UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

ZLATÝ REZ

Bakalárska práca

2012 **Martina Donauerová**

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

ZLATÝ REZ

Bakalárska práca

Študijný program:	Manažérska matematika
Študijný odbor:	9.1.9 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	RNDr. Beáta Stehlíková, PhD.

Bratislava, 2012 **Martina Donauerová**

62593372

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Martina Donauerová
Študijný program: manažérska matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Zlatý rez

Cieľ: I. Definícia zlatého rezu. II. Matematické vlastnosti - vybrané vlastnosti a ich dôkazy. Rôznorodosť tvrdení a použitých metód dôkazov. III. Výskyt zlatého rezu vo vybranej oblasti - výtvarné umenie, architektúra, atď. Prehľad literatúry a prezentácia rôznych pohľadov, argumenty pre a proti vedomému využitiu zlatého rezu (vo zvolených dielach, stavbách a pod.)

Literatúra: Mario Livio: Zlatý řez. Dokořán, Argo 2006. Fibonacci Quarterly, http://www.fq.math.ca/ Ďalšia literatúra podľa vlastného výberu na základe konkrétnejšieho zamerania práce.

Vedúci: RNDr. Mgr. Beáta Stehlíková, PhD.

Dátum zadania: 17.10.2011

Dátum schválenia: 24.10.2011

doc. RNDr. Vladimír Toma, PhD.
garant študijného programu

....

študent vedúci

ČESTNÉ PREHLÁSENIE

Podpísaná (Martina Donauerová) týmto prehlasujem, že som bakalársku prácu na tému: *„Zlatý rez“* vypracovala samostatne s použitím uvedenej literatúry. Som si vedomá zákonných dôsledkov, ak horeuvedené údaje nie sú pravdivé.

....

Martina Donauerová

POĎAKOVANIE

Ďakujem mojej konzultantke, *RNDr. Beáte Stehlíkovej, PhD.*, za odborný dohľad, cenné rady a podnetné pripomienky, ktoré mi poskytovala počas tvorby tejto práce.

ABSTRAKT

DONAUEROVÁ, Martina: *Zlatý rez*. [Bakalárska práca] – Univerzita Komenského v Bratislave. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky; Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky. – Vedúci: RNDr. Beáta Stehlíková, PhD. Bratislava: UK, 2012, 47 s.

Práca sa zaoberá problematikou zlatého rezu s dôrazom na prezentáciu rôznych pohľadov na vedomé využívanie zlatého rezu vo vybraných architektonických pamiatkach. Prvá časť práce obsahuje definíciu pojmu zlatý rez a jeho číselné vyjadrenie. Druhá časť je venovaná geometrickým metódam konštrukcie zlatého rezu vrátane podrobných dôkazov. Tretia časť sa zameriava na geometrickú aplikáciu zlatého rezu v rovine a priestore. Náplňou štvrtej a zároveň poslednej časti je predložiť rôzne názory a argumenty, ktoré dokumentujú, prípadne vyvracajú výskyt zlatého rezu vo vybraných dielach starovekého Egypta. Cieľom práce je poskytnúť čitateľovi zaujímavý zdroj informácií o iracionálnom čísle fí a priviesť ho k premýšľaniu o tom, či dávne civilizácie zlatý rez poznali a vedome ho využívali.

Kľúčové slová: *zlatý rez, zlaté číslo, konštrukcia zlatého rezu, päťuholník, pentagram, Veľká pyramída*

ABSTRACT

DONAUEROVÁ, Martina: *Golden section.* [Bachelor Thesis] – Comenius University in Bratislava. Faculty of Mathematics, Physics and Informatics; Department of Applied Mathematics and Statistics. – Thesis supervisor: RNDr. Beáta Stehlíková, PhD. Bratislava: UK, 2012, 47 p.

Bachelor´s thesis deals with the golden ratio, with emphasis on the presentation of different perspectives on the conscious use of the golden ratio in selected architectural monuments. The first section offers a definition of the golden ratio and its numerical and mathematical characteristics. The second section is devoted to methods of geometrical constructions of the golden ratio, and includes detailed evidence. The third section focuses on the geometric application of the golden ratio in the plane and in space. The aim of the fourth and last section is to present different views and arguments, which document or refute the occurrence of the golden ratio in selected works of ancient Egypt. The main aim of the thesis is to provide the reader with an interesting source of information on the irrational number phi and to consider whether the ancient civilizations were knowledgeable of the golden ratio and applied it consciously.

Key words: *Golden ratio, Golden number, Construction of the Golden Ratio, Pentagon, Pentagram, The Great Pyramid*

PREDHOVOR

So zlatým rezom som sa stretla v mnohých kontextoch týkajúcich sa najmä matematiky, prírody a umenia, avšak všade bol len okrajovo spomenutý. Tvrdí sa, že už oddávna bol zlatý rez vnímaný rôznymi kultúrami a civilizáciami ako príjemný a harmonický pomer dĺžok, ktorý sa stal základom pre vytváranie mnohých hodnotných umeleckých a architektonických prvkov. Niektorí autori uvádzajú, že ľudské vnímanie prirodzene uprednostňuje proporcie podľa zlatého rezu, preto sa mnohí umelci už v minulosti snažili usporiadať prvky kompozície na základe tejto skutočnosti.

Po dôkladnom pozorovaní tohto fenoménu a hlbšom premýšľaní sa mi však vynorila otázka, či je vôbec výskyt zlatého rezu v prírode a v umení, tak ako je prezentovaný v literatúre, naozaj skutočný. Nie je to len klamlivý dojem, ktorí sa snažia zanietení nadšenci zlatého rezu v nás vyvolať? A je vôbec možné prítomnosť zlatého rezu v týchto prípadoch nejako objasniť?

Aby som mohla odpovedať na vyššie spomenuté otázky, budem musieť svoje poznatky o tomto záhadnom, avšak stáročiami známom čísle prehĺbiť. Rada by som aj ostatným čitateľom priblížila čo toto číslo v sebe skrýva a taktiež porovnala argumenty o jeho výskyte, preto mi dovoľte vrátiť sa do minulosti, aby sme mohli spoločne nájsť prvé myšlienky o zlatom reze...

Martina Donauerová

OBSAH

ÚVOD

zlatý rez *(mat.) = lat. sectio aurea – rozdelenie úsečky na dve časti tak, že pomer veľkosti menšej časti k veľkosti väčšej časti je ten istý ako pomer veľkosti väčšej časti k veľkosti celej úsečky. Ideálny harmonický kompozičný pomer aplikovaný od staroveku vo výtvarnom umení. V polygrafii geometricky stanovené miesto na stránke, kam sa spravidla umiestňuje hlavný titul. Zlatý rez sa používa tiež pri určovaní formátov niektorých tlačovín.*[1]

Toto je definícia, ktorú môžeme nájsť v každom encyklopedickom slovníku. Ale čo sa skrýva v skutočnosti za týmto tak originálnym pomenovaním, ktoré evokuje niečo staroveké až mystické? Možno považovať zlatý rez za harmonický pomer dĺžok, ktorý už poznali dávne kultúry a vkladali ho do svojich umeleckých diel?

Cieľom bakalárskej práce je odhaliť nie až tak známe iracionálne číslo φ, označované ako zlatý rez, poukázať na jeho výskyt v rôznych sférach života a zároveň prezentovať rôznorodosť tvrdení a názorov o jeho zámernom či náhodnom využití.

Celá práca je rozdelená do štyroch kapitol. Pre lepšiu predstavu je doplnená obrázkami spracovanými v matematických softvéroch Euklid Dynageo, Wolfram Mathematica a v grafickom programe CorelDRAW.

Prvá kapitola sa venuje definícii pojmu zlatý rez a vyjadreniu jeho presnej číselnej hodnoty. V tejto časti je tiež vysvetlená prvá písomná zmienka o zlatom čísle pochádzajúca od Euklida.

Druhá kapitola obsahuje základné metódy konštrukcie zlatého rezu vrátane podrobných postupov a dôkazov.

Tretia kapitola je zameraná na objasnenie historických poznatkov o zlatom reze od čias Pytagora, ktorý spájal túto proporciu s pentagramom, cez Platóna a jeho pravidelné mnohosteny až po Euklida, pre ktorého bol zlatý rez východiskom k zostrojeniu päťuholníka.

Posledná, štvrtá kapitola predkladá odlišné interpretácie na vedomú či nevedomú aplikáciu zlatého rezu vo vybraných dielach starovekého Egypta. Na základe analýzy rôznych vedeckých i populárnych názorov na výskyt zlatého rezu v dielach dávnej architektúry je poskytnutý priestor na vytvorenie si vlastnej mienky.

[1] ŘÍMAN, Josef, et al. *Malá československá encyklopédia*. Praha: Academia, 1987. s. 843.

1 ZLATÝ REZ

1.1 Definícia zlatého rezu a jeho číselná hodnota

Zlatým rezom sa označuje rozdelenie úsečky do dvoch častí tak, aby platilo, že pomer menšej časti k väčšej je taký istý ako pomer väčšej časti k celej úsečke.

Obrázok 1: Rozdelenie úsečky zlatým rezom

Uvažujme úsečku AB a bod C ležiaci na tejto úsečke (obr. 1). Predpokladajme, že dĺžka kratšej strany CB je jedna jednotka a dĺžka dlhšej strany AC je x jednotiek. Z horeuvedenej definície vyplýva, že ak je pomer x (dĺžka úsečky AC) ku 1 (dĺžka úsečky CB) rovnaký ako pomer $x + 1$ (dĺžka úsečky AB) k x, potom je táto úsečka rozdelená v zlatom reze. To znamená, že platí

$$|AC| : |CB| = |AB| : |AC|,$$

$$x : 1 = (x + 1) : x.$$

Jednoduchou úpravou dostaneme kvadratickú rovnicu

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

ktorej riešenia sú

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Dĺžka úsečky x musí byť kladné číslo, preto riešením našej úlohy je len kladný koreň rovnice, t.j. $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \doteq 1,618\ 033\ 988\ 7$... Práve táto hodnota, často označovaná φ, je teda hodnotou zlatého rezu. Takáto alebo podobná definícia zlatého rezu sa nachádza v každej práci zaoberajúcej sa zlatým rezom. Výpočty sa môžu mierne líšiť v označení dĺžok častí úsečky, z ktorej vychádzam. Ja som si ako ukážku vybrala uvedenú definíciu a výpočet zlatého rezu, ktoré uvádza vo svojom diele Der Goldene Schnitt [Zlatý rez] matematik Hans Walser.[2]

[2] WALSER, Hans. *Der Goldene Schnitt*. Leipzig: B. G. Teubner Verlag, 1996. s. 2-4.

1.2 Prvá písomná zmienka

Prvá písomná zmienka o existencii zlatého rezu pochádza od starogréckeho matematika Euklida (cca 325 – 265 p.n.l.), ktorý sa zapísal do dejín matematiky vďaka svojmu prínosu z oblasti geometrie. V jednej zo svojich geometrických úloh pomenoval zlatý pomer ako „delenie v krajnom a strednom pomere“. Táto úloha bola v druhej knihe Základov definovaná nasledovne:

„Rozdeľte úsečku AB do dvoch úsečiek – dlhšej AC a kratšej CB tak, aby sa obsah štvorca so stranou AC rovnal obsahu obdĺžnika so stranami AB a CB.“[3]

Táto formulácia úlohy sa dá prepísať na tvar:

$$|AC|^2 = |AB| \times |CB|.$$

Ak vydelíme obe strany rovnosti $|AC|$ a $|CB|$, nadobudne nasledujúci tvar:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AB}{AC},$$

čo je nám už známy zlatý rez.[4]

[3] EUCLID. *Elements. Book VI, Definition 3.* [online]. [cit. 2012-02-04]. Dostupné na: http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookVI/bookVI.html#defs

[4] STAKHOV, Alexey. *The Mathematics of Harmony: From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science*. London: World Scientific Publ., 2008. s. 2-3.

2 GEOMETRICKÉ KONŠTRUKCIE ZLATÉHO REZU

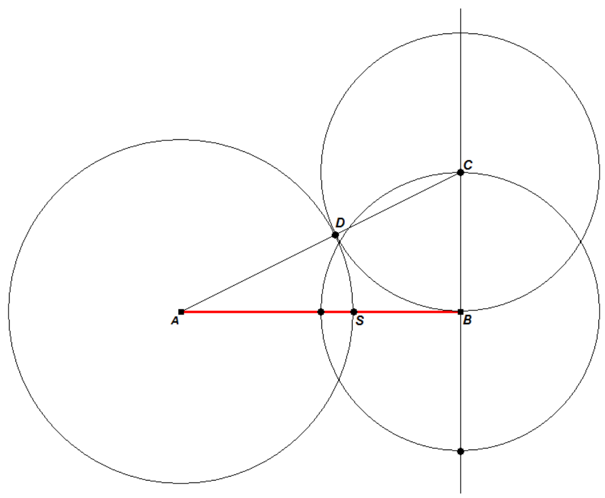
Zlatý rez môžeme zostrojiť pomocou rôznych geometrických konštrukcií. Klasické konštrukcie vychádzajú iba z úsečky. Záleží na tom, či je daná celá úsečka AB a je potrebné ju rozdeliť v zlatom pomere alebo je známa jej dlhšia časť AC či kratšia CB a chceme zistiť dĺžku celej úsečky AB. Ako si ukážeme v nasledujúcej kapitole, okrem spomínaných metód sa v súčasnosti používajú aj iné spôsoby – metóda založená na rovnostrannom trojuholníku alebo novšia metóda konštrukcie zlatého rezu pomocou kružníc.

