UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

MOTIVAČNÉ PRÍKLADY ZALOŽENÉ NA UKÁŽKACH Z FILMOV A ROMÁNOV

BAKALÁRSKA PRÁCA

2013

Mária MÉSZÁROSOVÁ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

MOTIVAČNÉ PRÍKLADY ZALOŽENÉ NA UKÁŽKACH Z FILMOV A ROMÁNOV

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: RNDr. Beáta Stehlíková, PhD.

Bratislava 2013
Mária MÉSZÁROSOVÁ

19638377

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Mária Mészárosová
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Motivačné príklady založené na ukážkach z filmov a románov

Cieľ: Práca nadväzuje na bakalárske práce z predchádzajúcich rokov, ktoré sa zaoberali touto témou - [Ďuratná, 2010], [Trajová, 2011]. Táto práca bude tiež obsahovať matematické úlohy určené pre prvé ročníky VŠ, resp. posledné ročníky SŠ, ktoré vychádzajú z úryvkov z románov, filmov, seriálov a pod. Cieľom je spracovať tieto úlohy a vysvetliť ich riešenie.

Vedúci: RNDr. Mgr. Beáta Stehlíková, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

Dátum zadania: 10.10.2012

Dátum schválenia: 03.11.2012 doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

....

študent vedúci práce

Poďakovanie Chcela by som sa poďakovať RNDr. Beáte Stehlíkovej, mojej školiteľke, za ochotu, pomoc a cenné rady pri písaní práce. Ďalej ďakujem mojej rodine a priateľom za podporu a nápady, a sestre za originálne ilustrácie.

Abstrakt

MÉSZÁROSOVÁ, Mária: Motivačné príklady založené na ukážkach z filmov a románov [Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: RNDr. Beáta Stehlíková, PhD., Bratislava, 2013, 66s.

Práca nadväzuje na bakalárske práce z predchádzajúcich rokov, ktoré sa zaoberali témou matematiky v románoch a filmoch. Obsahuje matematické úlohy určené pre prvé ročníky vysokých škôl a posledné ročníky stredných škôl. Cieľom tejto práce je prostredníctvom ukážok z románov a filmov spopularizovať matematiku medzi študentami a motivovať ich k vyriešeniu uvedených príkladov, prípadne prebudiť záujem o ďalšie úlohy týkajúce sa matematiky.

Kľúčové slová: nekonečné rady, teória čísel, integrálny a diferenciálny počet, pravdepodobnosť, teória hier, finančná matematika

Abstract

MÉSZÁROSOVÁ, Mária: Motivational problems based on snippets from films and novels [Bachelor Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: RNDr. Beáta Stehlíková, PhD., Bratislava, 2013, 66p.

This thesis follows the bachelor theses from previous years which dealt with the topic of mathematics in novels and films. It contains various mathematical problems designed for first years of college study and last years of secondary schools. The purpose of this thesis is to popularize mathematics through problems from novels and films among students, to motivate them to solve the problems or to awaken interest in other tasks related to mathematics.

Keywords: infinite series, number theory, integral and differential calculus, probability, game theory, financial mathematics

Obsah

Úvod **8**

1 Teória čísel **9**

1.1 Muž, ktorý poznal nekonečno . . . 9

1.2 Spriatelené čísla . . . 14

2 Diferenciálny a integrálny počet **17**

2.1 Poison vs. Poisson . . . 17

2.2 Zahulíme, uvidíme . . . 24

2.3 Nevzdávať sa! . . . 28

2.4 Mám problém . . . 31

3 Teória hier **36**

3.1 Záchranca . . . 36

3.2 Bitka dôvtipu . . . 38

3.3 Ako teória hier vyriešila záhadu z Talmudu . . . 42

4 Pravdepodobnosť a štatistika **48**

4.1 Nič nie je nemožné . . . 48

4.2 Všetko najlepšie! . . . 52

5 Finančná matematika **56**

Záver **60**

Zoznam použitej literatúry **61**

Úvod

Kto nemá rád filmy? Ich pútavý dej dokáže v človeku vyvolať najrôznejšie emócie, pobaví, poučí, prinútia zamyslieť sa. A kto nemá rád knižky, ktoré svojím obsahom dokážu úplne pohltiť čitateľa a preniesť ho v mysli do sveta fantázie? Samozrejme, pokiaľ nejde o učebnice. Večné nepriateľky študentov. Knihy ako také majú schopnosť často nevedomky formovať názory svojich čitateľov. Nenanucujúc poučky dokážu naučiť a takisto nenúteným spôsobom poskytujú riešenie navonok nevyriešiteľných problémov - vtipne a s nadhľadom. Nenechajú čitateľa len tak ledabolo listovať v nich, ale prinútia ho zamyslieť sa, čítať ďalej a spolu s hlavným hrdinom byť svedkom nečakaných udalostí a rozlúsknutí mnohých záhad. Dievčatá sa nájdu v hlavných hrdinkách románov, chlapci zas obdivujú schopnosti detektívov. Každý si dokáže nájsť niečo pre seba.

Láska k literatúre alebo k jej vizuálnej podobe, k filmu, dokáže človeka priviesť k poznaniu, aké nečakal. A to sa ráta. Niekedy aj doslova. Táto bakalárska práca obsahuje ukážky matematických problémov, ktoré sa vyskytli v románoch alebo filmoch. Jej cieľom je prebudiť u čitateľa záujem o matematiku prostredníctvom nekonvenčne podaného riešenia úloh matematického základu a úloh týkajúcich sa teórie hier a finančnej matematiky.

Príklady sú rozdelené do piatich kapitol. Prvá kapitola je venovaná zaujímavým číslam v matematike, konkrétne aproximáciam čísla π, číslam taxíkov a spriateleným číslam. Druhá kapitola pojednáva najmä o integrálnom počte a metódach integrovania, v jej závere sa nachádza aj riešenie problému tautochróny a diferenciálna rovnica. V tretej kapitole sa venujeme netradičnému riešeniu úloh z teórie hier. Štvrtá kapitola obsahuje jednoduché príklady z pravdepodobnosti a štatistiky. Posledná, piata kapitola, obsahuje základy finančnej matematiky.

1 Teória čísel

Vo filmoch a románoch si svoje miesto našli aj zaujímavé čísla, ako napríklad π a spriatelené čísla. Ich vlastnosťami sa zaoberá odvetvie matematiky zvané teória čísel.

1.1 Muž, ktorý poznal nekonečno

High School Musical [63]. Stretneme sa s ním všade. Počnúc aktovkami, tričkami, končiac detským šampanským s týmto motívom. Ale kým by sme to zaškatuľkovali ako povrchnú sériu filmov pre malé deti, zastavme sa a skúsme v ňom nájsť aj niečo pre nás, starších.
Ak ste nebodaj mali možnosť zhliadnuť prvý zo série filmov **Muzikál zo strednej**, naskytol sa vám pohľad na veľmi zaujímavú vec.

Obr. 1: High School Musical [63]

Na tabuli sa objavili dva nekonečné rady:

$$\frac{4}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6n+1)\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{4^n\,(n!)^3},$$
$$\frac{8}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(42n+5)\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{64^n\,(n!)^3}$$

a teenagermi zbožňovaná Vanessa Anne Hudgens, stvárňujúca Gabrielu Montez, inteligentnú speváčku a hlavnú postavu nášho filmu, zamrmle:

> *"To by malo byť $\frac{16}{\pi}$."* Začuje ju však učiteľka: *„Prosím, slečna Montezová?"*
> *„Nemalo by tam byť náhodou $\frac{16}{\pi}$?"*
> *„Šestnásť lomeno pí,"* odpovedá učiteľka, *„to je nemožné."*

Potom po niekoľkých ťuknutiach do kalkulačky nejakým spôsobom zistí, že to má byť naozaj $\frac{16}{\pi}$. *„Ďakujem za opravu.“*. Zotrie osmičku, napíše

$$\frac{16}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(42n+5)\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{64^n (n!)^3} \tag{1}$$

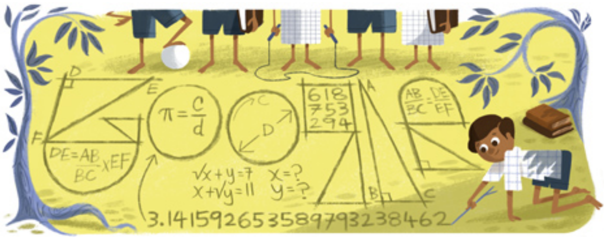
a uznanlivo sa usmeje [63].

Tu, žiaľ, matematika vo filme High School Musical končí, ale nechať tie sumy bez povšimnutia by od nás nebolo fér. Tie sumy sú len niektoré z mnohých, ktoré aproximujú číslo π a ktoré zároveň objavil indický matematik Srinivasa Ramanujan[1] (1887-1920). Podľa autora jeho biografie *R. Kanigela* - **Muž, ktorý poznal nekonečno** [21]. Pochádzal zo skromných pomerov, na štátnu školu chodil len vďaka štipendiu. Keď mal 11 rokov, svojimi vedomosťami sa vyrovnal dvom vysokoškolákom, ktorí boli u Ramanujanovcov ubytovaní. Požičali mu knihu o pokročilej trigonometrii, ktorú prečítal a pochopil a už ako trinásťročný sám objavil nové zložité teorémy [20]. V roku 1912 ho priatelia nabádali, aby sa o svoje výsledky podelil s troma významnými matematikmi vtedajšej doby, pôsobiacimi na Cambridgi. Dvaja z nich, H. F. Baker a E. W. Hobson, mu nikdy neodpovedali. Tretí, Godfrey Harold Hardy (1877-1947), mu ako jediný odpísal. Hardy bol v tom čase považovaný za najvýznamnejšieho matematika svojej generácie [21].

Hardy bol veľmi zložitá osobnosť, pre matematických géniov mal svoj vlastný rebríček, ktorý sa po čase stal verejne známym: 100 pre Ramanujana, 80 pre Hilberta, 30 pre Littlewooda, 25 pre seba. Niektoré z Ramanujanových vzorcov ho tak uchvátili, že ako nadšený komentár o nich napísal: *„Určite musia byť pravdivé. Pretože keby neboli, nikto iný by v sebe nenašiel takú predstavivosť, aby ich vymyslel.“* [35]

V decembri 2012, pri príležitosti 125. výročia narodenia Ramanujana sa v Dílí konala konferencia, ktorá bola zakončením Národného roku matematiky v Indii. Zúčastnilo sa na nej množstvo matematikov z celého sveta, vrátane zástupcov z Ramanujan Mathematical Society [48]. Indický Google (pozri obr. 2) tiež nemohol prehliadnuť veľkolepé oslavy a vytvoril doodle na poctu Ramanujanovi [46].

[1] Tiež je to menovec Amity Ramanujan zo seriálu **Numb3rs** [65].



Obr. 2: Pocta Ramanujanovi [46]

Ramanujan umrel veľmi mladý, mal len 32 rokov, celý život ho sužovalo zdravie. Umrel na tuberkulózu len tri roky po tom, ako sa presťahoval do Londýna, aby tam spolupracoval s Hardym. Hovorí sa, že keď ležal v londýnskej nemocnici, Hardy ho prišiel navštíviť. Vošiel do jeho izby a prehodil, že prišiel taxíkom s poznávacou značkou 1729, čo je podľa neho pekne nudné a trápne číslo. Ramanujan, sediaci uprostred postele, sa na neho pozrel a povedal: *"Len si to nemyslite. Mne sa toto číslo naopak zdá veľmi zaujímavé - je to prvé celé číslo, ktoré je možné zapísať rôznymi spôsobmi ako súčet dvoch tretích mocnín."* [35]

Ramanujan mal pravdu:

$$1729 \;=\; 1^3 + 12^3 \;=\; 9^3 + 10^3.$$

Ďalšími takýmito číslami sú napríklad:

$$\begin{aligned}
4104 &= 9^3 + 15^3 = 2^3 + 16^3,\\
20683 &= 19^3 + 24^3 = 10^3 + 27^3,\\
39312 &= 15^3 + 33^3 = 2^3 + 34^3,\\
40033 &= 16^3 + 33^3 = 9^3 + 34^3. \text{ [35]}
\end{aligned}$$

V tomto výroku sa často ešte uvádza upresnenie „súčet dvoch kladných tretín mocnín". Ak by sme totiž povolili používanie záporných čísel, vedeli by sme sa dostať k oveľa menším číslam. Napríklad:

$$(-9)^3 + (-15)^3 = (-2)^3 + (-16)^3 = -4104.$$

Analogicky by sme získali ďalšie záporné čísla: -20683, -39312, atď.

Vráťme sa však späť k našej sume (1) a poriadne si ju prezrime. Nezvyčajným sa nám môže zdať dolný index - malé písmenko n. Volá sa Pochhammerov symbol, podľa L.A.Pochhammera, pruského matematika [1], a v matematickej notácii nie je jednoznačnosť[2]. V našom prípade ide o rastúci faktoriál a definujeme ho takto [41]:

$$(a)_0 := 1,\ (a)_n := a\,(a+1)\cdots(a+n-1)\,,\ n \geq 1.$$

Keď teda už rozumieme zápisu Ramanujanovej sumy, nič nám nebráni v tom, aby sme si zrátali jej čiastočné súčty. Poďme na to postupne. Vyjadrime si najskôr π z výrazu (1):

$$\pi = \frac{16}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(42n+5)\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{64^n (n!)^3}}. \tag{2}$$

Počítajme teraz aproximácie čísla π tak, že namiesto súčtu nekonečného radu vo výraze (2) zoberieme jeho čiastočné súčty:

$$\pi = \frac{16}{\sum_{n=0}^{k} \frac{(42n+5)\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{64^n (n!)^3}}. \tag{3}$$

Dostaneme hodnoty uvedené v tabuľke 1, čo sú celkom slušné výsledky, nakoľko sme použili len niekoľko prvých členov.

Tabuľka 1: Aproximácia π pomocou čiastočných súčtov nekonečného radu

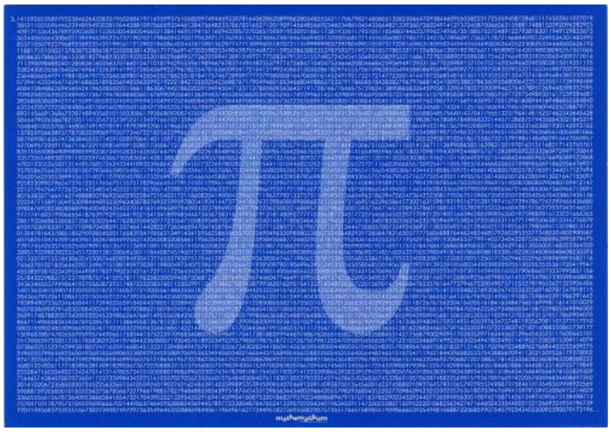
k	**aproximácie π**
0	3.20
1	3.142309167625623
2	3.141602192745309
3	3.141592785498498

Skúsme si teraz stanoviť čiastkový cieľ, napríklad 3.141592653589793, čo je π s presnosťou na 15 desatinných miest [33]. Na dosiahnutie nášho cieľa nám bude stačiť

[2] V tvare $(x)_n$ popisuje takzvaný „klesajúci" faktoriál: $x\,(x-1)\,(x-2)\cdots(x-n+1)$, v tvare $x^{(n)}$ zas takzvaný „rastúci" faktoriál: $x\,(x+1)\,(x+2)\cdots(x+n-1)$. Samotný Pochhammer ho však používal v úplne odlišných prípadoch - a to pre zapísanie obyčajného kombinačného čísla $(x)_n = \binom{x}{n}$. Na tabuli vo filme High School Musical znázorňuje horný index mocninu a dolný index Pochhammerov symbol - napriek jeho umiesteniu popisuje rastúci faktoriál [1].

len prvých osem sčítancov nekonečného radu:

$$\frac{16}{\sum_{n=0}^{8} \frac{(42n+5)\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{64^n (n!)^3}} = 3.141592653589793.$$



Obr. 3: Pohľadnica s desatinnými miestami π [38]

Môžeme to overiť aj pohľadom na pohľadnicu s motívom π, pozri obr. 3.

