UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

# MATEMATIKA VO FILMOCH A ROMÁNOCH

BAKALÁRSKA PRÁCA

**2012** **Jana TRAJOVÁ**

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

# MATEMATIKA VO FILMOCH A ROMÁNOCH

## BAKALÁRSKA PRÁCA

| | |
|---|---|
| Študijný program: | Ekonomická a finančná matematika |
| Študijný odbor: | 1114 Aplikovaná matematika |
| Školiace pracovisko: | Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky |
| Vedúci práce: | RNDr. Stehlíková Beáta, PhD. |

Bratislava 2012

**Jana TRAJOVÁ**

29874577

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

# ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

**Meno a priezvisko študenta:** Jana Trajová
**Študijný program:** ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
**Študijný odbor:** 9.1.9. aplikovaná matematika
**Typ záverečnej práce:** bakalárska
**Jazyk záverečnej práce:** slovenský

**Názov:** Matematika vo filmoch a románoch

**Cieľ:** Zozbierať ukážky z filmov a kníh, v ktorých sa vyskytuje vysokoškolská matematika, skomentovať ich, doplniť podrobnejšími výpočtami a vysvetleniami, atď.

**Vedúci:** RNDr. Mgr. Beáta Stehlíková, PhD.

**Dátum zadania:** 16.10.2011

**Dátum schválenia:** 27.10.2011

doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

.......................................................... ..........................................................

študent vedúci

**Poďakovanie** Chcela by som sa v prvom rade poďakovať mojej školiteľke, RNDr. Beáte Stehlíkovej, PhD., za jej ochotu, pomoc, čas, cenné rady a poskytnutú literatúru. Vďaka patrí aj združeniu ZA EFM, ktoré mi umožnilo zapožičanie literatúry z Chicagskej knižnice. Ďakujem aj svojej rodine a priateľom, ktorí ma podporujú počas môjho štúdia.

# Abstrakt

TRAJOVÁ, Jana: Matematika vo filmoch a románoch [Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: RNDr. Beáta Stehlíková, PhD., Bratislava, 2012, 51 s.

Cieľom našej práce je poukázať na matematiku ako zaujímavý a zábavný predmet prostredníctvom ukážok z filmov a románov. Ukážky sú naviac doplnené o podrobnejšie výpočty a vysvetlenia. Takýto netradičný pohľad môže byť motiváciou pre štúdium matematiky.

**Kľúčové slová:** Fibonacciho postupnosť, teória hier, diferenciálny a integrálny počet, diferenciálne rovnice

# Abstract

TRAJOVÁ, Jana: Mathematics in films and novels [Bachelor Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: RNDr. Beáta Stehlíková, PhD., Bratislava, 2012, 51p.

The goal of our work is to present mathematics as an interesting and funny subject via snippets of films and novels. The snippets are accompanied by detailed calculations and explanations. This unorthodox view can be a motivation to the study of mathematics.

**Keywords:** Fibonacci sequence, game theory, differential and integral calculus, diferential equations

# Obsah

# Predhovor

*Mathematics may not teach us how to add love*
*or how to minus hate, but it gives us at least*
*one great hope that every problem has a solution.*
(Unknown)

Matematika je jednou z najfascinujúcejších vied. Tam, kde iné nevedia ako ďalej, ona nájde riešenie. Žiaľ, v priebehu rokov bola prezentovaná ako náročný, abstraktný predmet písaný nezrozumiteľnými znakmi v obsiahlych skriptách a uložený na najvyšších policiach knižníc. Pre bežného človeka nedosiahnuteľná. Či chceme alebo nechceme, stále je okolo nás. Neskrýva sa. Je i tam, kde by ju nik nehľadal. V knihách, románoch, filmoch. A tu rúca predsudky o svojej strohosti, suchopárnosti.

Táto práca je pokračovaním minuloročnej bakalárskej práce Martiny Ďuratnej, ktorej cieľom bolo prostredníctvom nevšedných a zaujímavých matematických príkladov z kníh a filmov, vzbudiť záujem, motivovať ľudí k štúdiu matematiky. Naša práca dopĺňa niektoré kapitoly o nové zaujímavé príklady, ale obsahuje i nové témy. Cieľ sa nemení. Naďalej chceme pritiahnuť ľudí ku kráľovnej všetkých vied, k matematike.

Ráčte vstúpiť do sveta integrálov, derivácií, Fibonacciho čísel, hier, do sveta matematiky!

# Úvod

Matematika nie je obľúbený predmet. Výrok, ktorému môžme priradiť pravdivostnú hodnotu jedna. Je kráľovnou vied, fascinuje ľudí staročia, ale presne toľko rokov ich aj desí. Oprávnene?

Táto bakalárska práca je tým elementom, ktorého úlohou nie je demotivovať ľudí od štúdia matematiky. Naopak, na zaujímavých príkladoch, ale nie zo skrípt či učebníc, ale z filmov a kníh, vynechajúc strohý štýl a definície, chce vzbudiť záujem o jej štúdium.

Vybrané motivačné príklady sú rozdelené do troch kapitol.

Prvá kapitola sa venuje Fibonacciho postupnosti a jej spojeniu s Pascalovým trojuholníkom či zlatým rezom. Záver kapitoly patrí diferenciálnym rovniciam.

V druhej kapitole sa oboznámime s najslávnejšími priekopníkmi teórie hier, a to Johnom F. Nashom a Johnom von Neumannom a najmä pojmami, Nashovo ekvilibrium, resp. minimax, ktoré ich preslávili.

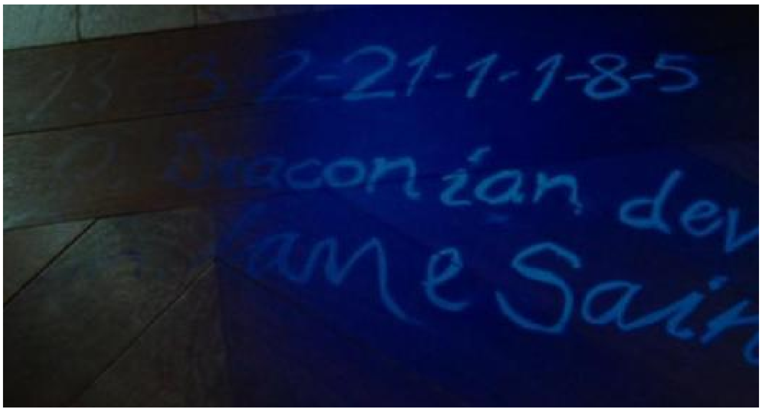
Tretia, posledná kapitola je venovaná prevažne integrálom a metódam na ich riešenie.

# 1 Diferenčné a diferenciálne rovnice

Diferenčné a diferenciálne rovnice sú nástrojom na popis javov v živej i neživej prírode nevynímajúc ani tie, ktoré sa objavujú v knihách či filmoch.

## 1.1 Fibonacciho nesmrteľní králici

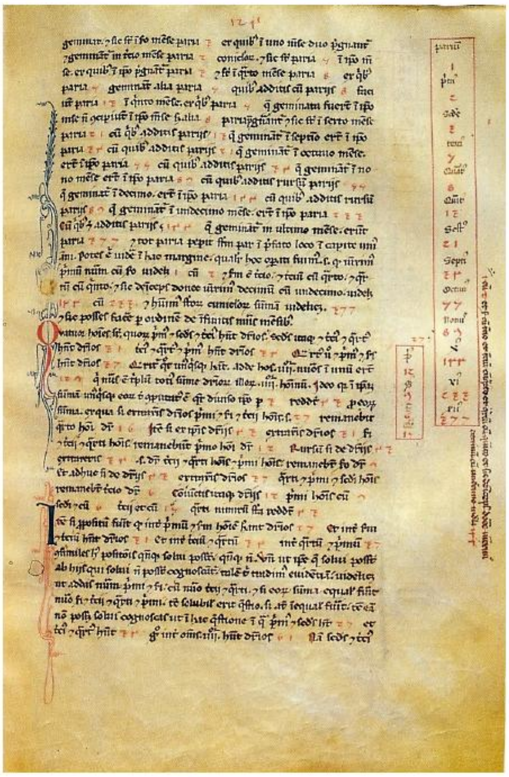
Anagramy, symboly, šifry, kľúč k pradávnemu tajomstvu, grálu. $13 - 3 - 2 - 2 - 1 - 1 - 1 - 8 - 5$. To zanecháva umierajúci kurátor Louvra, Jacques Sauniére, vo filme ***Da Vinciho kód*** [36]. Odhaliť identitu jeho vraha pomáha aj univerzitný profesor a špecialista na symboly, Robert Langdon a kryptologička Sofie Nevenová. Práve tá zistí, že osem zdanlivo nesúvisiacich čísel sú členmi najslávnejšej matematickej postupnosti, Fibonacciho postupnosť celých čísel. O krok bližšie k odkrytiu tajomstva, o krok bližšie k svätému grálu.




**Obr. 1:** Fibonacciho postupnosť vo filme Da Vinciho kód [36]

Než matematicky definujeme Fibonacciho postupnosť, načrime do histórie, konkrétne do roku 1202. V tomto roku Leonardo z Pisy, prezývaný Fibonacci, vydáva knihu Liber Abaci, ktorá zosumarizovala vtedajšie poznatky z oblasti algebry, aritmetiky, teórie čísel a obsahovala i demonštrujúce príklady, ako napríklad nasledujúci problém týkajúci sa populácie králikov:

*Dospelý pár králikov sa pári raz do mesiaca. Na začiatku roka máme jeden pár novonarodených králikov. Na konci prvého mesiaca tento pár dospeje. Na konci druhého mesiaca tento pár splodí nový mladý pár. Proces dospievania a plodenia pokračuje. Akoby zázrakom žiadny králik neumrie.* [15]

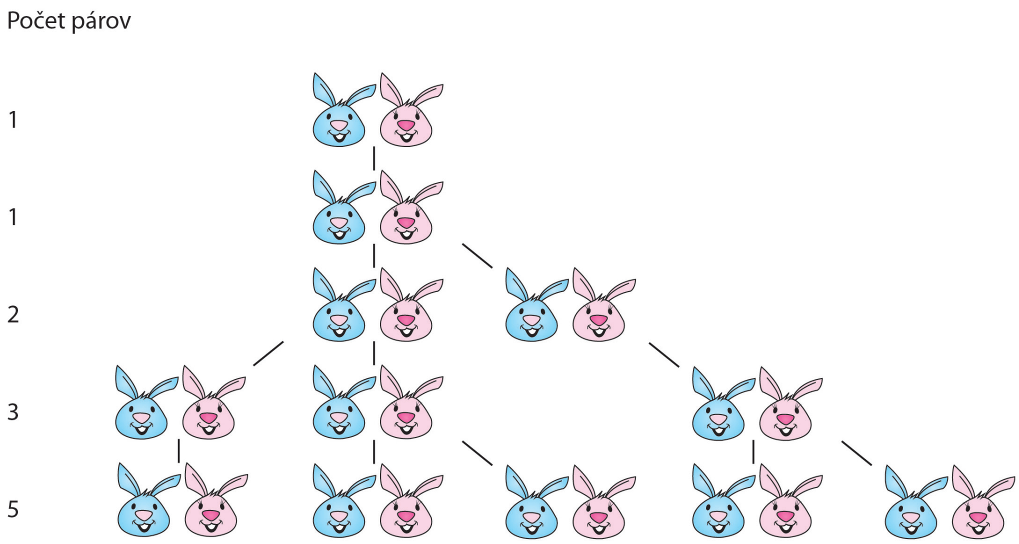


**Obr. 2:** Úloha o králikoch v *Liber Abaci* [15]

Fibonacciho zaujímalo, koľko párov králikov bude na konci roka. Nuž spočítajme nesmrteľných králikov z príkladu :

- v prvom a druhom mesiaci máme jeden pár, ktorý dospieva a môže sa v druhom mesiaci rozmnožovať,
- v treťom mesiaci sú už 2 páry, pôvodný a nový mladý pár,
- v štvrtom mesiaci máme pôvodný králičí pár, ktorý má opäť nové potomstvo a pár z prvého vrhu, čiže 3 páry,
- v piatom mesiaci máme pôvodný pár s novým potomstvom a potomstvom z druhého vrhu, pár z prvého vrhu a jeho potomstvo, 5 párov králikov.

Počet králikov začiatkom mesiaca je teda 1, 1, 2, 3, 5 .. (obr.3).




**Obr. 3:** Fibonacciho králici

Fibonacciho postupnosť čísel je definovaná rekurentným vzťahom:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 2, n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$
$$F_1 = 1, F_2 = 1.$$

To znamená, že každý člen postupnosti je súčtom predchádzajúcich dvoch členov.

Všimnime si, že (1) popisuje situáciu s králičími pármi: počet králičích párov na konci $n$-tého roka, $(F_n)$, je rovný súčtu králičích párov na konci $(n-1)$-vého roka $(F_{n-1})$ a novonarodených králičích párov, ktoré sa narodia králičím párom starším ako dva mesiace $(F_{n-2})$.