2.1 Klasická metóda s vnútorným rozdelením

Konštrukcia podľa vnútorného rozdelenia nám umožňuje nájsť bod S, ktorý delí danú úsečku AB ľubovoľnej dĺžky v zlatom pomere.

Budeme postupovať nasledovne:[5]

1. Narysujeme ľubovoľnú úsečku AB.
2. V bode B zostrojíme kolmicu, ktorá má polovičnú dĺžku ako úsečka AB, koncový bod označíme ako C.
3. V bode C zostrojíme kružnicu, ktorej polomer je rovný BC. Body A a C spojíme a bod, ktorý vznikne ako prienik kružnice a úsečky AC, označíme D.
4. V bode A zostrojíme kružnicu o polomere AD. Prienikom tejto kružnice a úsečky AB získame bod S.



Obrázok 2: Klasická metóda s vnútorným rozdelením

[5] BEUTELSPACHER, Albrecht – PETRI, Bernhard. *Der Goldene Schnitt*. Heidelberg; Berlin; Oxford: Spektrum Akademischer Verlag, 1996. s. 20-21.

Ukážeme, že táto metóda rozdeľuje úsečku AB v bode S zlatým rezom. Označme a dĺžku úsečky AB. Potom, použitím Pytagorovej vety na pravouhlý trojuholník ABC, platí

$$|AC| = \sqrt{|AB|^2 + |BC|^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Úsečka AS má rovnakú dĺžku ako úsečka AD, ktorú môžeme vyjadriť ako

$$|AS| = |AD| = |AC| - |CD| = a\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2} = a\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{a}{\varphi},$$

z čoho vyplýva, že

$$\frac{|AB|}{|AS|} = \frac{a}{\frac{a}{\varphi}} = \varphi.$$

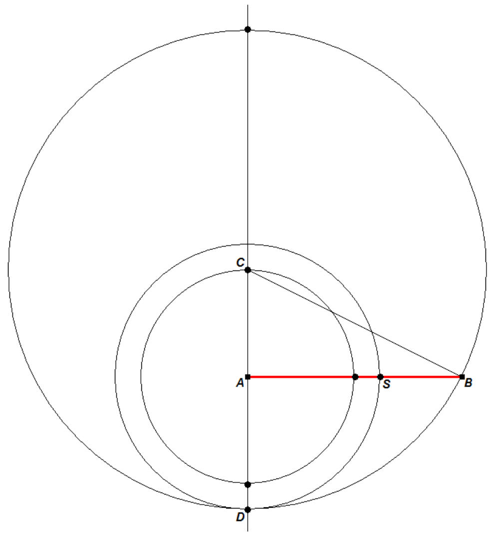
2.2 Metóda podľa Euklida

Tento typ konštrukcie, tak ako aj predchádzajúci (kap. 2.1), zodpovedá vnútornému rozdeleniu. To znamená, že úsečku AB máme danú, avšak deliaci bod S, ktorý rozdelí úsečku AB v zlatom pomere, určíme konštruktívne na tejto úsečke.

V nasledovných krokoch popíšeme presný postup tejto konštrukcie:[6] [7]

1. Narysujeme ľubovoľnú úsečku AB.
2. V bode A zostrojíme kolmicu, ktorá má polovičnú dĺžku ako úsečka AB, koncový bod označíme ako C.
3. V bode C zostrojíme kružnicu, ktorej polomer je rovný BC. Bod, ktorý vznikne ako prienik polpriamky CA a kružnice, označíme D.
4. V bode A zostrojíme kružnicu o polomere AD. Prienikom tejto kružnice a úsečky AB získame bod S.

[6] EUCLID. *Elements. Book VI, Definition 3.* [online]. [cit. 2012-02-04]. Dostupné na: http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookVI/bookVI.html#defs
[7] BEUTELSPACHER, Albrecht – PETRI, Bernhard. *Der Goldene Schnitt*. Heidelberg; Berlin; Oxford: Spektrum Akademischer Verlag, 1996. s. 21-22.



Obrázok 3: Metóda podľa Euklida

Ukážeme, že táto metóda nám umožňuje rozdeliť úsečku AB v bode S zlatým rezom. Označme a dĺžku úsečky AB. Pomocou Pytagorovej vety aplikovanej na trojuholník ABC vypočítame dĺžku strany BC, pre ktorú platí

$$|CD| = |BC| = \sqrt{|AB|^2 + |AC|^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Úsečka AS má rovnakú dĺžku ako úsečka AD, preto ich môžeme vyjadriť ako

$$|AS| = |AD| = |CD| - |AC| = a\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2} = a\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{a}{\varphi},$$

z čoho vyplýva, že

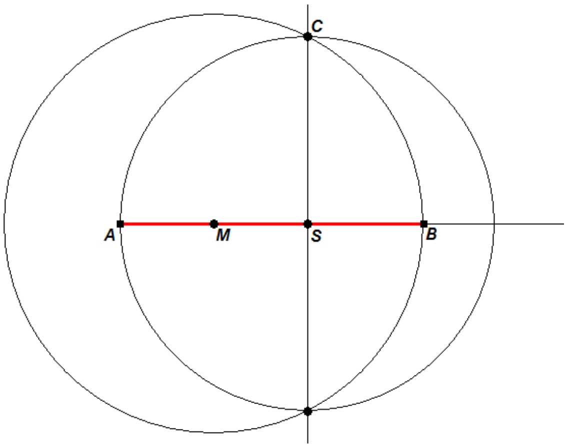
$$\frac{|AB|}{|AS|} = \frac{a}{\left(\frac{a}{\varphi}\right)} = \varphi.$$

2.3 Klasická metóda s vonkajším rozdelením

Konštrukcia podľa vonkajšieho rozdelenia nám umožňuje nájsť bod B, ktorý rozšíri danú úsečku AS ľubovoľnej dĺžky takým spôsobom, že bod S bude deliť úsečku AB v zlatom pomere.

Budeme postupovať nasledovne:[8]

1. Narysujeme ľubovoľnú úsečku AS.
2. V bode S zostrojíme kolmicu, ktorá má rovnakú dĺžku ako úsečka AS, koncový bod označíme ako C.
3. Na úsečke AS nájdeme jej stred a označíme ho ako M.
4. V bode M zostrojíme kružnicu o polomere MC. Prienikom tejto kružnice a polpriamky AS získame bod B.



Obrázok 4: Klasická metóda s vonkajším rozdelením

Vzniknutá úsečka AB bude rozdelená v bode S zlatým rezom. Označme c dĺžku úsečky AS. Bod M je stredom úsečky AS, preto

$$|AM| = |MS| = \frac{c}{2}.$$

Dĺžka úsečky MB je rovnaká ako dĺžka úsečky MC, pretože obe úsečky predstavujú polomer tej istej kružnice so stredom M. Na základe Pytagorovej vety použitej na pravouhlý trojuholník SMC bude ich vyjadrenie nasledovné:

$$|MB| = |MC| = \sqrt{|MS|^2 + |SC|^2} = \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + c^2} = c\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Dĺžka úsečky AB je rovná súčtu dĺžok dvoch úsečiek AM a MB, ktoré ju tvoria, preto

$$|AB| = |AM| + |MB| = \frac{c}{2} + c\frac{\sqrt{5}}{2} = c\frac{\sqrt{5}+1}{2} = c \cdot \varphi,$$

z čoho vyplýva, že

$$\frac{|AB|}{|AS|} = \frac{c \cdot \varphi}{c} = \varphi.$$

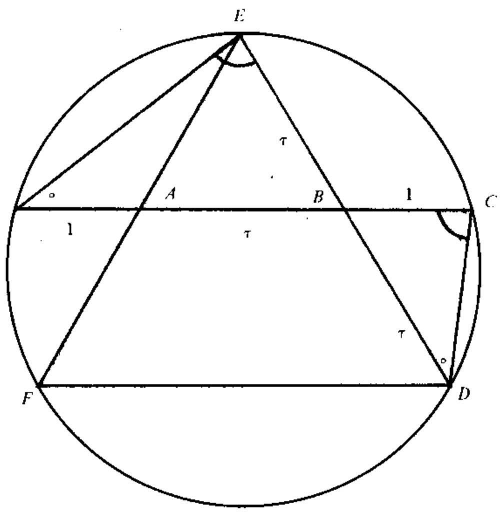
[8] BEUTELSPACHER, Albrecht – PETRI, Bernhard. *Der Goldene Schnitt*. Heidelberg; Berlin; Oxford: Spektrum Akademischer Verlag, 1996. s. 22-23.

2.4 Metóda podľa Odoma

Americký umelec a amatérsky matematik George Phillips Odom[9] sa zaujímal o rôzne matematické vzťahy a geometrické útvary. Odhalil zlatý rez v niekoľkých základných geometrických obrazcoch, v ktorých si ho pred ním nikto nevšimol. Jeho najznámejším objavom bola konštrukcia zlatého rezu pomocou rovnostranného trojuholníka a kružnice. Časopis The American Mathematical Monthly [Americký matematický mesačník], ktorý okrem článkov uverejňuje aj príklady a riešenia čitateľov, publikoval v roku 1983 túto konštrukciu ako úlohu č. 3007:

„Nech A a B sú stredy strán EF a ED rovnostranného trojuholníka DEF. Predĺžte AB tak, aby kružnicu (opísanú trojuholníku DEF) preťala v C. Dokážte, že B delí AC v zlatom pomere.“[10]

Úlohu vyriešilo 74 čitateľov. Uverejnené riešenie pochádzalo od Jana van de Craatsa z Holandska a bol ním obrázok bez akéhokoľvek ďalšieho textu. Na základe vyznačených vzťahov sa o platnosti dokazovaného tvrdenia má čitateľ presvedčiť sám. Toto riešenie uvádzam na obrázku č. 5.



Obrázok 5: Riešenie Odomovho problému[11]

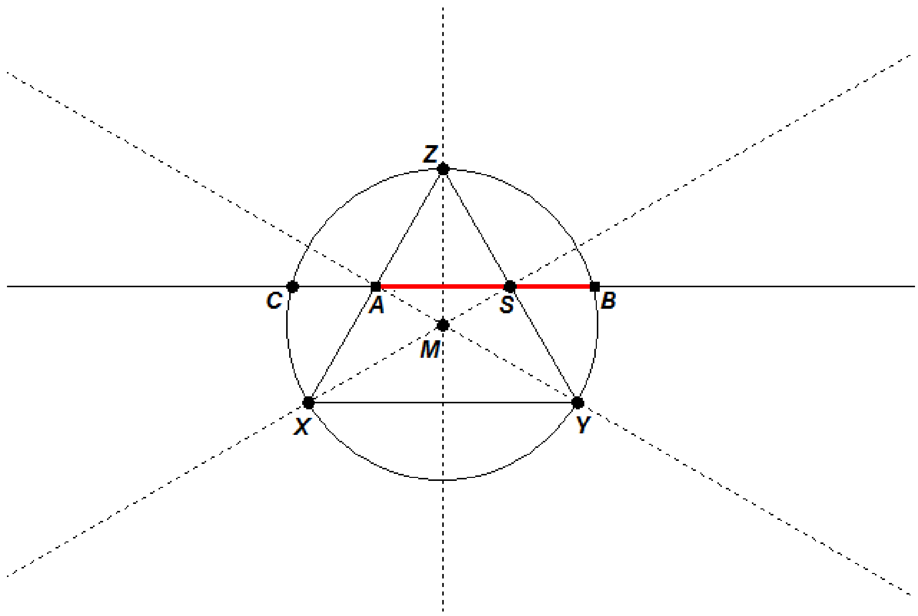
Na základe tejto úlohy uvádzajú Beutelspacher a Petri[12] ďalšiu konštrukciu zlatého rezu. Rovnako ako aj predchádzajúca metóda (kap. 2.3) zobrazuje vonkajšie

9 COXETER, Harold Scott, et al. *The Coxeter Legacy: Reflections And Projections*. Toronto: The American Mathematical Society, 2006. s. 269.
10 ODOM, George. Elementary Problem 3007. *The American Mathematical Monthly 7*, 1983, s. 482-483.
11 CRAATS, Jan van de. Elementary Problem 3007. *The American Mathematical Monthly 7*, 1986, s. 572.
12 BEUTELSPACHER, Albrecht – PETRI, Bernhard. *Der Goldene Schnitt*. Heidelberg; Berlin; Oxford: Spektrum Akademischer Verlag, 1996. s. 24.

rozdelenie. Aj v tomto prípade bude daná úsečka AS, ktorú predĺžime tak, aby novovzniknutá úsečka AB bola práve bodom S rozdelená v zlatom pomere.

Postup tejto konštrukcie je nasledovný:[13]

1. Zostrojíme ľubovoľný rovnostranný trojuholník XYZ.
2. Tomuto trojuholníku opíšeme kružnicu prechádzajúcu jeho troma vrcholmi (stred kružnice M opísanej trojuholníku je priesečník osí strán trojuholníka, polomer sa bude rovnať vzdialenosti stredu od ľubovoľného vrcholu).
3. Nájdeme stredy strán trojuholníka XZ a YZ, označíme ich ako A a S.
4. Prienikom polpriamky SA a opísanej kružnice vznikne bod C, prienikom polpriamky AS a opísanej kružnice vznikne bod B.



Obrázok 6: Metóda podľa Odoma

Vzniknutá úsečka AB bude rozdelená v bode S zlatým rezom. Označme $2c$ dĺžku úsečky XY. Potom, keďže trojuholník XYZ je rovnoramenný, platí

$$|YZ| = |ZX| = |XY| = 2c.$$

Bod S je stredom úsečky YZ, preto

$$|YS| = |ZS| = c. \tag{1}$$

Úsečka AS je strednou priečkou trojuholníka XYZ, a preto má polovičnú dĺžku ako strana XY, s ktorou je rovnobežná. Teda aj

$$|AS| = c. \tag{2}$$

[13] BEUTELSPACHER, Albrecht – PETRI, Bernhard. *Der Goldene Schnitt*. Heidelberg; Berlin; Oxford: Spektrum Akademischer Verlag, 1996. s. 24.