Dva výrazy z tabule vo filme High School Musical však nie sú jedinými aproximáciami čísla π od Ramanujana. Jednou z tých jednoduchších je odhad presný na 9 desatinných miest: $\sqrt[4]{\frac{2143}{22}} \approx 3.1415926538$ [41]. Ale napríklad

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!\,(1103 + 26390k)}{(k!)^4\, 396^{4k}}$$

dokáže každou iteráciou aproximovať π o 8 desatinných miest presnejšie [8]. Ramanujanove súčty radov boli až do roku 2000 (pozri [9]) najrýchlejšími algoritmami na výpočet hodnoty π. Už v roku 1989 bratia Chudnovskí (americkí matematici narodení v Kyjeve) dokázali vďaka Ramanujanovej sume upravenej na tvar

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,(6k)!\,(13591409 + 545140134k)}{(3k)!\,(k!)^3\, 640320^{3k+\frac{3}{2}}}$$

a vďaka superpočítaču aproximovať hodnotu π na miliardu desatinných miest .
Napriek existencii mnohých vzorcov, webstránok, superpočítačov a kalkulačiek sa však stále darí „komoliť“ číslo π. Tak tomu bolo aj v úvodných titulkoch k filmu s názvom ***Pí***[3] [56], kde si tvorcovia nedali pozor a uviedli 3.14159265*263124534* namiesto

[3]Film o paranoidnom matematikovi, ktorý sa za pomoci vlastnoručne vyrobeného prístroja snaží predpovedať cenu akcií na burze. Svet preňho je zložený z čísel a neexistuje preňho nič iné, len matematika [56].

3.14159265*35897932384*. Alebo len chceli otestovať divákov a urobili to schválne?

1.2 Spriatelené čísla

> ***Sobota, 15. októbra 1791***
> *Jeseň je nádherná. Počas týchto mesiacov tesne pred začiatkom zimy vyzerá denné svetlo tak jemne a mäkko, západy slnka sú farebnejšie. Cítim náznak melanchólie vo vzduchu, aj keď možno je to len moja nostalgia. Zanechávam za sebou svoju mladosť.*
> *Moja mladšia sestra už tiež dospieva. Tak som bola zahĺbená do svojho štúdia, že som si ani nevšimla, ako veľmi sa zmenila. Dnes večer prišla do mojej izby a spýtala sa ma: „Sophie, čo je to láska?“* [34]

Aj o tomto sa píše sa v knihe **Sofiin denník**, alebo **Sophie's Diary**. Ide o matematický román inšpirovaný životom Sophie Germain. Zaznamenáva život teenagerky, ktorá sa učí matematiku sama doma a dospieva počas najbúrlivejších rokov Francúzskej revolúcie. Tento román, písaný formou denníka, je od autorky *Dory Musielak*, profesorky fyziky na Texaskej univerzite.

Sophie Germain sa narodila v Paríži, v roku 1776. O jej detstve toho veľa nevieme. Prví autori jej životopisov uvádzajú, že ako mladé dievča sa prihlásila na École Polytechnique pod chlapčenským menom, aby svoju prácu v oblasti matematiky predstavila Lagrangeovi [36].

Sophie na otázku jej sestry neodpovedala. Ako sa neskôr sama vyjadrila, keďže vie len matematiku, porozprávala by jej o spriatelených číslach.

> *Grécki matematici definovali dve celé čísla ako spriatelené, ak každé z nich bolo sumou určitých deliteľov toho druhého čísla* [34].

Jedným z takýchto gréckych matematikov bol aj Pytagoras, ktorý vedel, že dvojicou najmenších spriatelených čísel sú čísla 220 a 284. Sophie tiež vedela o tejto dvojici a vo svojom denníku ukazuje, prečo to tak je. Deliteľmi čísla 220 sú 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110 a samozrejme aj 220. Ak urobíme súčet všetkých deliteľov čísla 220 okrem najväčšieho z nich, teda 220, dostaneme:

$$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284. \tag{4}$$

Deliteľmi čísla 284 (okrem najväčšieho deliteľa - 284) sú sčítance v nasledujúcej rovnosti:

$$1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220. \tag{5}$$

„Preto sú spriatelené,“ píše Sophie, *„lebo jedno „obsahuje“ druhé.“* Sophie ďalej píše, že spriatelené čísla boli používané v mágii a astrológii, prípadne pri varení elixírov lásky a vyrábaní talizmanov. A či existujú aj nejaké iné spriatelené čísla ako 284 a 220? Áno, sú nimi napríklad čísla 17 296 a 18 416. Tento pár bol objavený arabským matematikom menom Ibn al-Banna v trinástom storočí. Neskôr, René Descartes objavil ďalšiu dvojicu: 9363584 a 9437056. Sophie sa však nepodarilo objaviť vzorec, ktorý by dokázal určovať takéto dvojice. Vedela len, že isté vzorce už objavené boli.
Staroveký matematik Thabit ibn Kurrah si všimol, že ak je $n > 1$ a čísla p, q, r sú prvočísla v tvare:

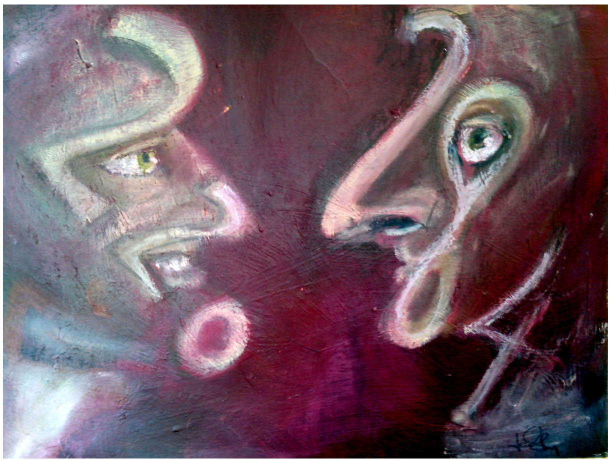
$$p = 3 \times 2^{n-1} - 1, q = 3 \times 2^n - 1 a r = 9 \times 2^{2n-1} - 1, \tag{6}$$

potom $2^n pq$ a $2^n r$ je dvojica spriatelených čísel [34]. Môžeme si všimnúť, že čísla 220 a 284 spĺňajú Thabit ibh Kurrahov vzorec, pre $n = 2$. Dosaďme si do jeho vzorca:

$$p = 3 \times 2^{2-1} - 1, q = 3 \times 2^2 - 1, r = 9 \times 2^{2*2-1} - 1 \Rightarrow p = 5, q = 11, r = 71. \tag{7}$$

Všetky tri sú prvočísla, tento predpoklad je teda splnený. Po dosadení p, q a r do predpisu pre získanie dvojice spriatelených čísel získavame, že $2^2 \times 5 \times 11 = 220$ a $2^2 \times 71 = 284$, čo je pre nás už známa dvojica spriatelených čísel.

Thabit ibn Kurrahova teoréma bola znovuobjavená Fermatom (1636), Descartesom (1638) a Euler ju zovšeobecnil na tvar: $2^n pq$ a $2^n r$ sú spriatelené, ak tri prirodzené čísla $p = 2^{n-m} f - 1$, $q = 2^n f - 1$ a $r = 2^{2n-m} f^2 - 1$ sú prvočísla, kde $n > m \geq 1$ a $f = 2^m + 1$ [10].
Thabitov vzorec nám dáva dvojice spriatelených čísel pre $n = 2, 4, 7$, ale pre $n < 200$ takéto čísla nevieme nájsť. Naopak, Eulerovo zovšeobecnenie prináša ešte dvojicu pre $m = 7$, $n = 8$. [10]



Obr. 4: Spriatelené čísla známe už Pytagorejcom - 220 a 284 [32]

Eulerovi sa podarilo nájsť dohromady 59 párov spriatelených čísel, medzi nimi je aj 6232 a 6368 a dvojica 10744 a 10856. Jednému 16-ročnému talianskemu mladíkovi menom N. Paganini[4] sa v roku 1866 podarilo nájsť menšiu, slávnymi matematikmi prehliadanú dvojicu 1184 a 1210 [45]. Matematik E.Escott sa pýši objavom 390 spriatelených párov, P. Pouletovi sa podarilo nájsť ďalších 43, medzi nimi napríklad 122368 a 135536 [3].

Čo sa spriatelených čísel týka, existuje niekoľko nezodpovedaných otázok, napríklad: Existuje nekonečne veľa dvojíc spriatelených čísel? Existujú dvojice, v ktorých jedno číslo je párne a druhé nepárne?[3] Sophie končí zápis vo svojom denníku slovami: *„Och, kam som sa to až dostala? Začala som pri láske a skončila som pri matematike. Ani nebudem očakávať, že mi sestra porozumie.“* [34]

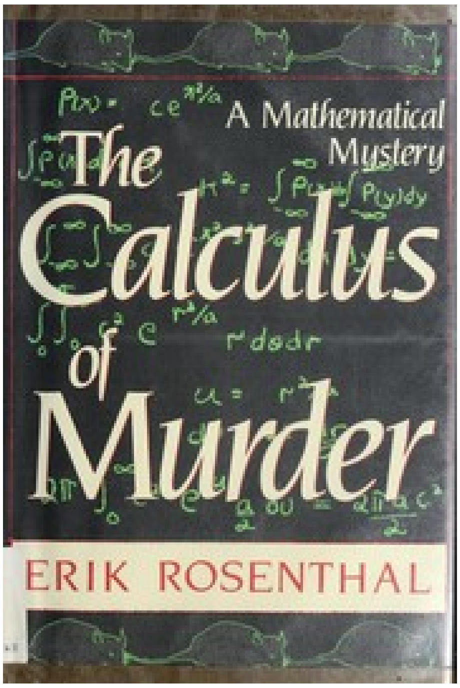
[4]N. Paganini - matematik a N. Paganini - huslista neboli v príbuzenskom vzťahu [45].

2 Diferenciálny a integrálny počet

V tejto kapitole si ukážeme príklady týkajúce sa rôznych metód integrovania, ktoré sa vyskytli v románoch a filmoch.

2.1 Poison vs. Poisson

Tajomne znejúci názov knižky a obal s potkanmi a integrálmi nám ponúka autor *Erik Rosenthal*. Jeho knižka ***The Calculus of Murder*** [42] už tým svojím názvom naznačuje dve veci: že zrejme pôjde o vraždu a že ju nebude riešiť hocikto. Hlavnou postavou je totiž detektív Dan Brodsky, ktorý je zároveň učiteľom matematiky. A tie potkany? Jed určený pre ne je smrteľný aj pre človeka...



Obr. 5: Obálka knihy The Calculus of Murder [42]

Navyše, ak sa pozrieme trochu na autorovu minulosť, zistíme, že má blízky vzťah k matematike. Erik Rosenthal má doktorát z Univerzity v Berkeley a dnes je profesorom na katedre matematiky na Univerzite v New Haven [49]. Ak začneme od neho, vďaka projektu Mathematics Genealogy Project [23] sa môžme dostať cez Rosenthalovho školiteľa a školiteľa jeho školiteľa, atď. až k menám Poisson, Laplace a Lagrange, Euler, Bernoulli, ktorí si boli školiteľmi dizertačných prác.

V skriptách z druhej polovice 19. storočia s názvom *Cours d'analyse de l'école polytechnique* [47], autor knihy J. C. F. Sturm píše, že riešenie integrálu, ktorý sa vyskytol aj na obale The Calculus of Murder, patrí pôvodom Poissonovi. Od tvaru, v akom je uvedený, sa náš integrál líši len hranicami integrovania a konštantami, resp. ich znamienkami, ktoré však výpočet nekomplikujú. Výpočet teraz budeme robiť spôsobom, akým sme zvyknutí, ukážku historického výpočtu si nechávame na neskôr.

Máme teda funkciu $P(x) = ce^{\frac{x^2}{a}}$, ktorú máme zintegrovať. Tento integrál označme $K = \int_{-\infty}^{\infty} P(x)\mathrm{d}x$. Potom K^2 vyzerá nasledovne:

$$K^2 = \int_{-\infty}^{\infty} P(x)\,\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} P(y)\,\mathrm{d}y.$$

Pomocou Fubiniho vety [25] môžeme tento súčin napísať ako dvojný integrál

$$K^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} ce^{\frac{(x^2+y^2)}{a}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{8}$$

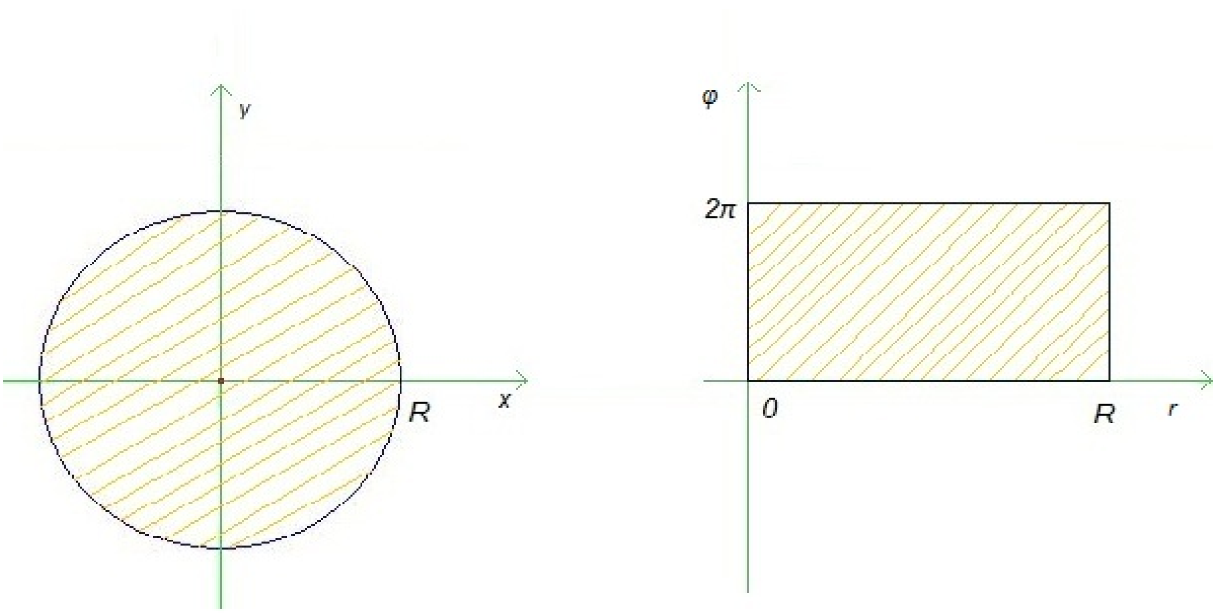
Na tento dvojný integrál použime polárnu transformáciu, pozri napr. [25]. Výraz $x^2 + y^2 \leq r^2$ reprezentuje v karteziánskych súradniciach kruh so stredom v počiatku a polomerom r. Z obrázka 6 vidíme, že po transformácii na polárne súradnice sa oblasť, po ktorej integrujeme, zmení z kruhu na obdĺžnik so stranami zodpovedajúcimi veľkosti polomeru kruhu r a, keďže ide o celý kruh zodpovedajúci veľkosti celého uhla, 2π. V našom prípade je polomer kruhu nekonečne veľký, strana obdĺžnika zodpovedajúca dĺžke polomeru bude takisto rovná nekonečnu. Integrovať teda budeme po oblasti tvaru nekonečne dlhého pásu šírky 2π.

Podľa [25], ak $I_g(y)$ je determinant Jacobiho matice prvých derivácií zobrazenia $g(y)$ a $I_g(y) \neq 0$, potom platí vzťah substitúcie *x=g(y)* pre integrál vypočítaný pomocou novej premennej y:

$$\int_{\Omega} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\Omega'} f(g(y))\,|I_g(y)|\,\mathrm{d}y. \tag{9}$$

Ak teda chceme použiť substitúciu na polárne súradnice

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi, \end{aligned} \tag{10}$$



Obr. 6: Z karteziánskych na polárne

je potrebné zistiť, ako vyzerá determinant Jacobiho matice, tzv. Jacobián:

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial r\mathrm{cos}\varphi}{\partial r} & \frac{\partial r\mathrm{cos}\varphi}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial r\mathrm{sin}\varphi}{\partial r} & \frac{\partial r\mathrm{sin}\varphi}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{cos}\varphi & -r\mathrm{sin}\varphi \\ \mathrm{sin}\varphi & r\mathrm{cos}\varphi \end{vmatrix} = r\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = r. \tag{11}$$

Vidíme, že $|J| \neq 0$, môžeme teda pokračovať vo výpočte s novými premennými. Ako sme si už vysvetlili, $r \in \langle 0; \infty)$, $\varphi \in \langle 0; 2\pi \rangle$.