Odpoveďou na Fibonacciho otázku, koľko králičích párov bude na konci roka, je dvanásty člen Fibonacciho postupnosti $F_{12}$. Jeho hodnotu použitím (1) ľahko spočítame, je ňou číslo 144.

Ďalšou možnosťou ako vyjadriť $n$-tý člen postupnosti je explicitné vyjadrenie, t. j. priamy vzorec, *Binetova formula* [26]:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]. \tag{2}$$

Táto škaredo vyzerajúca formula naozaj dáva celočíselné členy Fibonacciho postupnosti. Dôkaz urobíme matematickou indukciou.

Pre $n = 1$ a pre $n = 2$ rovnosť platí, pretože :

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^1 - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^1 \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{2\sqrt{5}}{2} \right) = 1,$$

$$\begin{aligned} F_2 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+2\sqrt{5}+5-1+2\sqrt{5}-5}{4} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{4\sqrt{5}}{4} \right) = 1. \end{aligned}$$

Predpokladajme, že (2) platí pre $1, 2, \ldots, n-1, n$ (indukčný predpoklad). Ukážeme, že potom platí aj pre člen $F_{n+1}$. Dosadením indukčného predpokladu do rekurentného predpisu (1) dostávame :

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= F_n + F_{n-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] + \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \right]. \end{aligned}$$

Člen $F_n$ prepíšeme tak, aby obsahoval také výrazy ako $F_{n-1}$:

$$\begin{aligned} F_{n+1} = &\frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \right] \\ &+ \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \right]. \end{aligned}$$

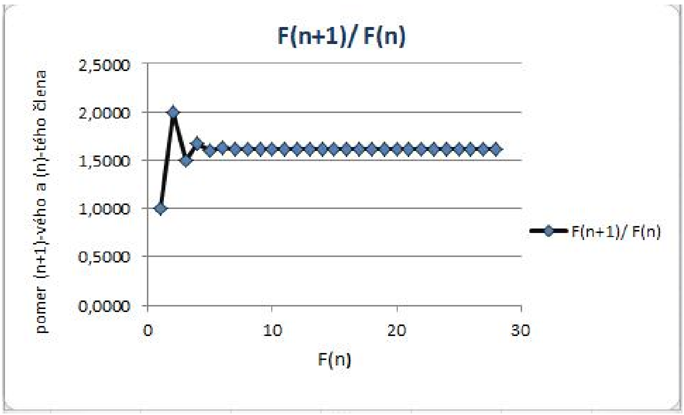
Ďalšími elementárnymi úpravami dostaneme člen $F_{n+1}$:

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 \right) - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1 \right) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]. \end{aligned}$$

Binetova formula je týmto dokázaná.

**Zlatý rez**

Ostaňme ešte pri Fibonacciho postupnosti. Uvažujme podiely dvoch po sebe idúcich čísel Fibonacciho postupnosti, t. j. $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ kde $F_n$ je n-té Fibonacciho číslo. Postupnosť môžme znázorniť graficky (obr. 4, pre lepšiu názornosť sme body reprezentujúce členy postupnosti pospájali).




**Obr. 4:** Graf postupnosti $F(n+1)/F(n)$

Vidíme, že pomer čísel s rastúcim $n$ sa približuje k istej hodnote. Spočítajme ju.

Jedným zo spôsobov je použitie Binetovej formuly (2):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]}.$$

Čitateľa aj menovateľa zlomku prenásobíme výrazom $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-\frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}}{1-\frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}} \tag{3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}\right)^{n}}{1-\left(\frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}\right)^{n}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Zlomok $\frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}=\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}=-0,382$ je v absolútnej hodnote menší ako 1, preto limita jeho $n$-tej mocniny s $n$ idúcim do nekonečna je rovná 0. Limita postupnosti nadobúda hodnotu $\frac{1+\sqrt{5}}{2}\doteq 1,61803398$. Označuje sa tiež $\phi$[1], ale najslávnejšie pomenovanie pre

[1]označenie $\phi$ je na počet Feidiasa, antického sochára [23]

$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ je zlatý rez. [23]

Zlatý rez, antickými mysliteľmi označovaný ako najkrajší pomer či ideál krásy. Johannes Kepler dokonca prehlásil: „*Geometria má dva poklady: Pytagorovu vetu a zlatý rez. To prvé má cenu zlata, to druhé pripomína skôr drahocenný kameň.*"[23] Jeho približnú hodnotu vypočítal okolo roku 300 pred n.l. Euklides [2], keď sa zaoberal otázkou, ako rozdeliť danú úsečku na dve časti tak, aby pomer celej úsečky k väčšej časti bol rovnaký ako pomer väčšej časti k menšej.

Ak označíme dĺžku úsečky $d$ a jej dlhšiu časť po rozdelení $x$, platí:

$$\frac{d}{x} = \frac{x}{d-x}.$$

Po úprave dostaneme kvadratickú rovnicu $x^2 + dx - d^2 = 0$, ktorá má dva korene:

$$x_1 = d\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = d\frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

Keďže hľadáme pomer úsečiek, uvažujeme len kladný koreň rovnice t. j $x_1 = d\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Teda

$$\frac{d}{x} = \frac{d}{d\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi.$$

Zlatý rez sa spája s umením, architektúrou, prírodou, dokonalými proporciami tela. Práve tie sú spomínané v románe *Dana Browna* ***Da Vinciho kód*** [3]:

> *"Bingo." Na plátne sa začali objavovať obrázky v rýchlom slede - borovicové šišky, listy na stonkách rastlín, bunkové delenie hmyzu - a na všetkých sa prejavoval rovnaký zákon zlatého rezu. "To je úžasné!" vykríkol ktosi. "Hej," ozval sa iný, "ale ako to súvisí s umením? Aha!"spomenul si Langdon. "Dobre, že ste mi to pripomenuli." Ukázal ďalší obrázok - bledý, zažltnutý pergamen so slávnou da Vinciho kresbou nahého muža - Vitruviovho - pomenovaného podľa Marca Vitruvia, vynikajúceho rímskeho architekta, ktorý chválil zlatý rez vo svojom diele De architectura. "Nikto neporozumel božskej stavbe ľudského tela lepšie než Leonardo da Vinci. V snahe zmerať presný pomer ľudských kostí exhumoval mŕtvoly. Ako prvý dokázal, že ľudské telo je doslova stvorené zo stavebných kameňov, ktorých vzájomný pomer sa vždy rovná PHI." Študenti sa naňho pochybovačne pozreli.*

*"Neveríte?" spýtal sa Langdon. "Keď sa pôjdete najbližšie sprchovať, vezmite si so sebou meter." Niekoľko študentov, ktorí sa venovali futbalu, sa rozrehotalo. "A nielen športovci," pokračoval Langdon, "ale všetci. Chlapci i dievčatá. Skúste to. Zmerajte si vzdialenosť od temena hlavy po zem. Potom ju vydeľte vzdialenosťou od pupku po zem. Môžete trikrát hádať, aké číslo vám vyjde. Hádam len nie PHI!" vykríkol neveriacky jeden zo športovcov. "Presne tak," odvetil Langdon. "Jedna celá šesťstoosemnásť tisícin. Mám vám dať ešte jeden príklad? Zmerajte vzdialenosť od pleca po končeky prstov na rukách a vydeľte ju vzdialenosťou od lakťa po končeky tých istých prstov. PHI. Mám pokračovať? Vydeľte vzdialenosť od bokov po zem vzdialenosťou od kolien po zem. Zase PHI. Nech meriate ako meriate, vždy dostanete PHI. Priatelia, my všetci predstavujeme živý hold, ktorý vzdávame zlatému rezu." Langdon aj potme videl, akí sú všetci ohúrení. Pocítil dôverne známe teplo, ktoré sa mu rozlievalo po tele. Kvôli tomu učil.* [3]

Nielen majster Da Vinci, nielen antickí maliari, sochári či stavitelia pred mnohými storočiami si lámali hlavy s dokonalými proporciami a tvorili diela, ktorým podstata spočívala v zlatom pomere. Otázka proporcionálnej dokonalosti zaujala v 21. storočí oktávanov kežmarského gymnázia. S metrom a kalkulačkou došli k zisteniam uvedeným v tabuľke 1. Namerané pomery sú:

- pomer 1 = pomer vzdialenosti od temena po zem ku vzdialenosti od pupka po zem,
- pomer 2 = pomer vzdialenosti ramena a koncov prstov ku vzdialenosti od lakťa po konce prstov,
- pomer 3 = pomer vzdialenosti bokov po zem ku vzdialenosti kolena po zem.

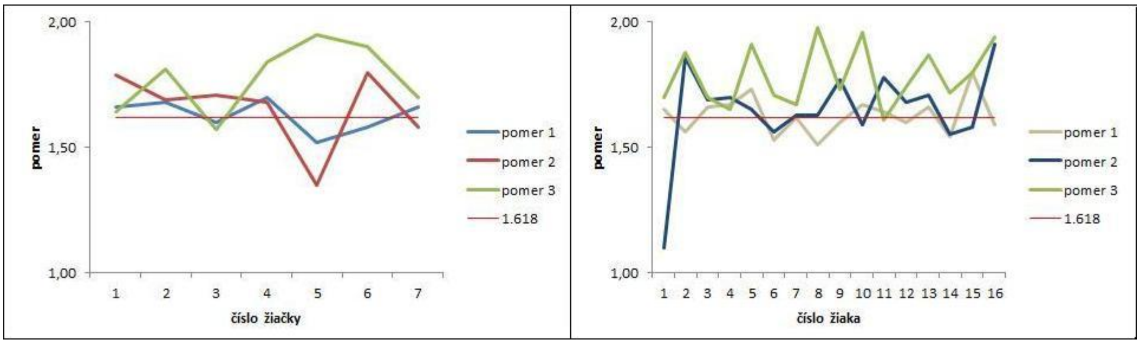
Oktávania zhodnotili, že nespĺňajú ideál krásy, pretože ich namerané pomery sa nerovnajú ideálnej hodnote $\phi \approx 1,618$ [25]. Ale je to skutočne tak? Znázornime ešte pomery u dievčat a chlapcov graficky (obr.5).

Z grafov síce vidíme, že pomery sa odlišujú od zlatého pomeru, ale aby sme zamietli proporcionálnu dokonalosť oktávanov to nestačí. Otestujeme to štatisticky v programe

| Číslo žiačky | pomer 1 | pomer 2 | pomer 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1.66 | 1.79 | 1.64 |
| 2 | 1.68 | 1.69 | 1.81 |
| 3 | 1.6 | 1.71 | 1.57 |
| 4 | 1.7 | 1.68 | 1.84 |
| 5 | 1.52 | 1.35 | 1.95 |
| 6 | 1.58 | 1.8 | 1.9 |
| 7 | 1.66 | 1.58 | 1.7 |
| priemer | 1.628 | 1.646 | 1.771 |

| Číslo žiaka | pomer 1 | pomer 2 | pomer 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1.65 | 1.1 | 1.7 |
| 2 | 1.56 | 1.86 | 1.88 |
| 3 | 1.66 | 1.69 | 1.7 |
| 4 | 1.67 | 1.7 | 1.65 |
| 5 | 1.73 | 1.65 | 1.91 |
| 6 | 1.53 | 1.56 | 1.71 |
| 7 | 1.62 | 1.63 | 1.67 |
| 8 | 1.51 | 1.63 | 1.98 |
| 9 | 1.6 | 1.77 | 1.73 |
| 10 | 1.67 | 1.59 | 1.96 |
| 11 | 1.64 | 1.78 | 1.61 |
| 12 | 1.6 | 1.68 | 1.74 |
| 13 | 1.66 | 1.71 | 1.87 |
| 14 | 1.545 | 1.55 | 1.72 |
| 15 | 1.8 | 1.58 | 1.8 |
| 16 | 1.59 | 1.91 | 1.94 |
| priemer | 1.627 | 1.681 | 1.785 |

**Tabuľka 1:** Oktáva a zlatý rez [25]




**Obr. 5:** Pomery oktávanov znázornené v grafoch

**R** použitím Studentovho t- testu na hladine významnosti $\alpha = 0,05$. Budeme testovať tieto hypotézy:

$$H_0 : p_i = \phi,$$

$$H_1 : p_i \neq \phi,$$

kde $\phi$ je zlatý pomer a $p_i$ predstavuje jednotlivé pomery. Pred samotným testovaním si podľa knihy [5] pripomeňme princíp t-testu.

Studentov jednovýberový t-test je založený na predpoklade, že dáta $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (v našom prípade namerané pomery) sú navzájom nezávislé a sú z normálneho rozdelenia $N(\mu, \sigma^2)$, kde $\mu$ je stredná hodnota a $\sigma^2$ variancia. Ani jeden z týchto parametrov nepoznáme. Ak chceme testovať hypotézu $H_0 : \mu = \mu_0$, najskôr odhadneme parametre $\mu, \sigma$ ako výberový priemer $\bar{x}$ a štandardnú odchýlku $s$. Ak by sme mali k dispozícii presnú hodnotu $\sigma$, štatistika $\frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ by mala za platnosti $H_0$ rozdelenie $N(0,1)$. Treba si však uvedomiť, že skutočnú hodnotu nikdy neurčíme presne. Máme k dispozícii len odhad $s$. Ak ho do uvedenej štatistiky dosadíme za $\sigma$, dostaneme $\frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$. To už nemá $N(0,1)$ rozdelenie, a to kvôli ťažším chvostom, ktoré sú spôsobené tým, že v menovateli máme namiesto $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ hodnotu $\frac{s}{\sqrt{n}}$, ktorá je "v priemere menšia" [2]. Delenie menším číslom vedie k väčším (v absolútnej hodnote) hodnotám štatistiky. Konkrétne, rozdelenie štatistiky bude Studentovo, s počtom stupňov voľnosti $n-1$. Znalosť tohto rozdelenia nám umožňuje vypočítať kritické hodnoty alebo p-hodnoty.

