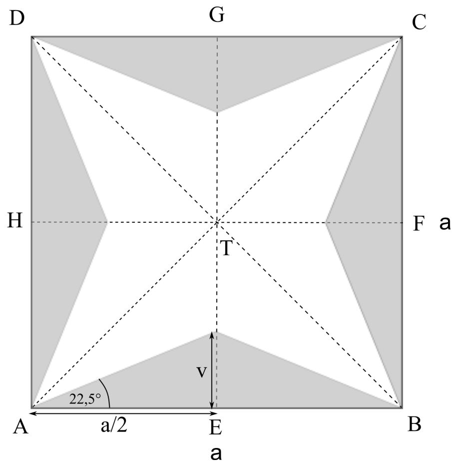
Obsah vyfarbenej oblasti, teda $S(G_2)$, je

$$S(G_2) = 4.\frac{av}{2} = 2av = 2.a\frac{a}{2}.\tan(22,5^\circ) = a^2.\tan(22,5^\circ).$$

Teda pravdepodobnosť udalosti A_2 je

$$P(A_2) = \frac{S(G_2)}{S(\Omega)} = \frac{a^2.\tan(22,5^\circ)}{a^2} = \tan(22,5^\circ) \doteq 0,414.$$

Pravdepodobnosť toho, že náhodný bod vo štvorci padne bližšie k najbližšej strane štvorca ako k naj - bližšej uhlopriečke štvorca, je približne 0,414.



Obr. 12: Množina G_2

Príklady na precvičenie

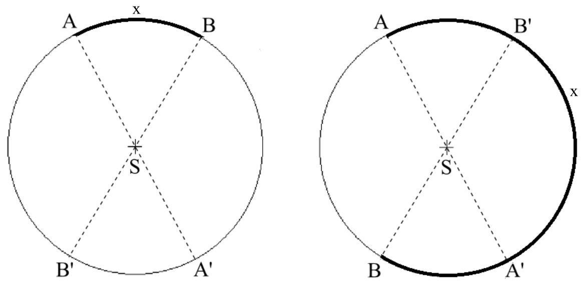
1. *Vo vnútri štvorca so stranou dĺžky a zvolíme rovnomerne náhodne bod. Aká je pravdepodobnosť, že náhodne vybraný bod štvorca bude bližšie k najbližšej uhlopriečke ako k najbližšej osi strany štvorca?* $(\tan(22,5°))$

2. *Vo vnútri trojuholníka so stranou dĺžky a zvolíme rovnomerne náhodne bod. Aká je pravdepodobnosť, že náhodne vybraný bod trojuholníka bude bližšie k ťažisku trojuholníka ako k najbližšiemu vrcholu trojuholníka?* $(\frac{2}{3})$

3.4 Trojuholnik

Na jednotkovej kružnici v rovine zvolíme nezávisle rovnomerne náhodne tri body A, B, C. Vypočítajte pravdepodobnosť, že trojuholník ABC bude ostrouhlý. [6]

RIEŠENIE: podľa [6]



Obr. 13: Dĺžka oblúka

Zvolené tri body nebudú tvoriť ostrouhlý trojuholník práve vtedy, ak existuje polkružnica na danej kružnici, na ktorej ležia všetky tri body. Jeden bod si zvolíme pevne, nech je to A. Potom dalšie dva body B, C sú jednoznačne určené dĺžkou oblúkov AB a AC meraných v smere hodinových ručičiek.

Označme tieto dĺžky x a y. Dĺžka celej kružnice je 2π. Na obrázku 13 máme znázornené dve kružnice so stredom S, na nich bod A a bod A', ktorý je od bodu A vzdialený o π. Medzi bodmi A a A' sú znázornené body B a o vzdialenosť π je jeho obraz B'. Aby body A, B, C neležali na jednej polkružnici, tak bod C podľa obrázka 13 musíme zvoliť medzi bodmi A' a B'. Teda body A, B, C nebudú ležať na jednej polkružnici resp. budú tvoriť ostrouhlý trojuholník práve vtedy, keď

$$x \leq \pi \qquad \wedge \qquad \pi \leq y \leq \pi + x$$

alebo

$$x > \pi \qquad \wedge \qquad x - \pi \leq y \leq \pi.$$

Teda množina všetkých možných umiestnení bodov B, C je: $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2\pi; 0 \leq y \leq 2\pi\}$. Označme udalosť X, že trojuholník bude ostrouhlý. Množina vyhovujúcich umiestnení bodov B, C je: $G = \{(x, y) \in [0, 2\pi]^2 : (x \leq \pi \wedge \pi \leq y \leq \pi + x) \vee (x > \pi \wedge x - \pi \leq y \leq \pi)\}$. Mierou je obsah. Teda pravdepodobnosť udalosti X bude

$$P(X) = \frac{\mu(\Omega)}{\mu(G)} = \frac{S(G)}{S(\Omega)},$$

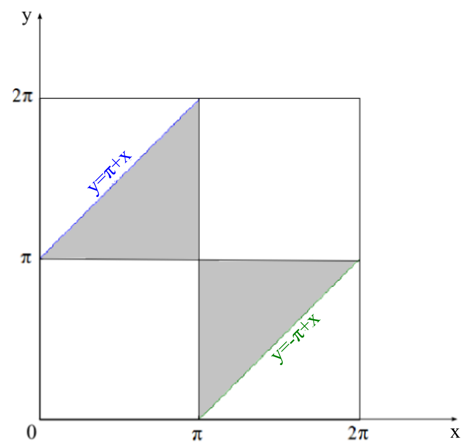
kde $S(\Omega)$ je obsah štvorca so stranou dĺžky 2π, teda $S(\Omega) = 4\pi^2$. Obsah $S(G)$ vypočítame nasledovne: V súradnicovej sústave si graficky znázorníme dvojice bodov (x, y), ktoré reprezentujú umiestnenia bodov B, C. Ak zobrazíme množinu G v súradnicovej sústave, tak dostaneme dva pravouhlé rovnoramenné trojuholníky (obrázok 14) s odvesnami s dĺžkou π. Teda obsah $S(G)$ je

$$S(G) = 2\frac{\pi.\pi}{2} = \pi^2.$$

Teda pravdepodobnosť udalosti X je

$$P(X) = \frac{S(G)}{S(\Omega)} = \frac{\pi^2}{4\pi^2} = \frac{1}{4}.$$

Pravdepodobnosť, že trojuholník ABC bude ostrouhlý, je $\frac{1}{4}$.



Obr. 14: Množina G

Príklady na precvičenie

1. *Na jednotkovej kružnici v rovine zvolíme nezávisle rovnomerne náhodne tri body A, B, C. Vypočítajte pravdepodobnosť, že uhol ABC bude tupý.* ($\frac{1}{2}$)

2. *Na jednotkovej kružnici v rovine zvolíme nezávisle rovnomerne náhodne tri body A, B, C. Vypočítajte pravdepodobnosť, že:*

   a) strana AB bude mať dĺžku aspoň $\sqrt{2}$, ($\frac{1}{4}$)

   b) strana AB bude kratšia ako strana AC. ($\frac{1}{2}$)

4 Náhodné čísla

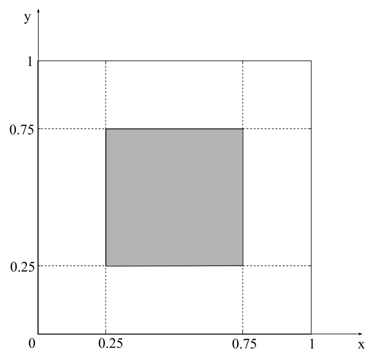
V tejto kapitole sa budeme zaoberať náhodnými číslami. Budeme voliť rovnomerne náhodne a nezávisle čísla z určitého intervalu a hľadať pravdepodobnosti rôznych udalostí. Čo znamená nezávislý výber, sme vysvetlili v tretej kapitole. Rovnomerne náhodná voľba bodu prebieha tak, že pravdepodobnosť výberu akéhokoľvek bodu závisí len od dĺžky intervalu.

4.1 Dva body

V intervale (0,1) zvolíme rovnomerne náhodne a nezávisle dve čísla x, y. Nájdite pravdepodobnosť, že oba body padnú do intervalu $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$. [5]

RIEŠENIE:

Situáciu si môžeme načrtnúť v súradnicovej sústave. Uvažujme bod (x, y) v rovine. Body x, y volíme rovnomerne nezávisle z intervalu $(0, 1)$, takže všetky možnosti pre body (x, y) sú dané štvorcom $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$. Označme A udalosť, že oba volené body padnú do intervalu $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$. Tejto udalosti zodpovedá množina $G = \{\frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}, \frac{1}{4} < y < \frac{3}{4}\}$. Riešením týchto nerovníc sú všetky body nachádzajúce sa vo vyfarbenom štvorci na obrázku 15.



Obr. 15: Množina G

Mierou množiny je jej obsah. Množina Ω je štvorec so stranou dĺžky 1, množina G je štvorec s dĺžkou strany $\frac{1}{2}$. Teda pravdepodobnosť udalosti A bude

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{(\frac{1}{2})^2}{1^2} = \frac{1}{4}$$

Teda pravdepodobnosť, že body x, y padnú do intervalu $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, je $\frac{1}{4}$.

4.2 Súčet a súčin

Rovnomerne náhodne a nezávisle zvolíme dve čísla x, y z intervalu $(0, 1)$. *Aká je pravdepodobnosť, že ich súčet je menší ako 1 a ich súčin je väčší ako 0,09?* [3]

RIEŠENIE:

Situáciu si môžeme načrtnúť v súradnicovej sústave. Uvažujme bod (x, y) v rovine. Body x, y volíme rovnomerne nezávisle z intervalu $(0,1)$, takže všetky možnosti pre body (x,y) sú dané štvorcom $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$. Označme A udalosť, že súčet čísel x, y je menší ako 1 a ich súčin je väčší ako 0,09. Tejto udalosti zodpovedá množina $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < 1,\ xy > 0,09\}$. Nerovnosti si zapíšeme v takom tvare, ktorý nám umožní zakresliť množinu G v súradnicovej sústave. Z prvej nerovnice máme:

$$y < 1 - x.$$

Z druhej nerovnice:

$$y > \frac{0,09}{x}.$$

Riešením nerovníc, je vyfarbená oblasť na obrázku 16. Miera je v tomto prípade opäť obsah. Teda pravdepodobnosť udalosti A je

$$P(A) = \frac{\mu(G)}{\mu(\Omega)} = \frac{S(G)}{S(\Omega)},$$

kde $S(\Omega)$ je obsah jednotkového štvorca a $S(G)$ je obsah vyfarbenej oblasti na obrázku 16, ktorý vypočítame pomocou integrálu. Hranice integrálu sú x-ové súradnice priesečníkov kriviek

$$y = 1 - x \ ,\ y = \frac{0,09}{x},$$

t. j. riešenia rovnice

$$1 - x = \frac{0,09}{x},$$

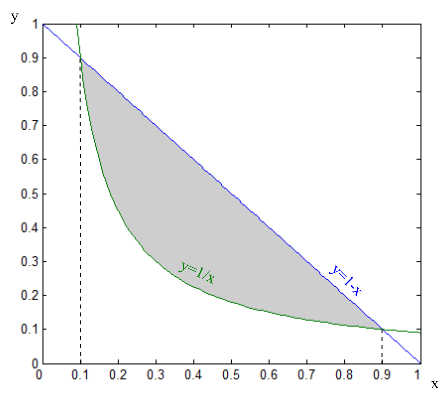
čo sú $x_1 = 0,1$ a $x_2 = 0,9$. Integrovaná funkcia je rozdielom funkcií kriviek, teda $1 - x - \frac{0,09}{x}$. Teda

$$\begin{aligned} S(G) &= \int_{0,1}^{0,9} \left(1 - x - \frac{0,09}{x}\right) = \left[x - x^2 - 0,09 \ln x\right]_{0,1}^{0,9} \\ &= \left(0,9 - \frac{0,9^2}{2} - 0,09 \ln 0,9\right) - \left(0,1 - \frac{0,1^2}{2} - 0,09 \ln 0,1\right) \\ &= 0,4 - 0,09 \ln 9. \end{aligned}$$

Takže

$$P(A) = \frac{S(G)}{S(\Omega)} = \frac{0,4 - 0,09 \ln 9}{1} = 0,4 - 0,09 \ln 9 \doteq 0,202.$$

Pravdepodobnosť, že súčet dvoch náhodných čísel z intervalu (0,1) je menší ako 1 a ich súčin je väčší ako 0,09, je približne 0,202.