Takto dostávame:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} c^2 e^{\frac{r^2}{a}} \, |J| \, \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} c^2 e^{\frac{r^2}{a}} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = 2\pi \int_0^{\infty} c^2 r e^{\frac{r^2}{a}} \, \mathrm{d}r. \tag{12}$$

Použijeme substitúciu:

$$u = \frac{r^2}{a} \Rightarrow \mathrm{d}u = \frac{2r\mathrm{d}r}{a} \Rightarrow \mathrm{d}r = \frac{a \cdot \mathrm{d}u}{2}, \tag{13}$$

čím dostaneme:

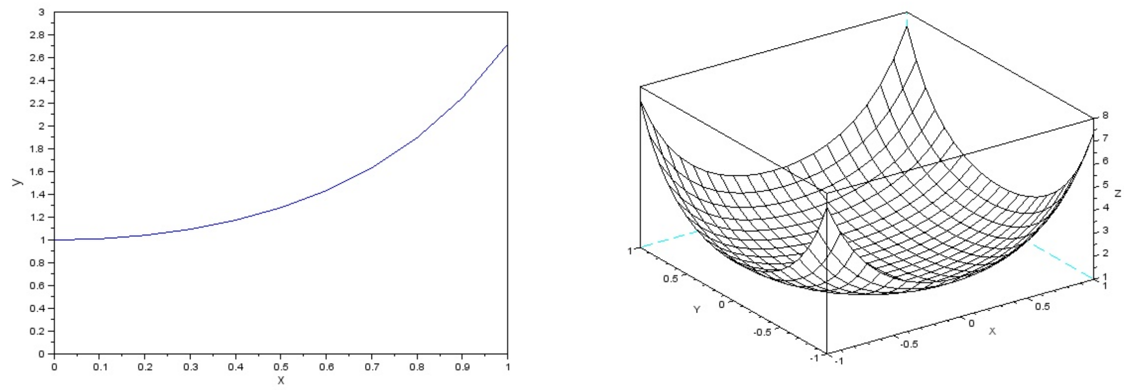
$$2\pi \int_0^{\infty} c^2 e^u \frac{a}{2} \mathrm{d}u = \frac{2\pi a c^2}{2} \left[e^u\right]_0^{\infty} = \infty. \tag{14}$$

Samostatne sme teda riešili integrál. Podľa všetkého by malo vyjsť nekonečno. Pozrieme sa na obal knihy, aby sme si skontrolovali výsledok, a tam je niečo úplne iné!

A začneme rozmýšľať. Prečo to máme zle? A čo to vlastne rátame? Ako vyzerá graf funkcie, ktorú integrujeme? [obr.7]

Keď si najskôr vezmeme pôvodný jednorozmerný prípad, kde pre jednoduchosť budeme konštanty c aj a rovné 1, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{x^2}$, znamenalo by to, že chceme zrátať plochu od mínus nekonečna do plus nekonečna medzi osou x a grafom e^{x^2}, pozri obr. 7a. Ale prečo by to nemalo byť nekonečno?

Pozrime sa ďalej, čo vyjadruje dvojrozmerný integrál. Graf funkcie $e^{x^2+y^2}$ (obr. 7b) by nám mal pomôcť.



(a) Graf funkcie e^{x^2} **(b)** Graf funkcie $e^{x^2+y^2}$

Obr. 7: Grafy integrovaných funkcií

V tomto prípade máme zrátať objem telesa, ktoré je zdola ohraničené rovinou x, zhora priestorovým grafom našej funkcie a zboku ničím, pretože náš integrál máme zrátať opäť od mínus nekonečna do plus nekonečna. Tento objem je znovu nekonečný, teda náš výpočet, ktorým sme dostali hodnotu nekonečno, by mal byť správny.

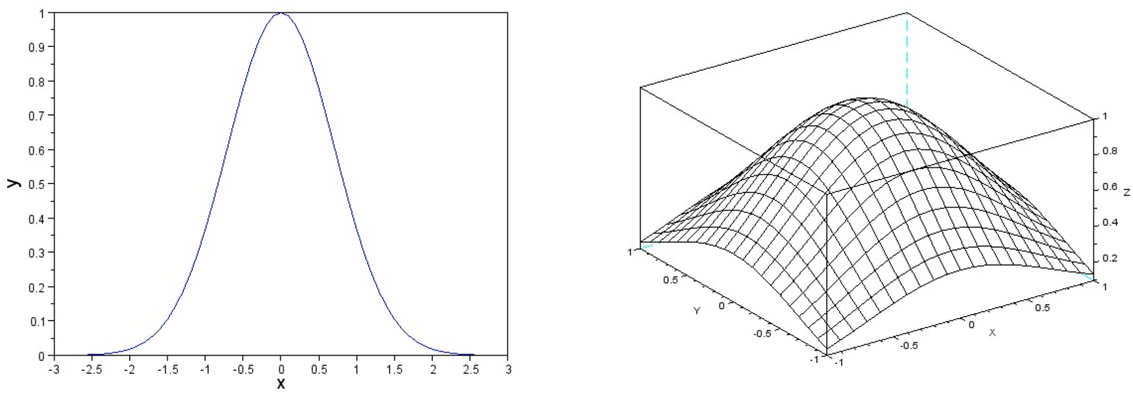
Skúsme ale v danom integráli zmeniť znamienko v exponente Eulerovej konštanty, a tak ho zrátať! Hľadiac na grafy na obrázku 8 by to už nemalo vychádzať nekonečno.

Označme si teda integrál $L = \int_{-\infty}^{\infty} ce^{\frac{-(x)}{a}} dx$. Jeho druhá mocnina L^2 sa dá previesť na dvojný integrál:

$$L^2 = \int_{-\infty}^{\infty} ce^{\frac{-x}{a}} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} ce^{\frac{-y}{a}} \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c^2 e^{\frac{-(x^2+y^2)}{a}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Postupujeme rovnako ako predtým - aplikujeme polárnu transformáciu (10):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c^2 e^{\frac{-(x^2+y^2)}{a}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\infty} c^2 e^{-\frac{r^2}{a}} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = 2\pi c^2 \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{a}} r\mathrm{d}r.$$



(a) Graf funkcie e^{-x^2} **(b)** Graf funkcie $e^{-\left(x^2+y^2\right)}$

Obr. 8: Grafy integrovaných funkcií po úprave znamienka exponentu

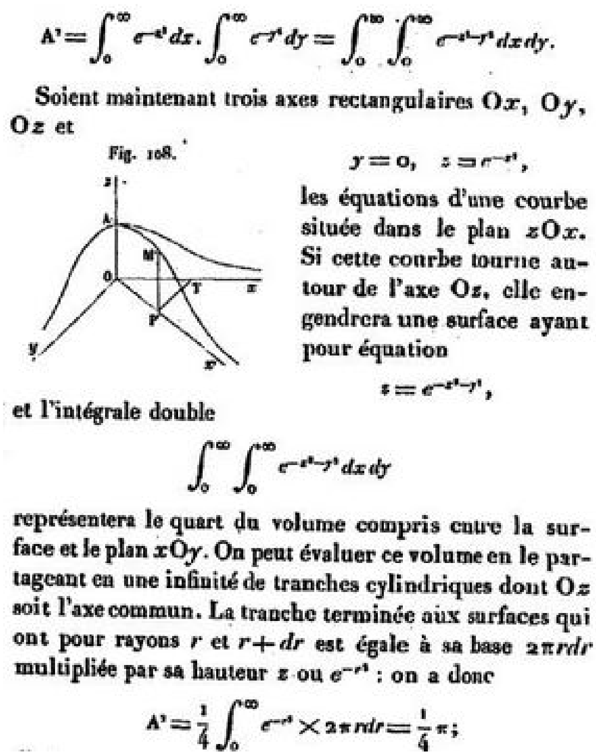
Použime substitúciu (13):

$$L^2 = -\pi c^2 a \int_0^{-\infty} e^s \mathrm{d}s = \pi c^2 a \int_{-\infty}^{0} e^s \mathrm{d}s = \pi c^2 a \left[e^s\right]_{-\infty}^{0} = \pi c^2 a \left[1 - 0\right] = \pi c^2 a.$$

Pohľad na obálku knihy nás tentoraz už neprekvapí a môžme si povedať, že sme navyše šikovnejší ako autor obálky, lebo sa nám podarilo aj vykrátiť dvojku.

Neprestávajme sa však zamýšľať nad týmto integrálom, pretože v matematike patrí medzi najznámejšie. Jeho jednoduchšia verzia $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x$ sa nazýva Gaussov, alebo aj Euler-Poissonov integrál [55] a má širokú škálu použití, od pravdepodobnosti až po fyziku [19]. Existuje mnoho dôkazov, prečo je hodnota integrálu rovná práve $\sqrt{\pi}$.

Jedným z nich je aj dôkaz Simeona Dennisa Poissona (1781-1840), francúzskeho matematika a fyzika, ktorý sa objavil na obálke knihy The Calculus of Murder, aj keď bez mínuska. Ako môžeme vidieť na obrázku 9, kde je ukážka kapitoly *Integrálny počet* z knihy [47], Poisson nepoužil presne náš postup pomocou polárnych súradníc. Namiesto toho získaný dvojný integrál $\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ počítal geometricky. Tento integrál predstavuje štvrtinu objemu telesa pod plochou určenou grafom funkcie $e^{-x^2-y^2}$. Poisson ho spočítal ako súčet objemov telies, ktoré majú ako základňu medzikružie medzi kružnicami so stredom v nule a polomermi r a $\mathrm{d}r$ a výšku rovnú funkčnej hodnote integrovanej funkcie na kružnici s polomerom r (všimnime si, že táto hodnota je konštantná pre každý bod kružnice). Obsah podstavy je teda $2\pi r \mathrm{d}r$, výška je e^{-r^2}, a preto objem takéhoto telesa je $2\pi e^{-r^2} r \mathrm{d}r$. Ak sčítame všetky takéto objemy pre $r \in (0, \infty)$,



$$A'=\int_0^\infty e^{-x^2}dx.\int_0^\infty e^{-y^2}dy=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x^2-y^2}dx\,dy.$$

Soient maintenant trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz et

Fig. 108.

$$y=0,\quad z=e^{-x^2},$$

les équations d'une courbe située dans le plan zOx. Si cette courbe tourne autour de l'axe Oz, elle engendrera une surface ayant pour équation

$$z=e^{-x^2-y^2},$$

et l'intégrale double

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x^2-y^2}dx\,dy$$

représentera le quart du volume compris entre la surface et le plan xOy. On peut évaluer ce volume en le partageant en une infinité de tranches cylindriques dont Oz soit l'axe commun. La tranche terminée aux surfaces qui ont pour rayons r et $r+dr$ est égale à sa base $2\pi r dr$ multipliée par sa hauteur z ou e^{-r^2} : on a donc

$$A'=\frac{1}{4}\int_0^\infty e^{-r^2}\times 2\pi r dr=\frac{1}{4}\pi;$$

Obr. 9: Ukážka Poissonovej myšlienky výpočtu integrálu [47]

dostaneme integrál $\frac{1}{4}\int_0^\infty e^{-r^2}2\pi r\mathrm{d}r$, ktorý už vieme vypočítať.

Ak by sme trochu viac pátrali po pôvode tohto integrálu, pravdepodobne by sme natrafili aj na meno Pierre Simon Laplace (1749-1827). Bol to matematik opäť francúzskeho pôvodu, ktorého vedecká činnosť zasiahla nielen do matematickej analýzy, ale i do pravdepodobnosti [26]. Mimochodom, Laplace, spolu s Lagrangeom boli Poissonovými školiteľmi jeho dizertačnej práce, ako môžeme zistiť na už spomínanej stránke [23]. Laplaceovi sa ako prvému, už v roku 1774 v článku *Mémoire sur la probabilité des causes par les évenments* podarilo explicitne spočítať hodnotu Gaussovho integrálu, dokonca dvoma spôsobmi [27]. V prvom z nich vychádza z Eulerovej formuly:

$$\int_0^1 \frac{x^r\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^{2s}}}\int_0 1\frac{x^{s+r}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^{2s}}}=\frac{1}{s\,(r+1)}\frac{\pi}{2}.$$

Druhý z nich pôsobí priateľskejšie a vzhľadom na jeho nenáročnosť si ho dovolíme uviesť. Gaussov integrál, tentokrát znovu od nuly do nekonečna, si označme J a vychádzajme z umocneného tvaru:

$$J^2=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

ale namiesto polárnej transformácie použime substitúciu $x=yt$, potom $dx=ydt$ a dostávame:

$$J^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-y^2\left(t^2+1\right)} y \mathrm{d}t \mathrm{d}y = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty y e^{-y^2\left(t^2+1\right)} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}t.$$

Teraz na „vnútorný integrál“ použime substitúciu $y^2\left(t^2+1\right) = s$, z čoho postupnými úpravami vieme vyjadriť $\mathrm{d}y = \frac{1}{2y} \frac{\mathrm{d}s}{t^2+1}$. Po dosadení máme

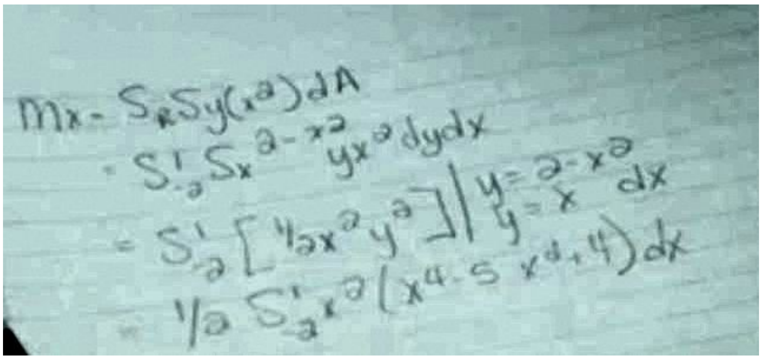
$$\frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s} \frac{1}{t^2+1} \mathrm{d}s \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{1}{t^2+1} \left[-e^{-s}\right]_{s=0}^{s=\infty} \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \left[\operatorname{arctg} t\right]_{t=0}^{t=\infty} = \frac{\pi}{4}.$$

A keďže sme vychádzali z umocneného tvaru J^2, po odmocnení získavame $J = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. O Laplacovi, autorovi predchádzajúcich výpočtov, kolovala v Paríži na začiatku minulého storočia anekdota, ktorú v knihe Budget of Paradoxes [15] popisuje matematik De Morgan:

> *Laplace raz, za účelom prezentovať vydanie svojej knihy Systéme du Monde, šiel navštíviť cisára Napoleona. Ten zas po tom, ako sa dozvedel, že v Laplacovej knihe nie je ani zmienka o Božom mene, uštipačne poznamenal: „Pán Laplace, povedali mi, že ste napísali túto veľkú knihu o vesmíre, ale nikde ste ani len nespomenuli jeho Stvoriteľa.“ Laplace, verný svojej filozofii, bez obalu odvetil: „Túto hypotézu som nepotreboval.“ Pobavený Napoleon jeho odpoveď interpretoval Lagrangeovi, ktorý si neodpustil poznámku: „Ach, skvelá hypotéza. Veľa vecí vysvetľuje.“ [15]*

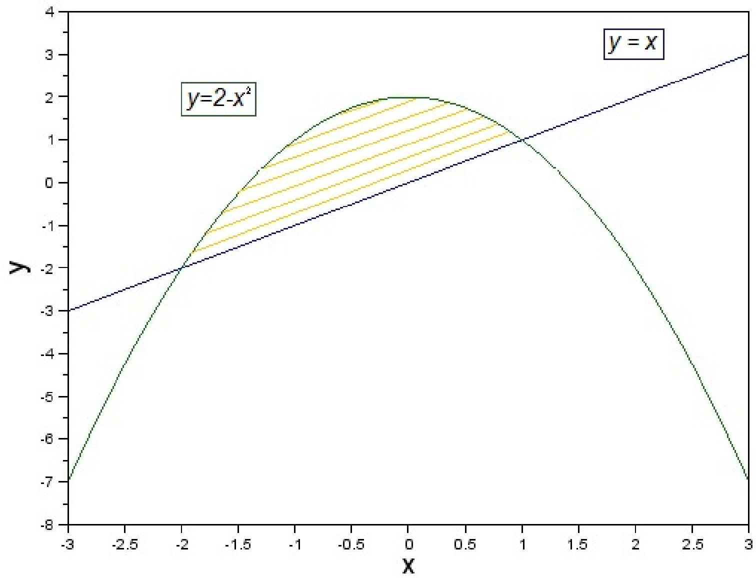
2.2 Zahulíme, uvidíme

Matematiku nájdeme aj vo filme **Harold and Kumar** [60]. Keď však zistíme, že oficiálny slovenský preklad filmu znie **Zahulíme, uvidíme**, nejeden z nás neveriacky zdvihne obočie. Ako sa sem dostala?
Po spŕške na nadávok sa z úst šarmantej slečny dozvieme, že *ide umrieť z tej šialenej záverečnej písomky z matiky*, pekne povedané. Našťastie, Kumar má v oblasti matematiky celkom jasno a očarený pohľadom na ňu jej pomôže s plošným integrálom.
„Nevadilo by ti, ak by som sa na to pozrel?“
„Uhm.“
„Už si veľmi blízko výsledku. Môžem ti s tým pomôcť?“
„Jasné!“ [60]



Obr. 10: Integrál z filmu Harold and Kumar [60]

Keďže pre čitateľa môže byť problém pochopiť, čo je vlastne napísané na obrázku (obr 10), dovolíme si uviesť veci na správnu mieru: To, čo vyzerá ako malé tlačené **a** alebo znak pre parciálnu deriváciu $\boldsymbol{\partial}$, je vlastne číslo **2** a tie veľké tlačené písmená **S** predstavujú symbol integrálu $\int$. Takto to už dáva zmysel a dokážeme aj my zrátať minimálne to, čo slečna a pokúsime sa to dotiahnuť do konca, ako to spravil aj Kumar. Našou úlohou je teda zrátať integrál $\iint\limits_R yx^2 \,\mathrm{d}A$, kde R je plocha medzi grafmi funkcií $y = x$ a $y = 2 - x^2$. Ľahko sa môžeme presvedčiť, že integračné hranice premennej x sú x-ové súradnice priesečníkov grafov týchto dvoch funkcií. Plocha R je znázornená na obrázku 11.