Ďalej platí

$$|CA| = |BS|, \tag{3}$$

označme túto dĺžku b.

Všimnime si teraz trojuholníky CSZ a BSY. Zo zhodnosti vrcholových uhlov vyplýva, že $|\sphericalangle CSZ| = |\sphericalangle BSY|$. Keďže uhly CZY a CBY sú oba obvodovými uhlami zostrojenými nad tetivou CY, majú rovnakú veľkosť. To ale znamená, že $|\sphericalangle CZS| = |\sphericalangle SBY|$. Trojuholníky CSZ s BSY majú teda rovnaké uhly, z čoho vyplýva, že sú podobné a platí $|YS| : |CS| = |BS| : |ZS|$. Máme teda $|YS| \cdot |ZS| = |CS| \cdot |BS|$, čiže

$$|YS| \cdot |ZS| = (|CA| + |AS|) \cdot |BS|.$$

Po dosadení dĺžok týchto úsečiek zo vzťahov (1), (2), (3) dostaneme:

$$c \cdot c = (b + c) \cdot b,$$

$$\left(\frac{c}{b}\right)^2 - \left(\frac{c}{b}\right) - 1 = 0.$$

Dostali sme známu rovnicu, ktorej riešenie sme už vypočítali v prvej kapitole. Jej kladné riešenie je

$$\frac{c}{b} = \varphi.$$

2.5 Metóda podľa Hofstettera

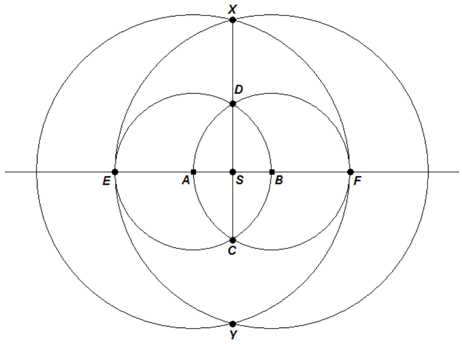
Problematika konštrukcie zlatého rezu nie je len otázkou minulosti. Dôkazom je aj nasledujúca konštrukcia, ktorá bola uverejnená v časopise Forum Geometricorum [Geometrické fórum] v roku 2002. Od predchádzajúcich konštrukcií sa líši tým, že sa netýka ani vnútorného, ani vonkajšieho rozdelenia. Úsečka aj deliaci bod vznikne v priebehu konštrukcie. Zlatý rez sa nachádza vo viacerých geometrických útvaroch (ako uvidíme v nasledujúcej kapitole, príkladom je napríklad päťuholník), preto nie je problém zlatý rez takýmto spôsobom zostrojiť. Táto konštrukcia je však zaujímavá malým počtom krokov.

Postup konštrukcie je nasledovný:[14]

1. Zvolíme dva body A, B a zostrojíme priamku, ktorá nimi prechádza.
2. Zostrojíme kružnice so stredmi A, B a spoločným polomerom AB.
3. Tieto kružnice pretnú priamku AB okrem bodov A, B ešte v ďalších dvoch bodoch, ktoré označíme E, F.

[14] HOFSTETTER, Kurt. A Simple Construction of the Golden Section. *Forum Geometricorum 2*, 2002, s. 65-66.

4. Narysujeme kružnicu so stredom A a polomerom AF a kružnicu so stredom v bode B a polomerom BE. Priesečníky dvoch kružníc označíme X, Y.



Obrázok 7: Metóda podľa Hofstettera

Ľahko vidieť, že body C, D, X ležia na priamke. Ukážeme, že bod D delí úsečku CX v zlatom reze. Označme S stred úsečky AB (tiež leží na úsečke CX) a dĺžku úsečky AB označme a. Potom CD je dvojnásobkom výšky rovnostranného trojuholníka ABD so stranou a:

$$|CD| = 2 \cdot \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a\sqrt{3}.$$

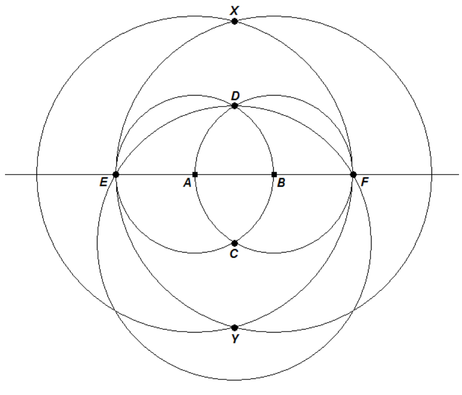
Z Pytagorovej vety pre trojuholník SBX máme

$$|SX| = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a\frac{\sqrt{15}}{2}.$$

Takže

$$\frac{|CX|}{|CD|} = \frac{|CS|+|SX|}{|CD|} = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}+a\frac{\sqrt{15}}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Poznamenajme, že autor uvádza aj modifikáciu tohto postupu, ktorá nepoužíva priamku a štyri kružnice, ale päť kružníc. Zlatý rez konštruuje len pomocou kružidla.



Obrázok 8: Modifikácia Hofstetterovej konštrukcie

3 ZLATÝ REZ V GEOMETRII

3.1 Pytagoras, päťuholník a zlatý rez

Poznatky od Pytagora a jeho nasledovníkov predstavujú obrovský prínos pre dejiny matematiky. Okrem známej Pytagorovej vety sú títo starovekí grécki učenci často spájaní aj v súvislosti so zlatým pomerom. Carl Boyer predkladá vo svojej publikácii A History of Mathematics [História matematiky] názor, ktorí zdieľajú mnohí vedci a historici matematiky, že zásluha Pytagorejcov na objavení zlatého rezu vychádzala z ich vedomostí z oblasti geometrie a predovšetkým z veľkého záujmu o pentagram a päťuholník.[15]

Antický filozof a spisovateľ Lukianos vo svojich textoch uvádza: *„Tak či tak, celé Pytagorove učenie začínalo priamočiarym „Prajem zdravie“ ako najvhodnejším pozdravom, ktorý zahrňoval všetok prospech človeka, ako pre telo, tak pre dušu. Svoj Pentagram, tri pretínajúce sa trojuholníky, ktorý bol symbolom ich sekty, nazývali „Zdravie““.*[16]

Vysvetlenie spojitosti pentagramu a zdravia ponúka kniha Le Pentagramme Pythagoricien, Sa Diffusion, Son Emploi dans le Syllabaire Cuneiforme od Allotte de la Fuÿe [Pytagorejský pentagram, jeho šírenie a využitie v učebnici klinového písma]. Autor tu tvrdil, že útvar, akým je pentagram, svojou formou pripomína mýtickú postavu Hygieiu, bohyňu zdravia.[17]

Súvislosť medzi Pytagorejcami a pentagramom sme na základe uvedených ukážok objasnili, teraz ešte vysvetlime v čom spočíva úzky vzťah pentagramu a pravidelného päťuholníka, ale najmä pentagramu a zlatého rezu.

Začnime najprv nákresom ľubovoľného pravidelného päťuholníka $ABCDE$, geometrického útvaru s piatimi totožnými stranami a totožnými uhlami. Po znázornení jeho piatich uhlopriečok uvidíme, že vo vnútri obrazca vznikol pentagram (obr. 11). Teraz ukážeme, ako pri tejto konštrukcii vzniká zlatý rez. Budeme postupovať podľa dôkazu vysvetleného v knihách Das Zebra-Buch zur Geometrie [Zebra – kniha ku

[15] BOYER, Carl Benjamin – MERZBACH, Uta Caecilia. *A History of Mathematics*. New Yersey: John Wiley & Sons, 2010. s. 47-49.
[16] SAMOSATA, Lucian of. *The Works of Lucian of Samosata*. Translated by H. W. Fowler and F. G. Fowler. Volume 2. Montana: Kessinger Publishing, 2004. s. 27-28.
[17] FUŸE, Colonel Allotte de la. *Le Pentagramme Pythagoricien, Sa Diffusion, Son Emploi dans le Syllabaire Cuneiforme*. Paris: P. Geuthner, 1934. s. 19-25.

geometrii] od autorov Ferdinanda Verhulsta a Sebastiana Walchera a The Mathematics of Harmony [Matematika harmónie] od Alexeja Stachova, pričom niektoré ich tvrdenia podrobnejšie vysvetlíme a zdôvodníme.

Pri nasledujúcich úvahách budeme vychádzať zo základných vlastností pravidelného päťuholníka, a to najmä zo symetrie tohto útvaru a rovnobežnosti uhlopriečky k jej protiľahlej strane (napríklad strana ED je paralelná s diagonálou AC a strana AB je paralelná s diagonálou EC).

Dokážme napríklad rovnobežnosť ED a AC. Stačí dokázať, že veľkosť uhlov DEX a CAE sú rovnaké (obr. 9). Veľkosť uhla DEX vypočítame ľahko, keď si uvedomíme, že súčet uhlov n-uholníka je $(n-2)\cdot 180°$, čo je v našom prípade $540°$. Každý z uhlov pravidelného päťuholníka má teda veľkosť $\frac{540°}{5} = 108°$. Takže

$$|\sphericalangle DEX| = 180° - |\sphericalangle DEA| = 72°. \tag{1}$$

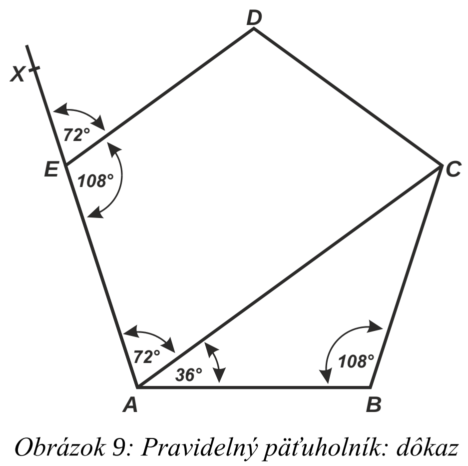
Teraz si všimnime, že trojuholník ABC je rovnoramenný a ramená AB a BC zvierajú uhol $108°$. Uhol pri základni potom je

$$|\sphericalangle BAC| = \frac{1}{2}(180° - |\sphericalangle ABC|) = \frac{1}{2}(180° - 108°) = 36°.$$

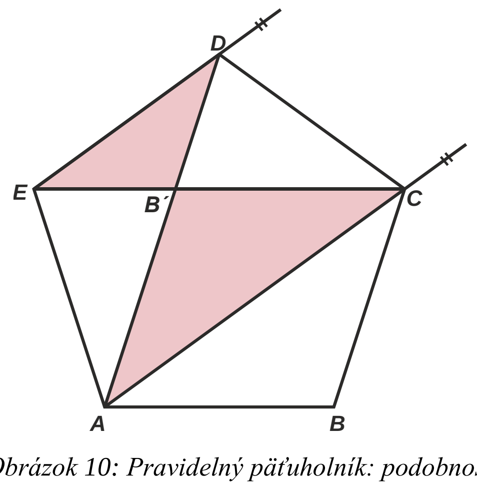
Teraz už vieme vypočítať aj veľkosť uhla CAE:

$$|\sphericalangle CAE| = |\sphericalangle BAE| - |\sphericalangle BAC| = 108° - 36° = 72°. \tag{2}$$

Porovnaním (1) a (2) vidíme, že naozaj platí $|\sphericalangle DEX| = |\sphericalangle CAE|$.



Obrázok 9: Pravidelný päťuholník: dôkaz rovnobežnosti ED a AC



Obrázok 10: Pravidelný päťuholník: podobnosť trojuholníkov ACB´ a DEB´

Z uvedeného vyplýva podobnosť trojuholníkov ACB' a DEB' (majú rovnaké uhly – obr. 10 – využívame práve dokázanú rovnobežnosť a zhodnosť vrcholových a striedavých uhlov). Teda platí

$$|AB'| : |DB'| = |AC| : |DE|. \tag{3}$$

Vzhľadom na to, že $EC \parallel AB$ a $AD \parallel BC$, štvoruholník $ABCB'$ je rovnobežník a platí, že $|BC| = |AB'|$. To znamená, že dĺžka úsečky AB' sa rovná dĺžke ľubovoľnej strany päťuholníka. V ďalšej časti využijeme rovnosť

$$|DE| = |AB'|. \tag{4}$$

Z rovnosti dĺžok uhlopriečok pravidelného päťuholníka máme

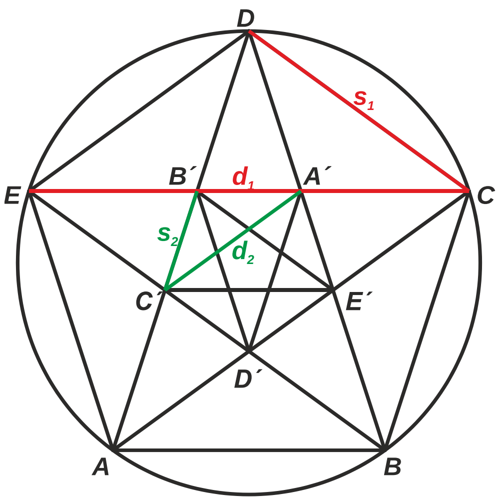
$$|AC| = |AD|. \tag{5}$$

Po dosadení (4) a (5) do vzťahu (3) dostávame, že

$$|AB'| : |DB'| = |AD| : |AB'|.$$

To znamená, že uhlopriečka každého päťuholníka je rozdelená inou uhlopriečkou na dve nerovnaké časti tak, že pomer celej uhlopriečky k väčšej časti je rovnaký ako pomer väčšej časti uhlopriečky k menšej. To je však presne definícia zlatého rezu φ.