P-hodnoty dostaneme ako súčasť výstupu aj pri použití softvéru **R**. Ak p-hodnota pri t-testoch vyjde menšie ako $0,05$, hypotézu $H_0$ zamietneme a bude platiť $H_1$, teda oktávania nespĺňajú ideál krásy. Naopak, ak p-hodnota bude väčšia ako 0,05, tvrdenie o ideálnych proporciách nezamietneme.

Pred použitím t-testu v **R**-ku musíme ešte overiť predpoklad normality dát. Použitím na to určených testov v **R**[3] sme normalitu našich dát nezamietli. Možme testovať.

```
> shapiro.test(pomer1[pohlavie=="F"])

        Shapiro-Wilk normality test

data:  pomer1[pohlavie == "F"]
W = 0.9228, p-value = 0.4913

> t.test(pomer1[pohlavie=="F"], alternative="two.sided", mu=(1+sqrt(5))/2, conf.level=0.95)

        One Sample t-test

data:  pomer1[pohlavie == "F"]
t = 0.4346, df = 6, p-value = 0.679
alternative hypothesis: true mean is not equal to 1.618034
95 percent confidence interval:
 1.569249 1.687894
sample estimates:
mean of x
 1.628571
```

**Obr. 6:** Overenie predpokladu normality dát a testovanie hypotézy t-testom v R

Zo získananých p-hodnôt, ktoré sú zaznamenané v tabuľke 2, pre pomer 1 a pomer 2 nezamietneme tvrdenie o proporcionálnej dokonalosti, ale pre pomer 3 u obidvoch pohlaví ideál krásy je zamietnutý.

Podobných hypotéz môžeme na základe nameraných dát vytvoriť viac, napríklad

[2] Vieme, že $s^2$ je nevychýlený odhad pre $\sigma^2$, t. j. $E[s^2] = \sigma^2$, pozri napr. [14]. Použitím vzťahu $D[X] = E[X^2] - (E[X])^2$ pre $X = s$ dostaneme $\sigma^2 = E[s^2] = D[s^2] + (E[s])^2 > (E[s])^2$, z čoho vyplýva $E[s] < \sigma$

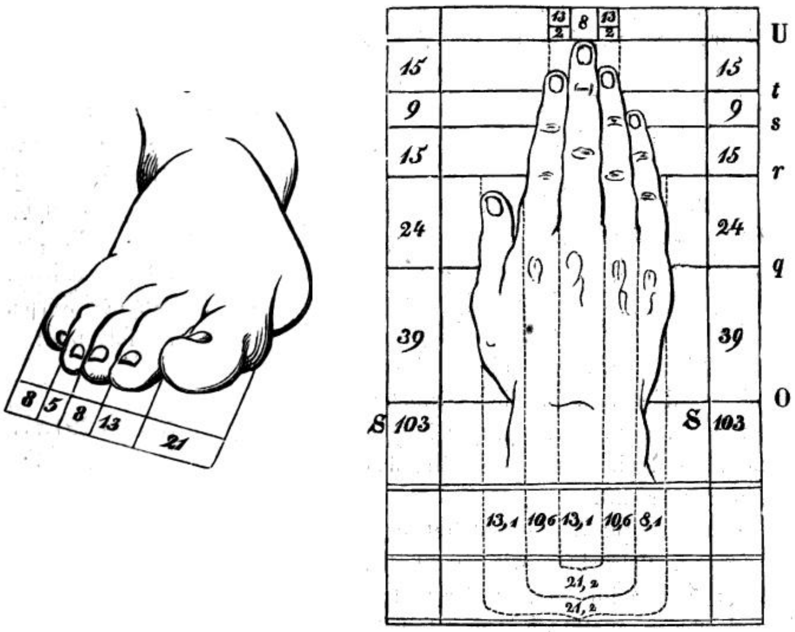
[3] Je to napr. Kolmogorov-Smirnovov test (ks.test) alebo pre malý počet dát (do 30) Shapiro -Wilkov test (shapiro.test)

**Tabuľka 2:** P-hodnoty t-testov

| | pomer 1 | pomer 2 | pomer 3 |
|---|---|---|---|
| žiačky | 0,679 | 0,5273 | 0,0264 |
| žiaci | 0,6323 | 0,4948 | 5,22e-05 |

či sú jednotlivé pomery rovnaké pre chlapcov a pre dievčatá.

Prípadne môžme spraviť ďalšie merania a a podľa nich testovať "dokonalosť " našich proporcií. Inšpiráciou nám môže byť Alolf Zeising, ktorý sa proporciami do detailov zaoberal v polovici 19. storočia, ukážka z jeho knihy [32] je na obrázku 7. Takže hor' sa merať... Alebo sa vám to zdá byť prehnané?




**Obr. 7:** Adolf Zeising a jeho analýza proporcií ľudského tela [32]

### Fibonacciho postupnosť v Pascalovom trojuholníku

Sherlock Holmes, najslávnejší detektív všetkých čias, známy svojimi mimoriadnymi dedukčnými schopnosťami, ale i svojráznym správaním, vo filme ***Sherlock Holmes: Hra tieňov*** [40] čelí rovnako zdatnému súperovi, profesorovi Moriartymu, v snahe zabrániť mu rozpútať vojnu.

Pozorný divák zbadá na Moriartyho tabuli okrem množstva funkcií, vzorcov i tzv. Pascalov trojuholník (obr. 8, 9).

**Obr. 8:** Moriartyho tabuľa [40]

**Obr. 9:** Pascalov trojuholník na Moriartyho tabuli [40]

Zo stredoškolských poznatkov vieme, že je tvorený kombinačnými číslami $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!}$, pre $n, k \in \mathbb{N}$. Obrázok 10 predstavuje prvých sedem riadkov Pascalovho trojuholníka.

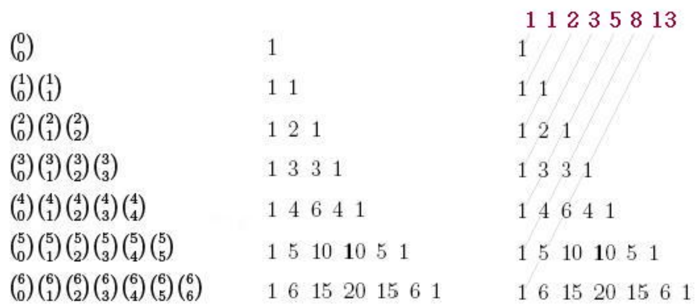
Ak prepíšeme Pascalov trojuholník do pravouhlého tvaru, vyčíslime kombinačné čísla a sčítame prvky ležiace na priamke zvierajúcej uhol 45° s riadkami trojuholníka, odhalíme ukrývajúce sa členy Fibonacciho postupnosti (obr.11).

Existenciu Fibonacciho čísel v Pascalovom trojuholníku dokážeme aj matematicky. Budeme dokazovať tvrdenie, ktoré sa spolu s dôkazom nachádza v [15]:
*Ak vedieme v Pascalovom trojuholníku, zapísanom v pravouhlom tvare, kombinačným číslom* $\binom{n}{k}$*, kde n je ľubovoľné celé nezáporné číslo, priamku zvierajúcu s jeho riadkami uhol 45°, tak súčet* $s_n$ *všetkých kombinačných čísel, ktoré ležia na priamke je rovný Fibonacciho číslu* $F_{n+1}$.

Najprv určíme súčet $s_n$ všetkých kombinačných čísel, ktoré ležia na priamke pre-

$$
\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \; \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \; \binom{2}{1} \; \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} \; \binom{3}{1} \; \binom{3}{2} \; \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} \; \binom{4}{1} \; \binom{4}{2} \; \binom{4}{3} \; \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} \; \binom{5}{1} \; \binom{5}{2} \; \binom{5}{3} \; \binom{5}{4} \; \binom{5}{5} \\
\binom{6}{0} \; \binom{6}{1} \; \binom{6}{2} \; \binom{6}{3} \; \binom{6}{4} \; \binom{6}{5} \; \binom{6}{6}
\end{array}
$$

**Obr. 10:** Pascalov trojuholník zapísaný pomocou kombinačných čísel




**Obr. 11:** Pascalov trojuholník v pravouhlom tvare

chádzajúcou kombinačným číslom $\binom{n}{0}$ a zvierajúcou s riadkami uhol 45° pre $n = 0, 1$:

$$s_0 = \binom{0}{0} = 1 = F_1,$$
$$s_1 = \binom{1}{0} = 1 = F_2.$$

Vidíme, že rovnosť $s_n = F_{n+1}$ pre $n = 0, 1$ skutočne platí. Ešte musíme overiť či platí rekurentný vzťah $s_{n+1} = s_n + s_{n-1}$.

Uvedomme si, že pre párne $n$ platí vzťah:

$$s_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots + \binom{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}$$

a pre nepárne $n$:

$$s_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots + \binom{\frac{n-1}{2}+1}{\frac{n-1}{2}}$$

Pomocou týchto vzťahov vieme zapísať $s_{n-1}$, zase v závislosti od parity $n$. Pre nepárne $n$ platí:

$$s_{n-1} = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \cdots + \binom{\frac{n-1}{2}}{\frac{n-1}{2}}$$

a pre párne $n$

$$s_{n-1} = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \cdots + \binom{\frac{n-2}{2}+1}{\frac{n-2}{2}}.$$

Teraz určíme súčet $s_n + s_{n-1}$ opäť v závislosti od parity $n$. Ak je $n$ párne, tak

$$\begin{aligned} s_n + s_{n-1} = &\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots + \binom{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}} \\ &+ \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \cdots + \binom{\frac{n-2}{2}+1}{\frac{n-2}{2}}. \end{aligned}$$

Použitím $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ a $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$ (pozri napr. [24]) dostaneme:

$$\begin{aligned} s_n + s_{n-1} = &\binom{n}{0} + \left[\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1}\right] \\ &+ \left[\binom{n-2}{1} + \binom{n-2}{2}\right] + \cdots + \left[\binom{\frac{n-2}{2}+1}{\frac{n-2}{2}} + \binom{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}\right] \\ = &\binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + \cdots + \binom{\frac{n}{2}+1}{\frac{n}{2}}. \end{aligned}$$

Výraz, ktorý nám vyšiel je rovný súčtu pre $s_{n+1}$ pre párne $n$ .

Súčet $s_n$ a $s_{n-1}$ pre nepárne $n$ vypočítame podobným spôsobom:

$$\begin{aligned} s_n + s_{n-1} = &\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots + \binom{\frac{n-1}{2}+1}{\frac{n-1}{2}} \\ &+ \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \cdots + \binom{\frac{n-1}{2}}{\frac{n-1}{2}} \\ = &\binom{n}{0} + \left[\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1}\right] + \cdots + \left[\binom{\frac{n-1}{2}+1}{\frac{n-1}{2}-1}\binom{\frac{n-1}{2}+1}{\frac{n-1}{2}}\right] + \binom{\frac{n-1}{2}}{\frac{n-1}{2}} \\ = &\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + \cdots + \binom{\frac{n-1}{2}+2}{\frac{n-1}{2}} + \binom{\frac{n-1}{2}}{\frac{n-1}{2}} \\ = &\binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + \cdots + \binom{\frac{n-1}{2}+2}{\frac{n-1}{2}} + \binom{\frac{n+1}{2}}{\frac{n+1}{2}}. \end{aligned}$$

Posledný súčet je rovný $s_{n+1}$ pre nepárne $n$. Tým je tvrdenie dokázané.

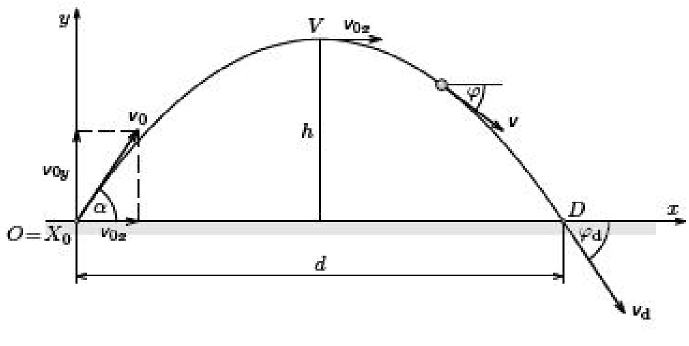
## 1.2 Keď fyzik oddychuje

Nemecká road - movie komédia ***Im Juli*** [33] v hlavnej úlohe s *Danielom*, učiteľom nemčiny a fyziky, pozmení náš názor, že letné prázdniny učiteľov sú určite nudné.