Obr. 11: Plocha

Na zadaný integrál aplikujeme Fubiniho vetu [25]

$$\int\limits_{-2}^{1}\int\limits_{x}^{2-x^2} yx^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{-2}^{1}\left(\int_{x}^{2-x^2} yx^2\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

a upravujeme ďalej. Môžme si najskôr spočítať „vnútorný integrál“:

$$\int_{x}^{2-x^2} yx^2\,\mathrm{d}y = \left[x^2\frac{y^2}{2}\right]_{x}^{2-x^2} = \frac{x^2}{2}\left[\left(2-x^2\right)^2 - x^2\right],$$

výsledok dosadiť a následne dorátať ako klasický určitý integrál.

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{1} x^2\left[\left(2-x^2\right)^2 - x^2\right] = \frac{1}{2}\int_{-2}^{1} 4x^2 + x^6 - 5x^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{4x^3}{3} + \frac{x^7}{7} - \frac{5x^5}{5}\right]_{-2}^{1} = -\frac{9}{7}.$$

Očarená Vanessa nenechá Kumara bez pochvaly:

„Wow, si v tom dobrý! Študoval si matiku, alebo čo?“

„No, v skutočnosti ma to naučil môj tatko, keď som ešte chodil do šiestej.“

Vanessa je mierne zhrozená, zisťujúc, že pred ňou stojí trochu divný chlap, ktorý sa jej prizná, že jeho obľúbeným seriálom je Doogie Howser. Seriál o chlapcovi študujúcom fyziku a čeliacom problémom dospievania.

Tak sa teda snaží zmeniť tému:

„Na čom to pracuješ?“

„Je to len báseň. Na hodiny kreatívneho písania.“

Vanessa mu vytrhne papier z ruky a začne sa smiať:

„Odmocnina z troch?! Bože!“

Zahanbený Kumar jej vezme papier, ale ona sa nedá:

„Hej, nechaj ma prečítať si to!“

„Nie, nie, nie.“

„Prečo?“

„Pretože je to trápne!“

„Tak mi to prečítaj!“

„Neexistuje, aby som ti dovolil vidieť ma v tomto svetle. Veľa šťastia s matikou.“

A odoberie sa preč [60].

Aby však diváci neboli ukrátení ani o zážitok z vypočutia si básne o odmocnine z troch, majú možnosť počuť ju na konci filmu. Tomu však predchádza veľké množstvo udalostí. Kumara letiaceho do Amsterdamu zatknú ešte v lietadle, pretože si ho pomýlia s hľadaným teroristom. Po čase sa mu však podarí utiecť z väzenia a zistí, že jeho bývalá láska, ktorá sa tiež volá Vanessa, sa ide vydávať za niekoho iného. Film končí šťastným stretnutím Kumara a Vanessy na jej vlastnej svadbe, kde sa po vypočutí básne napísanej pre ňu, rozhodne nechať ženícha samého pri oltári a odíde s Kumarom.

Obr. 12: Vanessa a Kumar [60]

I'm sure that I will always be
A lonely number like root three

The three is all that's good and right,
Why must my three keep out of sight
Beneath the vicious square root sign,
I wish instead I were a nine.

For nine could thwart this evil trick,
with just some quick arithmetic

I know I'll never see the sun
As 1.7321.
Such is my reality,
A sad irrationality

When hark! What is this I see,
Another square root of a three

As quietly co-waltzing by,
Together now we multiply
To form a number we prefer,
Rejoicing as an integer

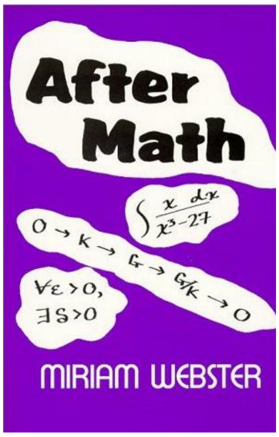
We break free from our mortal bonds
With the wave of magic wands

Our square root signs become unglued
Your love for me has been renewed. [60]

2.3 Nevzdávať sa!

To, že matematik v detektívke je vďačnou témou, sme si mohli všimnúť už v diele **The Calculus of Murder** [42]. Avšak nie len ako detektív, ale aj ako obeť. Túto stranu mince si zvolila autorka píšuca pod pseudonymom *Miriam Webster* v jej detektívke ***After Math*** [51]. Miriam Webster, vlastným menom *Amy Babich*, získala doktorát z matematiky na University of Texas, a áno, aj jej „praškoliteľmi“ boli Lagrange a Laplace [23]. V jej knihe nenájdeme násilnú aplikáciu matematiky v riešení prípadu, ale trochu realistickejšiu vec: zneužitie štatistiky za účelom priemyselného znečistenia životného prostredia. Príbeh veľmi dôsledne opisuje, ako si dokáže šikovný matematik vybrať jemu vyhovujúce dáta a metódy, vďaka ktorým dostane výsledok, aký chce a zároveň dokáže pobláznit každého, kto nie je expert v štatistike. [22]

Nepotrebujeme však byť expertami v štatistike, ak chceme vedieť zrátať integrál na obálke knihy, o ktorej práve hovoríme (obr. 13) .



Obr. 13: Obálka knihy After Math [51]

Už na prvý pohľad vidíme, že je to integrál racionálnej funkcie, teda funkcie zapísateľnej v tvare podielu dvoch polynómov. Metóda integrovania racionálnych funkcií je založená na myšlienke rozložiť racionálnu funkciu na lineárnu kombináciu základných racionálnych funkcií (tzv. parciálnych zlomkov) [24], ktoré už vieme zintegrovať.

Rozpíšme si integrál z obálky knihy tak, aby sme v menovateli dostali súčin:

$$I = \int \frac{x}{x^3 - 27}\mathrm{d}x = \int \frac{x}{(x-3)\,(x^2+3x+9)}\mathrm{d}x. \tag{15}$$

Vidíme, že metódou rozkladu na parciálne zlomky, vieme integrál (15) vieme rozložiť na tvar:

$$I = \int \frac{A}{x-3} + \frac{Bx+C}{x^2+3x+9}\mathrm{d}x. \tag{16}$$

Aby táto úprava bola korektná, musia byť splnené nasledujúce rovnosti. Získali sme ich úpravou (16) na spoločného menovateľa, čím sa menovatele v (15) a (16) teraz rovnajú. A aby sa rovnali oba zlomky, musia byť aj ich čitatele rovné:

$$Ax^2 + 3Ax + 9A + Bx^2 - 3Bx + Cx - 3C = x$$
$$x^2(A+B) + x(3A - 3B + C) + 9A - 3C = x.$$

Metódou porovnania koeficientov dostaneme tri rovnice o troch neznámych, ktoré nie je problém vyriešiť.

$$A + B = 0,$$
$$3A - 3B + C = 1,$$
$$9A - 3C = 0.$$

Riešením sústavy je $A = \frac{1}{9}, B = -\frac{1}{9}, C = \frac{1}{3}$. Stačí už len spätne dosadiť za neznáme a doriešiť integrál. Náš integrál teraz vyzerá takto:

$$I = \int \frac{\frac{1}{9}}{x-3} + \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{9}x}{x^2+3x+9}\mathrm{d}x = \frac{1}{9}\int \frac{1}{x-3}\mathrm{d}x + \frac{1}{9}\int \frac{3-x}{x^2+3x+9}\mathrm{d}x. \tag{17}$$

Vidíme, že prvý z integrálov vieme vypočítať hneď:

$$\alpha = \frac{1}{9}\int \frac{1}{x-3}\mathrm{d}x = \frac{1}{9}\ln(x-3) + c. \tag{18}$$

Zrátať druhý integrál $\beta = \int \frac{1}{9}\int \frac{3-x}{x^2+3x+9}\mathrm{d}x$ však nebude také jednoduché. Môžeme si ale všimnúť, že ak ho trochu upravíme, vieme z neho po zintegrovaní dostať logaritmus. Budeme sa teda snažiť, aby čitateľ zlomku bol deriváciou menovateľa:

$$\begin{aligned} \beta = \frac{1}{9}\int \frac{3-x}{x^2+3x+9}\mathrm{d}x &= -\frac{1}{18}\int \frac{2x-6}{x^2+3x+9}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{18}\int \frac{2x+3}{x^2+3x+9}\mathrm{d}x + \frac{1}{18}\int \frac{9}{x^2+3x+9}\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{19}$$

Vieme, že

$$-\frac{1}{18}\int \frac{2x+3}{x^2+3x+9}\mathrm{d}x = \ln\left(x^2+3x+9\right) + c. \tag{20}$$

Ostáva nám už len spočítať integrál $\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+3x+9}\mathrm{d}x$. Vďaka substitúcii ho budeme vedieť upraviť na tvar, ktorý bude po zintegrovaní obsahovať arkustangens.

Pripomeňme si: $\int \frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t = \mathrm{arctg}t + c$ [24]. Naším cieľom je teda v menovateli získať súčet jednotky a druhej mocniny nejakého výrazu. Použime úpravu na úplný štvorec a osamostatnime jednotku:

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+3x+9}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{27}{4}}\mathrm{d}x = \frac{2}{27}\int \frac{1}{\left(\frac{2\left(x+\frac{3}{2}\right)}{3\sqrt{3}}\right)^2+1}\mathrm{d}x.$$

Použijeme substitúciu

$$\frac{2\left(x+\frac{3}{2}\right)}{3\sqrt{3}} = s \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{d}s \tag{21}$$

a dosadíme:

$$\frac{2}{27}\int \frac{1}{s^2+1}\frac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{d}s = \frac{\sqrt{3}}{9}\mathrm{arctg}\frac{2\left(x+\frac{3}{2}\right)}{3\sqrt{3}} + c.$$

Postupne z výrazov (21), (20), (18) vieme poskladať konečný výsledok spočiatku tak nevinne vyzerajúceho integrálu (15):

$$\int \frac{x}{x^3-27}\mathrm{d}x = \frac{1}{9}\ln\left(x-3\right) - \frac{1}{18}\ln\left(x^2+3x+9\right) + \frac{\sqrt{3}}{9}\mathrm{arctg}\frac{2\left(x+\frac{3}{2}\right)}{3\sqrt{3}} + c.$$

Na konci devätnásteho storočia objavil teenager Marcel Proust[5] v knihe jednej svojej priateľky test, ktorý neskôr vošiel do dejín ako *„Proustov dotazník“*. V tom období bol tento spôsob zábavy - vypĺňanie testov - veľmi obľúbený. Proust bol zástancom názoru, že ľudia musia spoznať sami seba pred tým, ako spoznajú iných. Vytvoril preto zoznam otázok, ktoré podľa neho odhaľovali pravú identitu respondentov pre ich okolie [40]. Boli medzi nimi napríklad takéto otázky: *Čo je pre vás predstava dokonalého šťastia? Z čoho máte najväčší strach? Ktorá postava z histórie by vás najlepšie charakterizovala?* Talianska spoločnosť pre aplikovanú a priemyselnú matematiku modifikovala otázky z Proustovho dotazníka „v matematickom zmysle slova“ a kládla ich dnešným matematikom. [29]

Prezident talianskej matematickej únie, Franco Brezzi, na otázku: *„Aké typy výpočtov vás najmenej bavia?“* odpovedal práve *„Integrály racionálnych fukcií.“*, ktorými sme sa teraz zaoberali.

„A aké je vaše motto?“

„Nevzdávať sa!“ [30]

[5] Valentin Louis Georges Eugéne Marcel Proust (1871 - 1922), francúzsky spisovateľ a kritik, známy najmä vďaka dielu *Hľadanie strateného času* [39].

2.4 Mám problém

Ako sme si už mohli všimnúť, Sophie sa vo svojom denníku [34] nezamýšľa len nad každodennými starosťami a problémami. Veľká časť jej myšlienok je venovaná matematike. V niektorých prípadoch však ide ruka v ruke s fyzikou, tak ako je to aj s problémom tautochróny.

> **Piatok, 3. októbra 1794** *Slovo tautochróna je gréckeho pôvodu. Tauto znamená identický a chromos znamená čas. Tautochróna, alebo inokedy zvaná aj izochróna*[6]*, je taká krivka, po ktorej sa objekty zosunú do jej najnižšieho bodu za rovnaký čas, bez ohľadu na ich štartovaciu pozíciu. [34]*

Problém tautochróny je v skutočnosti úlohou, alebo výzvou - nájsť takúto krivku. Ako prvému sa to podarilo holandskému matematikovi Christiaanovi Huygensovi, ktorý tento fakt, že riešením je cykloida, hrdo publikoval aj s dôkazom vo svojom diele Horologium oscillatorium (1673). Na tento poznatok naráža aj pasáž zo známeho literárneho diela ***Moby Dick***, v slovenčine známeho pod názvom ***Biela veľryba***:

> *„Prvýkrát som čelil tejto pozoruhodnej skutočnosti. Že čo sa geometrie týka, všetky telesá kĺzajúce sa pozdĺž cykloidy, napríklad môj mastenec, skĺznu z akéhokoľvek miesta v rovnakom čase. [31]“*

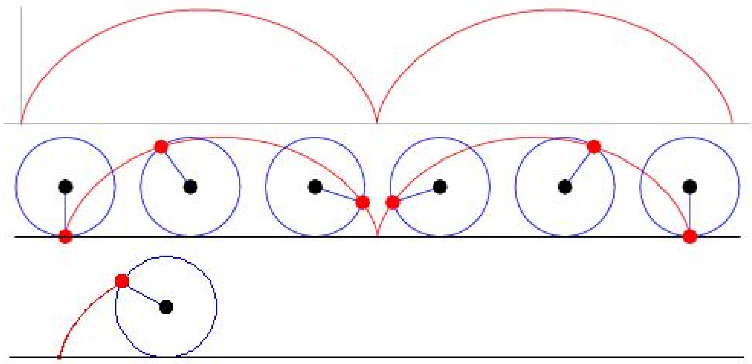
Vďaka frekvencii, s akou sa cykloide darilo vyvolávať spory medzi matematikmi v 17. storočí, sa stala známou ako „Helena geometrov“ [12].

A čo je cykloida? Intuícia by nám mohla napovedať, že medzi ňou a bicyklom by mohla existovať istá spojitosť. A je to pravda. Vysvetlíme si to pomocou obr. 14. Predstavme si, že by sme Sophie na koleso bicykla (na jeho obvod) umiestnili svietiaci bod. Všade okolo nás by bola tma a Sophie by naskočila na bicykel a vydala by sa po rovinke. Nevideli by sme teda nič, len tú svietiacu bodku na jej kolese, ako by opisovala - áno - cykloidu. Jednoducho povedané, cykloida je krivka, ktorú vytvára pevne zvolený bod na kružnici kotúľajúcej sa po priamke.