Z (3) vyplýva, že pomer väčšej časti k menšej časti uhlopriečky, na ktoré je uhlopriečka pravidelného päťuholníka rozdelená inou uhlopriečkou, je rovný pomeru celej jeho uhlopriečky k strane tohto päťuholníka. Ukázali sme teda, že pomer uhlopriečky a strany je tiež zlatý rez.[18] [19] [20]



Obrázok 11: Postupnosť päťuholníkov a pentagramov

---

[18] VERHULST, Ferdinand – WALCHER, Sebastian. *Das Zebra-Buch zur Geometrie*. Berlin: Springer-Verlag, 2010. s. 8.

[19] STAKHOV, Alexey. *The Mathematics of Harmony: From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science*. London: World Scientific Publ., 2008. s. 28.

[20] BOYER, Carl Benjamin – MERZBACH, Uta Caecilia. *A History of Mathematics*. New Yersey: John Wiley & Sons, 2010. s. 49.

3.2 Hippasov objav nesúmerateľnosti

Pytagorejský filozof Hippasos pomocou geometrického dôkazu zistil, že pomer dĺžok uhlopriečky a strany päťuholníka sa nedá napísať ako podiel dvoch celých čísel. Ukázal, že uhlopriečka a strana päťuholníka nemôžu mať žiadneho spoločného deliteľa (pod existenciou spoločného deliteľa rozumieme to, že uhlopriečka a strana by boli celočíselným násobkom tohto deliteľa).[21] Inými slovami, Hippasos dokázal existenciu iracionálnych čísel. Hippasov objav nesúmerateľnosti potvrdzuje napríklad vo svojej knihe Weisheit und Wissenschaft. Studien zu Pythagoras, Philolaos und Platon [Tradícia a veda. Štúdie o Pytagorovi, Filolaovi a Platónovi] historik matematiky Walter Burkert.[22]

Hippasov dôkaz, že uhlopriečka a strana pravidelného päťuholníka sú nesúmerateľné, vychádza z jednoduchého postrehu, podľa ktorého je možné donekonečna zostrojovať stále menšie a menšie päťuholníky, čo dokumentuje obrázok 11. V predchádzajúcej kapitole sme ukázali, že zostrojením uhlopriečok pravidelného päťuholníka vznikne pentagram. Okrem toho však body A', B', C', D', E', v ktorých sa uhlopriečky pretínajú, predstavujú vrcholy ďalšieho pravidelného päťuholníka. Spojením vrcholov tohto päťuholníka uhlopriečkami znova vytvoríme menší pentagram a v ňom ešte menší päťuholník (obr. 11). Tento postup, pri ktorom vznikajú stále menšie päťuholníky a pentagramy je možné opakovať donekonečna.[23][24]

Teraz sa na tento dôkaz pozrime spoločne. Chceme potvrdiť, že uhlopriečka a strana päťuholníka nemajú žiadneho spoločného deliteľa, to znamená, že sú nesúmerateľné. Vychádzajme z nákresu nášho päťuholníka $ABCDE$ a označme si stranu s_1 a uhlopriečku d_1. Pri pohľade na dva trojuholníky CDE' a $BE'C'$ nie je ťažké dokázať, že sú rovnoramenné a teda

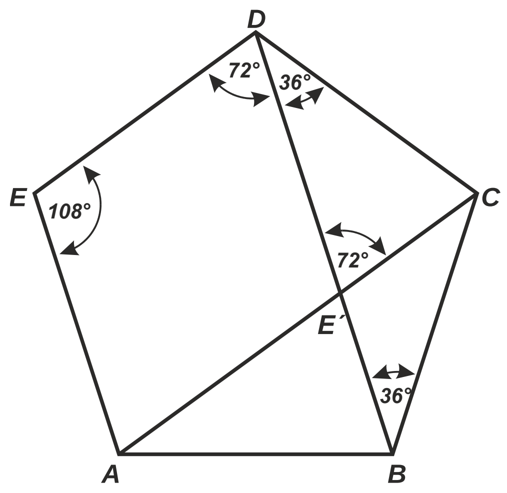
$$|DC| = |DE'| \text{ a } |E'B| = |E'C|.$$

[21] FRITZ, Kurt von. *The Discovery of Incommensurability by Hippasus of Metapontum*. Berlin: Springer-Verlag, 2004. s. 242-264.

[22] BURKERT, Walter. *Weisheit und Wissenschaft. Studien zu Pythagoras, Philolaos und Platon*. Nürnberg: Verlag Hans Carl, 1962. s. 435.

[23] STAKHOV, Alexey. *The Mathematics of Harmony: From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science*. London: World Scientific Publ., 2008. s. 28.

[24] LIVIO, Mario. *Zlatý řez: Příběh fí, nejpodivuhodnějšího čísla na světě.* Praha: Dokořán, 2006. s. 37.



Obrázok 12: Pravidelný päťuholník: dôkaz rovnosti strán DC a DE´

Zamerajme sa najprv na trojuholník CDE' a dokážme, že $|DC| = |DE'|$. Stačí dokázať, že uhly pri základni $|\sphericalangle DCE'| = |\sphericalangle DE'C|$ sú rovnaké. V predchádzajúcej kapitole sme potvrdili, že každá uhlopriečka v päťuholníku a jej protiľahlá strana sú rovnobežné. To znamená, že každá uhlopriečka rozdelí päťuholník na dva rovnoramenné útvary – rovnoramenný lichobežník a rovnoramenný trojuholník. V našom prípade znázornením uhlopriečky BD vznikne v päťuholníku $ABCDE$ rovnoramenný lichobežník $ABDE$ a rovnoramenný trojuholník BCD (obr. 12). Vieme, že uhol pri vrchole pravidelného päťuholníka je $\frac{540°}{5} = 108°$, potom uhly pri základni rovnoramenného lichobežníka $ABDE$

$$|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle EDB| = \frac{1}{2}(360° - |\sphericalangle DEA| - |\sphericalangle BAE|) = 72°.$$

Uhly pri základni rovnoramenného trojuholníka vypočítame podobne ako

$$|\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle CDB| = \frac{1}{2}(180° - |\sphericalangle BCD|) = 36°.$$

Teraz si všimnime uhlopriečku AC a jej rovnobežnú protiľahlú stranu DE. Pretnutím oboch týchto úsečiek uhlopriečkou BD vznikne dvojica striedavých uhlov, pre ktoré platí

$$|\sphericalangle DE'C| = |\sphericalangle EDB| = 72°.$$

Veľkosť uhla $|\sphericalangle DCE'|$ už vieme vypočítať:

$$|\sphericalangle DCE'| = 180° - |\sphericalangle CDE'| - |\sphericalangle DE'C| = 72°.$$

Týmito výpočtami sme dokázali, že naozaj platí

$$|\sphericalangle DCE'| = |\sphericalangle DE'C|,$$

a teda

$$|DC| = |DE'|.$$

Podobným postupom by sme dokázali aj rovnoramennosť trojuholníka $BE'C'$ i ďalších iných trojuholníkov nachádzajúcich sa vo vnútri pravidelného päťuholníka. Teraz sa však vráťme k dôkazu o nesúmerateľnosti strany a uhlopriečky tohto päťuholníka, o ktorom sme sa zmienili v úvode tejto kapitoly.

Stranu menšieho päťuholníka $A'B'C'D'E'$ označme s_2 a jeho uhlopriečku d_2. Na základe dokázaných rovností platí, že

$$|DB| = |DE'| + |E'B| = |DC| + |E'C|,$$

teda

$$d_1 = s_1 + d_2,$$

$$d_1 - s_1 = d_2.$$

Dané tvrdenie o nesúmerateľnosti dokážeme sporom. Predpokladajme, že strana s_1 aj uhlopriečka d_1 sú súmerateľné, čiže majú nejakého spoločného deliteľa. To znamená, že d_1 aj s_1 sú celočíselnými násobkami tohto deliteľa. Z uvedeného vyplýva, že to je spoločný deliteľ $d_1 - s_1$ a teda aj d_2. Z ďalších rovností

$$|DA'| = |E'B| = |E'C|,$$

$$|DE'| = |DC|,$$

$$|DE'| = |DA'| + |A'E'|,$$

$$|DC| = |E'C'| + |A'E'|$$

dostaneme $s_1 = d_2 + s_2$, teda $s_1 - d_2 = s_2$. Na základe tejto poslednej rovnosti zistíme, že spoločný deliteľ s_1, d_1, tak ako sme predpokladali v úvode tohto dôkazu, je taktiež spoločným deliteľom d_2 a taktiež s_2. Rovnakým spôsobom môžeme pokračovať až donekonečna so stále menšími päťuholníkmi. Zistíme, že spoločný deliteľ strany a uhlopriečky prvého najväčšieho päťuholníka je taktiež spoločným deliteľom všetkých ďalších päťuholníkov. Toto tvrdenie však nemôže byť pravdivé, čo znamená, že ani náš pôvodný predpoklad, podľa ktorého strana a uhlopriečka majú spoločného deliteľa, nie je pravdivý. Tým sme sa presvedčili o nesúmerateľnosti uhlopriečky a strany päťuholníka. Vzhľadom na to, že ich pomer je zlatý rez φ (ako sme ukázali v predchádzajúcej kapitole), máme geometrický dôkaz toho, že φ je iracionálnym číslom.[25]

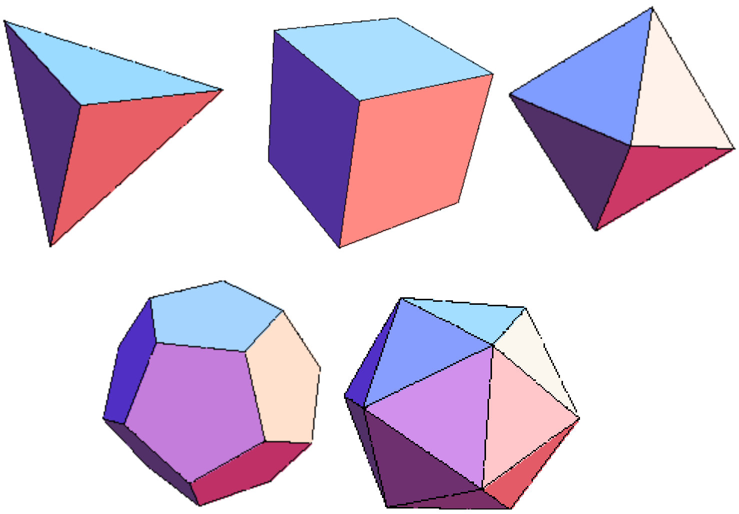
[25] LIVIO, Mario. *Zlatý řez: Příběh fí, nejpodivuhodnějšího čísla na světě.* Praha: Dokořán, 2006. s. 229-230.

3.3 Platónske telesá

Už Platón nás svojimi názormi v oblasti prírodných vied a vesmíru informoval o určitom pomere, dnes známom zlatom reze. Matematické vzťahy uplatnil predovšetkým v pravidelných telesách – mnohostenoch, ktoré považoval za základ harmonickej štruktúry vesmíru. Tieto telesá boli pôvodne označované ako pytagorejské, pretože ich do určitej miery skúmali Pytagorejci. Dnes ich však poznáme pod pojmom platónske telesá.[26]

Platónske telesá (obr. 13) reprezentuje päť pravidelných mnohostenov, ktoré sa vyznačujú špecifickými vlastnosťami. Sú to jediné telesá, ktorých steny sú navzájom zhodné pravidelné mnohouholníky a okolo každého telesa je možné opísať guľu, na ktorej ležia všetky vrcholy telesa. Existuje iba päť útvarov, ktoré spĺňajú kritéria rovnosti opakovaním identických uhlov a dĺžok hrán.

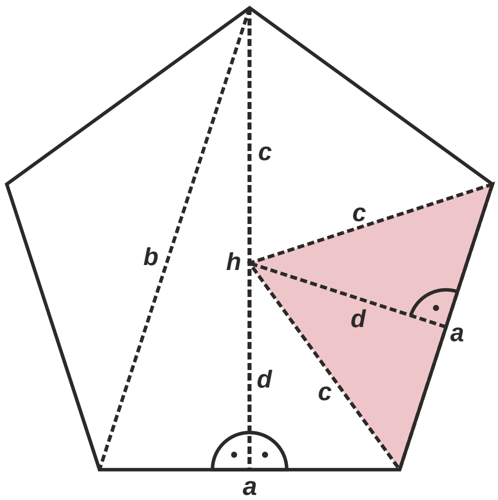
Názvy platónskych telies vychádzajú z počtu stien: štvorsten – tetraéder (so štyrmi stenami v tvare trojuholníka), kocka – hexaéder (so šiestimi stenami v tvare štvorca), osemsten – oktaéder (s ôsmimi stenami v tvare trojuholníka), dvanásťsten – dodekaéder (s dvanástimi stenami v tvare pravidelného päťuholníka) a dvadsaťsten – ikosaéder (s dvadsiatimi stenami v tvare trojuholníka).[27]



Obrázok 13: Platónske telesá

[26] HERZ-FISCHLER, Roger. *A Mathematical History of Division in Extreme and Mean Ratio*. Waterloo: Wilfrid Laurier University Press, 1987. s. 78-79.
[27] STAKHOV, Alexey. *The Mathematics of Harmony: From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science*. London: World Scientific Publ., 2008. s. 139.