Dá sa autom preskočiť 25 metrov široká rieka? Fyzika hovorí áno. A viete čo zistil Daniel? Keď sa ocitol v takejto ošemetnej situácii, rieka a žiaden most, jednoducho odhadol šírku rieky a uhol pod akým sa auto vymrští a vypočítal rýchlosť, akou musí ísť, aby sa dostal bezpečne na druhú stranu. 96, 41 km/ hod a končí v rieke. Prečo?


**Obr. 12:** Daniel rieši problém, ako sa dostať cez rieku [33]

Teraz to skúsime my. Ak zanedbáme odpor vzduchu, dráhu letiaceho auta znázorňuje obr.13:




**Obr. 13:** Dráha letiaceho auta [27]

Naša úloha spočíva v nájdení vzťahu pre $x$-ovú a $y$-ovú súradnicu polohy letiaceho auta. Postup pomocou diferenciálnych rovníc, ktorým získame rovnice pre funkcie polohy auta, nájdeme v minuloročnej bakalárskej práci [9]. My urobíme už len "skrátené" odvodenie rovníc.

Ak si uvedomíme, že prvá derivácia funkcie polohy telesa podľa času je okamžitá rýchlosť a druhá derivácia je zrýchlenie, a zanedbaním odporu vzduchu jediné zrýchlenie, ktoré pôsobí na letiace auto a to len na jeho $y$-ovú zložku je gravitácia, označme ju $g$, platí:

$$x''(t) = 0, \qquad y''(t) = -g. \tag{4}$$

Druhé derivácie sú konštanty, preto prvé derivácie, z ktorých vypočítame funkcie pre rýchlosť v $x$- ovom a $y$- ovom smere majú tvar:

$$x'(t) = a + bt, \qquad y'(t) = c + dt. \tag{5}$$

Z rovnice (1), dosadením $x'(0) = v_0 \cos\alpha$ a $y'(0) = v_0 \sin\alpha$ ($v_0$ je počiatočná rýchlosť auta) do (2) a zopakovaním tohto postupu dostávame funkcie polohy auta (bod $(x_0, y_0)$ vyjadruje začiatočnú polohu auta):

$$x(t) = x_o + v_0 t \cos\alpha,$$
$$y(t) = y_o + v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

Daniel odhadol šírku rieky na 25 metrov a uhol $\alpha = 10°$. Dosadením týchto hodnôt do získaných rovníc dostaneme:

$$25 = 0 + v_0 t \cos 10°,$$
$$0 = 0 + v_0 t \sin 10° - \frac{9,81t^2}{2}.$$

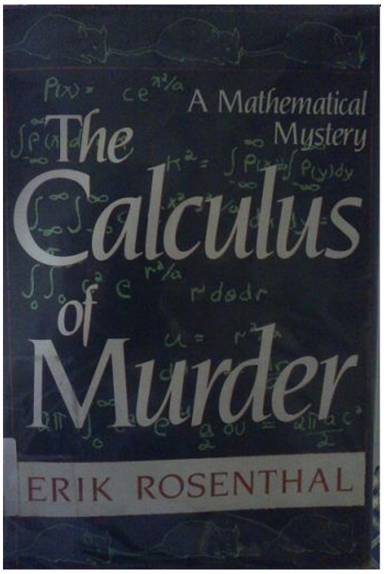
Začiatočná rýchloť $v_0$ teda je 26,78 $m/s$ = 96,41 $km/h$. Dospeli sme k rovnakému číslu ako Daniel, čiže by sme sa vykúpali tiež. Kde sme spravili chybu?

Naše, ako i Danielovo riešenie by bolo správne, ak by sme sa nachádzali vo vákuu, kde nepôsobí odpor vzduchu. Ak chceme preletieť autom ponad rieku v reálnom živote, musíme rátať práve so spomínaným odporom vzduchu na letiace teleso. Jeho výpočet však býva značne komplikovaný, obzvlášť ak má teleso nepravidelný tvar.

## 1.3 Arzén

Detektívka ***The calculus of murder*** [28] nie je len jednou z tisícok detektívkok. A *Dan Brodsky* nie je len ďalší detektív. Teda mohli by byť, lenže ich tvorcom je

*Erik Rosenthal*, učiteľ matematiky na Wellesley College. A rukopis matematika je tu doslova viditeľný. Začína to obálkou knihy (obr.14), pokračuje kapitolami označenými integrálmi a aj v samotnom deji sa objavuje matematika.

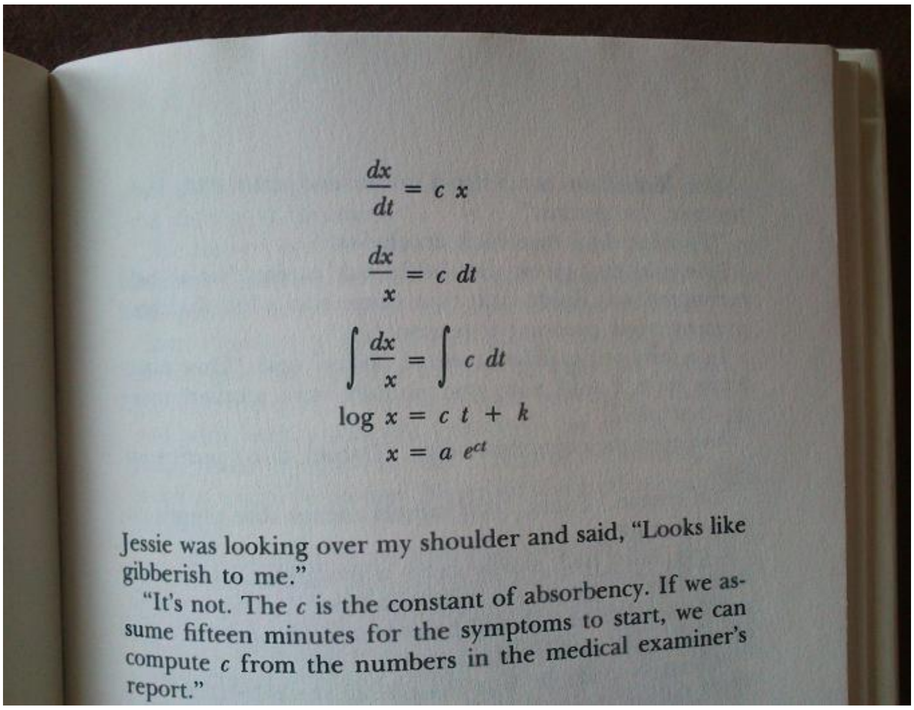



**Obr. 14:** Kniha Calculus of murder [28]

Hlavnou postavou je detektív *Dan Brodsky*, matematik. Ako aj samotný autor, Dan študoval na katedre matematiky Univerzity v Berkeley a za prácu o ohraničených lineárnych operátoroch na nekonečnorozmerných Hilbertových priestoroch získal titul PhD. Finančné suchoty Dana počas štúdia dohnali k práci detektíva. A teraz hľadá vraha bohatého textilého magnáta Bradforda Meltona, ktorý bol otrávený arzénom. Využíva pritom aj matematiku.

> *"Rýchlosť vstrebávania jedu bude úmerná jeho užitému množstvu a nepriamo úmerná obsahu žalúdka."*
> *"Daniel, hovor anglicky."*
> *"Viac jedu, rýchlejšie sa vstrebe, väčší obsah žalúdka, pomalšie.."*
> *"Chápem. Znie to logicky."*
> *"Pravdepodobne existuje pre arzén nejaká konštanta vstrebávania v závislosti od istých podmienok. Je to jednoduchá diferenciálna rovnica."*
> *"Nesranduj."* [28]

Dan však nesrandoval. Začal naozaj riešiť diferenciálnu rovnicu a my to máme možnosť vidieť v knihe so všetkými detailami. Obrázok 15 naozaj nie je obvyklý pohľad na stránku detektívky.



$$\frac{dx}{dt} = c\,x$$

$$\frac{dx}{x} = c\,dt$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int c\,dt$$

$$\log x = c\,t + k$$

$$x = a\,e^{ct}$$

Jessie was looking over my shoulder and said, “Looks like gibberish to me.”

“It's not. The $c$ is the constant of absorbency. If we assume fifteen minutes for the symptoms to start, we can compute $c$ from the numbers in the medical examiner's report.”

**Obr. 15:** Diferenciálna rovnica popisujúca vstrebávania jedu [28]

Dan ďalej vysvetľuje:

> *"C je konštanta vstrebávania. Ak predpokladáme, že symptómy sa objavili po 15-tich minútach, môžme C spočítať pomocou hodnôt z lekárskych záznamov."* [28]

Danovi vyšla príliš vysoká konštanta - jed začal účinkovať prirýchlo. Odôvodnil to tým, že obeť v osudný deň nekonzumovala jedlo, len pila veľa alkoholických nápojov. Správnosť potvrdil aj farmakológ.

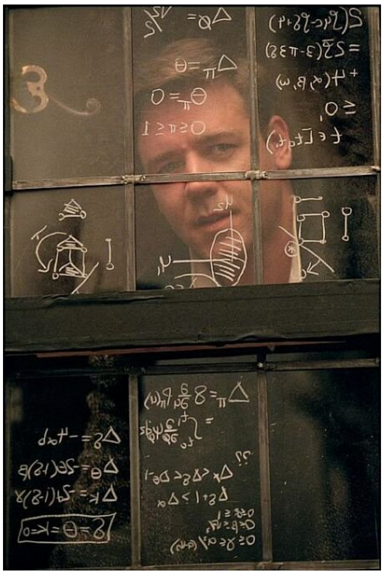
Myslíte si, že pomohla konštanta dolapiť vraha? Samotná konštanta nie, ale objasnila dôvod, prečo páchatelia ostali na mieste činu dlhšie, čím sa pripravili o alibi. S rýchlosťou, akou jed zaúčinkoval, páchatelia nepočítali...

# 2 Teória hier

V súčasnosti má teória hier rozsiahle využitie. Správanie sa hráčov, voľba optimálnej stratégie pri hrách sa uplatňuje v ekonómii, evolučnej biológii, vojenskej stratégii či politológii. Tak poďme sa "zahrať" i my.

## 2.1 Nashovo ekvilibrium

Oskarový film ***Čistá duša*** [35] zachytáva životný príbeh poznania, slávy a pádov geniálneho, no komplikovaného matematika Johna Forbesa Nasha od jeho študentských čias strávených na univerzite v Princetone.



**Obr. 16:** John Nash ako študent v Princetone [35]

Nash neobľuboval povinné prednášky, uprednostňoval vlastné témy či príklady. Napísal dve dizertačné práce, jednu z oblasti teórie hier *Non-cooperative games* a druhú o algebraických varietach. Jeho meno je späté najmä s teóriou hier. Definoval a dokázal existenciu *Nashovo ekvilibria*, rovnováhy v hrách, pri ktorých sa hráči rozhodujú racionálne, disponujú úplnou informáciou o akciách a preferenciách zvyšných hráčov. Nashovho ekvilibrium je založené na myšlienke voľby takého profilu stratégie hráčmi, v ktorom je výhodné každému z nich ostať. Žiaden z hráčov nemôže získať viac tým, ak by ako jediný svoju stratégiu zmenil. Nie je to nutne profil akcií prinášajúci najväčší profit, avšak ak súperi zahrajú toto ekvilibrium, oplatí sa ho hrať aj nám [11]. Za svoj prínos získal v roku 1994 Nobelovu cenu.

Už v spomínanom filme [35], Nash a jeho spolužiaci trávia večer v bare popíjaním drinkov a biliardom, pokým do baru nevstúpi skupinka pôvabných slečien. Jediná blondínka zaujme všetkých a všetci ju chcú. Problém vyrieši Nash:

> *"Keď sa všetci pustíme za tou blondínkou, budeme si stáť v ceste a nezíska ju nikto. Tak to skúsime u jej kamarátok. Tie nás ale odmietnu, lebo nikto nechce byť až druhý. Čo ak po nej nepôjde nikto? Nebudeme si stáť v ceste a neurazíme ostatné dievčatá. Jediná možnosť, ako si užijeme všetci."* [35]

Využil Nash svoju teóriu o rovnováhe? V tomto prípade nie. Dôvod je nasledovný: Ak by ľubovoľný študent zabudol na radu Nasha a pozval by na rande blondínku, kým ostatní by sa venovali zvyšným slečnám, získal by viac ako ostatní, pretože všetci chceli v prvom rade tú jedinú blondínku. A to odporuje myšlienke Nashovho ekvilibria, že žiaden z hráčov nemôže získať viac tým, ak by ako jediný svoju stratégiu zmenil.