Obr. 16: Množina G

Príklady na precvičenie

1. *Rovnomerne náhodne a nezávisle zvolíme dve čísla x, y z intervalu $(0,1)$. Aká je pravdepodobnosť, že bude platiť: $x+y<1$ a $y<-4x^2+4x$?* $(\frac{9}{32})$

2. *Rovnomerne náhodne a nezávisle zvolíme dve čísla x, y z intervalu $(0,1)$. Aká je pravdepodobnosť, že ich súčin bude väčší ako 0,08 a ich podiel bude menší ako 0,5?* $(0,21+0,08\ln\frac{0{,}08}{0{,}2})$

4.3 Tri náhodné čísla

V intervale (0,1) zvolíme nezávisle rovnomerne náhodne tri čísla a,b, c. Nájdite pravdepodobnosť, že súčet týchto troch čísiel bude menší ako 1. [5]

RIEŠENIE:

Situáciu si opäť znázorníme v súradnicovej sústave, tentokrát v priestore, keďže máme tri náhodné čísla. Všetky tri čísla volíme z intervalu $(0,1)$, teda množinu všetkých možných zvolení reprezentuje kocka s dĺžkou hrany 1. Teda množina $\Omega=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 : 0<a,b,c<1\}$. Hľadáme pravdepodobnosť udalosti A, že súčet troch náhodne zvolených čísel z intervalu (0,1) bude menší ako 1. Tejto udalosti zodpovedá množina $G=\{(a,b,c)\in(0,1)^3 : a+b+c<1\}$. Nerovnosť $a+b+c<1$ predstavuje polpriestor. Množina G je prienik tohto polpriestoru s kockou Ω. To je štvorsten s vrcholmi v bodoch (0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) tak, ako je to znázornené na obrázku 17. V tomto prípade je mierou objem. Pravdepodobnosť udalosti A teda bude

$$P(A)=\frac{\mu(G)}{\mu(\Omega)}=\frac{V(G)}{V(\Omega)},$$

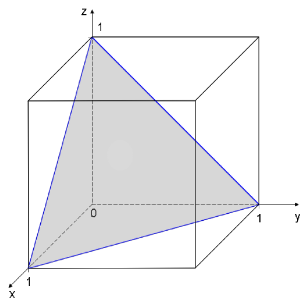
kde $V(\Omega)$ je objem kocky $1\times1\times1$, $V(G)$ je objem štvorstena s výškou 1 a obsahom podstavy $\frac{1}{2}$. Objem štvorstena vypočítame ako tretinu súčinu obsahu podstavy a výšky, takže

$$V(G)=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}.1=\frac{1}{6}.$$

Teda

$$P(A)=\frac{V(G)}{V(\Omega)}=\frac{\frac{1}{6}}{1}=\frac{1}{6}.$$

Pravdepodobnosť, že súčet troch náhodne zvolených čísel z intervalu (0,1) bude menší ako 1, je $\frac{1}{6}$.



Obr. 17: Množina G

Príklady na precvičenie

1. *V intervale* $(0,1)$ *zvolíme nezávisle rovnomerne náhodne tri čísla a,b, c. Nájdite pravdepodobnosť, že* $a+2b+2c<1$. $(\frac{1}{24})$

2. *V intervale* $(0,2)$ *zvolíme nezávisle rovnomerne náhodne tri čísla a,b, c. Nájdite pravdepodobnosť že:*

   a) ich súčet je menší ako 1, $(\frac{1}{48})$

   b) ich súčin je menší ako 1. [7] $(\frac{11+30(\ln 2)^2-\ln 8}{32})$

4.4 Tri náhodné čísla 2

V intervale (0,1) zvolíme nezávisle rovnomerne náhodne tri čísla a,b, c. Nájdite pravdepodobnosť, že bude splnená nerovnosť

$$|a-b|+|b-c|+|a-c|<1. \text{ [5]} \tag{2}$$

RIEŠENIE:

Všetky tri čísla volíme z intervalu $(0,1)$, teda množinu všetkých možných zvolení reprezentuje kocka s dĺžkou hrany 1. Teda množina $\Omega=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3: 0<a,b,c<1\}$. Hľadáme pravdepodobnosť udalosti A_2, že platí: $|a-b|+|b-c|+|a-c|<1$. Tejto udalosti zodpovedá množina $G=\{(a,b,c)\in(0,1): |a-b|+|b-c|+|a-c|<1\}$. Mierou je opäť objem.

Pravdepodobnosť udalosti A teda bude

$$P(A)=\frac{\mu(G)}{\mu(\Omega)}=\frac{V(G)}{V(\Omega)},$$

kde $V(\Omega)$ je objem kocky $1\times1\times1$. Pričom objem $V(G)$ vypočítame nasledovne. Nerovnicu 2 si rozdelíme na 6 prípadov podľa toho ako môžu byť čísla a, b, c usporiadané ($a<b<c$, $a<c<b$, $b<a<c$, $b<c<a$, $c<b<a$, $c<a<b$). Ak je usporiadanie $a<b<c$, tak z podmienky z nerovnice zo zadania máme:

$$(-a+b)+(-b+c)+(-a+c)<1,$$

$$-2a+2c<1,$$

$$c<\frac{1}{2}+a.$$

To znamená, že vyhovujúce (a,b,c), teda také, ktoré spĺňajú usporiadanie a vyhovujú podmienke 2, môžeme charakterizovať takto:

- a môže byť ľubovoľné z intervalu (0,1)$\Rightarrow a\in(0,1)$,
- c musí byť väčšie ako a (aby bolo splnené usporiadanie), menšie ako $a+\frac{1}{2}$ (podmienka zo zadania) a súčasne menšie ako 1 (lebo všetky sú menšie ako 1) $\Rightarrow c\in\left[a,\min(1,a+\frac{1}{2})\right]$,
- b je medzi a a c (z usporiadania) $\Rightarrow b\in[a,c]$.

Objem takejto množiny vypočítame pomocou integrálu. Ak a je z intervalu $(0, \frac{1}{2})$ tak $\min(1, a+\frac{1}{2})$ je $a+\frac{1}{2}$ a ak a je z intervalu $(\frac{1}{2}, 1)$, tak $\min(1, a+\frac{1}{2})$ je 1. Teda

$$V = \int_0^1 \int_a^{\min(1,a+\frac{1}{2})} \int_a^c db\ dc\ da = \int_0^{1/2} \int_a^{a+\frac{1}{2}} \int_a^c db\ dc\ da + \int_{1/2}^1 \int_a^1 \int_a^c db\ dc\ da.$$

A teraz vypočítame postupne tieto dva integrály. Prvý sa rovná:

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} \int_a^{a+\frac{1}{2}} \int_a^c db\ dc\ da &= \int_0^{1/2} \int_a^1 (c-a) dc\ da = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{c^2}{2} - ac\right]_a^1 \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{(a+\frac{1}{2})^2}{2} - a(a+\frac{1}{2}) - (\frac{a^2}{2} - a^2)\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}\ da = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

a druhý:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_a^1 \int_a^c db\ dc\ da &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_a^1 (c-a) dc\ da = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[\frac{c^2}{2} - ac\right]_a^1 = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{2} - a\right) - \left(\frac{a^2}{2} - a^2\right) da \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{a^2 - 2a + 1}{2} da = \frac{1}{2}\left[\frac{a^3}{3} - a^2 + a\right]_{\frac{1}{2}}^1 \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{3} - 1 + 1\right) - \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{48}. \end{aligned}$$

Teda

$$V = \int_0^1 \int_a^{min(1,a+\frac{1}{2})} \int_a^c db\ dc\ da = \int_0^{1/2} \int_a^{a+\frac{1}{2}} \int_a^c db\ dc\ da + \int_{1/2}^1 \int_a^1 \int_a^c db\ dc\ da = \frac{3}{48} + \frac{1}{48} = \frac{1}{12}.$$

V úlohe tejto trojice (a, b, c) sa vystriedajú všetky permutácie a, b, c, teda objem celého telesa, ktorý vymedzuje nerovnica (2) spolu s podmienkou, že $a, b, c \in (0, 1)$, je šesťnásobkom objemu V, t. j. $V(G) = 6V = \frac{1}{2}$. Teda

$$P(A) = \frac{V(G)}{V(\Omega)} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}.$$

Pravdepodobnosť, že pre tri náhodné čísla z intervalu $(0, 1)$ platí $|a-b| + |b-c| + |a-c| < 1$, je $\frac{1}{2}$.

Príklady na precvičenie

1. *V intervale* $(0, 2)$ *zvolíme nezávisle rovnomerne náhodne tri čísla a,b, c. Nájdite pravdepodobnosť, že* $|a-b| + |b-c| + |a-c| < 2$. $(\frac{2}{3})$

2. *V intervale* $(0, 3)$ *zvolíme nezávisle rovnomerne náhodne tri čísla a,b, c. Nájdite pravdepodobnosť že* $|a-b| + |b-c| + |a-c| < \frac{3}{2}$. $(\frac{51}{64})$

4.5 Polynóm

V intervale (0,1) zvolíme nezávisle rovnomerne náhodne tri čísla a, b, c. Nájdite pravdepodobnosť, že:

a) polynóm $x^2 + 2\sqrt{b}x + c$ *bude mať korene v obore reálnych čísel, [2]*

b) polynóm $ax^2 + bx + c$ *nebude mať žiadny reálny koreň.* [5]

RIEŠENIE:

a) Situáciu si znázorníme v súradnicovej sústave v rovine, pretože v tejto prvej časti uvažujeme len dve náhodné čísla. Obe čísla volíme z intervalu $(0,1)$, teda množinu všetkých možných zvolení reprezentuje štvorec s dĺžkou strany 1. Teda množina $\Omega = \{(b,c) \in \mathbb{R}^2 : 0 < b, c < 1\}$. Hľadáme pravdepodobnosť udalosti A_1, že rovnica $x^2 + 2\sqrt{b}x + c = 0$ bude mať riešenie v obore reálnych čísel. To znamená, že diskriminant tohto polynómu musí byť väčší, nanajvýš rovný nule, teda $4b - 4c \geq 0$. Teda množina $G = \{(b,c) \in (0,1)^2 : 4b - 4c \geq 0\}$. Mierou je obsah. Pravdepodobnosť udalosti A_1 teda bude

$$P(A_1) = \frac{\mu(G_1)}{\mu(\Omega)} = \frac{S(G_1)}{S(\Omega)},$$

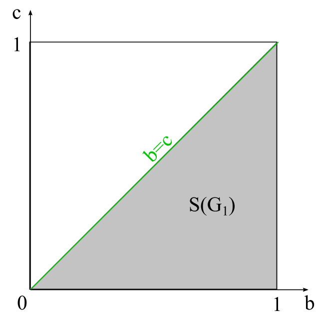
kde $S(\Omega)$ je obsah štvorca 1×1. Obsah $S(G_1)$ vypočítame pomocou obrázku. Hľadáme takú možinu, že $4b - 4c \geq 0$, teda odtiaľ $b \geq c$. Z obrázku 18 vidíme, že množina G_1 je pravouhlý rovnoramenný trojuholník s odvesnami dĺžky 1. Teda

$$S(G_1) = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Teda pravdepodobnosť udalosti A_1 je

$$P(A_1) = \frac{S(G_1)}{S(\Omega)} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}.$$

Pravdepodobnosť, že polynóm $x^2 + 2\sqrt{b}x + c$ bude mať riešenie v obore reálnych čísel, je $\frac{1}{2}$.



Obr. 18: Množina G_1

b) Situáciu si opäť znázorníme v súradnicovej sústave, teraz v priestore, keďže máme tri náhodné čísla. Všetky tri čísla volíme z intervalu $(0,1)$, teda množinu všetkých možných zvolení reprezentuje kocka s dĺžkou hrany 1. Teda množina $\Omega = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : 0 < a, b, c < 1\}$. Hľadáme pravdepodobnosť udalosti A_2, že polynóm $ax^2 + bx + c$ nebude mať žiadny reálny koreň. To znamená, že diskriminant tohto kvadratického polynómu musí byť záporný, teda $b^2 - 4ac < 0$. Tejto udalosti zodpovedá množina $G_2 = \{(a,b,c) \in (0,1)^3 : b^2 - 4ac < 0\}$. Mierou je opäť objem.
Pravdepodobnosť udalosti A_2 teda bude

$$P(A_2) = \frac{\mu(G_2)}{\mu(\Omega)} = \frac{V(G_2)}{V(\Omega)},$$

kde $V(\Omega)$ je objem kocky $1 \times 1 \times 1$. Objem $V(G_2)$ vypočítame pomocou integrálu nasledovne: Z nerovnice $b^2 - 4ac < 0$ vyjadríme b:

$$b < 2\sqrt{ac}.$$

Potrebujeme rozlíšiť oblasti, kde budeme integrovať po plochu $b = 2\sqrt{ac}$ a kde po rovinu $b = 1$. Nerovnosť $2\sqrt{ac} < 1$ t. j. $c < \frac{1}{4a}$, vymedzuje časť roviny, kde budeme integrovať po plochu $2\sqrt{ac}$ (oblasti 1 a 2 na obrázku 19), inde (oblasť 3 z obrázka 19) budeme integrovať po 1. Integračné hranice premenných a, b, c pre jednotlivé oblasti sú (pozri obr. 19):

- oblasť 1: $a \in (0, \frac{1}{4})$, $c \in (0, 1)$, $b \in (0, 2\sqrt{ac})$,
- oblasť 2: $a \in (\frac{1}{4}, 1)$, $c \in (0, \frac{1}{4a})$, $b \in (0, 2\sqrt{ac})$,
- oblasť 3: $a \in (\frac{1}{4}, 1)$, $c \in (\frac{1}{4a}, 1)$, $b \in (0, 1)$.