Zlatý rez sa vyskytuje vo viacerých rozmeroch a symetrických vlastnostiach niektorých platónskych telies. Napríklad v prípade dvanásťstenu s jednotkovou dĺžkou hrany platí, že jeho povrch je rovný $\frac{15\varphi}{\sqrt{3-\varphi}}$ a jeho objem sa rovná $\frac{5\varphi^3}{6-2\varphi}$. Teraz tieto tvrdenia dokážeme. Budeme pritom postupovať podľa učebnice matematiky Die Elemente der Mathematik [Základy matematiky] od autorov Friedricha Reidta a Georga Wolffa a podľa knihy o geometrii Anschauliche Analytische Geometrie [Deskriptívna analytická geometria] od Elisabeth Barth.[28] [29]



Obrázok 14: Výpočet obsahu päťuholníka

V predchádzajúcej kapitole o pytagorejských poznatkoch sme dokázali, že pomer uhlopriečky pravidelného päťuholníka k jeho strane je rovný zlatému rezu. Teraz toto tvrdenie $\frac{b}{a} = \varphi$ aplikujme na daný päťuholník (obr. 14) s jednotkovou dĺžkou strany $a = 1$ a získame tak dĺžku strany uhlopriečky $b = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Použitím Pytagorovej vety dostaneme výšku pravidelného päťuholníka

$$h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}. \qquad (1)$$

Teraz uvažujme ďalšie dve rovnosti vyplývajúce z obrázka 14:

$$h = c + d, \qquad (2)$$

$$c^2 = d^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2. \qquad (3)$$

[28] REIDT, Friedrich – WOLFF, Georg. *Die Elemente der Mathematik. Kurzausgabe. Oberstufe: Arithmetik, Algebra, Geometrie, Analysis, Trigonometrie*. Hannover: Schroedel, 1962. s. 168.
[29] BARTH, Elisabeth, et al. *Anschauliche Analytische Geometrie. Übungen mit Lösungen*. Berlin: Oldenbourg Schulbuchverlag, 2000. s. 142.

Dosadením hodnoty h z rovnice (1) do (2) a hodnoty $a = 1$ do (3) a následným porovnaním

$$\frac{1}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}} = c + d,$$

$$d = \sqrt{c^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2},$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}} = c + \sqrt{c^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2},$$

získame polomer kružnice opísanej tomuto päťuholníku c:

$$c = \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5+2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} = \frac{1}{10}\sqrt{50+10\sqrt{5}}.$$

Pre polomer kružnice vpísanej päťuholníku platí nasledovné:

$$d = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{50+10\sqrt{5}}{100} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{10}\sqrt{25+10\sqrt{5}}.$$

Obsah pravidelného päťuholníka teraz ľahko vypočítame ako súčet piatich rovnoramenných trojuholníkov (vyfarbená plocha na obrázku 14), z ktorých daný päťuholník pozostáva:

$$A = 5 \cdot S_{\Delta} = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot d = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{10}}.$$

Nakoľko už vieme, že dvanásťsten je teleso, ktorého strany tvorí dvanásť rovnakých pravidelných päťuholníkov, jeho povrch bude rovný:

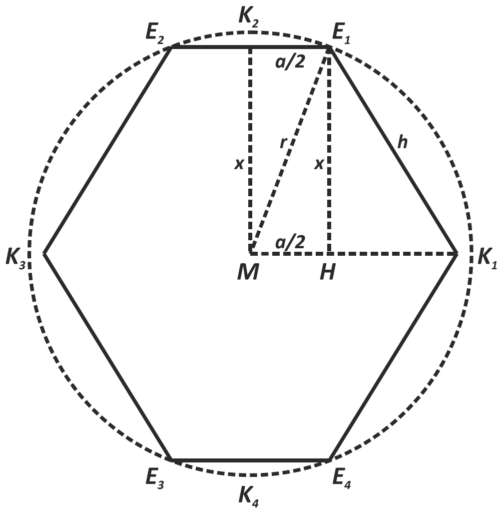
$$O = 12 \cdot A = 12 \cdot \frac{1}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$$

$$= 3\sqrt{25+10\sqrt{5}} = \frac{15\varphi\sqrt{3-\varphi}}{3-\varphi}$$

$$= \frac{15\varphi}{\sqrt{3-\varphi}}.$$

Objem dvanásťstenu vypočítame pomocou objemu dvanástich zhodných ihlanov, ktoré daný dvanásťsten vypĺňajú. Základňou ihlanov sú jednotlivé päťuholníky tvoriace plášť dvanásťstenu. Vrchol každého ihlanu je presne v strednom bode celého dvanásťstenu, to znamená, že výška ihlanu je rovná polomeru gule vpísanej tomuto dvanásťstenu.

Na určenie polomeru gule opísanej a vpísanej dvanásťstenu budeme vychádzať z jeho roviny súmernosti prechádzajúcej stredom dvanásťstenu v smere rovnobežnom s jeho plochami. Každá rovina súmernosti, ktorá rozdeľuje dvanásťsten na zrkadlovo zhodné polovice, obsahuje štyri vrcholy (E) a štyri stredné body hrán (K) dvanásťstenu (obr. 15). Vzdialenosť bodu E od najbližšieho bodu K je rovný výške päťuholníka.



Obrázok 15: Rovina súmernosti dvanásťstenu

Použitím Pytagorovej vety na trojuholníky E_1HK_1 a E_1HM získame nasledujúce rovnosti

$$x^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = h^2, \tag{4}$$

$$r^2 = x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2. \tag{5}$$

Dosadíme do (4) známe hodnoty, kde $a = 1$ a h zo vzťahu (1) dostaneme

$$x^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}\right)^2,$$

$$x^2 - \frac{x}{2} - 1 - \frac{\sqrt{5}}{4} = 0.$$

Nájdením kladného koreňa tejto kvadratickej rovnice získame hľadanú vzdialenosť stredného bodu dvanásťstenu od stredného bodu hrany dvanásťstenu x:

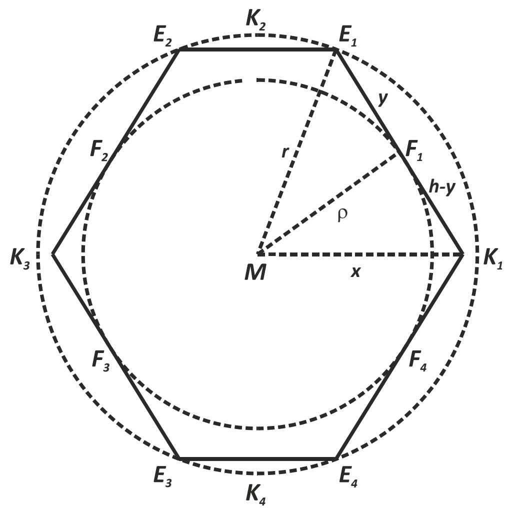
$$x = \frac{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} + \sqrt{5}}}{2} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} + 1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}. \tag{6}$$

Teraz z rovnosti (5) ľahko určíme polomer gule opísanej tomuto dvanásťstenu. Po dosadení $a = 1$ a už vypočítanej hodnoty x (pozri 6) dostaneme

$$r^2 = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Postupnými úpravami získame hľadanú hodnotu polomeru gule opísanej dvanásťstenu

$$r = \sqrt{\frac{9+3\sqrt{5}}{8}} = \frac{1}{4}\sqrt{18 + 6\sqrt{5}}. \tag{7}$$



Obrázok 16: Rovina súmernosti dvanásťstenu zobrazujúca guľu vpísanú a opísanú dvanásťstenu

Guľa vpísaná dvanásťstenu sa dotýka každej plochy dvanásťstenu v jej jednom bode (na obrázku 16 sú jednotlivé body dotyku zaznačené ako F_1, F_2, F_3, F_4). Ešte nám zostáva určiť polomer gule ρ vpísanej dvanásťstenu. Pomocou Pytagorovej vety aplikovanej na trojuholníky E_1MF_1 a K_1MF_1 dostaneme

$$r^2 = \rho^2 + y^2, \tag{8}$$

$$x^2 = \rho^2 + (h-y)^2. \tag{9}$$

Teraz opäť nahraďme premenné r, x hodnotami zo vzťahu (6) a (7):

$$\left(\frac{1}{4}\sqrt{18+6\sqrt{5}}\right)^2 = \rho^2 + y^2, \tag{10}$$

$$\left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \rho^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}-y\right)^2. \tag{11}$$

Odčítaním rovnosti (11) od (10) dostaneme

$$-\frac{1}{4} = \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{5}}{2} - y\sqrt{5+2\sqrt{5}},$$

z čoho získame hľadanú hodnotu vzdialenosti vrcholu dvanásťstenu od jeho najbližšieho bodu dotyku s guľou vpísanej tomuto dvanásťstenu y:

$$y = \frac{\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}. \tag{12}$$

Dosadením hodnoty (12) do rovnosti (10) dostaneme

$$\rho^2 = \left(\frac{1}{4}\sqrt{18+6\sqrt{5}}\right)^2 - \left(\frac{\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}\right)^2,$$

z čoho jednoducho vypočítame polomer gule vpísanej dvanásťstenu ρ:

$$\rho = \sqrt{\frac{5}{8}+\frac{11\sqrt{5}}{40}} = \frac{1}{20}\sqrt{250+110\sqrt{5}}.$$

Po nájdení všetkých neznámych hodnôt môžeme prejsť k určeniu objemu daného dvanásťstenu. Ako sme už vyššie spomínali, pre jednoduchšie výpočty rozdeľme dvanásťsten na dvanásť zhodných ihlanov, ktorých základňou sú päťuholníky tvoriace plášť dvanásťstenu a výškou polomer gule vpísanej tomuto dvanásťstenu. Objem dvanásťstenu je

$$\begin{aligned} V &= 12 \cdot \frac{1}{3} \cdot A \cdot \rho \\ &= 12 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{20}\sqrt{250+110\sqrt{5}} \\ &= \frac{1}{20}\left(35\sqrt{5}+75\right) = \frac{5 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3}{6-\left(1+\sqrt{5}\right)} \\ &= \frac{5\varphi^3}{6-2\varphi}\,. \end{aligned}$$

Pozoruhodnou vlastnosťou platónskych telies je tzv. dualita, ktorá vyplýva zo symetrie týchto mnohostenov a umožňuje zobrazovanie jedného telesa do druhého. Spojením stredov priľahlých strán akéhokoľvek pravidelného mnohostenu vznikne na základe tohto duálneho princípu ďalší pravidelný mnohosten. Pôvodný mnohosten aj nový duálny mnohosten majú rovnaký počet hrán, avšak počet stien a vrcholov majú navzájom opačný.

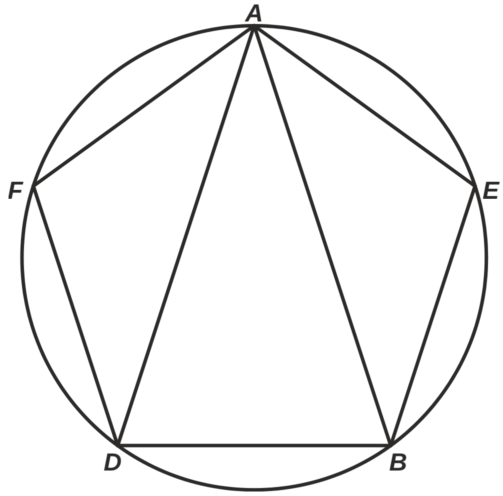
Dualita kocky a osemstenu je vyjadrená tým, že ak spojíme stredy všetkých stien kocky, dostaneme osemsten, pri spojení stredov stien osemstenu vznikne znova kocka. Obe telesá majú dvanásť hrán, kocka je tvorená šiestimi stenami a ôsmimi vrcholmi, osemsten obsahuje osem stien a šesť vrcholov. Ak tento postup zopakujeme aj pre štvorsten a spojíme stredy jeho stien, zistíme, že sa vytvorí ďalší štvorsten. To znamená, že pravidelný štvorsten sa replikuje sám, je teda duálny sám so sebou. Pri zobrazení dvadsaťstenu do dvanásťstenu musíme spojiť všetky stredy stien dvanásťstenu. Spojením stredov stien vo vzniknutom dvadsaťstene, dostaneme opäť dvanásťsten. Počet stien dvanásťstenu je rovný počtu vrcholov dvadsaťstenu a naopak, počet stien dvadsaťstenu sa rovná počtu vrcholov v dvanásťstene. Oba mnohosteny majú rovnaký počet hrán – 30. Pomer dĺžok hrán týchto telies, dvanásťstenu vloženého do dvadsaťstenu, môžeme formulovať pomocou hodnoty zlatého rezu ako $\frac{\varphi^2}{\sqrt{5}}$.[30]

[30] LIVIO, Mario. *Zlatý řez: Příběh fí, nejpodivuhodnějšího čísla na světě.* Praha: Dokořán, 2006. s. 67.