Známym príkladom na Nashovo ekvilibruim je hra nazývaná ***Väzňova dilema***. Že ju nepoznáte? Nevadí, *Charlie*, matematický guru zo seriálu ***Vražedné čísla***, v časti *Špinavá bomba* [41], ktorý využitím matematických zákonitostí pomáha polícii pri vyšetrovaní trestných činov, nám ju rád vysvetlí:

> *"Väzňova dilema. Teória hry alebo matematická teória. Ako dosiahnúť optimálny výsledok v zložitej situácii. Uvediem príklad: Áno. Dvaja ľudia spáchajú zločin. Ak ani jeden z nich neprehovorí, dostanú obaja 1 rok. Ak jeden prehovorí, je bez trestu, ale ten druhý dostane 5 rokov. Keď budú hovoriť obaja, dostane každý 2 roky. Ak si nemôžu stopercentne dôverovať, prehovoriť je najlepšia taktika."* [41]

Informácie, ktoré Charlie uvádza, si prepíšeme do prehľadnejšej tabuľky (tabuľka 3), v ktorej čísla znamenajú počet možných rokov strávených vo väzení pre prvého podozrivého a pre druhého podozrivého. Dvoch podozrivých nazveme Alfonz a Hugo.

Alfonz a Hugo majú dve možnosti: prehovoriť alebo mlčať. Alfonz sa pri istej stratégii Huga (prehovoriť alebo mlčať) rozhodne pre takú možnosť (prehovoriť alebo mlčať), pri ktorej získa viac. V tejto situácii to znamená, že si vyberie stratégiu, ktorá mu zaručí menej rokov strávených vo väzení. Alfonz uvažuje nasledovne:

**Tabuľka 3:** Vážňova dilema

| ALFONZ / HUGO | prehovorí | neprehovorí |
|---|---|---|
| prehovorí | 2,2 | 0,5 |
| neprehovorí | 5,0 | 1,1 |

- Ak sa Hugo prizná, priznám sa aj ja a pôjdeme obaja na 2 roky do väzenia, lebo ak by som neprehovoril, dostal by som až 5 rokov.
- Ak sa Hugo neprizná, ja sa priznám a budem voľný, čo je lepšia voľba ako mlčať a dostať 1 rok.

Alfonzove rozhodnutia sú zvýraznené modrou farbou v tabuľke 4. Hugo uvažuje analogicky, jeho rozhodnutia sú v tabuľke 4 zvýraznené červenou farbou.

**Tabuľka 4:** Vážňova dilema - riešenie

| ALFONZ / HUGO | prehovorí | neprehovorí |
|---|---|---|
| prehovorí | **2**,**2** | **0**,5 |
| neprehovorí | 5,**0** | 1,1 |

Nashovym ekvilibriom je tá bunka v tabuľke, ktorá obsahuje obe zvýraznené hodnoty. Je to situácia, kedy obaja reagujú optimálne na stratégiu protihráča. Teda pre Huga a Alfonza je Nashovým ekvilibriom prehovoriť, priznať sa.

*Chicken*, nebezpečná hra s jednoduchým princípom: Dvaja hráči na dvoch autách mieria k útesu. Cieľom je ostať čo najdlhšie v aute, avšak vyskočiť z neho skôr než sa zrúti z útesu. Kto podľahne tlaku a vyskočí skôr ako jeho sok, je Chicken (Zbabelec). Ak zostanú obaja v aute, výsledok je katastrofálny - smrť. Kto vyskočí neskôr ako jeho súper, je víťaz, získa rešpekt u ostatných.

Víťazstvom v *Chicken* sa chce James Dean, ako *Jim Stark* v kultovom americkom filme ***Rebel bez príčiny*** [39], zbaviť prívlastku "outsider". Predstaviteľ problematickej americkej mládeže odmietajúci morálne zásady spoločnosti a bojujúci o rešpekt a uznanie rovesníkov i lásku krásnej Judy prijme *Buzzovu* výzvu:

**Obr. 17: Rebel bez príčiny**, hra Chicken

*"We are both heading for the cliff, who jumps first, is the Chicken."* [39]

Hra sa môže začať.

Môžu nastať štyri rôzne situácie[4]:

- (zostať, vyskočiť)

  Táto situácia znamená, že Jim zostane dlhšie v aute ako Buzz. Najvýhodnejšia stratégia pre Jima, ktorý tým pádom zvíťazí, kým Buzz bude Chicken. Priraďme tejto dvojici stratégii hodnotu (2, -2).

- (vyskočiť, vyskočiť)

  Obaja vyskočia naraz, hra nemá víťaza ani porazeného. Priradíme hodnotu (0, 0).

- (vyskočiť, zostať)

  Jim vyskočí skôr a stáva sa zbabelcom, Buzz víťazí, (-2, 2).

- (zostať, zostať)

  Najhorší možný výsledok, obaja sa zrútia z útesu a zomierajú, $(-\infty, -\infty)$.

Hru prepíšeme do tabuľky 5 a nájdeme Nashovo ekvilibrium.

Jim chce optimálne reagovať na konanie Buzza počas hry.

- Ak Buzz vyskočí z uháňajúceho auta, Jim zostane v aute dlhšie, vyskočí za ním a vyhráva.
- Ak Buzz bude mať pevnejšie nervy a bude odďaľovať výskok z auta, Jim vyskočí a nebude riskovať smrť.

[4]vždy v poradí Jim, Buzz

**Tabuľka 5:** Chicken

| Jim / Buzz | zostať | vyskočiť |
|---|---|---|
| zostať | $-\infty, -\infty$ | 2, -2 |
| vyskočiť | -2, 2 | 0, 0 |

Rovnako sa bude správať aj Buzz. Jimove optimálne reakcie sú v tabuľke 6 označené hnedou farbou a Buzzove zelenou farbou.

**Tabuľka 6:** Chicken - riešenie

| Jim / Buzz | zostať | vyskočiť |
|---|---|---|
| zostať | $-\infty, -\infty$ | 2, -2 |
| vyskočiť | -2, 2 | 0, 0 |

Táto hra má teda na rozdiel od väzňovej dilemy až dve Nashove ekvilibriá : (vyskočiť, ostať), (ostať, vyskočiť). V každom z nich je jeden hráč víťaz a druhý "Chicken".

## 2.2 Minimax

V sci-fi románe *Philipa K. Dicka* ***Slnečná lotéria*** [6], ktorého dej sa odohráva v roku 2203, je Zem súčasťou Federácie deviatich planét. Na čele stojí Quizmaster, volený náhodným zoskupením atómov v zariadení zvanom Fľaša. Svet, kde dominujú čísla a náhoda. Svet, ktorý sa riadi M-hrou:

> *Teória minimaxu - M-hry - predstavovala niečo ako ľahostajný únik, nepodieľanie sa na bezcieľnom vírení ľudských snáh. Hráč M-hry sa nikdy celkom nevydával napospas - nič neriskoval, nič nezískal... a nebol zruinovaný. Usiloval sa o nahromadenie majetku a snažil sa vydržať dlhšie než ostatní. Hráč M-hry sedel a vyčkával, až hra skončí. To bolo najlepšie, v čo sa dalo dúfať. Minimax, metóda prežitia vo veľkej hre života, bola vynájdená dvoma matematikmi dvadsiateho storočia, von Neumannom a Morgensternom. Bola použitá v druhej svetovej vojne, v Kórejskej vojne a v Konečnej vojne. Vojenskí stratégovia a neskôr finančníci hrali podľa ich teórie. Uprostred storočia von Neumanna ustanovili do americkej komisie pre atómovú energiu:*

*rozpoznali vzrastajúci význam jeho teórie. A za dva a pol storočia sa stala základom vlády.* [6]

Kto je John von Neumann? A čo je teória minimaxu? To sú otázky, ktoré si teraz zodpovieme.

O Johnovi von Neumannovi sa klebetí, že bol najbystrejší žijúci človek. Ako dieťa hotový zázrak, neskôr matematická legenda. Keď sa ľudia dozvedeli, že svoju *"minimaxovú vetu"* načmáral cestou taxíkom na stretnutie, kývli hlavou. Takéto veci Neumann presne robil. Kvantová mechanika, logika, algebra, teória hier. To bolo Neumannovo centrum záujmu. Spolu s Oscarom Morgensternom vydali dielo Teória hier a ekonomické správanie, kde formuláciou "hry pre dvoch hráčov s nulovým súčtom[5]" znovuzrodili teóriu hier [4].

V záverečnej časti trilógie *Alexandra Dumasa* ***Gróf Montechristo*** [8] sa dočítame:

*Danglars bol ustatý, spokojný a ospanlivý. Ľahol si, položil tašku s listami pod podušku a zaspal. Peppino mal teda dosť času. Hral sa s niekoľkými facchini* ***"morru"****, prehral tri toliare, a aby sa potešil, vypil fľašu orvietského vína.* [8]

Vo vysvetlivkách nájdeme, že "morra" je hra, pri ktorej sa jeden hráč snaží uhádnuť, koľko prstov zodvihne spoluhráč. Dvojprstová morra má nasledovné pravidlá [1]:

- každý hráč zodvihne na ruke jeden alebo dva prsty a háda, koľko ich zdvihol jeho spoluhráč,
- ak obaja hráči uhádnu správne alebo neuhádne ani jeden z nich, nastane remíza-nikto nič neplatí tomu druhému,
- ak uhádne len jeden hráč, získa sumu, ktorá sa rovná súčtu prstov, ktoré zdvihli obaja hráči spolu.

[5]hra hraná dvoma ľuďmi alebo spoločnosťami, v ktorej ak jeden hráč vyhrá X, protihráč prehrá X

Teória hier chápe morru ako jednoduchú maticovú hru $A$, ktorá vyzerá nasledovne:

$$
\begin{array}{cc}
 & \textit{Protihráč} \\
\textit{Peppino} \quad A = &
\begin{array}{c} \\ (1,1) \\ (1,2) \\ (2,1) \\ (2,2) \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} (1,1) & (1,2) & (2,1) & (2,2) \end{array} \\
\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
\end{array}
$$

V našom prípade, Peppino a jeho sok majú štyri možné stratégie. Stratégia každého hráča má dve zložky, prvá udáva počet prstov, ktoré zdvihol na ruke a druhá zložka je počet prstov, ktoré háda u protihráča. Prvky $a_{ij}$ matice $A$ reprezentujú výhru, ktorú vyplatí protihráč Peppinovi, ak Peppino si zvolí i-tu čistú stratégiu a protihráč j-tu čistú stratégiu (záporná výhra znamená, že Peppino vyplatí danú sumu svojmu súperovi).

Ako takáto hra súvisí s Neumannovou vetou o minimaxe? Vysvetlíme to podľa [1]. Pri výbere stratégie počíta prvý hráč s tým, že protivník zvolí proti nemu tú najhoršiu možnú stratégiu, preto sa snaží maximalizovať svoju výhru tým, že v každom riadku uvažuje najmenšiu možnú výhru a vyberie si ten riadok, v ktorom je táto minimálna hodnota najväčšia, teda nájde maximum z miním. Podobne uvažuje protihráč, avšak on sa snaží minimalizovať svoju prehru, hľadá minimum z maxima. Ak existuje rovnosť medzi $\max_i \min_j a_{ij}$ a $\min_j \max_i a_{ij}$, máme optimálne riešnie hry. [13]

Voľbou ľubovoľnej i-tej stratégie, má Peppino istú minimálnu výhru $\min_j a_{ij}$. Peppino uvažuje racionálne, preto si vyberie takú stratégiu, ktorá mu zaručí istú najväčšiu hodnotu riadkových miním :

$$\max_i \min_j a_{ij} = -2.$$

Protihráč voľbou ľubovoľnej j-tej stratégie má istú maximálnu prehru $\max_i a_{ij}$. Vyberie si však takú j-tu stratégiu, ktorá minimalizuje výšku jeho prehry:

$$\min_j \max_i a_{ij} = 2.$$

Ak platí:

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij},$$

čo v našom prípade nie je splnené, našli sme optimálnu stratégiu v čistých stratégiách.

Ak ale

$$\max_i \min_j a_{ij} \neq \min_j \max_i a_{ij},$$

a to je náš prípad, riešenie budeme hľadať v zmiešaných stratégiách. Znamená to, že Peppino sa môže rozhodnúť, že stratégiu $A_i$ bude voliť s pravdepodobnosťou $u_i$. Vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$ nazveme zmiešanou stratégiou. Pre vektor $\mathbf{u}$ platí, že všetky jeho zložky sú nezáporné a ich súčet je rovný jednej. Množinu stratégií $\mathbf{u}$ označme $U$. Podobne pre protihráča vytvoríme zmiešanú stratégiu $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)^T$ a množinu stratégií $\mathbf{v}$ označíme $V$.

Ak Peppino používa stratégiu $\mathbf{u}$ a jeho pritihráč $\mathbf{v}$, stredná hodnota Peppinovej výhry je $\mathbf{u}^T A\mathbf{v}$. Stratégia $\mathbf{u}$ mu zaručí aspoň $\min_{\mathbf{v}\in V} \mathbf{u}^T A\mathbf{v}$, on si samozrejme zvolí také $\mathbf{u}$, aby tátu hodnotu maximalizoval. Tým si zaručí strednú hodnotu výhry $C_1 = \max_{\mathbf{u}\in U} \min_{\mathbf{v}\in V} \mathbf{u}^T A\mathbf{v}$.

Protihráč rozmýšľa rovnako a je schopný zaručiť, že stredná hodnota jeho prehry je maximálne $C_2 = \min_{\mathbf{v}\in V} \max_{\mathbf{u}\in U} \mathbf{u}^T A\mathbf{v}$.