V oblasti 1 budeme integrovať v c po 1, v a po $\frac{1}{4}$. V oblasti 2 budeme integrovať po krivku $c = \frac{1}{4a}$. Teda

$$V(G_2) = \int_0^{\frac{1}{4}} \int_0^1 \int_0^{2\sqrt{ac}} db\ dc\ da + \int_{\frac{1}{4}}^1 \int_0^{\frac{1}{4a}} \int_0^{2\sqrt{ac}} db\ dc\ da + \int_{\frac{1}{4}}^1 \int_{\frac{1}{4a}}^1 \int_0^1 db\ dc\ da$$

Každý z integrálov vypočítame samostatne:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{4}} \int_0^1 \int_0^{2\sqrt{ac}} db\ dc\ da &= \int_0^{\frac{1}{4}} \int_0^1 2\sqrt{ac}\ dc\ da = \int_0^{\frac{1}{4}} 2\sqrt{a} \left[\frac{2c^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^1 da \\ &= \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{4}{3}\sqrt{a}\ da = \frac{4}{3}\left[\frac{2a^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{9}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{4}}^1 \int_0^{\frac{1}{4a}} \int_0^{2\sqrt{ac}} db\ dc\ da &= \int_{\frac{1}{4}}^1 \int_0^{\frac{1}{4a}} 2\sqrt{ac}\ dc\ da = \int_{\frac{1}{4}}^1 2\sqrt{a} \left[\frac{2c^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^{\frac{1}{4a}} da \\ &= \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{1}{6a}\ da = \left[\frac{1}{6}\ln a\right]_1^{\frac{1}{4}} = \frac{\ln 2}{3}. \end{aligned}$$

To znamená, že

$$\int_{\frac{1}{4}}^1 \int_{\frac{1}{4a}}^1 \int_0^1 db\ dc\ da = \int_{\frac{1}{4}}^1 \int_{\frac{1}{4a}}^1 1\ dc\ da = \int_{\frac{1}{4}}^1 [c]_{\frac{1}{4a}}^1\ da = \left[a - \frac{1}{4}\ln a\right]_{\frac{1}{4a}}^1 = \frac{3}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$$

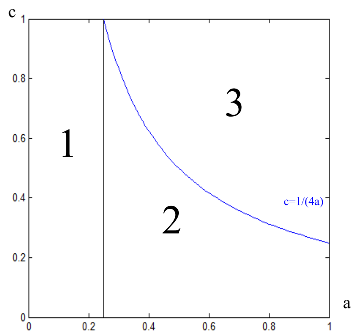
Teda

$$V(G) = \frac{1}{9} + \frac{\ln 2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{\ln 2}{2} = \frac{31}{36} - \frac{\ln 2}{6}.$$

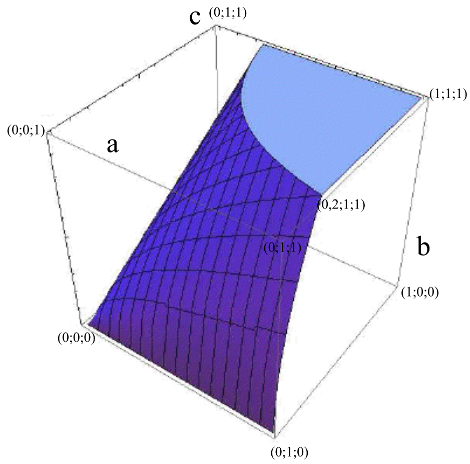
Takže

$$P(A_2) = \frac{V(G)}{V(\Omega)} = V(G) = \frac{31}{36} - \frac{\log 2}{6} \doteq 0,745587.$$

Pravdepodobnosť, že polynóm $ax^2 + bx + c$ pre $a, b, c \in (0, 1)$ nebude mať žiadny reálny koreň, je približne 0,745587.



Obr. 19: Hranice integrovania



Obr. 20: Množina G

Príklady na precvičenie

1. *V intervale* $(0, 2)$ *zvolíme nezávisle rovnomerne náhodne tri čísla a,b, c. Nájdite pravdepodobnosť, že polynóm* $x^2 + \sqrt{c}x - \frac{1}{4}(b^2 - 2b)$ *nemá riešenie v obore reálnych čísel.* $(\frac{1}{3})$

2. *V intervale* $(0, 2)$ *zvolíme nezávisle rovnomerne náhodne tri čísla a,b, c. Nájdite pravdepodobnosť že polynóm* $ax^2 + bx + c$ *má reálne korene.*$(\frac{5}{36} + \frac{\log 2}{6} \doteq 0,2544)$

4.6 A+B=C?

V intervale $(0, 1)$ *zvolíme rovnomerne náhodne a nezávisle čísla a, b. Nech c je súčet čísel a, b, nech A, B, C sú najbližšie celé čísla k číslam a, b, c. Aká je pravdepodobnosť, že A+B=C?* [8]

RIEŠENIE: podľa [8]

Kedže čísla a, b volíme z intervalu (0,1), tak súčet $A + B$ môže byť buď 0, 1 alebo 2. Rozlíšime tieto tri prípady a pre každú z nich nájdeme množiny zodpovedajúce udalosti $A + B = C$, označíme ich G_1, G_2, G_3.

1. C=0

   V tomto prípade $A = 0$ aj $B = 0$. Preto $a < \frac{1}{2}$, $b < \frac{1}{2}$, $a+b < \frac{1}{2}$. Množina $G_1 = \{(a,b) \in (0,1)^2 : a < \frac{1}{2} \wedge b < \frac{1}{2} \wedge a+b < \frac{1}{2}\}$.

2. C=1

   Tento prípad si rozdelíme na dva:

   (a) A=0

   Keď $A = 0$ a $C = 1$, tak $B = 1$, teda $a < \frac{1}{2}$, $b > \frac{1}{2}$, $a+b < \frac{3}{2}$

   (b) A=1

   Keď $A = 1$ a $C = 1$, tak $B = 0$, a teda $a > \frac{1}{2}$, $b < \frac{1}{2}$, $a+b < \frac{3}{2}$

   Množina $G_2 = \{(a,b) \in (0,1)^2 : (a > \frac{1}{2} \wedge b < \frac{1}{2} \wedge a+b < \frac{3}{2}) \vee (a > \frac{1}{2} \wedge b < \frac{1}{2} \wedge a+b < \frac{3}{2})\}$

3. C=2

   Možnosť $C = 2$ môže nastať len tak, že $A = 1$ a $B = 1$, takže $a > \frac{1}{2}$, $b > \frac{1}{2}$, $a+b > \frac{3}{2}$. Teda množina $G_3 = \{(a,b) \in (0,1)^2 : a > \frac{1}{2} \wedge b > \frac{1}{2} \wedge a+b > \frac{3}{2}\}$

Situáciu si znázorníme v súradnicovej sústave v rovine. Uvažujme bod (a,b) v rovine, ktorý reprezentuje výber čísel a, b. Body a, b volíme rovnomerne nezávisle z intervalu $(0,1)$, takže všetky možnosti pre body (a,b) sú dané štvorcom $\Omega = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : 0 < a < 1, 0 < b < 1\}$. Označme X udalosť, že $A+B = C$, pričom A, B, C sú najbližšie celé čísla k číslam a, b, c. Tejto udalosti zodpovedá množina G, ktorá je zjednotením množín G_1, G_2 a G_3. Mierou je obsah. Teda

$$P(X) = \frac{\mu(G)}{\mu(\Omega)} = \frac{S(G)}{S(\Omega)},$$

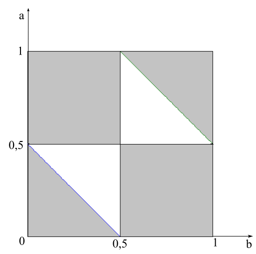
kde $S(\Omega)$ je obsah jednotkového štvorca, teda 1. Obsah $S(G)$ vypočítame nasledovne, pričom si pomôžeme obrázkom 21 . Vyhovujúce oblasti tvoria dva rovnaké pravouhlé rovnoramenné trojuholníky s odvesnami dĺžky $\frac{1}{2}$ a dva rovnaké štvorce s dĺžkou strany $\frac{1}{2}$. Teda

$$S(G) = 2.\frac{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}}{2} + 2.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

Teda pravdepodobnosť udalosti X je

$$P(X) = \frac{S(G)}{S(\Omega)} = \frac{\frac{3}{4}}{1} = \frac{3}{4}$$

Pravdepodobnosť, že $A+B = C$, pričom A, B, C sú najbližšie celé čísla k číslam a, b, c, je $\frac{3}{4}$.



Obr. 21: Množina G

Príklady na precvičenie

1. *V intervale* $(0,2)$ *zvolíme rovnomerne náhodne a nezávisle čísla* a, b. *Nech* c *je súčet čísel* a, b *nech* A, B, C *sú najbližšie celé čísla k číslam* a, b, c. *Aká je pravdepodobnosť, že A+B=C?* $(\frac{3}{4})$

2. *V intervale* $(0,1)$ *zvolíme rovnomerne náhodne a nezávisle čísla* a, b. *Nech* c *je súčin čísel* a, b, *nech* A, B, C *sú najbližšie celé čísla k číslam* a, b, c. *Aká je pravdepodobnosť, že* $A \times B = C$? $(\frac{5}{4} - \frac{\ln(2)}{2})$

4.7 Najbližšie celé číslo

V intervale $(0,1)$ *zvolíme nezávisle rovnomerne náhodne dve čísla* x, y. *Aká je pravdepodobnosť, že najbližšie celé číslo k* $\frac{x}{y}$ *je párne?* [9]

RIEŠENIE: podľa [9]

Situáciu si môžeme načrtnúť v súradnicovej sústave. Uvažujme bod (x,y) v rovine. Body x, y volíme rovnomerne nezávisle z intervalu $(0,1)$, takže všetky možnosti pre body (x,y) sú dané štvorcom $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Označme A udalosť, že najbližšie celé číslo k $\frac{x}{y}$, kde $x, y \in (0,1)$ je párne. Tejto udalosti zodpovedá množina $G = \{x, y \in (0,1)$: najbližšie celé číslo k $\frac{x}{y}$ je párne$\}$. Mierou je opäť obsah. Teda

$$P(A) = \frac{\mu(G)}{\mu(\Omega)} = \frac{S(G)}{S(\Omega)},$$

kde $S(\Omega)$ je obsah štvorca so stranou dĺžky 1, teda 1. Obsah $S(G)$ vypočítame nasledovne. Najbližšie celé číslo k $\frac{x}{y}$ je párne práve vtedy keď

$$0 < \frac{x}{y} < \frac{1}{2} \text{ (najbližšie číslo k } \frac{x}{y} \text{ je 0)}$$

alebo

$$2n - \frac{1}{2} < \frac{x}{y} < 2n + \frac{1}{2} \text{ (najbližšie číslo k } \frac{x}{y} \text{ je } 2n)$$

pre $n \geq 1$. Prvá nerovnica sa dá zapísať v tvare

$$0 < 2x < y,$$

čo vyčleňuje časť roviny - trojuholník s vrcholmi v bodoch $(0,0), (0,1), (\frac{1}{2}, 1)$, ktorého obsah je $\frac{1}{4}$ (viď obrázok 22). Druhá nerovnica sa dá prepísať nasledovne:

$$y > \frac{2x}{4n+1} \quad \wedge \quad y < \frac{2x}{4n-1}.$$

Tieto nerovnice predstavujú trojuholníky so súradnicami v bodoch $(0,0), (1, \frac{2}{4n-1}), (1, \frac{2}{4n+1})$, ktorých obsah je

$$S_n = \frac{\frac{2}{4n-1} - \frac{2}{4n+1}}{2} = \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+1}.$$

Potom celkový obsah vyfarbených trojuholníkov je

$$S(G) = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{13}\right) \ldots$$

Vieme že platí:

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$

Výraz $\frac{1}{1+x^2}$ je vlastne súčet geometrického radu $1 - x^2 + x^4 + \ldots$ pre $x \in (0,1)$, takže

$$\begin{aligned}
\tfrac{\pi}{4} &= \int_0^1 \left((1-x^2) + (x^4 - x^6) + (x^8 - x^{10}) + \ldots\right) dx \\
&= \int_0^1 (1-x^2)dx + \int_0^1 (x^4 - x^6)dx + \int_0^1 (x^8 - x^{10})dx + \ldots \\
&= \left(1 - \tfrac{1}{3}\right) + \left(\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{3}\right) + \left(\tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{11}\right) + \ldots
\end{aligned}$$

Tento vzťah, ktorý sme dostali, je známy ako Leibnizova formula [12]. Ak porovnáme $S(G)$ s Leibnizovou formulou pre $\frac{\pi}{4}$:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13}\ldots,$$

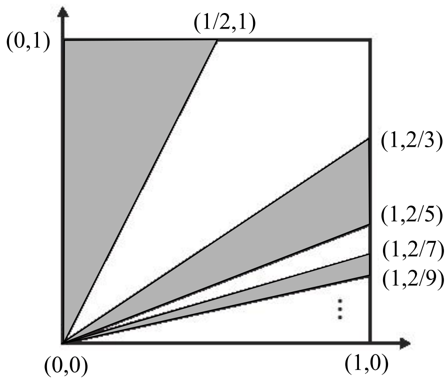
dostaneme

$$S(G) = 1 + \frac{1}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{5-\pi}{4}.$$

Teda

$$P(A) = \frac{S(G)}{S(\Omega)} = \frac{\frac{5-\pi}{4}}{1} = \frac{5-\pi}{4}.$$

Pravdepodobnosť, že najbližšie celé číslo k $\frac{x}{y}$, je $\frac{5-\pi}{4}$.