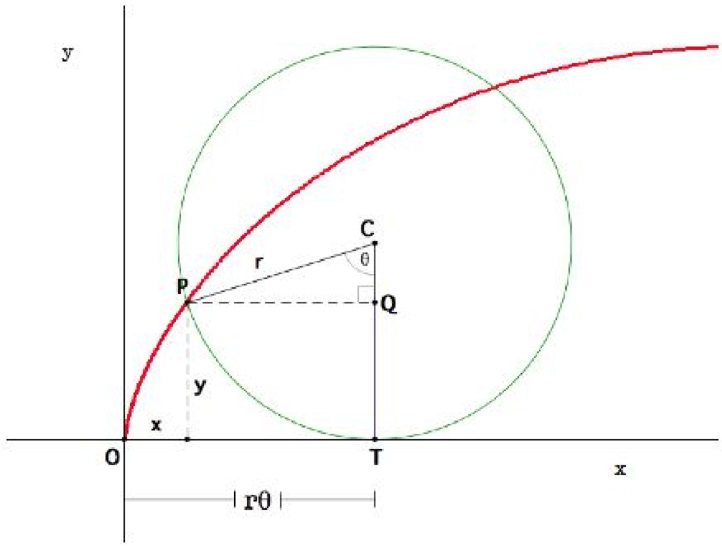
Parametricky sa dá vyjadriť nasledujúcim spôsobom (pozri [53]):

$$
\begin{aligned}
x &= r\left(\theta - \sin\theta\right), \\
y &= r\left(1 - \cos\theta\right)
\end{aligned}
\tag{22}
$$

[6] Z gréčtiny, *iso-* je predpona znamenajúca *rovnaký*, *chromos* znamená *čas*.



Obr. 14: Ako vzniká cykloida [53]



Obr. 15: Parametrizácia cykloidy [18]

kde r je polomer a θ je uhol otočenia kotúľajúcej sa kružnice (pozri obr. 15). Jeden oblúk cykloidy vznikne otočením kružnice o uhol 2π.

Napríklad aj v seriáli ***Numb3rs*** [65], v ktorom sa matematika využíva na riešenie skutočných zločinov, si našla cykloida svoje miesto. V epizóde ***Špión*** pomáha Charlie Epps riešiť prípad, pri ktorom auto zrazilo ženu. Vďaka nemu sa podarilo zistiť, že išlo o vraždu a nie nehodu. Vo svojej analýze za pevný bod na kružnici zvolil pätu a poukázal na to, ako jej pohyb smerom zozadu až pred koleno opisuje cykloidu [54]. Overme, že cykloida je riešením problému tautochróny. Budeme postupovať podľa [34].

Zderivujme x a y:

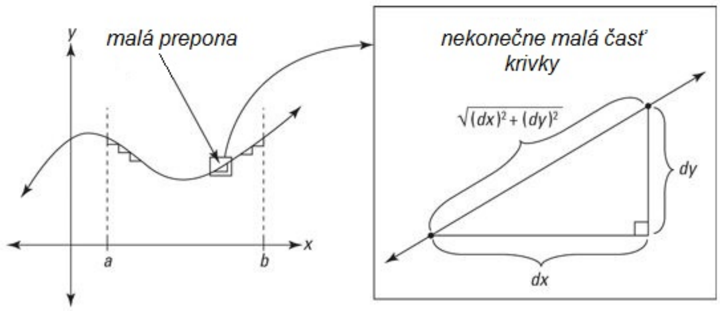
$$\mathrm{d}x = r\,(1 - \cos\theta)\,,$$

$$\mathrm{d}y = r\,\sin\theta.$$

Teraz vytvorme súčet druhých mocnín derivácií a označme ho $\mathrm{d}s^2$:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 = r^2\left[\left(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta\right) + \sin^2\theta\right] = 2r^2\,(1 - \cos\theta)\,. \tag{23}$$

Vyjadriac si zo vzťahu (23) $\mathrm{d}s$, dostali by sme dĺžku nekonečne malého úseku cykloidy, získanú pomocou Pytagorovej vety (obr. 16). Vychádzajme zo zákona o zachovaní me-



Obr. 16: Dĺžka krivky [43]

chanickej energie, nech m znamená hmotnosť, g gravitačné zrýchlenie ($\cong 9.81ms^{-2}$), v rýchlosť a y výšku, z ktorej bude padať predmet z najvyššieho bodu cykloidy po najnižší.

$$\frac{1}{2}m\,v^2 = m\,g\,y \tag{24}$$

Z (24) si vieme vyjadriť rýchlosť:

$$v = \sqrt{2gy}. \tag{25}$$

Vieme, že rýchlosť sa dá popísať ako zmena polohy za zmenu času: $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$. Čiastkovú dĺžku krivky, ktorú prešiel bod za krátky čas $\mathrm{d}t$, reprezentuje $\mathrm{d}s$. Keďže nás bude zaujímať práve ten čas, za ktorý sa mu to podarilo, vyjadríme $\mathrm{d}t$ z rovnice (25):

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{2gy}} \tag{26}$$

Zo vzťahov (22) a (23) vieme vyjadriť y a ds, ktoré následne dosadíme a získame:

$$\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}}{\sqrt{2gy}} = \frac{r\sqrt{2\,(1 - \cos\theta)\,\mathrm{d}\theta}}{\sqrt{2gr\,(1 - \cos\theta)}} = \sqrt{\frac{r}{g}}\mathrm{d}\theta.$$

Aplikovaním určitého integrálu v hraniciach od $t = 0$ po $t = T$, kde $t = 0$ označuje počiatočný čas a $t = T$ značí čas, kedy už bod dorazil do najnižšej časti tautochróny, a určitého integrálu v hraniciach od $\theta = 0$ po $\theta = \pi$, kde $\theta = 0$ znamená, že sme v najvyššom bode cykloidy a $\theta = \pi$, že sme v najnižšom bode, dostávame

$$\begin{aligned} \int_0^T \mathrm{d}t &= \int_0^\pi \sqrt{\frac{r}{g}} \mathrm{d}\theta \\ T &= \sqrt{\frac{r}{g}}\pi. \end{aligned} \tag{27}$$

Vidíme, že T, označujúce čas potrebný na skotúľanie sa bodu z najvyššieho bodu cykloidy po jej najnižší, závisí len od konštánt: od veľkosti polomeru kružnice, od gravitačného zrýchlenia a od konštanty π. Výška, z akej padal náš bod, vo vzťahu nevystupuje.

Zvoľme si teraz ľubovoľný iný bod θ_0 na cykloide, ktorý bude od najvyššieho bodu y o y_0 nižšie, teda v parametrickom vyjadrení sa bude kružnica opisujúca cykloidu otáčať o θ_0 menej. Vzťah (25) vyzerá po úprave nasledovne:

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 2g\left(y - y_0\right).$$

Rovnakým postupom sa tiež dostaneme až k rovnici:

$$\begin{aligned} T = &\int_{\theta_0}^{\pi} \sqrt{\frac{2r^2\left(1 - \cos\theta\right)}{2rg\left(\cos\theta_0 - \cos\theta\right)}} \mathrm{d}\theta = \\ =&\sqrt{\frac{r}{g}} \int_{\theta_0}^{\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{\cos\theta_0 - cos\theta}} \mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

Poďme si pomôcť substitúciou, pri ktorej použijeme vzťahy pre polovičný uhol. Vo všeobecnosti vyzerajú takto [52]:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{1}{2}x\right) &= \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}, \\ \cos\left(\frac{1}{2}x\right) &= \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}. \end{aligned}$$

Vieme si prepísať $\cos\theta$ na tvar $\cos\theta = 2\cos^2\left(\frac{1}{2}\theta\right) - 1$ [52]. Dosadením a rovnakým postupom ako v predošlom prípade získame

$$T = \sqrt{\frac{r}{g}} \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\theta\right) \mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos^2\left(\frac{1}{2}\theta_0\right) - \cos^2\left(\frac{1}{2}\theta\right)}}. \tag{28}$$

Použime substitúciu v tvare

$$u = \frac{\cos\left(\frac{1}{2}\theta\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}\theta_0\right)},$$
$$\mathrm{d}u = -\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)\mathrm{d}\theta}{2\cos\left(\frac{1}{2}\theta_0\right)},$$
$$\mathrm{d}\theta = -\frac{2\cos\left(\frac{1}{2}\theta_0\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)}.$$

Dosaďme do (28) a upravme menovateľ [52].

$$\begin{aligned} T =& -2\sqrt{\frac{r}{g}}\int_1^0 \frac{\cos\left(\frac{1}{2}\theta_0\right)}{\sqrt{\cos^2\left(\frac{1}{2}\theta_0\right)\left(1-\frac{\cos^2\left(\frac{1}{2}\theta\right)}{\cos^2\left(\frac{1}{2}\theta_0\right)}\right)}} = \\ =&2\sqrt{\frac{r}{g}}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = \\ =&2\sqrt{\frac{r}{g}}\left[\arcsin u\right]_0^1 = \\ =&\pi\sqrt{\frac{r}{g}}. \end{aligned}$$

Vyšiel rovnaký výsledok ako v (27). Znamená to, že čas, za ktorý sa predmet skotúľa po cykloide z ktoréhokoľvek miesta na nej do jej najnižšieho bodu, je konštantný pre ľubovoľný štartovací bod. Práve toto je vlastnosť, ktorú ma spĺňať tautochróna a tým našli sme riešenie jej problému. Dokázali sme, tým riešením je cykloida.

3 Teória hier

Za účelom vytvoriť zaujímavý film, ktorý dokáže diváka prinútiť aj zamyslieť sa, sa tvorcovia filmov často (aj nechtiac) uchyľujú k problémom teórie hier. Skúsme niekoľko z nich vyriešiť.

3.1 Záchranca

Film **Temný rytier** [62] má viacero pasáží nepriamo venovaných teórii hier. Jednou z nich je aj časť o dvoch trajektoch. Joker (predstaviteľ inteligentného kriminálnika a zarytého nihilistu, snažiaceho sa dokázať, že Gotham city je plné ľudí typu Homo economicus), si vyberie dva trajekty. Prvý z nich je naplnený radovými občanmi, zatiaľčo druhý preváža väzňov. Bez vedomia pasažierov a policajtov sa mu podarilo umiestniť na oba trajekty silné výbušniny, ktoré by v prípade výbuchu dokázali zničiť celú loď aj s posádkou. Odrazu sa trajekty zastavia a mechanici na oboch lodiach idú skontrolovať do podpalubia, čo sa stalo. Nájdu tam sudy s výbušninami a rozbušku. Z ampliónu na lodiach sa ozve:

> *Dnes sa každý z vás stane súčasťou sociálneho experimentu. Vďaka čarovnej kombinácii motorovej nafty a dusičnanu amónneho som pripravený vystreliť vás až do neba. Ak by sa niekomu nebodaj chcelo utiecť, všetci umriete. Na každej lodi máte rozbušku, ktorou dokážete odpáliť tú druhú loď. O polnoci vás, samozrejme, odpálim všetkých. Ak však na jeden z vás stlačí gombík na rozbuške, nechám žiť všetkých, čo sú s ním na lodi. Takže, kto to bude? Ukážková zbierka odpadlíkov, alebo sladkí nevinní občania? Vy si vyberáte. Och, a asi by ste sa mali chcieť rozhodnúť čo najrýchlejšie. Pretože ľudia na tej druhej lodi nemusia byť tak šľachetní.* [62]

Ľudia začnú panikáriť. Na lodi s radovými občanmi sa začne hlasovať, väzni sa búria. Stlačiť gombík a zachrániť sa, ale zároveň nechať vybuchnúť trajekt plný ľudí? Alebo nestlačiť a umrieť ako šľachetný človek? Celá situácia je zapísateľná v tvare tabuľky výplat. Majme dvoch hráčov - Občania a Väzni, ktorí môžu mať dve stratégie - stlačiť alebo nestlačiť spúšť.

- Ak sa občania rozhodnú nestlačiť spúšť, väzňom sa oplatí stlačiť a prežijú. Ak sa

Obr. 17: Vystrašení radoví občania [62]

Tabuľka 2: Tabuľka výplat: Stlačiť alebo nestlačiť?

Občania \Väzni	Nestlačiť	Stlačiť
Nestlačiť	0, 0	0,1
Stlačiť	1, 0	0,0

však občania rozhodnú stlačiť spúšť, väzni zahrajú rovnako pravdepodobne obe stratégie.

- Ak sa väzni rozhodnú nestlačiť spúšť, občanom je výhodnejšie stlačiť spúšť a tak prežiť. Ak však väzni stlačia spúšť, občania sú indiferentní voči obom stratégiám.

Táto hra má teda tri equilibriá. Mala by sa podľa všetkého stať jedna z troch situácií farebne vyznačených v tabuľke, malo by dojsť k výbuchu aspoň jednej lode. *„Budeme vidieť ohňostroje!"*, povedal Joker. Ako sa však ukázalo, ľudí netreba podceňovať. Občania Gothamu neuvažovali len takto jednoducho. Ich uvažovnie si môžeme ešte rozvetviť na dva prípady. Budeme predpokladať, že sa rozhodovali na základe svojho vzťahu k *morálke* a k *prežitiu*.

SMRŤ < MORÁLKA < PREŽITIE

Gothamčania chcú prežiť viac, ako byť šľachetní. To znamená, že najväčšiu cenu má pre nich ich vlastný život. Životy ľudí na druhej lodi si vážia menej, teda by radi prežili, aj za cenu, že vyhodia do vzduchu druhú loď plnú ľudí. V tomto prípade priradíme jednotlivým aspektom rozhodovania hodnoty: smrť 0, morálka 1, prežitie 2.
Táto hra má dve equilibriá. Jedni stlačia, druhí nie. Jedni prežijú, druhí si však budú musieť vystačiť „len" so šľachetnosťou.

Tabuľka 3: Tabuľka výplat: Prežitie nad Morálkou

Občania \Väzni	Nestlačiť	Stlačiť
Nestlačiť	1, 1	1,2
Stlačiť	2,1	0, 0

SMRŤ < PREŽITIE < MORÁLKA

Gothamčania sú šľachetní, ale nechcú umrieť. Ak by však došlo k tomu, že majú niekoho zabiť, radšej umrú sami. Rozhodujú sa na základe týchto hodnôt: Smrť 0, Prežitie 1, Morálka 2.

Tabuľka 4: Tabuľka výplat: Morálka nad Prežitím

Občania \Väzni	Nestlačiť	Stlačiť
Nestlačiť	2, 2	2, 1
Stlačiť	1, 2	0, 0

Tentoraz sme dostali hru s jedným equilibriom - ani jedna z lodí nestlačí spúšť. Nesmieme však zabudnúť na Jokerovu hrozbu: o polnoci odpáli obe lode, ak sa nič dovtedy nič nestane.

Gothamčania spolu s väzňami zvolili práve túto stratégiu, aj keď bola na prvý pohľad nepredstaviteľná. Ani jeden z nich nestlačil spúšť, a tak Joker márne čakal na ohňostroj. Medzitým ho stihol nájsť Batman, ktorý ho zbavil rozbušky, a tým zachránil šľachetných pasažierov oboch trajektov. „*Čo si sa snažil dokázať? Že hlboko vnútri je každý tak škaredý ako ty? Nie. Si v tom sám.*“[62]

3.2 Bitka dôvtipu

Dobro víťazí nad zlom. V každej dobrej rozprávke by to tak malo byť a ani **Princezná nevesta** [64] sa z tohto štandardu nevymyká. Táto klasická rozprávka, čítaná starým otcom, ponúka širokú paletu rozprávkových bytostí - obrov, princezné, pirátov, drakov... Nás však budú zaujímať len traja z nich: princezná, Sicílčan *Vizzini* a pirát *Wesley*. Sicílčan Vizzini uniesol princeznú a pirát Wesley sa ju snaží zachrániť. Porazil najlepšieho šermiara a najsilnejšieho obra, teraz mu však jeho sila nepomôže. Na rade je bitka dôvtipu. Dvaja muži a dva poháre.