Veta o minimaxe tvrdí, že $C_1 = C_2$ (dôkaz je podľa zložitý [1] a odkazuje čitateľa na [16] ). Túto spoločnú hodnotu nazveme cena hry.

Čo má Peppino robiť? Nech $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$ je hľadaná optimálna stratégia Peppina. Cenu výhry označme $C$. Optimálna stratégia sa vyznačuje tým, že zaručuje Peppinovi strednú hodnotu výhry najmenej $C$ pri akejkoľvek stratégii jeho soka. Musí teda platiť:

$$\begin{aligned}
&a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + a_{31}u_3 + a_{41}u_4 \geq C,\\
&\vdots\\
&a_{14}u_1 + a_{24}u_2 + a_{34}u_3 + a_{44}u_4 \geq C.
\end{aligned}$$

Peppino chce vyhrať čo najviac, riešenie spočíva v maximalizácii C pri istých podmienkach. Formálne zapísané:

$$\max C$$

$$
\begin{aligned}
a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + a_{31}u_3 + a_{41}u_4 - C &\geq 0,\\
a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + a_{32}u_3 + a_{42}u_4 - C &\geq 0,\\
a_{13}u_1 + a_{23}u_2 + a_{33}u_3 + a_{43}u_4 - C &\geq 0,\\
a_{14}u_1 + a_{24}u_2 + a_{34}u_3 + a_{44}u_4 - C &\geq 0,\\
u_1 + u_2 + u_3 + u_4 &= 1,\\
u_i &\geq 0 \quad \text{pre} \ \ i = 1, 2, 3, 4.
\end{aligned}
$$

Dostali sme úlohu lineárneho programovania, ktorú ľahko vyrieši Matlab (obr.18).

```
>> f=[0,0,0,0,-1];
A=[0 2 -3 0 1;-2 0 0 3 1; 3 0 0 -4 1; 0 -3 4 0 1];
b=[0;0;0;0];
Aeq=[1 1 1 1 0];
beq=1;
lb=[0;0;0;0;-Inf];
x=linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb)
Optimization terminated.

x =

    0.0000
    0.5847
    0.4153
    0.0000
   -0.0000
```

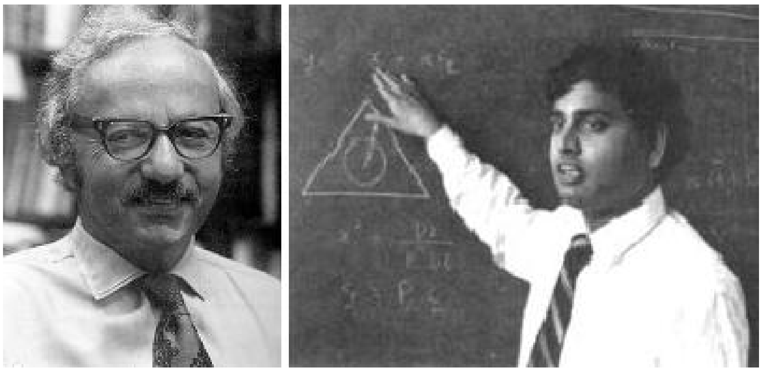
**Obr. 18:** Riešenie optimalizačnej úlohy v Matlabe

Našli sme optimálne riešenie $\mathbf{u} = (0; 0,5847; 0,4153; 0; 0)^T$, pri ktorom účelová funkcia nadobúda hodnotu 0. Anděl však v knihe [1] uvádza iné optimálne riešenie, $\hat{\mathbf{u}} = (0; 0,6; 0.4; 0; 0)^T$. Aj tu vyšla hodnota účelovej funkcie nula, takže náš výsledok je tiež správny. Prečo sme však dostali iný optimálny vektor $\mathbf{u}$?

Vysvetlenie je nasledovné. Úlohy lineárneho programovania vieme riešiť viacerými metódami,a to aj vďaka pánom G. B. Dantzigovi[6] a N. Karmarkarovi (obr.19). Ak má úloha jediné optimálne riešenie, ľubovoľnou metódou dostaneme to isté riešenie. Ak má ale úloha viac riešení, nájdeme rôzne optimálne riešenia vzhľadom na použitú metódu.

Dantzig v roku 1947 navrhol *simplexovú metódu*, ktorá nájde ako optimálne riešenie

[6] Nemôžme nespomenúť príhodu z Dantzigovho života: Dantzig prvý deň ako doktorand na Berkeley vyriešil úlohu, ktorú napísal na tabuľu jeho profesor. Netušil, že ide o nevyriešený štatistický problém. Netrvalo dlho a prišiel za ním prekvapený profesor a oznámil mu , že jeho práca bude publikovaná. [29]



**Obr. 19:** George Bernard Dantzig [29] a Narendra Karmarkar [7]

(za predpokladu, že existuje) krajný bod množiny prípustných riešení. *Metódy vnútorného bodu* (ich "boom" sa spája s rokom 1984 a prvou metódou, ktorej autorom je Karmarkar), nájdu riešenie ako bod, ktorý je čo najďalej od hraníc množiny prípustných riešení (tzv. analytický stred množiny) [30]. Vývoj metód vnútorného bodu bol pri príležitosti 20. výročia Karmarkarovho algoritmu zhrnutý v článku [12].

Z dokumentácie Matlabu sa dozvieme, že Matlab štandardne používa metódu vnútorného bodu. Ak chceme použiť simplexový algoritmus, musíme to explicitne zadať v parametroch optimalizačnej funkcie. Ako môžme vidieť na obr.20, voľbou rôznych štartovacích bodov dostávame rôzne optimálne riešenia:

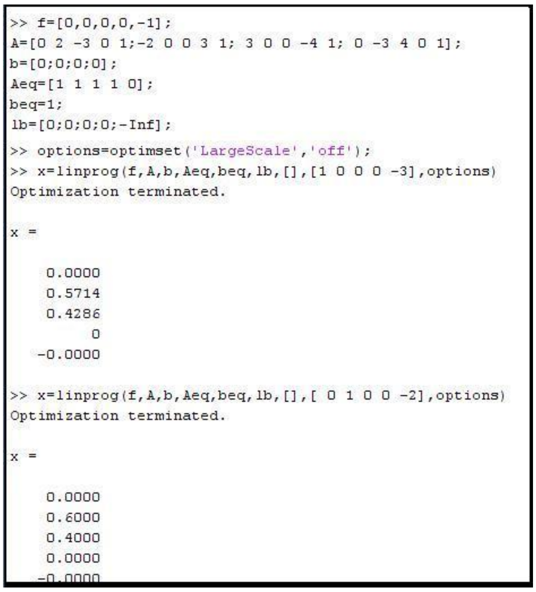
$$\mathbf{u}_1 = (0, 0.5714, 0.4286, 0, 0)^T, \mathbf{u}_2 = (0, 0.6, 0.4, 0, 0)^T.$$

Všetky doteraz nájdené optimálne riešenia spĺňajú $u_1 = 0$, $u_4 = 0$. Nájdime teraz všetky optimálne riešenia s touto vlastnosťou. Vieme, že $C_{opt} = 0$. Budeme teda hľadať všetky prípustné riešenia, pre ktoré platí $u_1 = 0$, $u_4 = 0, C = 0$. To znamená, že budeme hľadať riešenia sústavy rovníc a nerovníc:

$$\begin{aligned} -u_2 + 3u_3 &\geq 0, \\ 3u_2 - 4u_3 &\geq 0, \\ u_2 + u_3 &= 1, \\ u_2, u_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Riešenie nájdeme graficky, znázornené je na obrázku 21.

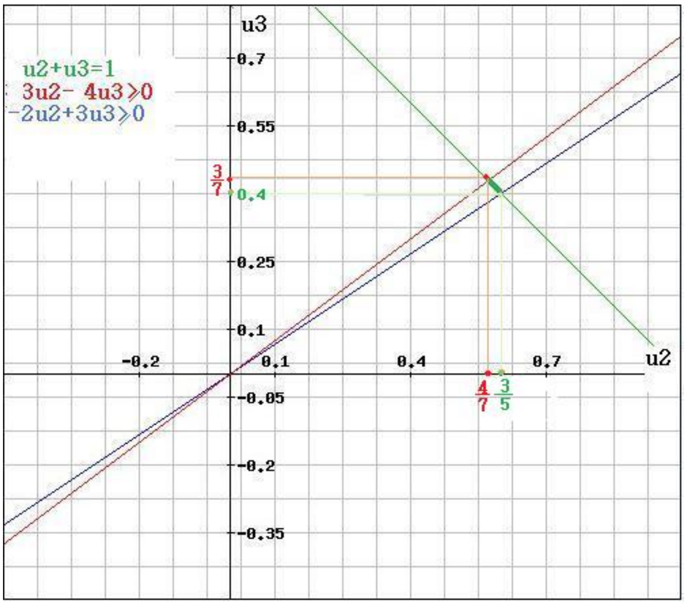
Optimálna stratégia Peppina je teda $u = (0, u_2, u_3, 0)^T$ a stredná hodnota jeho výhry je rovná nule, pričom $(u_2, u_3)$ je dvojica bodov ležiaca na zelenej úsečke z obr.21.



```
>> f=[0,0,0,0,-1];
A=[0 2 -3 0 1;-2 0 0 3 1; 3 0 0 -4 1; 0 -3 4 0 1];
b=[0;0;0;0];
Aeq=[1 1 1 1 0];
beq=1;
lb=[0;0;0;0;-Inf];
>> options=optimset('LargeScale','off');
>> x=linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,[],[1 0 0 0 -3],options)
Optimization terminated.

x =

    0.0000
    0.5714
    0.4286
         0
   -0.0000

>> x=linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,[],[ 0 1 0 0 -2],options)
Optimization terminated.

x =

    0.0000
    0.6000
    0.4000
    0.0000
   -0.0000
```

**Obr. 20:** Riešenie optimalizačnej úlohy v Matlabee simplexovým algoritmom

Krajné body úsečky sú $\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right) = (0,6; 0,4)$ a $\left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7}\right) = (0,5714; 0,4284)$ a zodpovedajú riešeniam nájdeným v Matlabe pomocou simplexového algoritmu.



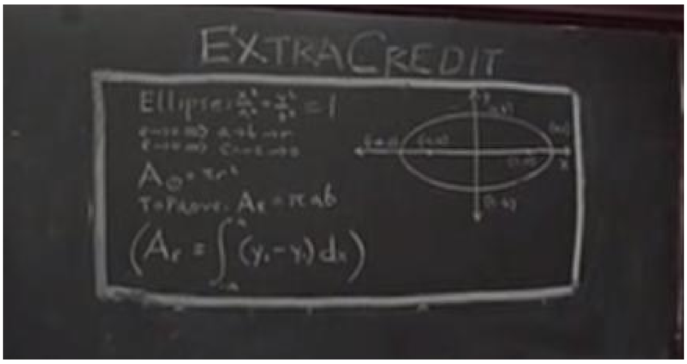

**Obr. 21:** Optimálne riešenie morry, pričom $u_1, u_4$

# 3 Diferenciálny a integrálny počet

Integrály, derivácie, limity. Nenachádzajú sa len v učebniciach. Z času na čas sa nimi inšpirujú i scénáristi a táto kapitola je toho dôkazom.

## 3.1 Najťažší geometrický problém?

Film ***Ako som balil učiteľku*** [34] začína hodinou matematiky, avšak viac ako preberané učivo zaujme jedného študenta príklad napísaný na osobitnej tabuli:



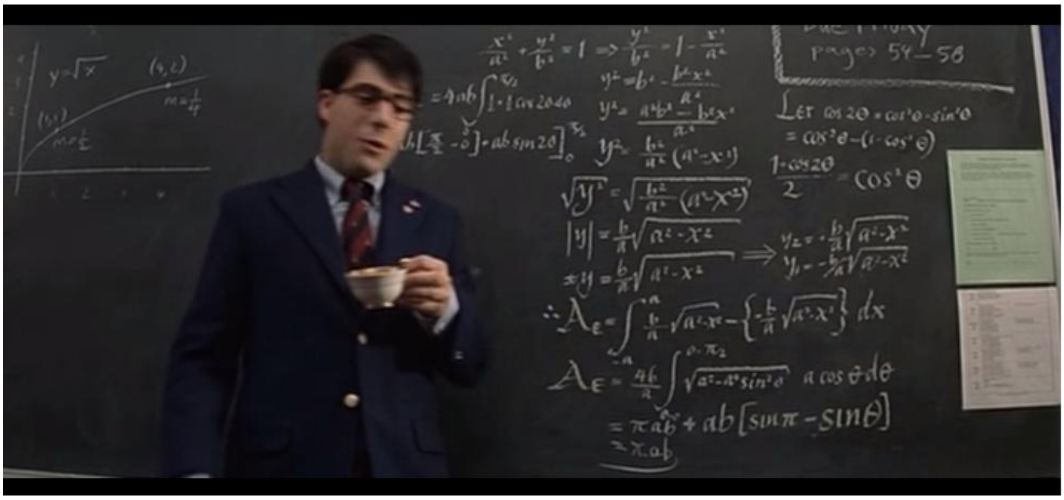

**Obr. 22:** Bonusový príklad [34]

Profesor matematiky mu následne objasní dôvod, pre ktorý tento príklad napísal:

> *"To som napísal ako žart. Je to snáď najťažšia matematická rovnica*[7] *na svete."*
> *"Je na ňu vypísaná odmena? "*
> *"Zatiaľ som ju nevidel nikoho vyriešiť. Ani svojho profesora Leakyho z techniky. Ak to tu niekto náhodou zvládne, sľubujem, že nikto z vás už nebude musieť tento rok otvoriť učebnicu matematiky."* [34]

Predstava, že hodiny matematiky sa stanú minulosťou, aspoň do konca roka, vyvolá u študentov nadšenie. Poslednou prekážkou je vyriešiť úlohu - dokázať, že plocha elipsy $A_E = \pi ab$. A tú bravúrne zdolá jeden zo študentov, Max Fisher. Jeho riešenie (obr.23) je naozaj správne.