Obr. 22: Množina G

Príklady na precvičenie

1. *V intervale* $(0,1)$ *zvolíme nezávisle rovnomerne náhodne dve čísla* x, y. *Aká je pravdepodobnosť, že najbližšie celé číslo k* $\frac{x}{2y}$ *je párne?*$(1 - \frac{\pi}{8})$

2. *V intervale* $(0,1)$ *zvolíme nezávisle rovnomerne náhodne dve čísla* x, y. *Aká je pravdepodobnosť, že najbližšie celé číslo k* $\frac{x}{4y}$ *je párne?* $(1 - \frac{\pi}{16})$

5 Stretnutia

V tejto kapitole sa budeme venovať klasickým príkladom na geometrickú pravdepodobnosť, a to príkladom o stretnutiach.

5.1 Stretnutie Adama a Braňa

a) Adam a Braňo si dohovorili schôdzku na danom mieste v neurčitom čase medzi 12:00 a 13:00. Každý z nich je ochotní čakať na druhého maximálne 15 minút. Predpokladáme, že prídu nezávisle na sebe a okamihy príchodu sú rovnako možné kedykoľvek v priebehu uvedenej hodiny. Určite pravdepodobnosť, že sa naozaj stretnú. [10]

b) Janko a Marienka sa dohodli, že sa stretnú na určitom mieste medzi 8:00 a 9:00 hodinou. Keď príde prvý Janko, čaká na Marienku 20 minút. Keď príde prvá Marienka, čaká na Janka najviac 15 minút. Predpokladajme, že ich príchody sú navzájom nezávislé a rovnako možné kedykoľvek v priebehu uvedenej hodiny. Vypočítajte pravdepodobnosť, že sa stretnú.

RIEŠENIE:

a) Označme čas príchodu Adama po 12:00 ako t_A, čas príchodu Braňa po 12:00 ako t_B. Uvažujme bod (t_A, t_B) v rovine. Interval kedy sa majú Adam s Braňom stretnúť je jedna hodina, preto $(t_A, t_B) \in (0, 1)$. Označme X udalosť, že Adam a Braňo sa stretnú medzi 12:00 a 13:00, ak sú obaja ochotní čakať 15 minút. Množina všetkých možných situácií (množina Ω), v akých časoch obe osoby prídu na miesto stretnutia, sú všetky body štvorca $\Omega = \{(t_A, t_B) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t_A < 1, 0 < t_B < 1\}$. Množinu vyhovujúcich situácií, teda takých, že Adam a Braňo sa stretnú, nájdeme nasledovne. Ak príde prvý Adam, tak časy musia spĺňať podmienky

$$t_B - t_A \geq 0 \qquad \wedge \qquad t_B - t_A \leq \frac{1}{4}, \tag{3}$$

pričom prvá podmienka hovorí, že prvý prišie Adam. Druhá podmienka nám hovorí to, že Adam je ochotný čakať na Braňa maximálne 15 minút, čo je $\frac{1}{4}$ hodiny, a teda Braňo by musel prísť najneskôr v čase $t_A + \frac{1}{4}$. Podobne, ak príde Braňo prvý, tak

$$t_A - t_B \geq 0 \qquad \wedge \qquad t_A - t_B \leq \frac{1}{4}. \tag{4}$$

Podmienky (3) a (4) zapíšeme tak, aby sme mali vyjadrené t_B, čo nám uľahčí kreslenie grafov. Z (3) dostávame:

$$t_B \geq t_A \qquad \wedge \qquad t_B \leq t_A + \frac{1}{4}.$$

Podobne z (4) dostávame:

$$t_B \leq t_A \qquad \wedge \qquad t_B \geq t_A - \frac{1}{4}.$$

Teda množina zodpovedajúca vyhovujúcim príchodom (množina G) je prienik týchto nerovníc, t. j. $G = \{(t_A, t_B) \in (0,1)^2 : (t_B \geq t_A \wedge t_B \leq t_A + \frac{1}{4}) \vee (t_B \leq t_A \wedge t_B \geq t_A - \frac{1}{4})\}$. Množina G je znázornená na obrázku 23. Mierou je obsah. Teda

$$P(X) = \frac{\mu(G)}{\mu(\Omega)} = \frac{S(G)}{S(\Omega)} \ ,$$

kde $S(\Omega)$ je obsah jednotkového štvorca, teda 1. Obsah $S(G)$ vypočítame tak, že od obsahu štvorca odpočítame obsahy nevyšrafovaných častí S_1 a S_2 (pozri obrázok 23):

$$S_1 = \frac{(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{4})}{2} = \frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}}{2} = \frac{9}{32},$$

$$S_2 = \frac{(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{4})}{2} = \frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}}{2} = \frac{9}{32}.$$

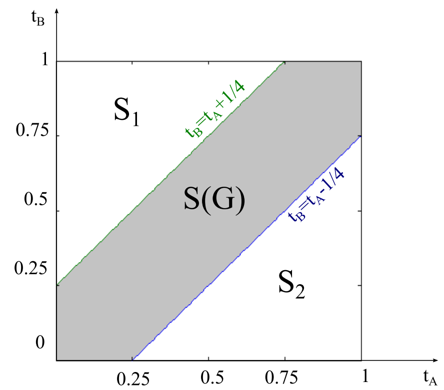
Keďže obsah celého štvorca je 1, tak obsah vyšrafovanej oblasti bude

$$S(G) = 1 - (S_1 + S_2) = 1 - 2.\frac{9}{32} = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}.$$

Teda

$$P(X) = \frac{S(G)}{S(\Omega)} = \frac{\frac{7}{16}}{1} = \frac{7}{16}.$$

Pravdepodobnosť, že Adam a Braňo sa stretnú, je $\frac{7}{16}$.



Obr. 23: Množina G

b) Riešime podobne ako v predchádzajúcom prípade. Jediný rozdiel je v tom, že úloha nie je symetrická, teda Janko čaká na Marienku dlhšie ako Marienka na Janka. Postup riešenia úlohy je však rovnaký. Označme čas príchodu Janka po 8:00 ako t_J, čas príchodu Marienky po 8:00 ako t_M. Uvažujme bod (t_M, t_J) v rovine. Interval kedy sa majú Janko s Marienkou stretnúť je jedna hodina, preto $(t_M, t_J) \in (0,1)$. Označme X udalosť, že Janko a Marienka sa stretnú. Situáciu si môžeme znázorniť v súradnicovej sústave so začiatočným bodom v (0,0), čo predstavuje čas 8:00. Uvažujme bod (t_M, t_J) v rovine. Množina všetkých možných situácií (množina Ω), v akých časoch obe osoby prídu na miesto stretnutia sú všetky body štvorca na obrázku 24: $\Omega = \{(t_M, t_J) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t_M < 1, 0 < t_J < 1\}$. Množinu vyhovujúcich riešení, teda takých, že Janko a Marienka sa stretnú, nájdeme nasledovne. Ak príde prvý Janko, tak časy musia spĺňať podmienky

$$t_M - t_J \geq 0 \quad \wedge \quad t_M - t_J \leq \frac{1}{3}\ ,$$

podobne, ak príde Marienka prvá, tak

$$t_J - t_M \geq 0 \quad \wedge \quad t_J - t_M \leq \frac{1}{4}$$

Teda množina vyhovujúcich príchodov (množina G) je prienik týchto nerovníc, t. j. $G = \{(t_M, t_J) \in (0,1)^2 : (t_M \geq t_J \wedge t_M \leq t_J + \frac{1}{3}) \vee (t_M \leq t_J \wedge t_M \geq t_J - \frac{1}{4})\}$. Množina G je znázornená na obrázku 24. Mierou je obsah. Pravdepodobnosť udalosti X teda bude

$$P(X) = \frac{\mu(G)}{\mu(\Omega)} = \frac{S(G)}{S(\Omega)} \ ,$$

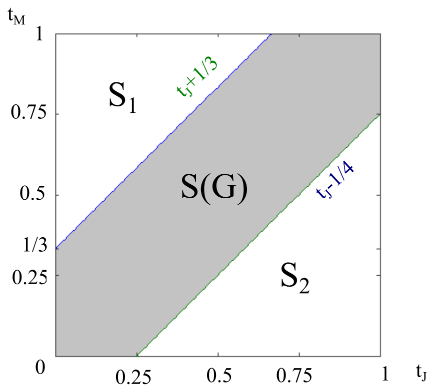
kde $S(\Omega)$ je obsah jednotkového štvorca, teda 1. Obsah $S(G)$ vypočítame tak, že od obsahu štvorca odpočítame obsahy nevyfarbených častí S_1, S_2 (pozri obrázok 24). Keďže obsah celého štvorca je 1, tak obsah vyšrafovanej oblasti bude

$$S(A) = 1 - (S_1 + S_2) = 1 - \frac{(\frac{3}{4})^2}{2} - \frac{(\frac{2}{3})^2}{2} = 1 - \frac{145}{288} = \frac{143}{288}.$$

Teda

$$P(X) = \frac{S(G)}{S(\Omega)} = \frac{\frac{143}{288}}{1} = \frac{143}{288} \doteq 0,497.$$

Pravdepodobnosť, že Janko a Marienka sa stretnú, je približne $0,497$.



Obr. 24: Množina G

Príklady na precvičenie

1. *Rómeo a Júlia majú dohodnuté rande medzi 19:00 a 20:00. Ak príde prvá Júlia, je ochotná čakať na Rómea 15 minút, potom odíde. Ako dlho musí byť ochotný čakať Rómeo na Júliu aby pravdepodobnosť, že sa stretnú bola aspoň 0.5?* (aspoň $1 - \frac{\sqrt{7}}{4}$ minúty)

2. *Dva dodávkové automobily dovážajú tovar do toho istého skladu v časovom intervale 12 hodín. Časy príchodov obidvoch automobilov sú vzájomne nezávislé. Prvý automobil čaká po zastavení na vyloženie tovaru jednu hodinu, druhý dve hodiny. Vypočítajte, aká je pravdepodobnosť, že niektorý z automobilov bude musieť čakať na druhý.* [3] ($\frac{67}{288}$)

5.2 Kancelária

Dvaja kolegovia Andrej a Bohuš prídu do spoločnej kancelárie medzi 12-tou a 6-tou hodinou. (Predpokladáme, že Andrej a Bohuš prichádzajú nezávisle na sebe a príchod každého z nich je rovnako pravdepodobný počas celého šesťhodinového intervalu.) Vieme, že Andrej sa zdrží v kancelárii 1 hodi - nu a Bohuš sa zdrží 2 hodiny. Určte pravdepodobnosť, že

a) Andrej a Bohuš sa stretnú,

b) Andrej odíde z kancelárie skôr ako Bohuš,

c) Andrej príde do kancelárie neskôr ako Bohuš, ale odíde z kancelárie skôr než Bohuš. [5]

RIEŠENIE:

Postupujeme podobne ako v predchádzajúcom príklade. Označme čas príchodu Andreja po dvanástej hodine ako t_A, čas príchodu Bohuša po dvanástej hodine ako t_B. Uvažujme bod (t_A, t_B) v rovine. Interval kedy sa majú Andrej a Bohuš stretnúť je šesť hodín, preto $(t_A, t_B) \in (0, 6)$. Množina všetkých možných situácií (množina Ω), v akých časoch obe osoby prídu do kancelárie, sú všetky body štvorca na obrázku 23: $\Omega = \{(t_A, t_B) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t_A < 6, 0 < t_B < 6\}$.

a) Označme X_1 udalosť, že Andrej a Bohuš sa stretnú. Množinu vyhovujúcich príchodov, teda takých, že Andrej a Bohuš sa stretnú nájdeme nasledovne. Ak príde prvý Andrej, tak časy musia spĺňať podmienky

$$t_B - t_A \geq 0 \quad \wedge \quad t_B - t_A \leq 1 \tag{5}$$

pričom prvá podmienka hovorí, že prvý prišiel Andrej. Druhá podmienka vyplýva z toho, že Andrej sa zdržal v kancelárii jednu hodinu. Aby sa Andrej a Bohuš stretli, Bohuš musí prísť do kancelárie najneskôr v čase $t_A + 1$.