Obr. 18: Wesley začína Bitku dôvtipu [64]

Wesley: *„Tvojou úlohou je zistiť, v ktorom z pohárov je jed. Bitka dôvtipu sa začala. Skončí sa, keď sa ty rozhodneš, ktorý pohár si zvolíš a obaja sa napijeme. Jeden z nás bude mŕtvy.“*

Vizzini: *„Ale to je predsa jednoduché. Budem vychádzať z toho, čo o tebe viem. Si teda typ človeka, ktorý by dal jed do svojej čaše alebo do súperovej? Takže, múdry človek by dal jed do svojej čaše, lebo by vedel, že len blázon by sa chcel napiť z čaše, ktorú mu ponúkli. A keďže ja blázon nie som, rozhodnem sa, že ani tvoju čašu nechcem. Ale ty si musel vedieť, že ja nie som blázon, rátal by si s tým, takže je jasné, že čašu pred sebou si nemôžem zvoliť.“*

Wesley: *„Vravíš teda, že si sa rozhodol?“*

Vizzini: *„Ešte nie. Ako každý vie, jed iocane pochádza z Austrálie[7]. A Austrália je plná kriminálnikov. Kriminálnici sú zvyknutí na to, že im ľudia nedôverujú. Tak, ako ja nedôverujem tebe. Takže si nemôžem zvoliť čašu, čo máš pred sebou ty.“*

Wesley: *„Máš vskutku obdivuhodný intelekt!“*

Vizzini: *„Áno, z Austrálie. A ty si musel tušiť, že ja budem vedieť odkiaľ prášok pochádza a teda si nezvolím víno oproti mne.“*

Wesley: *„Myslím, že začínaš tápať.“*

[7]Prášok iocane patrí medzi fiktívne jedy. Pochádza z Austrálie a dá sa voči nemu vytvoriť imunita, pokiaľ dotyčný užíva pravidelne malé množstvá. Názov je pravdepodobne odvodený od slova kokaín, čo v čase napísania knihy a vzniku filmu Princezná Nevesta (1973, resp 1987), bola pomerne rozšírená droga.

Vizzini: *„To by si chcel, čo? Porazil si môjho obra, čo znamená, že si výnimočne silný, takže by si dal jed do svojej čase veriac, že tvoja sila ťa zachráni, teda by som si nemal zvoliť čašu pred tebou. Ale taktiež si porazil môjho šermiara, čo znamená, že si musel študovať šermiarstvo a štúdion si získal dôležitý poznatok: že človek je smrteľný. Tým pádom by si mal umiestniť jed čo najďalej od seba. Čiže si nemám zvoliť čašu pred sebou."*
Wesley: *„Snažíš sa ma už len obalamutiť, aby som ti niečo naznačil."*
Vizzini:*"A funguje to! Naznačil si toho až až. Ja viem kde sa jed nachádza!"*
Wesley:*"Tak teda urob svoje rozhodnutie."*
Vizzini: *„Urobím a rozhodnem sa. Čo pre pána kráľa to má byť?!"*
Wesley:*"Čo? Kde? Ja nič nevidím"*
Pirát sa obzrie a Vizzini medzitým vymení svoju čašu s Wesleyho čašou. [64]

Poďme sa na túto situáciu pozrieť z pohľadu teórie hier. Budeme analyzovať možnosti rozhodnutí jednotlivých hráčov, ktorými sú v našom prípade Wesley a Vizzini. Hľadáme riešenie, ktoré by bolo optimálne pre oboch hráčov. Situáciu nám však môže komplikovať fakt, že hráči majú asymetrickú informáciu, čo znamená, že jeden z nich vie viac. Pristupujme teda k tomuto problému najprv tak, ako to vidí Vizzini. Vizzini chce prežiť, preto si chce zvoliť čašu v ktorej nie je jed. Ak je vo Wesleyho čaši, chce sa napiť zo svojej a ak je jed v jeho čaši, chce sa napiť z Wesleyho čaše. Zapíšuc si túto situáciu do tabuliek výplat, dostávame:

Tabuľka 5: Jed má v pohári Wesley

Wesley\Vizzini	Wesleyho čaša	Vizziniho čaša
Wesleyho čaša	-	-1,1
Vizziniho čaša	1, -1	-

Dve výplatné tabuľky máme z dôvodu, že Vizzini nevie, v ktorej čaši sa iocane nachádza. Preto sa v dvoch rôznych situáciách musí rozhodovať rôzne. Navyše, situácia, že sa obaja hráči napijú z rovnakej čaše, nemôže nastať. Tento jav sa v terminológii teórie

Tabuľka 6: Jed má v pohári Vizzini

Wesley\Vizzini	Wesleyho čaša	Vizziniho čaša
Wesleyho čaša	-	1, -1
Vizziniho čaša	-1,1	-

hier nazýva *opačné stratégie* a preto výplaty v niektorých bunkách nie sú uvedené. A práve z dôvodu, že Vizzini nevie, v ktorej čaši je jed, neexistuje preňho jednoznačne optimálna voľba.

Inak je to ale v prípade piráta Wesleyho. Ten má smolu, že nemôže využiť svoju výhodu asymetrickej informácie v tom, že vie, kde sa jed nachádza. Po čase však zistíme, že to až taká nevýhoda nebola. Pozrime sa, ako to dopadlo v rozprávke.

Vizzini: *„Dal by som ruku do ohňa za to, že som niečo videl! No, ale to je už jedno. Napime sa. Ja z mojej čaše a ty zo svojej.“*
Wesley: *„Zle si sa rozhodol.“*
Vizzini: *„To si len myslíš, že som sa zle rozhodol! To je na tom to smiešne! Vymenil som poháre, keď si sa otočil! Haha, ty blázon! Stal si obeťou jedného z menej známych prísloví: nikdy nechoď proti Sicílčanovi, pokiaľ je v hre smrť! Ha ha ha ha ha! Ha ha ha ha ha!“*
A ešte stále sa smejúci Vizzini padne na zem mŕtvy. Wesley rozviaže putá princeznej.
Princezná: *Celý čas som si myslela, že tvoja čaša bola otrávená.*
Wesley: *Obe čaše boli. Ja som len posledné roky strávil vytváraním si imunity proti iocanovému prášku.*

Vizzini bol teda od začiatku hry odsúdený na smrť a Wesleyho zachránil jeho dôvtip. Vedel vybrať hru, ktorú mohol vyhrať len on. Jeho tabuľka výplat má v sebe naozaj len výplaty.
Bez ohľadu na to, ako sa rozhodol Vizzini, Wesley prežil. Princezná bola zachránená a dobro zvíťazilo nad zlom.

Tabuľka 7: Jed je v oboch pohároch a Wesley je imúnny

Wesley\Vizzini	Wesleyho čaša	Vizziniho čaša
Wesleyho čaša	-	1, -1
Vizziniho čaša	1,-1	-

3.3 Ako teória hier vyriešila záhadu z Talmudu

Židovské náboženstvo je v spoločnosti známe okrem iného aj svojimi knihami - Talmudom a Tórou. Talmud je „synonymom židovstva“ a základom ortodoxného židovstva. Je súhrnom židovského poznania a pojednáva o všetkých oblastiach ľudského života [17]. V knihe slovenského autora, *Jaroslava Franeka*[8] - **Judaizmus**, nájdeme zrozumiteľné odpovede na otázky týkajúce sa židovskej problematiky.

> *Až dodnes ostáva Talmud knihou, v ktorej nájdeme základy ortodoxného Židovstva. Nové interpretácie Talmudu ukázali jeho zlúčiteľnosť so životom v modernej spoločnosti. Pochopiteľne sa všeličo zmenilo, ale Talmud ako celok ostáva obrovským rezervoárom poznania, v ktorom sa aj dnes hľadajú odpovede na najrozličnejšie otázky.* [17]

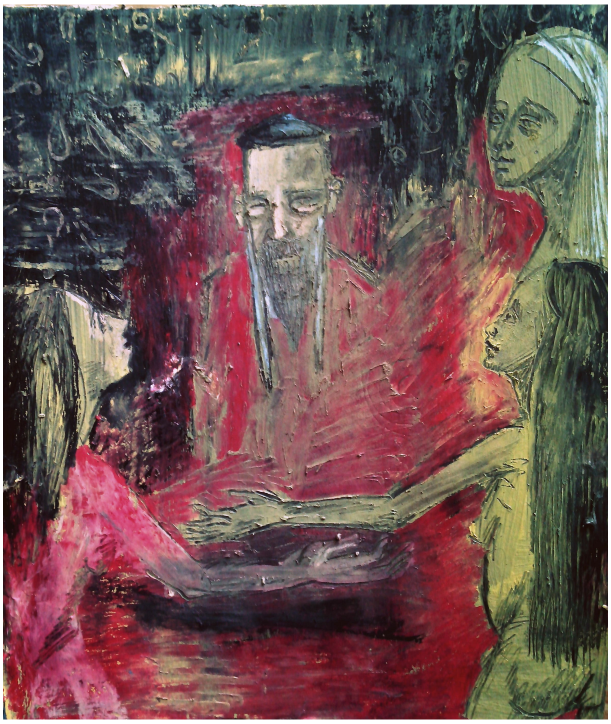
Tak napríklad: muž dlží trom rôznym ľuďom 100, 200 a 300 korún. Nanešťastie umrie a nemá dostatočne veľa peňazí na to, aby svoj dlh splatil. Ako sa má jeho majetok rozdeliť? Ako isto vieme, nemusí existovať jediná správna odpoveď. Férové rozdelenie nezávisí len od logiky, ale aj od spoločenských zvyklostí. Pozrime sa na tri rôzne situácie:

- Rodič sľúbi svojim deťom hračky, ale nakoniec im nemôže kúpiť tie sľúbené, lebo dostal menší plat, ako očakával.
- Partia kamarátov si objedná jedlo v reštaurácii, ale keď príde účet, nevedia sa dohodnúť, kto má koľko zaplatiť.
- Spoločnosť vydá dlhopisy a akcie, ale skrachuje.

[8] Autor je hovorca Ústredného zväzu židovských náboženských obcí. Je vedeckým pracovníkom a pedagógom na Katedre teoretickej a experimentálnej elektrotechniky FEI STU [13].

Ako vidíme, neexistuje overený postup, ktorým by sa dali vyriešiť tieto problémy. Niektorí ľudia preferujú proporcionálne/pomerové rozdelenie závisiace na veľkosti dlhu. Napríklad, môžeme uviesť klasické „zaplať za to, čo si si objednal“. A aj keď to vyznieva veľmi logicky, nie každému je táto metóda sympatická. Iní zas uprednostňujú rovnomerné delenie. Oháňajú sa argumentom, že nezáleží na veľkosti dlhu, ale na počte osôb. Rovnomerné vidíme často v rodinách s malými deťmi - každý dostane rovnaký počet kociek čokolády, rovnako veľa gumených medvedíkov. To, ktoré delenie nakoniec bude vykonané, záleží od spoločenských zvykov.

Jedno z najskorších riešení týkajúcich sa spravodlivého delenia pochádza práve z Talmudu.



Obr. 19: Ako vyplatiť tri manželky? [32]

Ide o problém muža - dlžníka, dlhujúceho svojim trom manželkám. Riešenie z Talmudu vôbec nie je očividné a jasné.

Talmud ponúka odpoveď prostredníctvom troch príkladov. Text neobsahuje všeobecné pravidlo, podľa ktorého by sa dalo postupovať.
V prvom riadku muž vlastní dokopy 100 šekelov. Každá jeho manželka dostane po jeho smrti rovnko veľký diel - tretinu jeho majetku. Ide teda o rovnomerné relenie. Tretí

Tabuľka 8: Ako delí Talmud

vlastní \dlhuje	100	200	300
100	33 $\frac{1}{3}$	33 $\frac{1}{3}$	33 $\frac{1}{3}$
200	50	75	75
300	50	100	150

riadok naznačuje, že pôjde o delenie v pomere k veľkosti dlhu. Prečo sa to ale nemohlo rozdeliť rovnako ako v prvom prípade?

Jednoznačne najmenej jasným je druhý riadok. Nielenže nejde o rovnomerné delenie a ani o delenie v pomere k veľkosti dlhu, ale ponúka sa nám aj otázka: prečo má druhá a tretia žena dostať rovnako veľa? A vôbec, odkiaľ pochádzajú tie čísla?

Tieto otázky čakali na svoju odpoveď skoro 2000 rokov [5]. Niektorí učenci sa po čase vzdali nádeje na vyriešenie problému a dokonca naznačovali, že prípad, keď muž dlhuje 200 korún, je zle prepísaný [5].

A potom sa k slovu dostala teória hier. V 80. rokoch 20. storočia profesori Robert Aumann a Michael Maschler napísali článok, v ktorom tvrdili, že záhadu vyriešili. Trvali na tom, že na odpovedi z Talmudu nie je nič zlé a že môže byť vnímaná ako aplikácia princípu teórie hier. Ako sa ukázalo, riešenie z Talmudu je ukážkou riešenia dobre definovanej *kooperatívnej hry.* Teda hry, ktorá prebieha skôr medzi koalíciami hráčov, ako medzi jednotlivými hráčmi a je tým ovplyvnené aj správanie hráčov. Aumann a Maschler posilnili toto svoje tvrdenie aj tým, že analyzovali viaceré pasáže z Talmudu, v ktorých bol tento princíp tiež použitý. Jedným z nich bol aj princíp delenia odevu. Práve na tomto princípe je založené aj riešenie problému týkajúceho sa muža a jeho troch žien.

Poďme si náš problém preložiť do jazyka teórie kooperatívnych hier a zjednodušme si situáciu pre muža a jeho *dve* ženy. Prvej nech dlží d_1, druhej d_2. Jeho celkový majetok je E, pričom platí, že $d_1 \leq d_2$ a $d_1 + d_2 \geq E$. Tento problém sa vyrieši pomocou princípu s názvom *spor o odev,* ktorý je príkladom hry s rovnomerným rozdelením sporného majetku:

Dvaja držia odev. Jeden ho chce celý, druhý požaduje polovicu. Potom prvý z nich dostane z neho $\frac{3}{4}$ a druhý $\frac{1}{4}$ [14].

Princíp je jasný: ten, čo vyžaduje polovicu, prepustí druhú polovicu druhému človeku. Zvyšok sa rozdelí na rovnaké diely. Vo všeobecnosti to znamená, že nami nepožadovanú časť prepúšťame druhej strane a druhá strana nám prepúšťa ňou nepožadovanú časť. Pokiaľ nebol rozdelený celý majetok, zvyšok sa rozdelí rovnomerne. Pre prípad muža a dvoch žien to vyzerá nasledovne: prvá žena vyžaduje d_1, tým pádom prepúšťa druhej žene $\max(E - d_1, 0)$. Druhá žena požaduje d_2 a vzdá sa v prospech druhej ženy sumy $\max(E - d_2, 0)$. Hrá sa teda už len o $E - \max(E - d_1, 0) - \max(E - d_2, 0)$. Táto zvyšná suma sa rovnomerne rozdelí medzi obe ženy. Po manželovej smrti teda dostanú:
prvá žena: $\frac{E - \max(E-d_1,0) - \max(E-d_2,0)}{2} + \max(E - d_2, 0)$,
druhá žena: $\frac{E - \max(E-d_1,0) - \max(E-d_2,0)}{2} + \max(E - d_1, 0)$.

Podľa [4] môže byť táto metóda delenia rozšírená, či je to pre troch, tisíc, alebo milión ľudí, ktorým dlžíme. Musí byť splnená podmienka - že majetok je rozdelený tak, že množstvo, ktoré dostanú ľubovoľní dvaja, odráža princíp rovnomerného delenia sporného majetku, o ktorý sa „hrá“. A navyše, Aumann a Maschler ukázali, že v skutočnosti len jedno riešenie je konzistentné. Zadefinovali si hru o mužovi a troch ženách ako dvojicu majetok a dlhy: E a d, kde $d = (d_1, \cdots, d_n)$ a $0 \leq d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$ a $E \leq d_1 + d_2 + \cdots + d_n$. Riešenie takejto hry je n-tica $x = (x_1, ..., x_n)$ reálnych čísel a platí, že $E = x_1 + ... + x_n$. Toto riešenie nazvali CG-konzistenté[9], ak pre všetky $i \neq j$ je rozdelenie majetku veľkosti $x_j + x_i$ medzi veriteľov požadujúcich d_i, d_j v tvare (x_i, x_j).

Dôkaz o tom, že je CG konzistentné môžeme nájsť napríklad v [5]. Ukážeme si, že takéto riešenie je len jedno. Ak by ich bolo viac, vedeli by sme nájsť riešenia x a y a veriteľov i a j takých, že $y_i > x_i$ a $y_j < x_j$ a $y_i + y_j \geq x_i + x_j$. Ak by sme mali len veriteľov i a j, tak princípom delenia odevu by j dostal sumu y_j, ak by celková veľkosť majetku bola $y_i + y_j$ a x_j by dostal, ak by celková veľkosť majetku bola $x_i + x_j$. Keďže $y_i + y_j \geq x_i + x_j$, monotónnosť princípu delenia plášťa, ktorá v tomto prípade tvrdí, že $y_j \geq x_j$, je v spore s tým, že $y_j < x_j$.