[7] pravdepodobne je to chybný preklad, bonusový príklad nie je riešenie rovnice, je to dôkaz vzťahu pre plochu elipsy



**Obr. 23:** Maxovo riešenie bonusového príkladu [34]

Max si najskôr z rovnice elipsy vyjadril premennú $y$, čím získal predpis pre hornú a dolnú časť elipsy ako funkciu $y(x)$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \\ y_2 = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \end{cases}$$

Teda pre plochu elipsy platí[8] :

$$A_E = \int_{-a}^{a} \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} - \left(-\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\right) \, \mathrm{d}x = \int_{0}^{a} \frac{4b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \, \mathrm{d}x.$$

Použitím trigonometrickej substitúcie $x = a \sin\theta$, z ktorej vyplýva $\mathrm{d}x = a\cos\theta \;\; \mathrm{d}\theta$, dostal :

$$\begin{aligned} A_E &= \frac{4b}{a}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2\sin\theta^2}\, \cos\theta \, \mathrm{d}\theta = 4ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \, \mathrm{d}\theta = 2ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2\theta) \, \mathrm{d}\theta \\ &= 2ab\frac{\pi}{2} - 2ab\left[\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab - 0 = \pi ab. \end{aligned}$$

Ak sa vám zdá, že priamy dôkaz najťažšieho matematického problému vyzerá podozrivo ľahko, tušíte správne. Žiaľ, Max nerozlúštil žiaden matematický problém, len zapracovala jeho predstavivosť, keď si zdriemol počas príhovoru riaditeľa.

Ak by Max použil na výpočet obsahu elipsy dvojný integrál a eliptické súradnice, jeho riešenie by sa ešte skrátilo. Obsah elipsy sa pomocou dvojného integrálu vyjadrí ako $A_E = \iint_E 1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ [20]. Transformácia pomocou eliptických súradníc je nasledovná

[8] podľa vety o obsahu elementárnej oblasti, ktorú môžme nájsť v [19]

[20]:

$$x = ar\cos\varphi, y = br\sin\varphi,$$

pričom $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle, r \in \langle 0, 1 \rangle$ Na transformáciu integrálu ešte potrebujeme jakobián (determinat Jakobiho matice), ktorý vypočítame nasledovne:

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -ar\sin\varphi \\ b\sin\varphi & br\cos\varphi \end{vmatrix} = abr\cos^2\varphi + abr\sin^2\varphi = abr.$$

Teda

$$A_E = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 1abr \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}r = 2ab\pi \int_0^1 r \,\mathrm{d}r = 2ab\pi \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 = \pi ab.$$

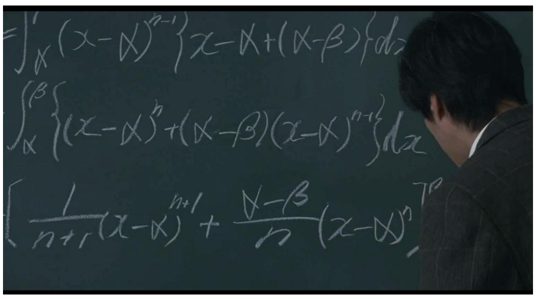
Opäť dostaneme správny vzťah pre plochu elipsy.

## 3.2 Alibi

Čo je zložitejšie? Vynájsť nevyriešiteľný problém alebo vyriešiť ho?

Súboj myslí, myseľ matematika verzus fyzika, ponúka japonský film ***Suspect X*** [38]. Kým uzavretý matematik *Išigami* vytvára dokonalé alibi žene, ktorá zavraždila manžela v snahe chrániť svoju dcéru, jeho priateľ *Jukawa*, fyzik, stojí na strane zákona a pomáha polícii vyšetriť túto vraždu.

Jedna zo scén sa odohráva počas Išigamiho hodiny matematiky. Jedným z vysvetľovaných príkladov je i integrál:



**Obr. 24:** Príklad profesora Išigamiho [38]

Zadanie tohto integrálu ako i konečné riešenie sa vo filme neobjaví, ale zo záberu, ktorý je na obr. 24 vidíme, že zadanie i riešenie bude nasledovné:

$$
\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^{n-1}(x-\beta)\,\mathrm{d}x &= \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^{n-1}(x-\beta+\alpha-\alpha)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^{n-1}(x-\alpha)\,\mathrm{d}x + \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^{n-1}(-\beta+\alpha)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{(x-\alpha)^{n+1}}{n+1}\right]_\alpha^\beta - (\beta-\alpha)\left[\frac{(x-\alpha)^{n}}{n}\right]_\alpha^\beta \\
&= \frac{(\beta-\alpha)^{n+1}}{n+1} - \frac{(\beta-\alpha)^{n+1}}{n}.
\end{aligned}
$$

Vďaka kreatívnej úprave výrazu $x-\beta = (x-\alpha)+(-\beta+\alpha)$ sa výpočet značne zjednodušil.

## 3.3 Jednotka v integrovaní

Kniha ***To nemyslíte vážne, pán Feynman*** [10] ponúka netradičný, až zábavný pohľad do života geniálneho fyzika, vynikajúceho profesora s nevšednými zážitkami, Richarda P. Feynmana.

V kapitole *Iná výzbroj* sa dozvedáme ako tvorba randálu, vyrušovanie na hodine fyziky vynieslo neskôr Feynmanovi titul "jednotka vo výpočete integrálov":

> *Jedného dňa mi prikázal, aby na neho po vyučovaní počkal. "Feynman," povedal mi. "Veľa na mojej hodine hovoríš a robíš randál. Viem prečo. Nudíš sa. Dám ti preto jednu knižku. Sadneš si s ňou dozadu do rohu a budeš ju študovať. Keď sa naučíš všetko, čo v nej je, tak môžeš na vyučovaní zase rozprávať."Od tej doby som každú hodinu fyziky ignoroval, čo je nové ohľadom Pascalovho zákona alebo čo sa to zrovna preberalo. Sedel som vzadu s tou knižkou, boli to Pokročilé metódy matematickej analýzy od Wooda. Bader vedel, že som viacmenej prečítal Úvod do diferenciálneho a integrálneho počtu, takže mi dal knihu, ktorá bola na úrovni. Bola to univerzitná učebnica a obsahovala Fourierove rady, Besselove funkcie, determinanty, eliptické funkcie - samé nádherné veci, o ktorých som vtedy nič nevedel. V tej knižke som sa tiež dočítal, ako sa derivuje podľa parametra za integračným znamienkom. To je taká metóda na výpočet integrálu, ktorá sa z nejakého dôvodu na univerzite veľmi nevykladá. Nekladie sa na ňu veľký*

*dôraz. Ale mne se tá metóda zapáčila a túto zatratenú metódu som používal znova a znova. Takže vďaka tomu, že som bol samouk, vedel som zvláštne metódy, ako počítať integrály. V dôsledku toho, keď chalani z MIT alebo Princetonu nejaký integrál nedokázali spočítať, bolo to preto, že štandardné metódy, ktoré sa učili, neviedli k cieľu. Keby išlo o krivkový integrál, zvládli by to. Keby išlo o obyčajný rozvoj radu, našli by ho. Načo som prišiel ja so svojím integrovaním podľa parametra a ono to často zabralo. Takže som získal reputáciu, že som jednotka na výpočet integrálov, a to len preto, že moja matematická výzbroj bola odlišná od výzbroje všetkých ostatných, a pretože než prišli za mnou, všetky svoje zbrane neúspešne vyskúšali.*

Metódou derivovania podľa parametra počítame niektoré integrály, ktoré nedokážeme vypočítať klasickými metódami. Postup je zväčša nasledovný:

- derivujeme podľa parametra, čím dostaneme integrál, ktorý dokážeme klasickými technikami spočítať,
- integrujeme podľa nezávislej premennej,
- následne integrujeme podľa parametra, určíme integračnú konštantu a dostaneme výsledok. [31]

Samozrejme neostaneme len pri teórii, techniku derivovania podľa paramatra si vyskúšame na príklade z [20]. Zadanie znie:

*Pomocou derivovania podľa parametra vypočítajte nasledovný integrál :*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}.\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}, |a| < 1.$$

Označme hodnotu tohto integrálu pre dané $a$ ako $I(a)$. Najskôr derivujeme podľa parametra $a$:

$$\begin{aligned} I'(a) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-a\cos x}{1+a\cos x}.\frac{\cos x(1-a\cos x)-(1+a\cos x)(-\cos x)}{(1-a\cos x)^2}.\frac{\mathrm{d}x}{\cos x} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+a\cos x}.\frac{2}{1-a\cos x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{1-a^2\cos^2 x}\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Rozšírime zlomkom $\frac{1}{\cos^2 x}$ a upravíme:

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x} - \frac{a^2\cos^2 x}{\cos^2 x}}\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{1+\mathrm{tg}\,^2 x - a^2}\mathrm{d}x.$$

Pri výpočte tohto integrálu použijeme substitúciu $\mathrm{tg}\, x = t$ :

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{1+\mathrm{tg}^2\, x - a^2}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} \mathrm{tg}\, x = t \\ \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = 2\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2-a^2}$$

$$= \frac{2}{1-a^2}\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+(\frac{t}{\sqrt{1-a^2}})^2} = \left| \begin{array}{c} \frac{t}{\sqrt{1-a^2}} = z \\ \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-a^2}}\mathrm{d}x = \mathrm{d}z \end{array} \right|$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}}[\mathrm{arctg}\, xz]_0^{\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}.$$

A nakoniec integrujeme podľa $a$:

$$I(a) = \int \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}\mathrm{d}a = \pi \arcsin a + k,$$

kde $k$ je integračná konštanta, ktorú určíme vďaka tomu, že výpočet hodnoty $I(0)$ je triviálny:

$$I(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1+0\cos x}{1-0\cos x}.\frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{0\mathrm{d}x}{\cos x} = 0.$$

Pre našu hľadanú konštantu $k$ platí:

$$I(0) = \pi \arcsin 0 + k = 0,$$

z čoho dostávame $k = 0$, a teda:

$$I(a) = \pi \arcsin a.$$

Efektívnejšie použitie tejto metódy, je však také, keď v zadaní nemáme explicitne uvedený parameter a nie je teda jasné, že by sa derivovanie podľa parametra dalo použiť. Že nie je ľahké odhaliť použitie tejto metódy v takomto prípade sa presvedčili účastníci Putnamovej súťaže[9] v roku 1982. Ich druhou úlohou bolo vypočítať nasledovný integrál [17]:

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{arctg}\,(\pi x) - \mathrm{arctg}\, x}{x}\mathrm{d}x.$$

[9]Putnamova súťaž sa koná každoročne od roku 1938 pričom svoje matematické zdatnosti si porovnávajú študenti amerických a kanadských vysokých škôl v 12-tich príkladoch. Najlepší, jednotlivci aj školy, sú odmenení finančne a piati najlepší riešitelia sa môžu pýšiť titulom 'Putnam Fellows'

Z najlepších 201 súťažiacich viac ako polovica, 108 študentov, neodovzdalo riešenie a 37 boli hodnotení nulou. Len 14 účastníkov vyriešilo integrál úplne správne (ďalších 30 súťažiacich stratilo jeden alebo dva body z desiatich). Trúfnete si to vyriešiť?