Podobne, ak príde Bohuš prvý, stretnú sa v prípade, že

$$t_A - t_B \geq 0 \quad \wedge \quad t_A - t_B \leq 2. \tag{6}$$

Z (5) dostávame:

$$t_B \geq t_A \quad \wedge \quad t_B \leq t_A + 1,$$

a podobne z (6) dostávame:

$$t_B \leq t_A \quad \wedge \quad t_B \geq t_A - 2.$$

Teda množina zodpovedajúca vyhovujúcim príchodom (množina G_1) je prienik týchto nerovníc, t. j. $G_1 = \{(t_A, t_B) \in (0, 6)^2 : (t_B \geq t_A \wedge t_B \leq t_A + 1) \vee (t_B \leq t_A \wedge t_B \geq t_A - 2)\}$. Množina G_1 je znázornená na obrázku 25. Mierou je obsah. Pravdepodobnosť teda je

$$P(X_1) = \frac{\mu(G_1)}{\mu(\Omega)} = \frac{S(G_1)}{S(\Omega)},$$

kde $S(\Omega)$ je obsah štvorca so stranou dĺžky 6, teda $S(\Omega) = 36$. Obsah $S(G_1)$ je obsah vyfarbenej oblasti (z obr. 25), ktorý vypočítame tak, že od obsahu štvorca odpočítame obsahy nevyfarbených častí S_1 a S_2 (pozri obrázok 25), pričom

$$S_1 = \frac{(6-1)(6-1)}{2} = \frac{25}{2},$$

$$S_2 = \frac{(6-2)(6-2)}{2} = \frac{16}{2} = 8.$$

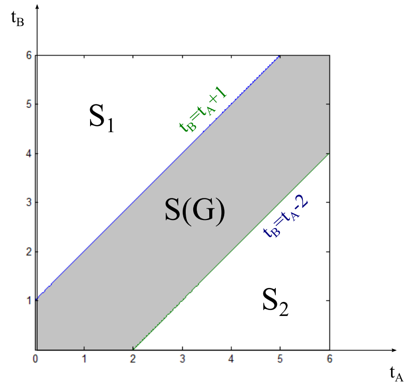
Keďže obsah celého štvorca je 36, tak obsah vyfarbenej oblasti bude:

$$S(G_1) = 36 - (S_1 + S_2) = 36 - \frac{25}{2} - 8 = 28 - \frac{25}{2} = \frac{31}{2}.$$

Teda

$$P(X_1) = \frac{S(G_1)}{S(\Omega)} = \frac{\frac{31}{2}}{36} = \frac{31}{72} \doteq 0,431.$$

Pravdepodobnosť, že Andrej a Bohuš sa stretnú, je $\frac{31}{72}$.



Obr. 25: Množina G_1

b) Označme X_2 udalosť, že Andrej odíde z kancelárie skôr ako Bohuš. Množinu G_2 pre túto udalosť nájdeme nasledovne. Keďže Andrej sa zdrží v kancelárii hodinu a Bohuš dve hodiny, tak čas odchodu Andreja bude $t_A + 1$, čas odchodu Bohuša bude $t_B + 2$. Aby platilo, že Andrej odíde z kancelárie skôr ako Bohuš, musí platiť nerovnosť

$$t_A + 1 < t_B + 2,$$

teda

$$t_B > t_A - 1.$$

Množina $G_2 = \{(t_A, t_B) \in (0,6)^2 : t_B > t_A - 1\}$ je vyfarbená oblasť na obrázku 26. Mierou je obsah. Teda

$$P(X_2) = \frac{\mu(G_2)}{\mu(\Omega)} = \frac{S(G_2)}{S(\Omega)}\ ,$$

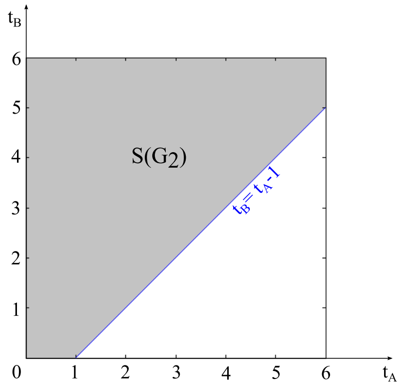
kde $S(\Omega)$ je obsah štvorca so stranou dĺžky 6, teda $S(\Omega) = 36$. Obsah $S(G)$ je obsah vyfarbenej oblasti, ktorý vypočítame tak, že od obsahu celého štvorca odpočítame obsah trojuholníka so stranou aj výškou dĺžky 5. Teda

$$S(G_2) = 36 - \frac{5 \times 5}{2} = \frac{47}{2}.$$

Teda pravdepodobnosť udalosti X_2 je

$$P(X_2) = \frac{S(G_2)}{S(\Omega)} = \frac{\frac{47}{2}}{36} = \frac{47}{72} \doteq 0,653.$$

Pravdepodobnosť, že Andrej odíde z kancelárie skôr ako Bohuš, je $\frac{47}{72}$.



Obr. 26: Množina G_2

c) Označme X_3 udalosť, že Andrej príde do kancelárie neskôr ako Bohuš, ale odíde skôr ako Bohuš. Množinu vyhovujúcich riešení pre túto udalosť nájdeme nasledovne. Keďže Andrej príde do kancelárie neskôr ako Bohuš, tak $t_A > t_B$. A zároveň Andrej odíde skôr ako Bohuš, čo znamená, že $t_A+1 < t_B+2$. Množina vyhovujúcich situácií (množina $G_3 = \{(t_A, t_B) \in (0,6)^2 : t_A > t_B \wedge t_B > t_A - 1\}$) je vyfarbená oblasť na obrázku 27. Mierou je obsah. Teda

$$P(X_3) = \frac{\mu(G_3)}{\mu(\Omega)} = \frac{S(G_3)}{S(\Omega)} \ ,$$

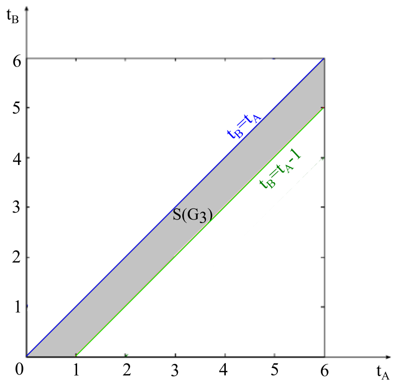
kde $S(\Omega)$ je obsah štvorca so stranou dĺžky 6, teda $S(\Omega) = 36$. Obsah $S(G)$ je obsah vyfarbenej oblasti, ktorý vypočítame tak, že od obsahu celého štvorca odpočítame obsahy dvoch pravouhlých rovnostranných trojuholníkov s odvesnami dĺžky 5 a 6. Teda

$$S(G_3) = 36 - \frac{5 \times 5}{2} - \frac{6 \times 6}{2} = \frac{11}{2}.$$

Teda pravdepodobnosť udalosti X_3 je

$$P(X_3) = \frac{S(G_3)}{S(\Omega)} = \frac{\frac{11}{2}}{36} = \frac{11}{72} \doteq 0,153.$$

Pravdepodobnosť, že Andrej príde do kancelárie neskôr ako Bohuš, ale odíde skôr ako Bohuš, je $\frac{11}{72}$.



Obr. 27: Množina G_3

Príklady na precvičenie

1. *Dve kolegyne Andrea a Barbora prídu do spoločnej kancelárie medzi 12-tou a 8-ou hodinou. (Predpokladáme, že prichádzajú nezávisle na sebe a príchod každej z nich je rovnako pravdepodobný počas celého osemhodinového intervalu.) Vieme, že Andrea sa zdrží v kancelárii 2 hodiny a Barbora sa zdrží 4 hodiny. Určte pravdepodobnosť, že*

   a) Andrea a Barbora sa stretnú. ($\frac{19}{32}$)

   b) Andrea odíde z kancelárie skôr ako Barbora. ($\frac{23}{32}$)

   c) Andrea príde do kancelárie neskôr ako Barbora, ale odíde z kancelárie skôr než Barbora. ($\frac{7}{32}$)

5.3 K, L, M

Kolegovia Karol, Ľuboš a Martin prídu do spoločnej kancelárie medzi ôsmou a štrnástou hodinou. (Predpokladáme, že Karol, Ľuboš a Martin prichádzajú nezávisle na sebe a príchod každého z nich je rovnako pravdepodobný počas celého šesťhodinového intervalu.) Vieme, že každý z týchto troch kolegov sa zdrží v kancelárii presne hodinu. Vypočítajte pravdepodobnosť, že:

a) Karol sa stretne s Ľubošom.

b) Všetci traja sa stretnú.

c) Aspoň jedna dvojica kolegov sa stretne. [5]

RIEŠENIE

Označme čas príchodu Karola po 8:00 ako t_K, čas príchodu Ľuboša po 8:00 ako t_L a čas príchodu Martina po 8:00 t_M. Uvažujme bod (t_K, t_L, t_M) v priestore. Interval kedy sa majú Karol, Ľuboš a Martin stretnúť je šesť hodín, preto $(t_K, t_L, t_M) \in (0,6)^3$. Množina všetkých možných situácií (množina Ω), v akých časoch kolegovia prídu do kancelárie, sú všetky body kocky s hranou dĺžky 6, t. j. $\Omega = \{(t_K, t_L, t_M) \in \mathbb{R}^3 : 0 < t_K < 6, 0 < t_L < 6, 0 < t_M < 6\}$.

a) Označme X_1 udalosť, že Karol a Ľuboš sa stretnú. Riešime rovnako ako predchádzajúce príklady so stretnutím. Dostaneme, že pravdepodobnosť, že Karol sa stretne s Ľubošom je $\frac{11}{36}$.

b) Označme X_2 udalosť, že všetci traja kolegovia sa stretnú. Množinu vyhovujúcich príchodov nájdeme nasledovne. Každý z kolegov sa v kancelárii zdrží jednu hodinu. Aby sa všetci traja stretli, musí platiť, že vzájomné časové rozdiely príchodov všetkých dvojíc musia byť v absolútnej hodnote menšie ako 1. Teda

$$|t_K - t_L| < 1 \quad \wedge \quad |t_K - t_M| < 1 \quad \wedge \quad |t_L - t_M| < 1.$$

Množina $G_2 = \{(t_K, t_L, t_M) \in (0,6)^3 : |t_K - t_L| < 1 \wedge |t_K - t_M| < 1 \wedge |t_L - t_M| < 1\}$. Mierou je objem. Teda pravdepodobnosť je

$$P(X_2) = \frac{V(G_2)}{V(\Omega)},$$

kde $V(\Omega)$ je objem kocky s hranou dĺžky 6, teda $V(\Omega) = 6^3 = 216$. Objem množiny G_2 nájdeme pomocou trojného integrálu. Nerovnicu si rozdelíme na 6 prípadov podľa toho ako môžu byť časy príchodov t_K, t_L, t_M usporiadané ($t_K < t_L < t_M$, $t_K < t_M < t_L$, $t_L < t_K < t_M$, $t_L < t_M < t_K$, $t_M < t_L < t_K$, $t_M < t_K < t_L$). Ak je usporiadanie $t_K < t_L < t_M$, tak $t_M - t_K < 1$, teda $t_M < t_K + 1$. Takže

- t_K môže byť ľubovoľné z intervalu (0,6) $\Rightarrow t_K \in (0,6)$,
- t_M musí byť väčšie ako t_K (aby bolo splnené usporiadanie), menšie ako $t_K + 1$ (podmienka stretnutia) a súčasne menšie ako 6 (lebo interval príchodu všetkých je 6 hodín) $\Rightarrow t_M \in (t_K, \min(6, t_K + 1)$
- t_L je medzi t_K a t_M (z usporiadania) $\Rightarrow t_L \in [t_K, t_M]$

Ak t_K je z intervalu $(0,5)$, tak $\min(6, t_K + 1)$ je $t_K + 1$ a ak t_K je z intervalu $(5,6)$, tak $\min(6, t_K + 1)$ je 6. Teda

$$V = \int_0^6 \int_{t_K}^{\min(6,t_K+1)} \int_{t_K}^{t_M} dt_L\ dt_M\ dt_K = \int_0^5 \int_{t_K}^{t_K+1} \int_{t_K}^{t_M} dt_L\ dt_M\ dt_K + \int_5^6 \int_{t_K}^{6} \int_{t_K}^{t_M} dt_L\ dt_M\ dt_K.$$

Každý z integrálov vypočítame samostatne.

$$\begin{aligned}
\int_0^5 \int_{t_K}^{t_K+1} \int_{t_K}^{t_M} dt_L\ dt_M\ dt_K &= \int_0^5 \int_{t_K}^{t_K+1} (t_M - t_K) dt_M\ dt_K = \int_0^5 \left[\frac{{t_M}^2}{2} - t_K t_M\right]_{t_K}^{t_K+1} \\
&= \int_0^5 \left(\frac{(t_K+1)^2}{2} - \frac{{t_K}^2}{2} - t_K\right) dt_K = \left[\frac{(t_K+1)^3}{6} - \frac{{t_K}^3}{6} - \frac{{t_K}^2}{2}\right]_0^5 . \\
&= \frac{6^3}{6} - \frac{5^3}{6} - \frac{5^2}{2} - \frac{1}{6} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_5^6 \int_{t_K}^{6} \int_{t_K}^{t_M} dt_L\ dt_M\ dt_K &= \int_5^6 \int_{t_K}^{6} (t_M - t_K) dt_M\ dt_K = \int_5^6 \left[\frac{{t_M}^2}{2} - t_K t_M\right]_{t_K}^{6} \\
&= \int_5^6 \left(\frac{{t_K}^2}{2} - 6t_K + \frac{6^2}{2}\right) dt_K = \left[\frac{t_K^3}{6} - \frac{6{t_K}^2}{6} - \frac{6^2 t_K}{2}\right]_5^6 \\
&= \frac{6^3}{6} - \frac{6 \times 6^2}{6} + \frac{6^3}{2} - \frac{5^3}{6} + \frac{6 \times 5^2}{2} - \frac{6^2 \times 5}{2} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Teda

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^6 \int_{t_K}^{\min(6,t_K+1)} \int_{t_K}^{t_M} dt_L\ dt_M\ dt_K \\
&= \int_0^5 \int_{t_K}^{t_K+1} \int_{t_K}^{t_M} dt_L\ dt_M\ dt_K + \int_5^6 \int_{t_K}^{6} \int_{t_K}^{t_M} dt_L\ dt_M\ dt_K = \frac{5}{2} + \frac{1}{6} = \frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

V úlohe tejto trojice (t_K, t_L, t_M) sa vystriedajú všetky permutácie t_K, t_L, t_M, teda objem celého telesa, ktorý vymedzujú nerovnice $|t_K - t_L| < 1 \wedge |t_K - t_M| < 1 \wedge |t_L - t_M| < 1$ spolu s podmienkou, že $(t_K, t_L, t_M) \in (0,6)$, je šesťnásobkom objemu V, t.j. $V(G_2) = 6V = 6 \times \frac{8}{3}$. Teda

$$P(X_2) = \frac{V(G_2)}{V(\Omega)} = \frac{6 \times \frac{8}{3}}{6^3} = \frac{2}{27} \doteq 0{,}074$$

Pravdepodobnosť, že sa všetci traja stretnú, je približne 0,074.