Postup, ako toto jediné riešenie nájdeme, si ukážeme v nasledujúcich siedmich krokoch:

[9]Konzistentné v zmysle princípu delenia sporného odevu, tzv. Contested Garment Principle

1. Zoraďme si ľudí, ktorým dlhujeme podľa veľkosti nášho dlhu - od najmenšieho po najväčšieho.
2. Začnime deliť majetok rovnomerne medzi všetkých, až kým človek, ktorému dlhujeme najmenej, nedostane polovicu sumy, ktorú mu dlhujeme.
3. Opäť začnime deliť majetok rovnomerne medzi všetkých (okrem človeka, ktorému dlhujeme najmenej), až kým človek, ktorému dlhujeme 2. najnižšiu sumu, nedostane polovicu sumy, ktorú mu dlhujeme
4. Pokračujeme rovnakým postupom, až kým všetci nezískajú polovicu sumy, ktorú im dlhujeme
5. Teraz, pokračujeme opačne. Budeme sa pozerať na rozdiel medzi naším dlhom a tým, čo sme veriteľom vyplatili. Zo zvyšku peňazí pridávame najvyššiemu veriteľovi až dovtedy, kým sa jeho strata (dlh - vyplatené peniaze) nerovná strate druhého najvyššieho veriteľa.
6. Potom rozdelíme majetok rovnomerne medzi veriteľov, až kým strata najvyššieho veriteľa nebude rovná strate druhého najvyššieho veriteľa, atď.
7. Pokračujeme, až kým nerozdelíme všetok majetok.

Skúsme si toto delenie ukázať na príklade:
Muž dlží svojim štyrom bratom postupne 300, 200, 100 a 50 šekelov. Po smrti mu však ostalo len 600 šekelov. Ako sa bratia podelia?
Budeme postupovať podľa algoritmu Almanna a Maschlera. Začneme rovnomerne rozdeľovať majetok. Máme dostatočne veľa na to, aby sa každému ušla polovica požadovanej sumy. V druhom riadku tab. 9 sa budeme zaoberať stratou. Keďže 300 šekelový veriteľ dostal len 150 a 200 šekelový 100, 300 šekelovému musíme pridať 50, aby mali rovnakú stratu. Posunieme sa ďalej a pridávame aj ďalším bratom. V ďalšom riadku vidíme, že 300 šekelový má stratu 100, zatiaľčo 200 šekelový má stratu 50. Pridáme 300 šekelovému 50 a posunieme sa ďalej. V štvrtom riadku vidíme, že už len náš najväčší veriteľ má stratu 50, zatiaľčo ostatní majú 25. Pridáme mu preto 25 šekelov. Nastala teda situácia, že každému z veriteľov dlžíme rovnako veľa. Pokračujeme akoby

Tabuľka 9: Muž dlží štyrom bratom

	300	**200**	**100**	**50**
1.	150	100	50	25
2.	50	50	25	-
3.	50	25	-	-
4.	25	-	-	-
5.	12,5	12,5	12,5	12,5
	287,5	187,5	87,5	37,5

prvým krokom - rovnomerne rozdeľujeme majetok, až kým najmenší veriteľ nedosiahne polovicu svojej požadovanej sumy. A keďže máme už situáciu s rovnakými veriteľmi, zvyšné peniaze (50 šekelov) rozdelíme jednoducho na 4 časti a pripočítame ich k získaným sumám. Naši bratia teda dostanú sumy uvedené v poslednom riadku tabuľky 9.

Záhada je vyriešená. Nielenže odpoveď Talmudu sleduje konzistentný princíp, ale takisto sa opiera o ideu, ktorá bola zrejme v období jeho vzniku zvykom. V tomto prípade je teda nepochybne zaujímavá skutočnosť, že nástroj logiky a racionality - teória hier - bol potrebný na dekódovanie riešenia z Talmudu, ktoré primárne záviselo na spoločenských a náboženských zvyklostiach.

4 Pravdepodobnosť a štatistika

4.1 Nič nie je nemožné

Aká je pravdepodobnosť, že krátkometrážny film, netrvajúci ani 20 minút, bude v sebe obsahovať čokoľvek súvisiace s pravdepodobnosťou? Pokiaľ sme si náhodným výberom zvolili práve film **The Black Shell** [61], máme šťastie. Tak, ako malo šťastie malé dievčatko, ktoré si z nádoby vyše tristo kusov mušličkových cestovín vytiahlo práve tú jednu, ktorú jej mama zafarbila načierno. Chcela jej tým ukázať, že vyhrať lotériu, ktorú dievčatko tak rado sleduje v televízii, je veľmi, veľmi nepravdepodobné. Malej Abby sa to však podarilo na prvý raz.

Možno táto udalosť, podľa ktorej bol aj film pomenovaný, ju poznačila natoľko, že sa začala venovať pravdepodobnosti a štatistike. Prednášala ju na univerzite a aj vo voľnom čase sa jej venovala.

> *„Takže. Najjednoduchšie počítače majú rozlíšenie obrazovky 640 × 480 pixelov. Po 256 farieb. A čo je úžasné, týmto konečným počtom pixelov dokážeš zobraziť čokoľvek. Čokoľvek vo vesmíre. Napísala som program, ktorý je navrhnutý tak, aby náhodne zobrazoval kombinácie farieb rozmiestných pixelov. Teraz je to vlastne prístroj, ktorý, ak by bol spustený dostatočne dlho, by dokázal zobraziť každú snímku, fotku, každú jednu stranu vytlačeného textu, tvoju tvár, moje palce na nohách, Taj Mahal...“*
> *„Koľko takých kombinácii vôbec existuje?“*
> *„Ak by si každému atómu vo vesmíre priradil jeden obraz, vytvorený týmto počítačom... tak by si nemal dostatočne veľa atómov. A väčšina z tých obrázkov by bol len náhodný šum.“*
> *„Ale tak, určite vieme získať aj nejaké úchvatné obrazy!“*
> *„No, časť programu je navrhnutá tak, aby skúmala aj zhodu s obrázkami, ktoré mám uložené v zložke. Hľadá čokoľvek, čo vyzerá nenáhodne. Farby, tvary. Každý deň to kontrolujem a zatiaľ nič.“* [61]

Vyjadrime si teda, koľko rôznych obrázkov môže vzniknúť: Na šírku máme teda 640 pixelov, na výšku 480. To je spolu $640 \times 480 = 307200$ pixelov. Každý z nich môže mať jednu z 256 farieb. Teda prvý z nich môže mať 256, druhý z nich tiež, atď. Ľahko zistíme, že všetkých možností je $256^{640\times480}$.

Ako sa Abby neskôr priznala, jej program je spustený už dva roky v kuse. Každú sekundu vygeneruje nový obrázok. Ak predpokladáme, že sa obrázky doteraz neopakovali a rok má 365 dní, mohlo sa ich vygenerovať maximálne

$$60 \times 60 \times 24 \times 365 \times 2\times = 63072000, \tag{29}$$

čo je oproti celkovému množstvu možných obrázkov zanedbateľne malé číslo. Naviac, ak napríklad počet atómov v pozorovateľnom vesmíre[10] porovnáme s počtom možných obrázkov, ktoré dokáže Abbin program vytvoriť, dostaneme zlomok $\frac{10^{82}}{256^{640\times480}}$, ktorý je rovný približne 4.82×10^{-739730}.

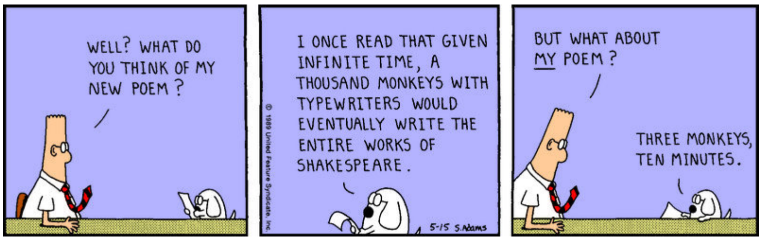
A aká je pravdepodobnosť, že Abbin program vygeneruje práve obrázok 20?

Obr. 20: Obrázok s rozlíšením 640 x 480 pixelov [32]

Jeho autorka môže právom prehlásiť, že je to jej originál, keďže pravdepodobnosť, že by ho vytvoril program pri jednom konkrétnom generovaní, je naozaj veľmi malá: $\frac{1}{256^{640\times480}} \cong 4.2 \times 10^{-739812}$. O Abby sa veľmi trefne vyjadril jej manžel:

[10]Podľa [50] je odhadované množstvo atómov v pozorovateľnom vesmíre 10^{78} až 10^{82}.

„Jednoducho povedané: predstav si milión písacích strojov, milón opíc a ona je Shakespeare.“ [61]



Obr. 21: A čo moja báseň? [2]

Toto prirovnanie, popisujúce takmer až absurditu jej konania, však nevymyslel on. V roku 1913 predstavil francúzsky matematik Émile Borel takzvanú *Opičiu teorému.*

> Nekonečné množstvo opíc ťukajúce do písacieho stroja nekonečne dlho, skoro iste dokáže napísať celú zbierku diel od Williama Shakespearea [28].

Znie to neuveriteľne, ale z matematického hľadiska sa to dokonca dá dokázať. Vyberme si akékoľvek slovo, nech je to napríklad *opica*. Majme písací stroj s päťdesiatimi klávesami. Potom pravdepodobnosť, že stlačíme písmeno o je $\frac{1}{50}$, to isté platí aj pre ostatné písmená. A keďže do stroja ťukáme náhodne, stlačenia jednotlivých písmen sú nezávislé. Preto môžeme tvrdiť, že pravdepodobnosť, že napíšeme slovo *opica* je

$$P(o) \times P(p) \times P(i) \times P(c) \times P(a) = \frac{1}{50} \times \frac{1}{50} \times \frac{1}{50} \times \frac{1}{50} \times \frac{1}{50} = \frac{1}{312500000}. \tag{30}$$

Teraz predpokladajme, že nastane opačná udalosť - opica napíše päťpísmenové slovo a nebude to slovo *opica*.

$$1 - P(o) \times P(p) \times P(i) \times P(c) \times P(a) = 1 - \frac{1}{312500000} \tag{31}$$

Predstavme si n takýchto päťpísmenkových blokov. Keďže sú navzájom nezávislé, potom šanca P_n, že opica ani v jednom nenapíše slovo *opica* bude

$$P_n = \left(1 - \frac{1}{50^5}\right)^n. \tag{32}$$

A už teraz je to jasné: čím väčšie bude n, tým menšie bude P_n. Čím viac päťpísmenových reťazcov opice napíšu, tým menšia je pravdepodobnosť, že slovo *opica* nebude ani v jednom z reťazcov. A ak si to zapíšeme v limitnom tvare, dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \left(1 - \frac{1}{50^5}\right)^n = 0, \tag{33}$$

tým pádom $\lim_{n\to\infty}(1-P_n)=1$. Voľne povedané, pravdepodobnosť, že v nekonečnom množstve päťpísmenových slov sa nachádza slovo *opica*, je rovná jednej. A to sme ešte nespomenuli päťpísmenové bloky v tvare *abc**op-ica**xh*, ktoré by nám túto pravdepodobnosť, už aj tak rovnú jednej, mohli len zvyšovať.

Na tento fakt, že opice sú schopné všetkého, pokiaľ ich je dosť veľa a dáme im dosť času, sa spoliehal aj pán *Burns* zo seriálu ***Simpsonovci***. V epizóde ***Homer - Spása Springfieldu*** ukazuje Homerovi miestnosť plnú opíc:

> *Pozri, tu pracuje 1000 opíc na 1000 strojoch. Čoskoro napíšu najväčší román na svete. Ukáž to! „It was the best of times, it was the blurst of times"?!*[11] *Ty hlúpa opica!*

Obr. 22: Opice píšu román [59]

Aby sme však neostali len pri teoretizovaní, treba spomenúť, že skupina študentov a ich učiteľov z Plymouth University v Anglicku, sa podujala na experiment. Chceli overiť, či sa opiciam podarí napísať Shakespeara. Do klietky so šiestimi primátmi umiestnili jeden počítač, aby sledoval ich literárne začiatky. Avšak po mesiaci sa makakom Elmo, Gum, Heather, Holly, Mistletoe a Rowanovi podarilo len čiastočne zdemolovať počítač, používať ho ako toaletu a väčšinu času stláčať písmeno *s*. Mierne sa ale zlepšili na konci experimentu, keď sa v ich textovom výstupe začali objavovať aj písmená *a, j, l, m*. Žiaľ, nenapísali ani jedno slovo, ktoré by dávalo zmysel. Ako sa študenti s učiteľmi vyjadrili, práca na experimente bola zaujímavá, ale vedeckú hodnotu mala len malú. Možno až na to, že sa im podarilo ukázať, že opičia teoréma funguje len teoreticky [6].

[11] Odkaz na knihu Ch.Dickensa *Príbeh z dvoch miest*, kde úvodná veta znie: It was the best of times, it was the worst of times. [16]

V skutočnosti, predpoklady opičej teorémy ani neboli splnené. Tá totiž predpokladá, že opíc je nekonečne veľa a majú aj nekonečne veľa času. Je teda pochopiteľné, že šesť opíc za mesiac nestihne napísať ani slovo.

4.2 Všetko najlepšie!

Kto by nepoznal Alicu v Krajine zázrakov? Na motív knižky od autora L. Carrola vzniklo už niekoľko filmových adaptácií. Jednou z prvých bola „disneyovka“ **Alice in Wonderland** [58] z päťdesiatych rokov.

Obr. 23: Alica na nenarodeninovej párty [58]

Keď sa Alice prechádza po Krajine zázrakov, natrafí aj na šialeného Klobúčnika, so svojím Zajacom, ako oslavujú.

> ***Alica:*** *„Ach, prepáčte, že som prerušila vašu narodeninovú oslavu!“*
>
> ***Zajac:*** *„Narodeninovú? Drahé dieťa, toto NIE JE narodeninová oslava.“*
>
> ***Klobúčnik:*** *„Samozrejme, že nie! Toto je NEnarodeninová oslava!“*
>
> ***Alica:*** *„Nenarodeninová? Prepáčte, ale nie celkom vám rozumiem.“*
>
> ***Klobúčnik:*** *„Je to veľmi jednoduché. Narodeniny máš len jeden deň v roku. A zvyšných 364 máš nenarodeniny. Prečo by sme ich nemali oslávіť? “*[58]

Presne tak! Aká je pravdepodobnosť, že máme dnes narodeniny? Ako povedal Klobúčnik, sú len raz v roku. Teda ak berieme nepriestupný rok, tak šanca, že je to práve dnes, je $\frac{1}{365}$, čo je oveľa menej ako $\frac{364}{365}$, čo reprezentuje pravdepodobnosť, že by sme tiež oslavovali s Klobúčnikom a Alicou.

Medzi matematikmi je známy takzvaný *narodeninový paradox*, (pozri napr. [11])

Zaoberá sa pravdepodobnosťou, že dvaja ľudia v skupine n ľudí budú mať narodeniny v rovnaký deň. Slovo paradox naznačuje aj pre niektorých prekvapujúci fakt: ak sú dátumy narodení rovnako rozdelené, teda že pravdepodobnosť narodenia sa v ľubovoľný deň nepriestupného roku je rovná $\frac{1}{365}$, potom pravdepodobnosť, že dvaja ľudia majú narodeniny v ten istý deň v skupine 23 osôb, je väčšia ako 50%. Môžeme si to overiť jendoduchým dôkazom.