3.4 Euklidovo zostrojenie päťuholníka

Pre Euklida bol zlatý rez východiskom k zhotoveniu päťuholníka a k zostrojeniu dvoch pravidelných mnohostenov – dvanásťstenu a dvadsaťstenu.[31]

Vzťah zlatého rezu s konštrukciou päťuholníka si vysvetlíme na nasledujúcom príklade. Najprv sa však vráťme k obrázku č. 1, na ktorom je znázornená úsečka AB rozdelená podľa Euklidovej definície „v krajnom a strednom pomere", čiže v zlatom pomere. Kľúčom k zostrojeniu pravidelného päťuholníka je presne takéto rozdelenie úsečky, ktorá v päťuholníku predstavuje jednu z piatich uhlopriečok.[32]



Obrázok 17: Delenie päťuholníka na tri rovnoramenné trojuholníky

Teraz sa pozrime na obrázok päťuholníka $AEBDF$ a znázornime v ňom dve susedné uhlopriečky AD a BD. Ich zakreslením tak vytvoríme tri rovnoramenné trojuholníky $ABD,\ ABE$ a ADF (obr. 17). My sa však zamerajme len na trojuholník ABD. Stredový uhol BOD meria $\frac{360°}{5} = 72°$, obvodový uhol BAD bude mať hodnotu $\frac{72°}{2} = 36°$, keďže stredový uhol je v každej kružnici rovný dvojnásobku obvodového uhla prislúchajúcemu tomu istému kružnicovému oblúku (obr. 18). Zvyšné dva uhly pri základni rovnoramenného trojuholníka ABD sú zhodné, preto bude platiť

$$|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle ABD| = \frac{1}{2}(180° - 36°) = 72°.$$

[31] EUCLID. *Elements. Book XIII, Proposition 16, 17.* [online]. [cit. 2012-05-20]. Dostupné na: http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookXIII/propXIII16.html
[32] LIVIO, Mario. *Zlatý řez: Příběh fí, nejpodivuhodnějšího čísla na světě.* Praha: Dokořán, 2006. s. 73-74.

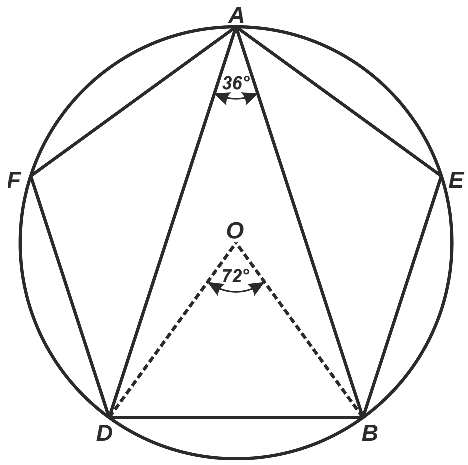
Ak rozdelíme jeden z týchto 72-stupňových uhlov na polovicu, získame tak menší trojuholník DBC, ktorý má rovnaké uhly ako trojuholník ABD (obr. 19). Oba trojuholníky ABD aj DBC sú podobné, ich pomer strán sa musí rovnať, teda

$$|AB| : |DB| = |DB| : |CB|. \tag{1}$$

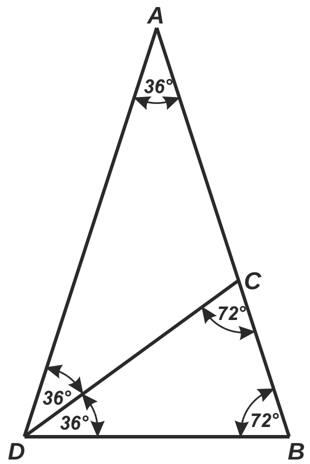
Vzhľadom na to, že sú tieto trojuholníky rovnoramenné, platia rovnosti $|AD| = |AB|$ a $|DB| = |DC| = |AC|$. Vzťah (1) môžeme upraviť na tvar

$$|AC| : |BC| = |AB| : |AC|,$$

čo je známa Euklidova definícia, podľa ktorej bod C delí úsečku AB presne v zlatom pomere. Okrem toho sme takto iným spôsobom odvodili už dokázaný fakt, že v pravidelnom päťuholníku sa pomer uhlopriečky AB a strany DB rovná φ.



Obrázok 18: Stredový a obvodový uhol trojuholníka ABD

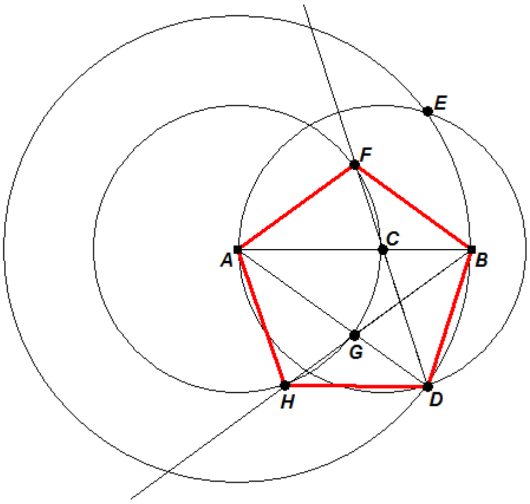


Obrázok 19: Podobnosť trojuholníkov

Tento príklad jasne dokumentuje, že ak vieme zostrojiť úsečku rozdelenú v zlatom pomere, získame tým základ na vytvorenie pravidelného päťuholníka. Postup konštrukcie je nasledovný:[33]

1. Narysujeme úsečku AB rozdelenú v zlatom pomere bodom C.
2. Narysujeme kružnicu so stredom A a polomerom AB a kružnicu so stredom v bode C a polomerom CA. Priesečníky týchto dvoch kružníc označíme D, E.
3. Narysujeme kružnicu so stredom A a polomerom AC. Prienikom tejto kružnice a polpriamky DC vznikne bod F. Prienikom tejto kružnice a úsečky AD vznikne bod G a prienikom polpriamky BG a kružnice vznikne bod H.

[33] HERZ-FISCHLER, Roger. *A Mathematical History of Division in Extreme and Mean Ratio*. Waterloo: Wilfrid Laurier University Press, 1987. s. 11.



Obrázok 20: Konštrukcia päťuholníka

Spojením bodov A, F, B, D, H vznikne pravidelný päťuholník. A práve konštrukcia päťuholníka podnietila záujem Grékov o zlatý rez.

4 ZLATÝ REZ VO VYBRANÝCH ARCHITEKTONICKÝCH PAMIATKACH

Bádatelia a zanietení prívrženci zlatého rezu sa zamýšľajú nad otázkou, od akého obdobia ľudstvo pozná zlatý rez. Odpoveď hľadajú v architektúrach všetkých dôb a slohov. Mnohí sú presvedčení, že už jeden zo siedmich divov sveta, Veľká Cheopsova pyramída, v sebe ukrýva záhadný „božský pomer". O stavbe tohto majstrovského diela architektúry sa nezachovali žiadne doklady, a preto vychádzajú z historických Herodotovych záznamov a z merania rozmerov tejto stavby. Veľká pyramída je zložitý objekt, takže nie je ťažké medzi nameranými hodnotami nájsť taký pomer, ktorý potrebujú. Skúsme posúdiť, nakoľko sa ich tvrdenia a výskumy zakladajú na pravde a či im môžeme veriť.

4.1 Pentagram – východisko zlatého rezu

V predchádzajúcich kapitolách sme v historických súvislostiach uviedli, ako sa spája zostrojenie pentagramu so zlatým rezom. Pri ďalšej analýze preto budeme vychádzať z počiatočných záznamov o pentagrame, pretože nám môžu pomôcť odhaliť prvé poznatky o zlatom reze.

Najstaršie známe pentagramy pochádzajú z Mezopotámie zo 4. tisícročia p.n.l. V starovekých sumerských mestách Uruk a Džemdet Nasr sa našli vyryté na hlinených doštičkách a úlomkoch keramiky. Predpokladá sa, že symbolizovali päť priestorových smerov – dopredu, dozadu, vľavo, vpravo a nahor alebo päť planét – Jupiter, Merkúr, Mars, Saturn a Venuša. V starom Egypte sa päťcípe hviezdy vyskytovali pomerne často, neboli ale veľmi presné. Avšak pentagram zobrazený na džbáne pochádzajúcom z obdobia okolo 3100 p.n.l., ktorý sa našiel v blízkosti mesta Téb, bol už geometricky dokonalejší. Pre Egypťanov tieto obrazce znamenali „podsvetie", teda miesto, kde sa hviezdy podľa mýtov zdržiavajú ráno a večer.[34]

Vráťme sa na územie Mezopotámie o dvetisíc rokov neskôr, pretože práve z tohto obdobia pochádzajú matematické tabuľky nájdené na doštičkách v iránskych Súsach. Autori Bruins a Rutten vo svojej publikácii Textes mathematiques de Suse [Matematické texty zo Sús] uvádzajú rozbory týchto tabuliek, podľa ktorých

[34] LIVIO, Mario. *Zlatý řez: Příběh fí, nejpodivuhodnějšího čísla na světě.* Praha: Dokořán, 2006. s. 44-45.

Babylončania poznali aspoň približný výpočet obsahu päťuholníka. Niektoré tabuľky obsahovali súpisy akýchsi „konštánt“, medzi ktorými bolo zobrazené aj číslo „1 40“. Keďže Babylončania používali šesťdesiatkovú sústavu, číslo „1 40“ môžeme vyjadriť v tvare zlomku ako $1 + \frac{40}{60}$, čiže $\frac{5}{3}$ alebo v desatinnom tvare ako $1{,}666...$ Autori vo svojom diele ďalej vysvetľujú, že tento údaj môže predstavovať približný obsah pravidelného päťuholníka so stranami o jednotkovej dĺžke, ktorý porovnávajú so skutočnou hodnotou $1{,}720$.[35] [36]

Objavenie pentagramov, ktoré nám zanechali dávne kultúry ešte nenasvedčuje tomu, že staroveké národy vedeli o matematických vlastnostiach uvedených obrazcov, a predovšetkým, že ich spájali so zlatým rezom. O prítomnosti zlatého rezu nás musia presvedčiť také dôkazy, ktoré jednoznačne dokumentujú jeho vedomé využívanie v architektúre či umení. Pri spomínaných nálezoch žiadne takéto dôkazy neexistujú, a preto musíme pátrať ďalej.

4.2 Pamätník Osireion a Petosiridova hrobka v Egypte

Stúpenci zlatého rezu tvrdia, že mnoho architektonických divov starovekého sveta bolo postavených podľa zlatého rezu, ktorý im dal osobitnú silu a niektoré záhadné vlastnosti. Zaujímajú ich hlavne egyptské pamiatky, v ktorých nachádzajú stopy po pokročilých matematických vedomostiach dávneho národa. Týka sa to menej známych diel, ako je Osireion a hrobka Petosiris, ale aj slávnej Veľkej pyramídy.

Najskôr sa zameriame na pohrebný pamätník kráľa Sethiho I. – Osireion (okolo 1300 p.n.l.). Robert Lawlor v diele Sacred Geometry: Philosophy and Practice [Posvätná geometria: Filozofia a prax] usudzuje, že vnútorná architektúra tejto stavby bola založená na mystickej päťuholníkovej geometrii, ktorá obsahuje zlatý pomer. Podľa neho je možné do plánu budovy nakresliť dva proti sebe stojace pravidelné päťuholníky po celej dĺžke, zatiaľ čo šírka by obsahovala kružnice im opísané.[37] S takýmto názorom sa ale nestotožňuje Mario Livio, ktorý vo svoje knihe Zlatý rez hovorí: *„Lawlorove analýzy ma nepresvedčili, aj keď sú vizuálne veľmi pôsobivé.*

---

[35] BRUINS, Evert Marie – RUTTEN, Marguerite. *Textes mathematiques de Suse. Memoires de la Mission Archeologique en Iran*. Paris: Paul Geuthner, 1961. s. 78-81.
[36] HERZ-FISCHLER, Roger. *A Mathematical History of Division in Extreme and Mean Ratio*. Waterloo: Wilfrid Laurier University Press, 1987. s. 56.
[37] LAWLOR, Robert. *Sacred Geometry. Philosophy & Practice*. London: Thames & Hudson, 1982. s. 60-62.

Nielenže čiary, ktoré majú svedčiť o proporciách spojených so zlatým rezom, vychádzajú z úplne ľubovoľných bodov, ale taktiež výsledné päťuholníky podľa môjho názoru trochu násilne interpretujú niečo, čo má v podstate tvar obdĺžnika.“[38]

Petosiridova hrobka pochádza z tretieho storočia pred naším letopočtom, teda z obdobia, kedy bola preukázaná znalosť zlatého rezu u Grékov. V tomto prípade bol zlatý pomer objavený v reliéfe znázorňujúcom balzamovanie kňaza. Ak vychádzame z geometrických analýz Roberta Lawlora, môžeme v zložitej pavučine geometrických znakov zlatý pomer nájsť. Nemáme ale jasné dôkazy, ktoré by potvrdili, že skutočným zámerom autora bolo vytvorenie tohto pomeru.[39]

Ak budeme dokazovať výskyt zlatého rezu v egyptských pamiatkach iba na základe zmeraných rozmerov týchto umeleckých diel, je takmer nemožné, aby sme v nich zlatý pomer neobjavili. V prípade, že sme ochotní takýto dôkaz prijať, musia rozmery skúmaného diela pôsobiť tak, že zlatý rez nám padne do oka, bude evidentný. To sa o predchádzajúcich prípadoch povedať nedá, pretože Lawlor tento pomer našiel príliš náročnými výpočtami. Ako príklad, ktorý uvádza Livio, pomer $\frac{2\sqrt{1+\varphi^2}}{\varphi^2}$ oprávnene nemožno považovať za príliš presvedčivý.[40]

4.3 Veľká pyramída

Celé stáročia je Veľká pyramída predmetom záujmu mnohých bádateľov z odborných kruhov, ale aj z amatérskej verejnosti. Mýtus, ktorý obklopuje Veľkú pyramídu, sa podľa matematika Rogera Fischlera pravdepodobne zrodil v dôsledku knihy anglického spisovateľa Johna Taylora The Great Pyramid: Why Was It Built and Who Built It? [Veľká pyramída: prečo bola postavená a kto ju postavil?] z roku 1859.[41] Taylor v nej objasňuje, že rozmery pyramídy sú založené na matematických poznatkoch, ktoré starovekí Egypťania nepoznali, a preto ich stavbu chápal ako božie dielo. Za základnú mernú jednotku považoval biblický laket ($63{,}5\ cm$), ktorý vraj použil aj Noe pri konštrukcii svojej archy, Abrahám pri stavbe oltáru i Šalamún v architektúre svojich chrámov. Taylorova kniha odštartovala búrlivú diskusiu, pretože

[38] LIVIO, Mario. *Zlatý řez: Příběh fí, nejpodivuhodnějšího čísla na světě.* Praha: Dokořán, 2006. s. 48.
[39] LAWLOR, Robert. *Sacred Geometry. Philosophy & Practice*. London: Thames & Hudson, 1982.
[40] LIVIO, Mario. *Zlatý řez: Příběh fí, nejpodivuhodnějšího čísla na světě.* Praha: Dokořán, 2006. s. 49.
[41] HERZ-FISCHLER, Roger. What Did Herodotus Really Say? or How to Build (a Theory of) the Great Pyramid. *Environment and Planning B 6*, 1979, s. 89-93.