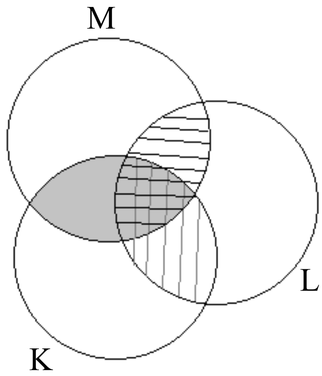
c) Označme X_3 udalosť, že aspoň jedna dvojica kolegov sa stretne. Pravdepodobnosť tejto udalosti už vypočítame jednoducho pomocou predchádzajúcich výsledkov. Pravdepodobnosť, že sa stretnú Karol a Ľuboš je rovnaká ako pravdepodobnosť, že sa stretnú Karol s Martinom a rovnaká ako pravdepodobnosť, že sa stretne Ľuboš s Martinom. Tá pravdepodobnosť je podľa časti (a) rovná $\frac{11}{36}$.

Pravdepodobnosť, že sa stretnú všetci traja, je podľa časti (b) $\frac{2}{27}$. Potom pravdepodobnosť toho, že sa stretnú aspoň dvaja kolegovia je (pomôžeme si množinami, pozri obrázok 28)

$$P(X_3) = 3P(X_1) - 2P(X_2) = 3 \times \frac{11}{36} - 2 \times \frac{2}{27} = \frac{83}{108} \doteq 0,769$$

Najskôr teda vypočítame, že sa stretne Karol s Ľubom, Karol a Martin, Ľubo a Martin. Takto je tam však započítané trikrát, že sa stretnú všetci traja. Teda odčítame dvojnásobok pravdepodobnosti, že sa všetci stretnú.

Pravdepodobnosť, že sa aspoň dvaja kolegovia stretnú je približne 0,769.



Obr. 28: Množiny znázorňujúce príchody Karola, Ľuboša a Martina

Príklady na precvičenie

1. *Kolegyne Katka, Lucia a Marienka prídu do spoločnej kancelárie medzi desiatou a osemnástou hodinou. (Predpokladáme, že prichádzajú nezávisle na sebe a príchod každej z nich je rovnako pravdepodobný počas celého osemhodinového intervalu.) Vieme, že Katka sa zdrží v kancelárii hodinu, Lucia dve hodiny a Marienka tri hodiny. Vypočítajte pravdepodobnosť, že:*
   a) Katka a Lucia sa stretnú, $(\frac{43}{128})$
   b) Katka a Marienka sa stretnú, $(\frac{27}{64})$
   c) Lucia a Marienka sa stretnú, $(\frac{67}{128})$
   d) všetky tri sa stretnú, $(\frac{11}{64})$
   e) aspoň jedna dvojica kolegýň sa stretne. $(\frac{15}{16})$

6 Rozdelenia

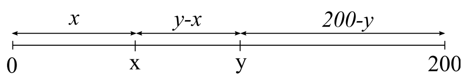
V tejto kapitole sa budeme venovať rozdeleniam úsečiek a tyčí. To znamená že budeme náhodne rozdeľovať úsečky alebo tyče na časti a budeme skúmať pravdepodobnosti rôznych udalostí. Náhodne rozdeľovať znamená, že na úsečke, resp. tyči budeme voliť rovnomerne náhodne a nezávisle body. Čo znamená takýto výber je vysvetlené v kapitole 3.

6.1 Dvojmetrová tyč

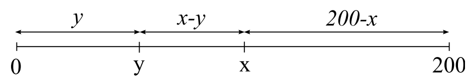
Dvojmetrová tyč je náhodne rozdelená na tri diely. Určte pravdepodobnosť, že aspoň jeden diel bude najviac 20cm dlhý. [11]

RIEŠENIE:

Označme udalosť A, že aspoň jeden diel je kratší ako 20 centimetrov. Označme x, y ako vzdialenosti od začiatočného bodu tyče po náhodne zvolené body na tyči. Máme dve možnosti: buď je $x < y$ alebo naopak. Na obrázkoch 29, 30 sú nakreslené tyče dĺžky 200 cm a na nich znázornené dĺžky jednotlivých dielov pre oba prípady. Uvažujme bod (x, y) v rovine. Tento bod nám reprezentuje jedno rozdelenie tyče. Keďže body x, y sú oba z intervalu $(0, 200)$, tak množina všetkých možných delení tyče, teda množina Ω, bude štvorec so stranou dĺžky 200. Teda $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 200; 0 < y < 200\}$. Množinu vyhovujúcich riešení, teda takých, že aspoň jeden diel bude kratší ako 20 cm, nájdeme nasledovne. Rozdelíme si to na tri časti podľa toho, ktorá časť bude menšia ako 20 cm.



Obr. 29: Dĺžky úsekov v prípade, že $x < y$



Obr. 30: Dĺžky úsekov v prípade, že $x > y$

1. Prvý úsek je menší ako 20 cm, ak $x < 20$ alebo $y < 20$. Tomu zodpovedá množina: $G_1 = \{(x, y) \in (0, 200)^2 : x < 20 \vee y < 20\}$. Pozri obrázok 31.

2. Druhý úsek je menší ako 20 cm, ak $|x - y| < 20$. Tomu zodpovedá množina: $G_2 = \{(x, y) \in (0, 200)^2 : |x - y| < 20\}$. Pozri obrázok 32.

3. Tretí úsek je menší ako 20 cm, ak $x > 180$ alebo $y > 180$. Tomu zodpovedá množina: $G_3 = \{(x, y) \in (0, 200)^2 : x > 180 \vee y > 180\}$. Pozri obrázok 33.

Potom množina G, teda množina vyhovujúcich riešení je zjednotením množín G_1, G_2, G_3. Teda

$$P(A) = \frac{\mu(G)}{\mu(\Omega)} = \frac{S(G)}{S(\Omega)},$$

kde $S(\Omega)$ je obsah štvorca so stranou dĺžky 200, teda $S(\Omega) = 200^2$ a obsah množiny G vypočítame nasledovne pomocou obrázkov: Načrtneme si množiny G_1 (obr. 31), G_2 (obr. 32), G_3 (obr. 33) v súradnicovej sústave. Množina G je zjednotením množín G_1, G_2, G_3, teda dostávame obrázok 34.

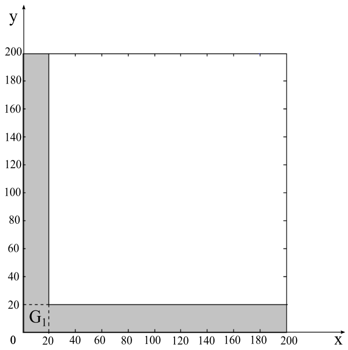
Obsah $S(G)$ vypočítame tak, že od obsahu štvorca odpočítame dvojnásobok obsahu pravouhlého rovnoramenného trojuholníka s odvesnami dĺžky 140. Teda

$$S(G) = 200^2 - 2.\frac{140^2}{2} = 200^2 - 140^2 = 20400.$$

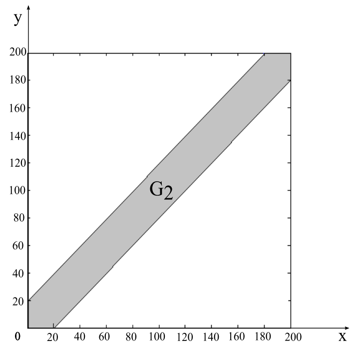
Potom pravdepodobnosť udalosti A je

$$P(A) = \frac{S(G)}{S(\Omega)} = \frac{20400}{200^2} \doteq 0,51.$$

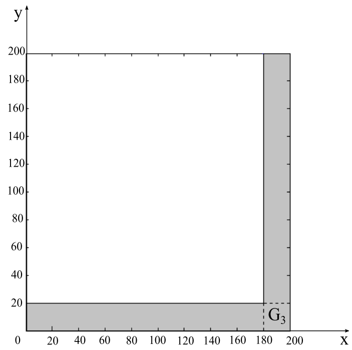
Pravdepodobnosť, že aspoň jeden diel bude kratší ako 20 cm, je približne 0,51.



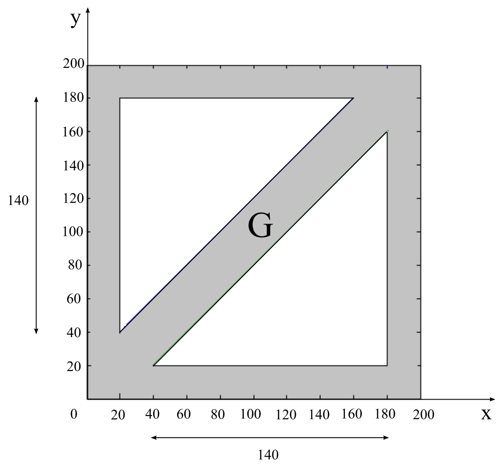
Obr. 31: Množina G_1



Obr. 32: Množina G_2



Obr. 33: Množina G_3



Obr. 34: Množina G

Príklady na precvičenie

1. *Tyč dlhá 200mm je náhodne rozrezaná na tri časti. S akou pravdepodobnosťou je niektorá z týchto troch častí kratšia ako 10 mm?* ($\frac{289}{400}$)

2. *Nech je náhodne rozlomená tyč na tri časti. Stanovte pravdepodobnosť, že dĺžka druhej (prostrednej) časti bude väčšia než dve tretiny dĺžky tyče pred jej rozlomením.* ($\frac{1}{9}$) [11]

6.2 Najkratšia úsečka

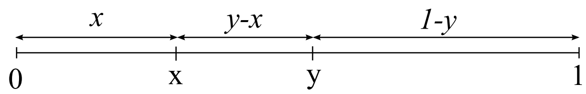
Úsečku dĺžky 1 meter náhodne rozdelená na tri časti. Určte pravdepodobnosť, že najkratšia z troch vzniknutých úsečiek bude menšia ako $\frac{1}{4}$ metra. [5]

RIEŠENIE:

Označme A udalosť, že najkratšia zo vzniknutých úsečiek bude menšia ako $\frac{1}{4}$. Jednoduchšie sa bude počítať pravdepodobnosť, že najkratšia úsečka bude väčšia alebo rovná ako $\frac{1}{4}$, čo je vlastne opačná udalosť k udalosti A. Označme túto udalosť A'. Ďalej si uvedomíme, že to, že najkratšia úsečka bude väčšia alebo rovná ako $\frac{1}{4}$ znamená, že všetky úsečky budú väčšie ako $\frac{1}{4}$.

Výslednú pravdepodobnosť potom vypočítame ako $P(A) = 1 - P(A')$. Označme si x ako vzdia - lenosť jedného voleného bodu od 0, y ako vzdialenosť druhého náhodne voleného bodu od 0. Keďže oba body sú volené z intervalu $(0, 1)$, tak množina všetkých možných zvolení (množina Ω) je štvorec s dĺžkou strany 1. Teda $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1; 0 < y < 1\}$. Množinu vyhovujúcich riešení (množinu G) nájdeme v dvoch krokoch, samostatne rozoberieme prípady $x < y$ a $y < x$.

1. $x < y$ (pozri obrázok 35)



Obr. 35: Dĺžky úsekov v prípade, že $x < y$

Všetky úsečky majú byť dlhšie nanajvýš rovnako dlhé ako $\frac{1}{4}$.
Odtiaľ dostávame tieto podmienky:

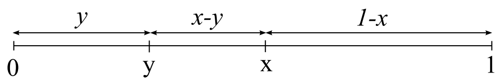
$$x \geq \frac{1}{4} \quad \wedge \quad y - x \geq \frac{1}{4} \quad \wedge \quad 1 - y \geq \frac{1}{4}.$$

Po úprave:

$$x \geq \frac{1}{4} \quad \wedge \quad y \geq x + \frac{1}{4} \quad \wedge \quad y \leq \frac{3}{4}.$$

Teda množina $G_1 = \{(x, y) \in (0, 1)^2 : x \geq \frac{1}{4} \wedge y \geq x + \frac{1}{4} \wedge y \leq \frac{3}{4}\}$. Na obrázku 37 je to ľavý horný vyfarbený trojuholník.