Tento príklad nájdeme aj v [22] avšak s poznámkou, aby sme skúmali

$$F(a) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(ax) - \operatorname{arctg} x}{x} \mathrm{d}x$$

a použili derivovanie podľa parametra.[10]

Riešenie podľa tohto návodu už pre nás nebude nočnou morou ako pre tých 108 študentov. Ak definujeme funkciu $F(a) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(ax) - \operatorname{arctg} x}{x} \mathrm{d}x$, $a > 0$ a postupujeme známym spôsobom, riešenie vyzerá nasledovne:

$$\begin{aligned} F'(a) &= \int_0^\infty \frac{1}{x} \frac{x}{1+(ax)^2} \mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{1}{1+(ax)^2} \mathrm{d}x = \left[ \frac{\operatorname{arctg}(ax)}{a} \right]_{x=0}^\infty \\ &= \frac{1}{a}. \left( \frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{2a}, \\ F(a) &= \frac{\pi}{2} \ln a + K. \end{aligned}$$

Konštantu $K$ určíme pomocou hodnoty $F(1)$, ktorú vieme jednoducho vypočítať:

$$F(1) = \int_0^\infty \frac{0}{x} = 0.$$

Z toho dostávame

$$F(1) = \frac{\pi}{2} \ln 1 + K = 0,$$

z čoho vyplýva, že $K = 0$. To znamená, že

$$F(a) = \frac{\pi}{2} \ln a.$$

Za parameter $a$ dosadíme $\pi$ a dostávame riešenie úlohy :

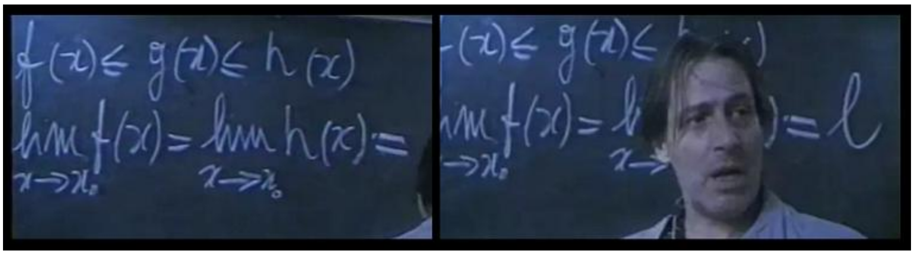
$$F(\pi) = \frac{\pi}{2} \ln \pi.$$

## 3.4 Sendvičová veta

Film inšpirovaný životom matematika *Renata Caccioppolina*, ***Smrť neapolského matematika*** [37], zachytáva jeho posledný týždeň života. Aký by to bol však matematik, keby nám niečo matematické nepredviedol aj vo filme. A profesor Renato

[10] Nie je to náhoda, autor písal túto knihu pre študentov, ktorí sa pripravujú na spomínanú Putnamovu súťaž a značnú časť matematických problémov tvoria práve príkady z minulých rokov.

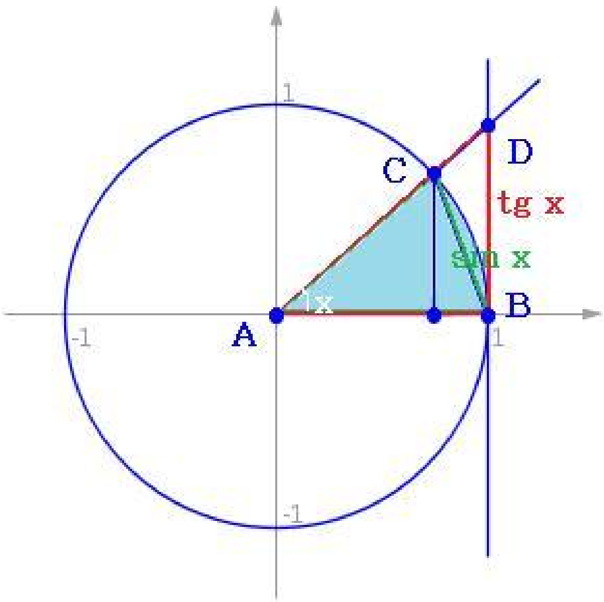
nesklamal. Nech sa páči, sendvičová veta (obr.25).



**Obr. 25:** Sendvičová veta [37]

Zjednodušene povedané, sendvičová veta[11] hovorí, že ak máme tri spojité funkcie $f(x)$, $g(x), h(x)$, pre ktoré platí: $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ a ak $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L$, potom aj $\lim_{x \to x_0} g(x) = L$.

Sendvičovú vetu využijeme napríklad na dôkaz toho, že $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ [18]. Pri dôkaze oprášime aj naše geometrické a goniometrické znalosti. Budeme vychádzať z označenia na obrázku 26.




**Obr. 26:** Výpočet limity

Uhol $x$ je uhol v jednotkovej kružnici vyjadrený v radiánoch, pričom $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Body $A, B, C, D$ majú potom tieto súradnice: $A = [0, 0], B = [1, 0], C = [\cos x, \sin x]$,

[11]presné znenie vety i dôkaz sa nachádza napríklad v [18]

$D = [1, \mathrm{tg}\, x]$.

Teraz vypočítame, čomu sa rovnajú obsahy trojuholníkov $ABC, ABD$ a obsah kruhového výseku $ABC$. Platí: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\sin x$, $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}\mathrm{tg}\, x$ a $S_{\oslash ABC} = \frac{x}{2\pi}\pi = \frac{x}{2}$.

Porovnaním daných obsahov dostávame:

$$\frac{1}{2}\sin x \leq \frac{x}{2} \leq \frac{1}{2}\mathrm{tg}\, x.$$

Pre $x \in (\frac{-\pi}{2}, 0)\bigcup(0, \frac{\pi}{2})$ platí :

$$\frac{1}{2}|\sin x| \leq \frac{|x|}{2} \leq \frac{1}{2}|\mathrm{tg}\, x|.$$

Prenásobením $\frac{2}{\sin x}$ dostaneme:

$$1 \leq \frac{|x|}{|\sin x|} \leq \frac{1}{|\cos x|}.$$

Na intervale $x \in (\frac{-\pi}{2}, 0)\bigcup(0, \frac{\pi}{2})$ sú zlomky $\frac{x}{\sin x}$ a $\frac{1}{\cos x}$ kladné, môžme zrušiť absolútnu hodnotu a invertovať zlomky, čím získame:

$$1 \geq \frac{\sin x}{x} \geq \cos x.$$

Limita $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$ a $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$, zo sendvičovej vety vyplýva, že aj $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

Túto limitu si dobre zapamätajte! Určite ju využijete pri riešení mnohých iných príkladov.

# Záver

Matematika nie je obľúbený predmet. Môžno je čas zmeniť pravdivostnú hodnotu tohto výroku na nulu. Nielen kvôli tejto práci. Matematiku nájdeme v ďalších a v ďalších filmov, seriálov, knihách. A nájdeme ju všade okolo nás. Matematika sa nezmení, nebude len strohá a zapísaná v knihách. Chce, aby sme vstúpili do jej tajov a dotkli sa jej veľkosti. Ale to je už na nás, môžme ju ignorovať alebo objavovať a využiť vo svoj prospech.

A čo na záver? Matematika, nájdete ju aj v nasledujúcej upravenej básni Havran, v origináli od A. E. Poa, teraz však v podaní Michaela Keitha? Možno sa tam ukrýva prvých dvadsať cifier najznámejšieho čísla ...

Poe, E. Near a Raven
*Midnights so dreary, tired and weary.*
*Silently pondering volumes extolling*
*all by-now obsolete lore.* [4]

# Literatúra


[1] ANDĚL, J.: *Matematika náhody*, Matfyzpress, Praha, 2000

[2] BRAKENHIELM, P., R.: *De sex första böckerna af Euklidis Elementa jämte planimetri och stereoemetri*, N.M.Lindhs Boktryckeri, Örebro, 1844, dostupné na internete (19.5.2012): http://runeberg.org/elementa/0001.html

[3] BROWN, D.: *Da Vinci Code*, Doubleday Group, UK, 2003

[4] CRILLY, T.: *Matematika 50 myšlienok, ktoré by ste mali poznať*, Slovart, Bratislava, 2011

[5] DALGAARD, P.: *Introductory Statistics with R*, Springer, Boston, 2008

[6] DICK, P.,K.: *Sluneční loterie*, Laser, Plzeň, 1999

[7] DIRECCTIÓN NACIONAL DE SERVICIOS ACADÉMICOS VIRTUALES: *George Bernard Dantzig y la historia (y el fututo) de la programacion lineal*, 28.5.2012

[8] DUMAS, A.: *Gróf Montechristo*, Mladé letá, Bratislava, 1965

[9] ĎURATNÁ, M.: *Motivačné príklady k predmetom matematického základu*, bakalárska práca, FMFI UK, Bratislava, 2011, dostupné na internete (1.12.2011): http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/stehlikova/BC/2011-duratna.pdf

[10] FEYNMAN, R., P.:*To nemyslíte vážně, pane Feynmane!*, Aurora, Praha, 2001

[11] FUDENBERG, D., TIROLE, J.: *Game Theory*, The MIT Press, Massachusetts, 1991

[12] HALICKÁ, M.:*Dvadsať rokov moderných metód vnútorného bodu.* Pokroky matematiky, fyziky a astronómie, 49, 2004, p. 234 - 244.

[13] HAMACKOVÁ, P.: *Minimaxové a smíšené strategie řešení maticových her*, diplomová práca, Pedagogická fakulta MU, Brno, 2007, dotupné na internete (28.5.2012): http://is.muni.cz/th/105801/pedf_m/petra.pdf

[14] HAND, D., J.:*Statistic. A very short introduction*, Oxford University Press, Oxford, 2008

[15] JAROŠOVÁ, M.: *Fibonacciho čísla a jejich aplikace*, dizertačná práca, Prírodovedecká fakulta MU, Brno, 2010, dostupné na internete (28.5.2012): http://is.muni.cz/th/41281/prif_d/disertace.pdf

[16] KARLIN, S.: *Mathematical in Games, Programming*, Addison-Wesley Pub.Co., Boston, 1959

[17] KLOSINKI, L., F., ALEXANDERSON, G., L., HILLMAN, A., P.: *The William Lowell Putnam Mathematical Competition*, The American Mathematical Monthly, vol. 90, no. 8, 1983, p. 546-553.

[18] KOLLÁR, M.: *Matematická analýza (1)*, prednášky, FMFI UK, Bratislava, 2009

[19] KOLLÁR, M.: *Matematická analýza (2)*, prednášky, FMFI UK, Bratislava, 2010

[20] KOLLÁR, M., KOSSACZKÁ, Ľ., ŠEVČOVIČ, D.: *Diferenciálny a integrálny počet funkcií viac premenných v príkladoch*, FMFI UK, Bratislava, 2010, dostupné na internete (3.12.2011): http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/sevcovic/knihy/difint-kks.pdf

[21] KUBÁČEK, Z., VALÁŠEK, J.: *Cvičenia z matematickej analýzy I*, skriptá MFF UK, Bratislava, 1989

[22] LARSON, L. , C.: *Metódy riešenia matematických problémov*, Alfa, Bratislava, 1990

[23] LIVIO, M.: *Zlatý rez*, Dokořán, Praha, 2006

[24] MAO, L.: *Selected Papers on Mathematical Combinatorics*, World Academic Press, Londýn, 2007

[25] MLYNARČÍKOVÁ, M.: *Fibonacciho postupnosť a zlatý rez*, in Zborník príspevkov z letnej školy z teórie vyučovania matematiky PYTAGORAS 2006, Bratislava: P-MAT, n.o., 2006, p. 64-69, dostupné na internete(19.5.2012): www.p-mat.sk/pytagoras/zbornik2006/064_Mlynarcikova_FibPost.pdf

[26] NIEPEL, M.: *Lineárna algebra a geometria (2)*, prednášky, FMFI UK, Bratislava, 2010

[27] POLÁK, Z., ŠEDIVÝ, P.: *Vrhy.* http://www.jaroska.cz/fo/_media/archiv/knihovna/vrhy_booklet.pdf, 13.5.2012

[28] ROSENTHAL, E.: *The calculus of murder*, St. Martin's Press, New York, 1986

[29] RUBENSTEIN, S.: *George Bernard Dantzig – Stanford math professor.* http://www.sfgate.com/cgi-bin/article.cgi?f=/c/a/2005/05/16/BAGGVCPO811.DTL, dostupné na internete (28.5.2012)

[30] SEDLÁK, M.: *Metódy vnútorného bodu v lineárnom programovaní*, diplomová práca, FMFI UK, Bratislava, 2010, dostupné na internete(28.5.2012): http://www.iam.fmph.uniba.sk/studium/efm/diplomovky/2010/sedlakm/diplomovka.pdf

[31] TUČEK, R.: *Integrály závislé na parametru.* http://atlasweb.info/Matem/Vys_mat/Mat_an.html, 5.4.2012

[32] ZEISING, A.: *Neue Lehre von Proportionen des menschlichen Körpers*, Rudolph Weigel, Leipzig , 1854

## Filmy a seriály


[33] AKIN, F.: *Im Juli*. Koch - Lorber Films, Nemecko, 2000.

[34] ANDERSON, W.: *Rushmore*. Buena Vista Pictures, USA, 1998.

[35] HOWARD, R.: *A beautiful mind*. Universal Pictures, USA, 2001.

[36] HOWARD, R.: *The Da Vinci code*. Columbia Pictures, USA, 2006.

[37] MARTONE M.: *Morte di un Matematico Napoletano*. Radiotelevisione Italiana, Taliansko, 1992.

[38] NISHITANI, H.: *Suspect X*. Toho, Japonsko, 2008.

[39] RAY, N.: *Rebel without cause*. Warner Bros, USA, 1955.

[40] RITCHIE, G.: *Sherlock Holmes: A Game of Shadows*. Warner Bros. Pictures, USA & UK, 2011.

[41] SCOTT, R., SCOTT, T.: *Numb3rs*. CBS Television Studios, USA, 2005- 2010, 1. séria, 10. diel.