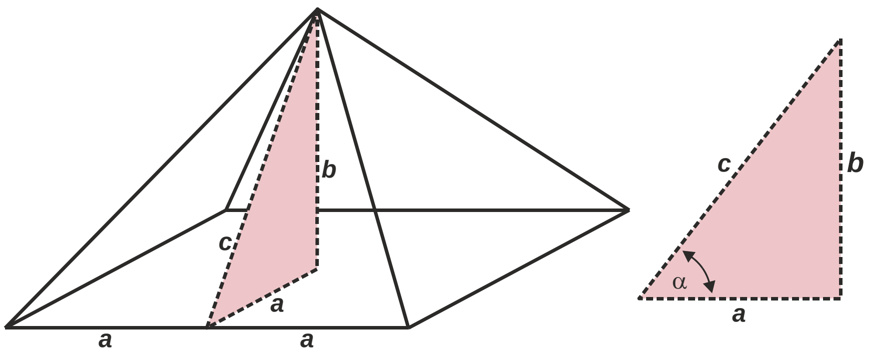
sa v nej po prvýkrát objavil úryvok z Herodotových[42] záznamov, ktorý bol neskôr východiskom pre rôzne interpretácie zlatého rezu. Podľa Taylora sa Herodotos vo svojich spisoch zmieňuje o istom pravidle, ktoré sa dozvedel od egyptských kňazov – obsah každej trojuholníkovej steny pyramídy sa rovná štvorcu jeho výšky.[43] [44] Tomuto Herodotovmu vyjadreniu venuje pozornosť aj matematik Herbert Westren Turnbull vo svojej knihe The Great Mathematicians [Veľkí matematici]:

„Istá pasáž v Herodotovi môže na základe drobného vylepšenia dávať vynikajúci zmysel. Mohlo by z nej vyplývať, že plocha každej trojuholníkovej steny pyramídy je rovná štvorcu jej zvislej výšky. A to dokazuje aj so skutočnými údajmi. Ak by to tak bolo, pomery výšky, sklonu a základne by mohli byť vyjadrené v hodnote zlatého rezu ako polomer kruhu k strane vpísaného desaťuholníku. Stručne povedané, toto už boli bohaté geometrické a aritmetické znalosti, ktoré si uchovávali kňazi v Egypte ešte pred tým, ako sa prví grécki cestovatelia oboznámili s matematikou."[45]

Aj ďalší odborníci a znalci matematiky, tak ako aj Martin Gardner a David Burton, uznávajú rovnaký výklad Herodota o zlatom reze:

„Uvádzalo sa, že grécky historik Herodotos sa od egyptských kňazov dozvedel, že rozmery Veľkej pyramídy boli volené tak, že obsah štvorca, ktorého strana bola výška Veľkej pyramídy sa rovnala obsahu jeho trojuholníkovej steny."[46]

Skutočne, ak budeme toto matematické pravidlo pri stavbe pyramídy dodržiavať, v jej rozmeroch sa objaví zlatý rez (obr. 21):



Obrázok 21: Zlatý rez vo vnútri pyramídy

[42] Herodotos (cca 484 – 425 p.n.l.) bol grécky historik, filozof a spisovateľ, prezývaný „Otec dejepisu"
[43] TAYLOR, John. *The Great Pyramid: Why was it Built? & who Build It?*. London: Longman, Roberts & Green, 1859. s. 294-296.
[44] HERZ-FISCHLER, Roger. *The Shape of the Great Pyramid*. Waterloo: Wilfrid Laurier University Press, 2000. s. 98-101.
[45] TURNBULL, Herbert Westren. *The Great Mathematicians*. London: New York University, 1961. s. 3.
[46] GARDNER, Martin. *Fads and Fallacies in the Name of Science*. New York: Courier Dover Publications, 1957. s. 178.

Označme a polovicu dĺžky základne pyramídy, b výšku pyramídy a c výšku strany pyramídy. Obsah každej trojuholníkovej steny vypočítame pomocou známeho vzorca:

$$S = \frac{(a \cdot 2) \cdot c}{2} = ac.$$

Rovnica, podľa ktorej bola táto pyramída údajne postavená, je

$$a \cdot c = b^2. \tag{1}$$

Použitím Pytagorovej vety na tento skúmaný pravouhlý trojuholník dostaneme vzťah

$$b^2 = c^2 - a^2. \tag{2}$$

Porovnaním (1) a (2) dostaneme

$$ca = c^2 - a^2,$$

$$c^2 - ca - a^2 = 0. \tag{3}$$

Z tejto kvadratickej rovnice (3) získame dve hodnoty c, kladná je však len jedna

$$c = \frac{a(1+\sqrt{5})}{2}$$

Môžeme teda vypočítať vzťah, ktorý existuje medzi dĺžkami c a a:

$$\frac{c}{a} = \frac{\frac{a(1+\sqrt{5})}{2}}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi.$$ [47] [48] [49]

Týmto výpočtom sme dokázali, že ak by konštrukcia Veľkej pyramídy vychádzala zo vzťahu, že obsah jej trojuholníkovej steny sa rovnal štvorcu jej výšky, potom by sa zlatý rez vo vnútri pyramídy ukrýval. Teraz označme α uhol, ktorý zviera stena so základňou (obr. 21), potom platí

$$\tan\alpha = \sqrt{\varphi}, \sin\alpha = \frac{\sqrt{\varphi}}{\varphi}, \cos\alpha = \frac{1}{\varphi},$$

a teda uhol α má veľkosť $51° \, 49' \, 38''$. Nie je možné prehliadnuť neobyčajnú zhodu tohto výpočtu so skutočnými rozmermi Veľkej pyramídy, ktoré nájdeme napríklad v publikácii The Shape of the Great Pyramid [Tvar Veľkej pyramídy] od Rogera Herz-Fischlera:

„Na začiatku pamätník meral asi 230 *metrov, strana základne* 147 *m cca na výšku, so šikmými stenami v sklone cca* $51° \, 50'$*.“*[50]

---

[47] GASPANI, Adriano. *Gli Egizi conoscevano la Sezione Aurea?*. [online]. [cit. 2012-04-10]. Dostupné na: http://www.duepassinelmistero.com/Sezioneaureaegizi.htm

[48] HERZ-FISCHLER, Roger. *The Shape of the Great Pyramid*. Waterloo: Wilfrid Laurier University Press, 2000. s. 93-97.

[49] BASTIONI, Manuel. *La favola della sezione aurea*. [online]. [cit. 2012-04-10]. Dostupné na: http://www.unich.it/progettistisidiventa/lavori-studenti/Bastioni_ Aurea.pdf

[50] HERZ-FISCHLER, Roger. *The Shape of the Great Pyramid*. Waterloo: Wilfrid Laurier University Press, 2000. s. 10.

Vidíme, že uhol, ktorý sme vypočítali, je veľmi blízko skutočnému. Na základe týchto údajov si teraz ešte overíme, či výskyt zlatého rezu a tradovaný Herodotov výrok skutočne platí aj pre reálne rozmery pyramídy. Máme

$$a = \frac{230}{2} = 115\ m;\ b = 147\ m.$$

Pomocou Pytagorovej vety vypočítame výšku trojuholníkovej steny pyramídy:

$$c = \sqrt{13225 + 21609}\ m = 186{,}64\ m.$$

Na tomto mieste už teda môžeme overiť pomer c/a:

$$\frac{c}{a} = \frac{186{,}64}{115} = 1{,}6229,$$

ktorý ako môžeme vidieť, je veľmi blízko k hodnote $\varphi \approx 1,618$. Okrem toho obsah trojuholníkovej steny je

$$\frac{(a \cdot 2) \cdot c}{2} = ac = 115\ m \times 186{,}64\ m = 21463{,}6\ m^2,$$

čo je tiež hodnota blízka k druhej mocnine výšky pyramídy:

$$b^2 = 147^2 = 21609\ m^2.$$[51]

Roger Fischler a George Markowsky vo svojich prácach ale dokazujú, že znalosti matematiky u Egypťanov neboli až také vycibrené a zakomponovanie zlatého rezu do pyramídy bolo len náhodné. Predovšetkým však poukazujú na to, že Herodotos doložil iba rozmery pyramídy, avšak o rovnostiach medzi obsahmi sa vôbec nezmieňuje. Zdôrazňujú, že pri pozornom čítaní Herodotovho doslovného prekladu, je naozaj potrebná značná dávka obrazotvornosti, aby sme v ňom našli odkazy na obsahy, a nie na jednoduché lineárne merania. Pôvodný text z Herodotových Dejín znie nasledovne:

„20 rokov bolo potrebných na vytvorenie tejto pyramídy, ktorá je štvorstranná a každá stena má všetky strany osem pletier a rovnakú výšku.“[52]

Už na prvý pohľad môžeme vidieť odlišnosť medzi týmto originálnym textom a slovami, ktoré sa pôvodne tradovali ako Herodotov citát. Okrem toho sú údaje o rozmeroch Veľkej pyramídy od Herodota výrazne skreslené. Spresnime, že pletra je staroveká jednotka merania, rovnajúca sa 100 stopám, teda $30\ m$. To znamená, že strana základne pyramídy, o ktorej sa Herodotos vo svojom diele zmienil, je zjavne

[51] GASPANI, Adriano. *Gli Egizi conoscevano la Sezione Aurea?*. [online]. [cit. 2012-04-10]. Dostupné na: http://www.duepassinelmistero.com/Sezioneaureaegizi.htm

[52] HERODOTUS. *The Histories*. Translated by Aubrey De Sélincourt. Harmondsworth: Penguin Books, 1954. s. 146-147.

dlhšia (800 stôp, $240\ m$) ako jej skutočná hodnota ($230\ m$). Výška pyramídy – osem pletier je však úplne nesprávna, takmer dvojnásobok tej reálnej (480 stôp, $147\ m$).[53]

Týmto by sme mohli rozbor pyramídy na základe Herodotovho citátu definitívne uzavrieť. Je úplne jasné, že jeho slová nemožno považovať za dôkaz existencie zlatého rezu vo Veľkej pyramíde. A aj keď to u niektorých priaznivcov zlatého rezu stále živí nejaké pochybnosti, musíme skonštatovať, že neslávnu zásluhu na spojení Veľkej pyramídy a zlatého rezu má John Taylor. Teória ekvivalencie obsahov, na ktorú nás naviedol, sa v pôvodnom Herodotovom texte vôbec nenachádza. Taylorovo vysvetlenie je celkom nepodložené, pretože vychádza z chybnej interpretácie Herodotových spisov a z bohatej predstavivosti.[54]

Existujú prinajmenšom dve hypotézy, ktoré technicky vysvetľujú konštrukciu pyramídy a preukazujú, že pri jej stavbe nebolo vôbec nutné poznať zlatý rez. Jedna je uvedená v knihe od Richarda J. Gillingsa Mathematics in the Time of the Pharaohs [Matematika v dobe faraónov]. Vychádza zo známeho Rhindovho papyrusu, konkrétne z úloh 56 a 60 zameraných na výpočet sekedu (jednotka egyptského merania sklonu strany pyramídy). Gillings tvrdí, že zlatý pomer sa môže kedykoľvek vynoriť za podmienky, že sa udržiava konštantný sklon steny v priebehu celej stavby pyramídy.[55]

Ďalšia hypotéza, jasne vysvetlená v práci The Riddle of the Pyramids [Tajomstvo pyramíd] od Kurta Mendelssohna, je založená na jednoduchom koncepte, podľa ktorého Egypťania používali dve jednotky dĺžky, jednu pre vertikálne vzdialenosti – lakeť, druhú pre horizontálne vzdialenosti – valec s priemerom jedného lakťa, ktorého obvod bol rovný π lakťom.[56][57]

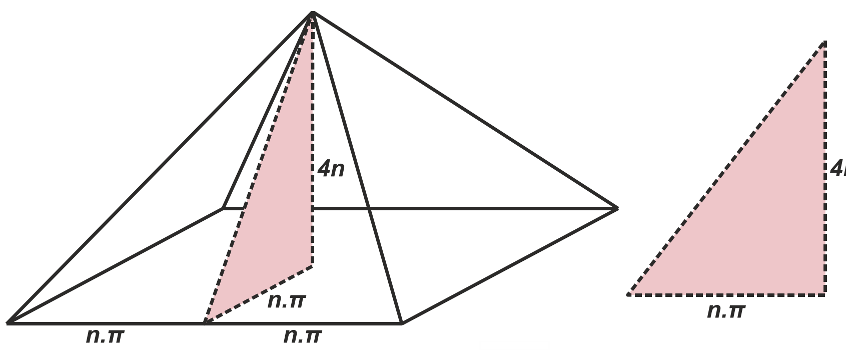
Výšku pyramídy merali pomocou palmových vlákien, ktoré však neboli príliš presné na veľké vzdialenosti. To ich donútilo použiť na vytýčenie dĺžky základne pyramídy koleso s vopred definovaným priemerom. Pre lepšiu predstavu si to môžeme znázorniť na nasledujúcom príklade: Zoberieme koleso o priemere $1\ m$, ktorým vymeriame základňu dlhú 10 otočiek, čiže $10\pi\ m$. Výšku pyramídy zvolíme dlhú

---

53 LIVIO, Mario. *Zlatý řez: Příběh fí, nejpodivuhodnějšího čísla na světě.* Praha: Dokořán, 2006. s. 56.
54 MARKOWSKY, George. Misconceptions about the Golden Ratio. *College Mathematics Journal 1*, 1992, s. 2-19.
55 GILLINGS, Richard J. *Mathematics in the Time of the Pharaohs*. Cambridge: MIT press, 1972. s. 185-187.
56 MENDELSSOHN, Kurt. *The Riddle of the Pyramids*. New York: Praeger Publishers, 1974. s. 64-73.
57 LIVIO, Mario. *Zlatý řez: Příběh fí, nejpodivuhodnějšího čísla na světě.* Praha: Dokořán, 2006. s. 58.