2. $y < x$ (pozri obrázok 36)



Obr. 36: Dĺžky úsekov v prípade, že $y < x$

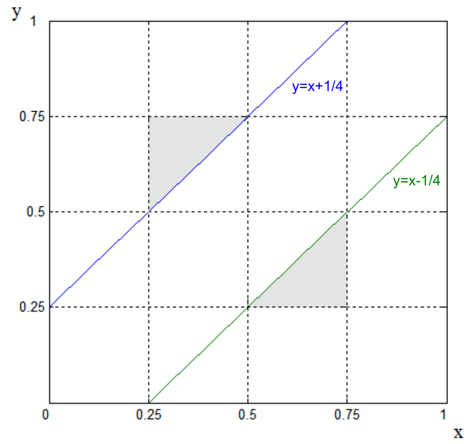
Všetky úsečky majú byť väčšie nanajvýš rovné $\frac{1}{4}$. Odtiaľ dostávame tieto podmienky:

$$y \geq \frac{1}{4} \quad \wedge \quad x - y \geq \frac{1}{4} \quad \wedge \quad 1 - x \geq \frac{1}{4}.$$

Po úprave:

$$y \geq \frac{1}{4} \qquad \wedge \qquad y \leq x - \frac{1}{4} \qquad \wedge \qquad x \leq \frac{3}{4}.$$

Teda množina $G_2 = \{(x, y) \in (0, 1)^2 : y \geq \frac{1}{4} \wedge y \leq x - \frac{1}{4} \wedge x \leq \frac{3}{4}\}$. Na obrázku 37 je to pravý dolný vyfarbený trojuholník.



Obr. 37: Množina G

Množina G je teda zjednotením množín G_1 a G_2. Potom

$$P(A') = \frac{\mu(G)}{\mu(\Omega)} = \frac{S(G)}{S(\Omega)},$$

kde $S(\Omega)$ je obsah štvorca s dĺžkou strany 1, teda $S(\Omega) = 1$. $S(G)$ je obsah vyfarbenej časti na obrázku 37, čo je dvakrát obsah pravouhlého rovnostranného trojuholníka s odvesnami dĺžky $\frac{1}{4}$.
Teda pravdepodobnosť udalosti A' bude

$$P(A') = \frac{S(G)}{S(\Omega)} = \frac{\frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}}{2} \times 2}{1} = \frac{1}{16}.$$

Potom pravdepodobnosť udalosti A bude

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} = 0,9375.$$

Pravdepodobnosť, že najkratšia zo vzniknutých úsečiek bude menšia ako $\frac{1}{4}$, je 0,9375.

Príklady na precvičenie

1. *Úsečku dĺžky 1 meter náhodne rozdelíme na tri časti. Určte pravdepodobnosť, že najkratšia z troch vzniknutých úsečiek bude menšia ako $\frac{1}{6}$ metra.* ($\frac{3}{4}$)

2. *Úsečku dĺžky 2 metre náhodne rozdelíme na tri časti. Určte pravdepodobnosť, že najkratšia z troch vzniknutých úsečiek bude menšia ako $\frac{1}{6}$ metra.* ($\frac{25}{36}$)

6.3 Trojuholník

Úsečku dĺžky 1 náhodne rozdelíme na tri časti. Aká je pravdepodobnosť, že zo vzniknutých troch dielov sa dá zostaviť trojuholník? [10]

RIEŠENIE:

Označme A udalosť, že zo vzniknutých troch častí sa dá zostrojiť trojuholník. Označme x, y vzdia - lenosti od začiatočného bodu úsečky po zvolené body. Body x, y sú oba volené z intervalu $(0, 1)$, teda množina Ω je štvorec so stranou dĺžky 1. $\Omega = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1; 0 < y < 1\}$. Množinu vyhovujúcich výberov bodov nájdeme tak, že budeme uvažovať dva možné prípady: $x < y$ a $x > y$.

1. $x < y$

Dĺžky jednotlivých úsečiek sú: x, $y - x$, $1 - y$ (pozri obrázok 35, príklad 6.2). Aby vznikol trojuholník, musí platiť trojuholníková nerovnosť, a teda

$$x + (y - x) > 1 - y \quad \wedge \quad x + (1 - y) > y - x \quad \wedge \quad (y - x) + (1 - y) > x.$$

Po úprave:

$$y > \frac{1}{2} \quad \wedge \quad y < x + \frac{1}{2} \quad \wedge \quad x < \frac{1}{2}.$$

Teda množina $G_1 = \{(x, y) \in (0, 1)^2 : y > \frac{1}{2} \wedge y < x + \frac{1}{2} \wedge x < \frac{1}{2}\}$

2. $x > y$

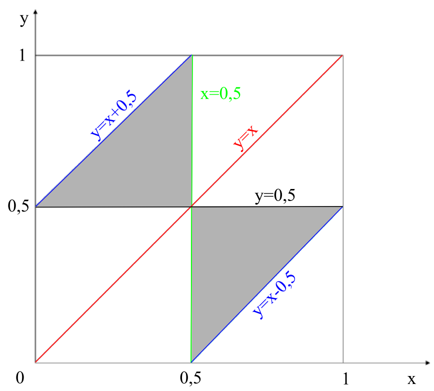
Dĺžky jednotlivých úsečiek sú: y, $x - y$, $1 - x$ (pozri obrázok 36, príklad 6.2). Opäť, aby vznikol trojuholník, musí platiť trojuholníková nerovnosť, a teda

$$y + (x - y) > 1 - x \quad \wedge \quad y + (1 - x) > x - y \quad \wedge \quad (x - y) + (1 - x) > y.$$

Po úprave:

$$x > \frac{1}{2} \quad \wedge \quad y > x - \frac{1}{2} \quad \wedge \quad y < \frac{1}{2}$$

Teda množina $G_2 = \{(x, y) \in (0, 1)^2 : x > \frac{1}{2} \wedge y > x - \frac{1}{2} \wedge y < \frac{1}{2}\}$



Obr. 38: Množina G

Množina G je potom zjednotením množín G_1 a G_2. Teda:

$$P(A) = \frac{\mu(G)}{\mu(\Omega)} = \frac{S(G)}{S(\Omega)},$$

kde $S(\Omega) = 1$ a $S(G)$ vypočítame ako dvojnásobok obsahu pravouhlého rovnostranného trojuholníka s odvesnami dĺžky $\frac{1}{2}$ (pozri obrázok 38). Teda

$$S(G) = 2 \times \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}.$$

Pravdepodobnosť udalosti A je

$$P(A) = \frac{S(G)}{S(\Omega)} = \frac{\frac{1}{4}}{1} = \frac{1}{4}.$$

7 Buffonova úloha

V rovine je daný nekonečný systém navzájom rovnobežných priamok vo vzdialenosti L. Na túto rovinu hádžeme ihlu dĺžky l (l < L). Aká je pravdepodobnosť toho, že ihla pretne niektorú z rovnobežiek? [4]

RIEŠENIE (podľa [4]):

Označme A udalosť, že ihla pretne niektorú z rovnobežiek. Každej polohe ihly priradíme dve súradnice: vzdialenosť x ako vzdialenosť od stredu ihly k najbližšej priamke a uhol φ ihly s daným systémom priamok. Vzdialenosť x môže byť z intervalu $(0, \frac{L}{2})$, uhol φ je z intervalu $(0, \pi)$. Vidíme, že ihla pretne priamku vtedy (obrázok 39), ak

$$x \leq \frac{l}{2}. \sin\varphi,$$

čo je graficky znázornené na obrázku 40. Množina všetkých možných polôh, teda množina Ω je obdĺžnik $\Omega = \{(x, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \frac{L}{2}, 0 < \varphi < \pi\}$. Množina vyhovujúcich polôh, teda množina $G = \{(x, \varphi) \in (0, \frac{L}{2}) \times (0, \pi) : x < \frac{1}{2} \sin\varphi\}$. Mierou je obsah. Teda:

$$P(A) = \frac{\mu(G)}{\mu(\Omega)} = \frac{S(G)}{S(\Omega)},$$

kde $S(\Omega)$ je obsah obdĺžnika so stranami π a $\frac{1}{2}L$, teda

$$S(\Omega) = \pi\frac{1}{2}L = \frac{L}{2}\pi$$

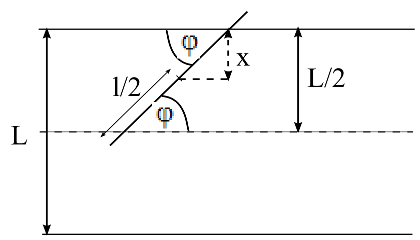
a $S(G)$ vypočítame pomocou integrálu. Pomôžeme si obrázkom 40. Teda hranice integrálu budú od 0 po π a integrovaná funkcia $\frac{l}{2}\sin\varphi$.

$$S(G) = \int_0^\pi (\frac{l}{2}. \sin(\varphi)) = -\frac{l}{2}\left[\cos(\varphi)\right]_0^\pi = \frac{l}{2}2 = l$$

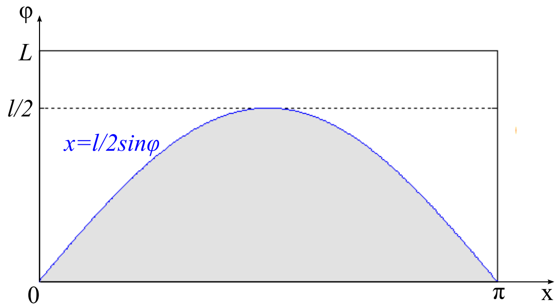
Teda pravdepodobnosť udalosti A bude:

$$P(A) = \frac{S(G)}{S(\Omega)} = \frac{l}{\frac{L}{2}\pi} = \frac{2l}{\pi L}.$$

Pravdepodobnosť, že ihla pretne niektorú z rovnobežiek je $\frac{2l}{\pi L}$.



Obr. 39: Buffonova ihla



Obr. 40: Buffonova ihla 2

Vzťah pre výpočet tejto pravdepodobnosti sa dá použiť ako jedna z metód na odhad konštanty π tak, že sa urobí niekoľko pokusov hodení ihly na systém rovnobežiek. Označme počet pokusov n a počet priaznivých výsledkov ako m. Potom pravdepodobnosť, že ihla pretne rovnobežku je $P(A) \sim \frac{m}{n}$. Keďže poznáme pravdepodobnosť, vzdialenosť rovnobežiek a dĺžku ihly, už ľahko vypočítame π zo vzťahu:

$$\pi \sim \frac{2l}{P(A)L}$$

Zo slabého zákona veľkých čísel (Bernoulliova veta) plynie, že výraz $\frac{2l}{P(A)L}$ predstavuje veličinu, ktorá pre $n \longrightarrow \infty$ konverguje v pravdepodobnosti k hodnote π.

V minulosti boli zachytené nasledujúce údaje o realizácii Buffonovej úlohy, viď tabuľka 1:

Experimentátor	Rok	Počet hodou ihlou	Experimentálna hodnota π
Volf	1850	5000	3,1596
Smith	1855	3204	3,1553
Fox	1894	1120	3,1419
Laccarini	1901	3408	3,1415929

Tabuľka 1: Tabuľka realizácii Buffonovej úlohy [13]

Ďalší pokus s Buffonovou ihlou experimentálne zopakovali študenti Gymnázia, Zborovská 45, Praha 5, Dagmar Podaná a Václav Šubrta. K experimentu používali ihlu dĺžky 6,5 cm a vodorovnú sklenenú dosku 100 cm $\times$100 cm so sústavou rovnobežných čiar vo vzájoných vzdialenostiach 9,9 cm. Náhodnosť bola relatívne zaistená tým, že ihlu púšťali z výšky približne jedem meter. Ihla vždy smerovala špičkou dolu, takže po dopade ešte niekoľkokrát odskočila rôznymi smermi. Pri hádzaní sa striedali po 250 pokusoch a hody realizovali z rôznych miest okolo dosky, aby vylúčili vplyvy, ktoré by mohli vzniknúť ľudským zavinením (stereotypom). Celkovo previedli 5000 pokusov. Študenti dostali po 5000 pokusoch hodnotu pre π 3,135462. [13]

8 Bertrandov paradox

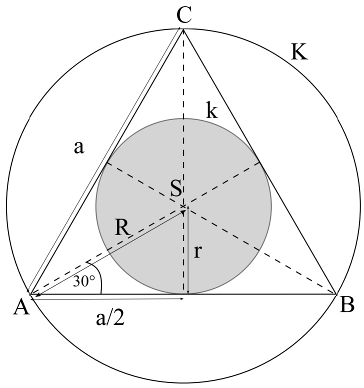
Pri riešení príkladov z oblasti geometrickej pravdepodobnosti je dôležité povedať, čo znamená pojem náhodný výber. V predchádzajúcich kapitolách bolo vždy jednoznačne dané, čo znamená, že volím bod rovnomerne náhodne, alebo rovnomerne náhodne a nezávisle volím niekoľko bodov/čísel. Ak však nie je jednoznačne určené, čo znamená náhodná voľba, môže to viesť k rôznym výsledkom pre tú istú úlohu. Typickým príkladom je úloha známa ako Bertrandov paradox. Úlohou je nájsť *pravdepodobnosť, že dĺžka tetivy v kružnici so stredom S a polomerom R bude dlhšia než dĺžka strany do kruhu vpísaného trojuholníka.* [14]

RIEŠENIE: [14]
Problém tejto úlohy spočíva v tom, že nie je jasné, čo znamená predpoklad náhodnej voľby. Úloha sa dá poňat aspoň troma rôznymi spôsobmi. Označme A udalosť, že tetiva bude dlhšia ako strana vpísaného trojuholníka. Zaveďme označenie podľa obrázku 41. Do kružnice K so stredom S a polomerom R je vpísaný trojuholník ABC, ktorého stranu označme a. Kružnicu vpísanú do trojuholníka označme k a jej polomer r.

1. **Tetivu určíme jej stredom**. (obr. 41)
   Poloha tetivy je jednoznačne určená polohou jej stredu. Náhodnú voľbu možme previesť tak, že zvolíme náhodne bod vnútri kruhu. Teda množina všetkých možných polôh stredov tetív (množina Ω) sú všetky body kruhu. Hľadáme pravdepodobnosť, že tetiva bude dlhšia ako strana vpísaného trojuholníka, teda tetiva bude dlhšia ako $\sqrt{3}R$. [3] Množina stredov tetív, ktoré sú dlhšie ako $\sqrt{3}R$, teda množina G, sú všetky body vo vnútri kruhu vpísaného do trojuholníka. Polomer tohto kruhu je $\frac{1}{2}R$. [4] Pravdepodobnosť, že tetiva bude dlhšia než strana rovnostranného trojuholníka vpísaného kružnici sa potom rovná pravdepodobnosti, že stred tetivy padne do vnútra kružnice vpísanej tomuto trojuholníku. Hľadaná pravdepodobnosť sa teda v tomto prípade rovná:
   $$P(A) = \frac{\mu(G)}{\mu(\Omega)} = \frac{S(G)}{S(\Omega)} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{\pi(\frac{R}{2})^2}{\pi R^2} = \frac{1}{4}.$$

[3] Trojuholník je rovnostranný, teda ťažnica, resp. výška trojuholníka je aj osou uhla. Teda $\cos(30°) = \frac{\frac{a}{2}}{R}$, odtiaľ $a = \sqrt{3}R$. Pozri obr. 41.

[4] $\sin(30°) = \frac{r}{R}$, odtiaľ $r = \frac{1}{2}R$. Pozri obr. 41.

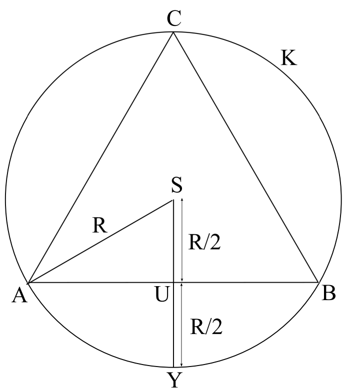


Obr. 41: Obrázok k riešeniu 1.

2. **Dĺžka tetivy je určená vzdialenosťou stredu tetivy od stredu kružnice** (obr. 42)

   Dĺžka tetivy je jednoznačne určená vzdialenosťou jej stredu od stredu kružnice S. Môžme predpokladať, že stred tetivy leží na danom polomeri kružnice (vďaka symetrii), a že stred tetivy má na tomto polomeri rovnomerné rozdelenie. Teda množina Ω v tomto prípade je množina všetkých bodov na polomeri kružnice K. Označme U stred strany AB. Tetiva bude dlhšia ako strana rovnstranného trojuholníka (ako strana AB), keď jej stred padne na úsečku SU. Teda množina G je množina všetkých bodov úsečky SU. Dĺžka úsečky SU je $\frac{R}{2}$ (ukázali sme v prvom riešní). Mierou je dĺžka. Hľadaná pravdepodobnosť pre tento prípad teda je:

$$P(A) = \frac{\mu(G)}{\mu(\Omega)} = \frac{l(G)}{l(\Omega)} = \frac{\frac{R}{2}}{R} = \frac{1}{2}.$$

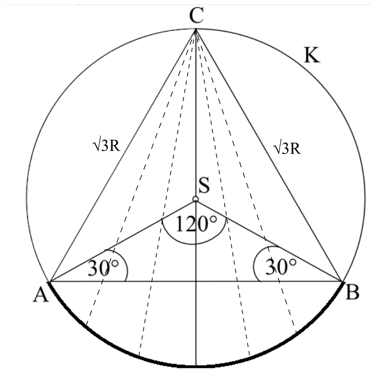


Obr. 42: Obrázok k riešeniu 2.

3. **Najskôr určíme jeden z krajných bodov tetivy** (obr. 43)

   Z dôvodu symetrie môžeme predpokladať, že jeden koncový bod tetivy je pevný, nech je to bod C. Druhý zvolíme náhodne na kružnici. Teda množina Ω sú všetky body kružnice K. Dĺžka tetivy AC, ako aj AB je $\sqrt{3}R$. Všetky tetivy, ktoré začínajú v bode C a končia vo vyznačenom oblúku na obr. 42 sú dlhšie ako $\sqrt{3}R$. Teda množina G sú všetky body na vyznačenom oblúku. Mierou je dĺžka. Keďže uhol ASB je 120°, čo je tretina plného uhla, tak dĺžka vyznačeného kružnicového oblúka bude tretina z celého obvodu kružnice K. Hľadaná pravdepodobnosť pre tretí prípad teda je

$$P(A) = \frac{\mu(G)}{\mu(\Omega)} = \frac{l(G)}{l(\Omega)} = \frac{\frac{1}{3}2\pi r}{2\pi r} = \frac{1}{3}.$$



Obr. 43: Obrázok k riešeniu 3.

Bertrandov paradox, ktorý pochádza z roku 1889, je paradoxom preto, že pre jednu a tú istú úlohu existuje niekoľko rôznych riešení. Je to spôsobené tým, že nie je jednoznačne dané, ako prebieha náhodná voľba. A teda každé riešenie popisuje iný pokus s iným poňatím „náhodného“ umiestňovania tetivy.

9 Simulácie

Niektoré príklady z oblasti geometrickej pravdepodobnosti sú často náročné na numerické počítanie. Preto si často nie sme istí, či sme danú pravdepodobnosť vypočítali správne. Existuje však jednoduchý spôsob ako si to overiť.

Pozrime sa opäť na príklad 5.3b) kde sme mali vypočítať pravdepodobnosť, že kolegovia Kamil, Ľuboš a Martin sa stretnú v kancelárii medzi ôsmou a štrnástou hodinou, pričom každý sa v kancelárii zdržal maximálne jednu hodinu. Pri riešení tohto príkladu bolo treba vypočítať objem množiny $G = \{(t_K, t_L, t_M) \in (0,6)^3 : |t_K - t_L| < 1 \wedge |t_K - t_M| < 1 \wedge |t_L - t_M| < 1\}$, ktorú sme vypočítali (nie jednoducho) pomocou trojného integrálu, preto nie je ťažké sa v takomto výpočte pomýliť.

Tento príklad sa dá nasimulovať pomocou metódy Monte Carlo. [5]. Uvedená Pravdepodobnosť sa dá odhadnúť prostredníctvom relatívnej početnosti, na základe zhodnotenia prevedených pokusov. Teda $P \sim \frac{m}{n}$, kde m je počet všetkých trojíc patriacich do množiny G a n počet všetkých vygenerovaných trojíc časov. Pomocou generátora náhodných čísel v programe matlab sme vygenerovali niekoľko (n) trojíc časov pre príchody kolegov Kamila, Ľuboša a Martina. Potom sme spočítali, koľko (m) z týchto trojíc patrí do množiny G.

$$P(A) \sim \frac{m}{n},$$

V tomto príklade sme generovali 5000 náhodných trojíc časov príchodov kolegov K, L, M.

Zdrojový kód z Matlabu:

```
p=5000;
k=rand(p)*6;
l=rand(p)*6;
m=rand(p)*6;
pocet=0;
for i=1:p
    if (abs(k(i)-l(i))<1)&(abs(l(i)-m(i))<1)&(abs(k(i)-m(i))<1)
            pocet=pocet+1;
           end
    end
pravdepodobnost=pocet/p
```

Kde p je počet generovaní, k, l, m sú časy príchodu kolegov K, L, M a *pocet* je počet priaznivých výsledkov a *pravdepodobnosť*, je výsledná pravdepodobnosť pomocou metódy Monte Carlo.

[5] Pod pojmom metóda Monte Carlo sa rozumejú všetky postupy numerického riešenia matematických, fyzikálnych a iných problémov, realizované pomocou mnohokrát opakovaných náhodných pokusov. [13]

Tu je niekoľko výstupov z matlabu:

```
pravdepodobnost=0,0764
pravdepodobnost=0,0727
pravdepodobnost=0,0680
pravdepodobnost=0,0722
pravdepodobnost=0,0696
pravdepodobnost=0,0758
pravdepodobnost=0,0788
pravdepodobnost=0,0742
pravdepodobnost=0,0806
pravdepodobnost=0,0714
```

My sme v príklade 5.3b) vypočítali, že pravdepodobnosť, že sa všetci traja kolegovia stretnú je $\frac{2}{27} \doteq 0,074$. Teda vidíme, že pravdepodobnosti získané metódou Monte Carlo sa pohybujú okolo tejto hodnoty. Táto metóda nie je presná, no so zvyšovaním počtu pokusov (pre $n \to \infty$) sa pravdepodobnosť získaná touto metódou blíži k skutočnej hodnote.

10 Záver

Zostavili sme zbierku príkladov z oblasti geometrickej pravdepodobnosti. Po úvode a jednoduchých príkladoch sú v každej z kapitol 3, 4, 5, 6 uvedené riešené príklady podobného typu a k nim príklady na precvičenie. V kapitolách 7, 8 sú úlohy zaujímavé z historického hľadiska - Buffonova ihla a Bertrandov paradox. Posledná kapitola je venovaná simuláciám metódou Monte Carlo, ktorá slúži na približné overenie vypočítanej pravdepodobnosti. Dúfame že zbierka bude použitá ako študijný materiál pre študentov. Budeme radi, ak nám študenti, ktorí z nej budú počítať poradia, čo by sa na nej dalo vylepšiť.

Literatúra

[1] *Základy teórie pravdepodobnosti a matematickej štatistiky: IV. Geometrická pravdepodobnosť.* Dostupné na internete:
http://files.gamepub.sk/M4/statistika/statistika/nauka 20statistika/TEXT4.PDF

[2] PLOCKI, A. 1982. *O náhodě a pravdepodobnosti.* Praha: Mladá fronta, 1982. ISBN 23-071-82.

[3] POTOCKÝ, R.-KALAS, J. - KOMORNÍK, J. - LAMOŠ, F. 1991. *Zbierka uloh z pravdepodobnosti a matematickej statistiky.* 2. vyd. Bratislava: Alfa 1991. ISBN 80-05-0052405.

[4] RIEČAN, B. - RIEČANOVÁ, Z. 1976. *O pravdepodobnosti.* Praha: 1976. ISBN 23-081-76

[5] HARMAN, R. - HONSCHOVÁ, E. - SOMORČÍK, J. 2009. *Zbierka úloh zo základov teórie pravdepodobnosti.* Bratislava: PACI, 2009. ISBN 978-80-89186-53-2

[6] BURJAN, V. - BERO, P. - ČERNEK, P. 1991. *Matematický kotail.* Bratislava: Slovenské pedagogické nakaldateľstvo, 1991. ISBN 80-08-00520-3.

[7] BEFUDDLERS. Nice probability. *Art of Problem Solving* [uverejnené 5.12.2008]. Dostupné na internete:
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=151&t=243644&p=1339753

[8] ORANGEFRONTED. Probability. *Art of Problem Solving* [uverejnené 6.8.2009]. Dostupné na internete:
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=150&t=293676&p=1588987

[9] KEDLAYA, K. S. - POONEN, B. - VAKIL, R. 2002. *The William Lowell Putnam Mathematical Competition: problems, solutions, and commentary.* USA: 2002. ISBN 0-88385-807-X.

[10] ZVÁRA, K. - ŠTĚPÁN, J. 2002. *Pravděpodobnosť a matematická štatistika.* Bratislava: VEDA, 2002. ISBN 80-2240736-4.

[11] ACERI. Rozdělení úsečky na tři části - pravděpodobnost. *Matematické fórum* [uverejnené 11. 06. 2008]. Dostupné na internete:
http://forum.matweb.cz/viewtopic.php?id=5351

[12] BORWEIN, J. - BAILEY, D. - GIRGENSON, R. 2003. *Experimentation in Mathematics - Computational Paths to Discovery*, A K Peters 2003, ISBN 1-56881-136-5

[13] FABIAN, F. - KLUIBER, Z. 1998. *Metoda Monte Carlo.* Praha: PROSPEKTRUM, 1998. ISBN 80-7175-058-1.

[14] ANDĚL, J. 2000. *Matematika náhody.* Praha: MATFYZPRESS, 2000. ISBN 80-85863-52-9.