$10\ m$. Je zrejmé, že výsledná stavba obsahuje rozmery, ktoré sú medzi sebou v pomere π.[58]

Podľa Mendelssohnovej teórie Egypťania pri stavbe pyramídy používali jednoduchý vzťah $1:4$. Predchádzajúci príklad by potom v praxi vyzeral napríklad takto: „Vezmeme koleso s priemerom 1 lakťa a ním vytýčime dĺžku 200 váľaných lakťov (súčet počtu otáčok) a výšku 800 lakťov“. Pri takejto konštrukcii, ak uvažujeme všeobecný prípad s dĺžkou n váľaných metrov, bude mať trojuholník v priereze (obr. 22) základňu $n \cdot \pi$ a výšku $4n$.[59]



Obrázok 22: Konštrukcia pyramídy

Prepona trojuholníka vyjadrujúca výšku steny pyramídy sa na základe Pytagorovej vety rovná $n \cdot \sqrt{16 + \pi^2}$. Ak túto výšku dáme do pomeru s polovicou základne pyramídy $n \cdot \pi$, dospejeme k výbornému odhadu zlatého čísla: $\frac{\sqrt{16+\pi^2}}{\pi} = 1{,}61899...$, ktoré mohli Egypťania takýmto spôsobom náhodne vložiť do rozmerov pyramídy.[60] [61]

Mendelssohnova teória je založená na dohadoch, ktoré nie je možné overiť priamou skúškou. Určite však na nás pôsobí presvedčivo, nakoľko je oveľa rozumnejšie pripustiť, že dávni stavitelia používali jednoduchý pomer $1:4$ než by sa snažili do konštrukcie pyramídy zakomponovať špeciálne iracionálne čísla.

Aj keď v nás budú mnohé prepočty i naďalej evokovať myšlienku, že starí Egypťania zlatý rez skutočne poznali a vedome využívali, ostane už len na nás, či im

---

[58] GASPANI, Adriano. *Gli Egizi conoscevano la Sezione Aurea?*. [online]. [cit. 2012-04-10]. Dostupné na: http://www.duepassinelmistero.com/Sezioneaureaegizi.htm

[59] BASTIONI, Manuel. *La favola della sezione aurea*. [online]. [cit. 2012-04-10]. Dostupné na: http://www.unich.it/progettistisidiventa/lavori-studenti/Bastioni_ Aurea.pdf

[60] GASPANI, Adriano. *Gli Egizi conoscevano la Sezione Aurea?*. [online]. [cit. 2012-04-10]. Dostupné na: http://www.duepassinelmistero.com/Sezioneaureaegizi.htm

[61] BASTIONI, Manuel. *La favola della sezione aurea*. [online]. [cit. 2012-04-10]. Dostupné na: http://www.unich.it/progettistisidiventa/lavori-studenti/Bastioni_ Aurea.pdf

budeme veriť alebo nie. V tejto časti sme však v skratke vysvetlili spoľahlivé dôkazy, podľa ktorých egyptská civilizácia nemohla vsadiť úmyselne zlatý rez do svojho pamätníka. Kapitolu môžeme uzavrieť konštatovaním, že s trochou námahy a s dostatkom fantázie sme schopní nájsť zlatý rez takmer všade, nielen v takej zložitej stavbe, akou je Veľká pyramída.

ZÁVER

V úvodnej časti svojej bakalárskej práce som sa snažila priblížiť a popísať fenomén zlatého rezu. Po vysvetlení kľúčových pojmov a vyjadrení číselnej hodnoty zlatého rezu, ktorým som venovala prvú kapitolu, som pokračovala v objasnení základných metód geometrickej konštrukcie zlatého rezu. Podrobné postupy konštrukcie v druhej kapitole som pre lepšiu názornosť doplnila obrázkami.

Poznatky zlatého rezu v geometrii som v tretej kapitole chronologicky popísala od jeho chápania u Pytagorejcov po Euklida, ktorý ako prvý tento pomer matematicky vyjadril v diele Základy. Zistila som, že záujem Pytagorejcov o tento záhadný pomer pramenil v ich silnom vzťahu k pentagramu. Okrem Pytagorejcov som sa vo svojej práci zaoberala aj Platónom a jeho známymi platónskymi telesami, ktorých rozmery a symetrické vlastnosti sú so zlatým rezom najčastejšie spájané.

V poslednej kapitole som na základe analýzy a konfrontácie vedeckých článkov skúmala do akej miery, v rámci umeleckých a architektonických diel, je toto číslo použité zámerne. Vychádzala som zo starovekých nákresov pentagramu a egyptských pamiatok, ktoré som analyzovala v súvislosti s vedomým či nevedomým využitím zlatého rezu. Odhalením opísaných skutočností som však dospela k názoru, že nie je príliš pravdepodobné, aby egyptská civilizácia objavila a zámerne využívala zlatý rez.

Po dôkladnom štúdiu, získaní a zhodnotení rôznych pohľadov na túto tému, sa môžem aj ja prikloniť na stranu tých, ktorí sú presvedčení, že väčšina autorov zlatý rez do svojich diel len nevedomky dosadila. Vďaka istej náhode, prílišnému nadšeniu a falošným úsudkom vyznávačov zlatého rezu sa teraz tieto hodnotné diela a stavby dostali do povedomia aj v spojení so zlatým pomerom.

Slovenská literatúra týkajúca sa problematiky zlatého rezu nie je taká rozsiahla ako zahraničné diela, preto som sa zamerala najmä na odborné knihy a vedecké články zahraničných autorov. Pred niekoľkými rokmi vyšla v českom preklade kniha Maria Livia Zlatý rez, ktorá bola veľmi podnetná pri písaní tejto práce. Väčšina ďalších kníh a článkov však bola v anglickom, nemeckom a talianskom jazyku.

Prínosom tejto práce je poskytnutie základných poznatkov o iracionálnom čísle fí, známom zlatom reze, ktoré už presiahlo hranice matematiky a stalo sa číslom dokonalej proporcie. Okrem iného tu preto po obhájení či vyvrátení názorov mnohých odborníkov na použitie zlatého rezu vo vybraných architektonických dielach nechávam priestor samotným čitateľom, aby si sami vytvorili na túto problematiku vlastný úsudok.

ZOZNAM POUŽITEJ LITERATÚRY

1. BARTH, Elisabeth, et al. *Anschauliche Analytische Geometrie. Übungen mit Lösungen*. Berlin: Oldenbourg Schulbuchverlag, 2000. 284 s. ISBN 978-3-486-03023-5.
2. BASTIONI, Manuel. *La favola della sezione aurea*. [online]. [cit. 2012-04-10]. Dostupné na: http://www.unich.it/progettistisidiventa/lavori-studenti/Bastioni_Aurea.pdf
3. BEUTELSPACHER, Albrecht – PETRI, Bernhard. *Der Goldene Schnitt*. Heidelberg; Berlin; Oxford: Spektrum Akademischer Verlag, 1996. 192 s. ISBN 978-3-860-25404-2.
4. BOYER, Carl Benjamin – MERZBACH, Uta Caecilia. *A History of Mathematics*. New Yersey: John Wiley & Sons, 2010. 640 s. ISBN 978-0-470-63056-3.
5. BRUINS, Evert Marie – RUTTEN, Marguerite. *Textes mathematiques de Suse. Memoires de la Mission Archeologique en Iran.* Paris: Paul Geuthner, 1961. 136 s.
6. BURKERT, Walter. *Weisheit und Wissenschaft. Studien zu Pythagoras, Philolaos und Platon*. Nürnberg: Verlag Hans Carl, 1962. 496 s.
7. COXETER, Harold Scott, et al. *The Coxeter Legacy: Reflections And Projections*. Toronto: The American Mathematical Society, 2006. 320 s. ISBN 978-0-821-83722-1.
8. CRAATS, Jan van de. Elementary Problem 3007. *The American Mathematical Monthly 7*, 1986, s. 572.
9. EUCLID. *Elements. Book VI, Definition 3.* [online]. [cit. 2012-02-04]. Dostupné na: http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookVI/bookVI.html#defs
10. EUCLID. *Elements. Book XIII, Proposition 16, 17.* [online]. [cit. 2012-05-20]. Dostupné na: http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookXIII/propXIII16.html
11. FRITZ, Kurt von. *The Discovery of Incommensurability by Hippasus of Metapontum*. Berlin: Springer-Verlag, 2004. s. 354. ISBN 978-1-402-00081-2.
12. FUŸE, Colonel Allotte de la. *Le Pentagramme Pythagoricien, Sa Diffusion, Son Emploi dans le Syllabaire Cuneiforme*. Paris: P. Geuthner, 1934. 56 s.
13. GARDNER, Martin. *Fads and Fallacies in the Name of Science*. New York: Courier Dover Publications, 1957. 363 s. ISBN 978-0-486-20394-2.

14. GASPANI, Adriano. *Gli Egizi conoscevano la Sezione Aurea?.* [online]. [cit. 2012-04-10]. Dostupné na: http://www.duepassinelmistero.com/Sezioneaureaegizi.htm
15. GILLINGS, Richard J. *Mathematics in the Time of the Pharaohs*. Cambridge: MIT press, 1972. 286 s. ISBN 978-0-262-07045-4.
16. HERODOTUS. *The Histories*. Translated by Aubrey De Sélincourt. London: Penguin Books, 2003. 771 s. ISBN 978-0-140-44908-2.
17. HERZ-FISCHLER, Roger. *A Mathematical History of Division in Extreme and Mean Ratio*. Waterloo: Wilfrid Laurier University Press, 1987. 191 s. ISBN 0-88920-152-8.
18. HERZ-FISCHLER, Roger. *The Shape of the Great Pyramid*. Waterloo: Wilfrid Laurier University Press, 2000. 293 s. ISBN 978-0-889-20324-2.
19. HERZ-FISCHLER, Roger. What Did Herodotus Really Say? or How to Build (a Theory of) the Great Pyramid. *Environment and Planning B 6*, 1979, s. 89-93.
20. HOFSTETTER, Kurt. A Simple Construction of the Golden Section. *Forum Geometricorum 2*, 2002, s. 65-66.
21. LAWLOR, Robert. *Sacred Geometry. Philosophy & Practice*. London: Thames & Hudson, 1982. 112 s. ISBN 978-0-500-81030-9.
22. LIVIO, Mario. *Zlatý řez: Příběh fí, nejpodivuhodnějšího čísla na světě.* 1. vyd. Praha: Dokořán, 2006. 256 s. ISBN 80-7363-064-8.
23. MARKOWSKY, George. Misconceptions about the Golden Ratio. *College Mathematics Journal 1*, 1992, s. 2-19.
24. MENDELSSOHN, Kurt. *The Riddle of the Pyramids.* New York: Praeger Publishers, 1974. 224 s. ISBN 978-0-030-32216-7.
25. ODOM, George. Elementary Problem 3007. *The American Mathematical Monthly 7*, 1983, s. 482-483.
26. REIDT Friedrich – WOLFF Georg. *Die Elemente der Mathematik. Kurzausgabe. Oberstufe: Arithmetik, Algebra, Geometrie, Analysis, Trigonometrie*. Hannover: Schroedel, 1962. 344 s.
27. ŘÍMAN, Josef, et al. *Malá československá encyklopédia*. Praha: Academia, 1987. 928 s.
28. SAMOSATA, Lucian of. *The Works of Lucian of Samosata*. Translated by H. W. Fowler and F. G. Fowler. Montana: Kessinger Publishing, 2004. 296 s. ISBN 978-1-419-19492-4.

29. STAKHOV, Alexey. *The Mathematics of Harmony: From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science*. London: World Scientific Publ., 2008. 694 s. ISBN 978-981-277-582-5.
30. TAYLOR, John. *The Great Pyramid: Why was it Built? & who Build It?*. London: Longman, Roberts & Green, 1859. 407 s.
31. TURNBULL, Herbert Westren. *The Great Mathematicians*. London: New York University, 1961. 141 s. ISBN 978-0-814-70419-6.
32. VERHULST, Ferdinand – WALCHER, Sebastian. *Das Zebra-Buch zur Geometrie*. Berlin: Springer-Verlag, 2010. 304 s. ISBN 978-3-642-05247-7.
33. WALSER, Hans. *Der Goldene Schnitt*. Leipzig: B. G. Teubner Verlag, 1996. 140 s. ISBN 978-3-815-42070-6.