Označme si $P(A)$=pravdepodobnosť, že aspoň dvaja majú narodeniny v rovnaký deň, $P(B)$=pravdepodobnosť, že všetci majú narodeniny v rôzne dni. Platí teda:

$$P(A) = 1 - P(B). \tag{34}$$

Pravdepodobnosť P(B) si vieme vyjadriť nasledovne. Máme 23 ľudí, vyberieme si ľubovoľného jedného z nich. Ten môže mať narodeniny 365 dní v roku z 365, teda $\frac{365}{365}$. Ak sa žiadne dva dátumy narodení nemajú rovnať, potom nasledujúci človek, „smie“ mať narodeniny hocikedy inokedy, to jest má na výber 364 dní v roku. Šanca, že sa narodil inokedy ako prvý vybraný človek je $\frac{364}{365}$. Keďže narodeniny rôznych ľudí budeme považovať za nazávislé udalosti, môžeme napísať

$$P(B) = \frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \cdots \times \frac{343}{365}. \tag{35}$$

Dosadením do (34) dostávame:

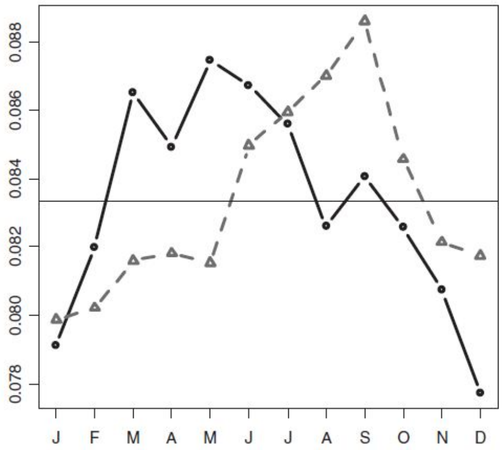
$$P(A) = 1 - P(B) = 1 - 0.4927 = 0.5073. \tag{36}$$

Ako vidíme, za predpokladu rovnomerne rozdelených narodenín, naozaj stačí 23 ľudí na to, aby sme mohli povedať, že šanca „dvojitej“ oslavy narodenín je 50%.

Avšak to, že dátumy narodenín sú rovnomerne rozdelené, v skutočnosti nie je pravda. Ukážme si grafy závislostí počtu narodených detí od mesiaca v roku z Anglicka a Walesu pre roky 1979 a 2005[12]. Na obrázku 24 vidíme, že nie je pravda, že deti sa rodia s rovnakou pravdepodobnosťou pre každý deň. Grafy na obrázku 24 ukazujú prechod v roku 1979 z tzv. európskeho trendu na tzv. americký trend v roku 2005.

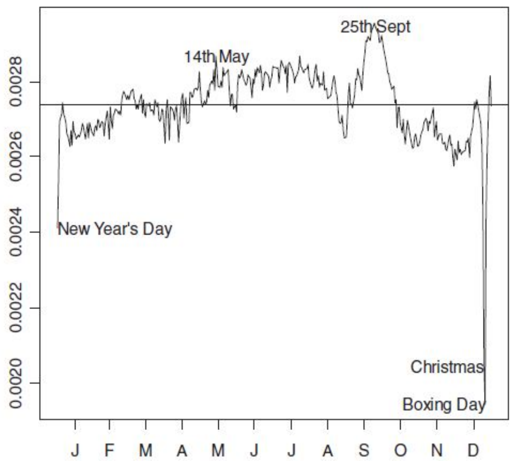
Európsky trend predstavuje viac pôrodov na jar a počas skorších letných mesiacov, s druhým vrcholom v septembri, americký trend vyjadruje najviac pôrodov v septembri.

[12]Dáta sú získané z Office for National Statistics. Údaje boli upravené tak, aby zohľadňovali rôzne počty dní v mesiacoch a aby boli normalizované ako pomer počtu narodení v danom mesiaci k celkovému počtu pôrodov v danom roku.



Obr. 24: Počet narodených v roku 1979(●) a 2005(▲) v závislosti od mesiaca v roku. Vodorovná čiara reprezentuje graf hustoty rovnomerného rozdelenia [11]

Napríklad, v rokoch 2001 až 2005 sa najviac detí narodilo medzi 23. až 27. septembrom. Ako vidíme, tieto dátumy sú najviac ovplyvnené sviatkami a dovolenkami. Zvýšená pôrodnosť počas jari a v septembri poukazuje na približnú dobu počatia počas letných dovoleniek a počas vianočných sviatkov. Naopak, nízka pôrodnosť počas dní voľna odráža zníženú činnosť nemocníc a pôrodníc počas sviatkov. Napríklad, 26. december (Boxing Day vo Veľkej Británii) bol 25-krát dňom s najnižším počtom pôrodov počas rokov 1979-2005. Obrázok 25 ukazuje 17517192 pôrodov v Anglicku a Walese počas rokov 1979-2005 (okrem 12311 pôrodov 29. februára) [11].



Obr. 25: Počet pôrodov na deň počas rokov 1979 až 2005. Vodorovná čiara zodpovedá rovnomernému rozdeleniu [11]

Tabuľka 10: Údaje o počte narodených detí v USA podľa mesiacov v roku 2010 [7]

mesiac	počet narodených detí v mesiaci
január	323249
február	301994
marec	338613
apríl	325028
máj	328273
jún	334535
júl	345199
august	349747
september	350745
október	336809
november	326220
december	338974

Obr. 26: Počet pôrodov za mesiac v roku 2010 v USA [7]

Ako vidíme, myslieť si, že dátumy narodenín sú rovnomerne rozdelené, nie je správne. Nakoniec, vidíme to aj na obrázku 26 ukazujúcom graf zodpovedajúci údajom z tabuľky 10. Ako nerovnomerné rozdelenie zmení potrebný počet ľudí, na päťdesiat percentnú pravdepodobnosť dvojitých narodenín? Existuje veľa spôsobov [11], ktorými sa dá ukázať, že akákoľvek odchýlka od rovnomerného rozdelenia má tendenciu zvýšiť pravdepodobnosť, že v skupine r ľudí budú mať aspoň dvaja narodeniny v rovnaký deň. To znamená, že keď 23 ľudí stačilo na 365 rovnako pravdepodobných dní, určite budú stačiť aj vtedy, keď niektoré z dní budú mať väčšiu pravdepodobnosť výskytu narodenín.

5 Finančná matematika

Sophie je späť. A nezaujíma ju len teoretická matematika a vlastnosti čísel. Svoje poznatky dokáže aplikovať aj do reálneho sveta, keď vo svojom denníku **Sophies's Diary** píše o tom, ako sa rozhodla matematikou pomôcť otcovi.

> **Utorok, 2. marca 1790**
>
> *Otec sa ma spýtal ako sa počíta zložené úrokovanie. Požičiava penize a na to, aby spočítal úrok, používa jednoduchú formulu: $I = P \times R$, kde I=úrok, P=požičiavaná suma a R=úroková miera. Ocko teraz chce zaviesť zložené úrokovanie, aby získal peniaze nielen za pôvodnú pôžičku, ale taktiež za úroky, ktoré mu dlžia. Chce zúročiť aj úroky, pretože niektorým ľuďom trvá príliš dlho, kým mu splatia všetky dlhy.* [34]

Tento spôsob úročenia, ktoré používa Sophiin otec, sa volá **jednoduché úrokovanie**. Zaveďme si jednotné značenie, ktoré budeme v tejto kapitole používať. Navyše budeme

r	úroková miera
t	čas úročenia
FV	future value, budúca hodnota peňazí (koľko majú otcovi splatiť)
PV	present value, súčasná hodnota peňazí (koľko požičal otec)

pracovať so zjednodušeným modelom, že dlh splatia dlžníci naraz. Teda, že *ne*budú splácať svoje dlhy postupne.

Napríklad, ak Sophiin otec požičal 100 toliarov a jeho úroková miera bola 10%, potom ak úročil raz ročne, dlh voči nemu po piatich rokoch sa môže vypočítať takto:

$$FV = PV(1 + t \times r) = 100 * (1 + 5 \times 0.1) = 150. \tag{37}$$

Teda by mu dlžili 150 toliarov. Túto sumu sme vypočítali jednoduchým úrokovaním. Sophie sa však vyjadrila, že jej otec by chcel získať viac.

> *Našla som vzorec $A = P(1 + \frac{R}{n})^{nt}$ na výpočet zloženého úrokovania, kde A znamená suma, ktorú by mali vyplatiť môjmu otcovi, t je čas uplynutý od pôžičky a n znamená koľko razy do roka sa suma dlhovaná otcovi úročí. Chce vedieť, ako často by mal úročiť, aby dostal čo najviac peňazí.*[34]

Skúsme overiť, či je táto forma úrokovania - **zložené úrokovanie** - výhodnejšia, ako pôvodné jednoduché úrokovanie. Majme opäť rovnaké predpoklady. Dlh voči Sophiinmu otcovi sa tentoraz spočíta takto:

$$FV = PV(1+r)^t = 100(1+0.1)^5 \cong 161.05. \tag{38}$$

Tabuľka 11: Veľkosť dlhu v závislosti od počtu úročení za rok, r=10%, t=5, PV=100

počet úročení do roka - n	$FV = PV(1+\frac{r}{n})^{nt}$
2	162,89
3	163,53
4	163,86
5	164,06

Sophie sa teda nemýlila a našla lepší spôsob úročenia. Jej otec sa však vyjadril, že uvažuje nad možnosťou úročiť viackrát do roka. Pozrime sa na tabuľku 11, v ktorej sú vypočítané dlhované sumy pre rôzny počet úročení ročne.
Môžeme si všimnúť, že so zvyšujúcou sa frekvenciou úročenia sa zvyšuje aj množstvo peňazí, ktoré môžeme získať. Buďme trochu „nenásytní“ a skúsme úročiť nekonečne veľakrát za rok. Potom množstvo peňazí, ktoré môžme získať, sa dá vyjadriť nasledovne:

$$\lim_{n\to\infty} PV(1+\frac{r}{n})^{tn} = \lim_{n\to\infty} PV(1+\frac{r}{n})^{tn\frac{r}{r}} = \lim_{n\to\infty} PV(1+\frac{r}{n})^{\frac{n}{r}rt} = \lim_{n\to\infty} PV\mathrm{e}^{tr} \tag{39}$$

Získali sme vzorec pre **spojité úrokovanie**. Ak by Sophiin otec požičal 100 toliarov a úročil by spojitým úrokovaním s úrokovou mierou 10% po dobu 5 rokov, zarobil by si:

$$FV = PV\mathrm{e}^{tr} = PV\mathrm{e}^{5\times 0.1} = 164.87 \text{ toliarov.} \tag{40}$$

Film **The Bank** svojím názvom naznačuje, že by mohol mať čosi spoločné s peniazmi. Ešte pred úvodnými titulkami, počas prvých troch minút filmu sa stretneme so zamestnancom banky, s pánom Johnssonom, ktorý prišiel na besedu do školy prednášať o dôležitosti bánk. Začne kresliť na tabuľu. *„Sú tri veci, na ktoré budete potrebovať peniaze uložené v banke. Prvou je auto. Druhou je dom, čím väčší, tým lepší. A tretia vec?“* spýta sa, keď nakreslí na tabuľu starčeka s bradou. Prihlási sa nesmelo jeden chlapec: *„Santa Claus?“* Trieda sa zasmeje a prihlási sa jedno dievča: *„Tak na to, keď* *budeme starí?"*

Pán Johnsson súhlasne prikývne a pokračuje príkladom: *„Ak by ste sa rozhodli, že každý týždeň uložíte do banky 50 centov, zdvojnásobiac vkladanú týždennú sumu každé tri roky, tak o 25 rokov bude každý jeden z vás mať na účte 727 000 amerických dolárov."* Ozve sa jeden chlapec: *„To nie je možné. Rok má len 52 týždňov."* Pán Johnsson odpovie: *„Áno, to je pravda,"* a napíše na tabuľu $52 \times 25 = 1300$ týždňov. *„Ale dovoľ mi ukázať, ako to funguje!"* A píše na hovoriac pri tom: *„Zložené úrokovanie. Zúročuje sa vám úrok. Chápete? Tak a teraz v mene banky mesta St. Victoria každému z vás darujem váš prvý depozit - 50 centov."*[57]

Obr. 27: Pán Johnsson vysvetľuje, ako funguje zložené úrokovanie [57]

Skúsme najprv zistiť, koľko by sme dostali, keby banky neúročili naše vklady. Vkladali by sme teda týždenne určitú sumu, ktorú by sme vždy po troch rokoch zdvojnásobili. Rok má 52 týždňov. Prvé tri roky by sme vkladali $0.5 = 2-1$ dolára, ďalšie tri roky $1 = 2^0$ dolár, potom tri roky $2 = 2^1$ doláre. Keďže 25 rokov je 3×8 rokov + 1 rok, celkové množstvo vložených peňazí si vieme zapísať takto:

$$52 \times 0.5 \times \left(3 \sum_{i=-1}^{6} 2^i + 2^7\right) = 13\,273. \tag{41}$$

Johnsson však hovoril o oveľa väčšej sume. Pozrime sa do tabuľky 12, ako by to vyzeralo v prípade zloženého úrokovania počas prvých štyroch rokov, kde nám budú sumu úročiť úrokovou mierou r.

Ak si podobným postupom ako v tabuľke 12 dopočítame hodnoty až po 25. rok, dostaneme sa k nasledujúcej rovnosti:

$$\begin{aligned} FV =&52 \times [2^{-1} \sum_{i=23}^{25} (1+r)^i + 2^0 \sum_{i=20}^{22} (1+r)^i + 2^1 \sum_{i=17}^{19} (1+r)^i + 2^2 \sum_{i=14}^{16} (1+r)^i + \\ &+2^3 \sum_{11}^{13} (1+r)^i + 2^4 \sum_{i=8}^{10} (1+r)^i + 2^5 \sum_{i=5}^{7} (1+r)^i + 2^6 \sum_{i=2}^{4} (1+r)^i + 2^7 (1+r)] \end{aligned} \tag{42}$$

Tabuľka 12: Veľkosť vkladu na konci prvých štyroch rokov

1. rok	$52 \times 2^{-1} \times (1+r)^1$
2. rok	$(52 \times 2^1 + 52 \times 2^{-1})(1+r) = 52 \times 2^{-1}[(1+r)^2 + (1+r)]$
3. rok	$52 \times 2^{-1}[(1+r)^2 + (1+r)] + 52 \times 2^{-1} \times (1+r) = 52 \times [(1+r)^3 + (1+r)^2 + (1+r)]$
4. rok	$52 \times [(1+r)^3 + (1+r)^2 + (1+r)] + 52 \times 2^0(1+r) =$
	$= 52 \times [2^{-1} \sum_{i=1}^{3}(1+r)^i + 2^0(1+r)]$

Podľa pána Johnssona by sme mali o 25 rokov mať okolo 727 000. Ak si teda zvolíme $FV = 727000$ potom ak si vypočítame r, vyjde nám $r \cong 0.38396$. Pán Johnsson sľuboval neuveriteľne vysoký úrok: 38%. V skutočnosti banky vklady úročia oveľa nižším úrokom [37]. Keby sme si za r zvolili 2%, čo je podľa [37] jedna z vyšších úrokových mier úročiacich sporiace vklady, za predpokladu, že by sa úroky pripisovali raz, a to na konci roka, potom na konci 25. roku sporenia by sme mali:

$$52 \times [2^{-1} \sum_{i=23}^{25} (1,02)^i + 2^0 \sum_{i=20}^{22} (1,02)^i + 2^1 \sum_{i=17}^{19} (1,02)^i + 2^2 \sum_{i=14}^{16} (1,02)^i +$$
$$+2^3 \sum_{11}^{13} (1,02)^i + 2^4 \sum_{i=8}^{10} (1,02)^i + 2^5 \sum_{i=5}^{7} (1,02)^i + 2^6 \sum_{i=2}^{4} (1,02)^i + 2^7\,(1,02)] \cong 29222,009. \tag{43}$$

Síce by sme nezarobili toľko ako sľuboval pán Johnsson, bolo by to však viac, ako by sme mali, kebyže si spomínané sumy vhadzujeme len tak, do prasiatka.

Záver

Cieľom tejto bakalárskej práce bola motivácia študentov posledných ročníkov stredných škôl, respektíve študentov prvých ročníkov vysokých škôl k riešeniu úloh z matematiky. Netradičné prostredie, do ktorého sú príklady z rôznych oblastí matematiky zasadené, môže vzbudiť záujem aj u tých najzarytejších odporcov matematiky. Okrem príkladov uvedených v tejto bakalárskej práci, aj internete existuje veľké množstvo blogov venovaných príkladom z matematiky, ktoré sa vyskytli vo filmoch alebo v románoch. Nechýbajú podrobné analýzy jednotlivých javov a riešenia teoretických situácií, ktoré nenastali, ale mohli nastať.

Na záver si ešte dovolíme uviesť úryvok z knihy **Sophie's Diary**, ktorý môžme bezpochyby považovať za jedno z najkrajších vyznaní lásky k matematike.

> *Dnes večer sa ma Monsieur de Maillard spýtal, prečo študujem matematiku. Zaskočil ma touto otázkou, tak som len vyhŕkla: „Matematika je najkrajšia veda!“ Tak zvláštne sa na mňa pozrel, usmial a odišiel. Chcela som mu k tomu viac povedať. Chcela som mu vysvetliť, že mám rada matematiku, lebo sa mi páči riešiť rovnice a že ma baví odkrývať záhady ukrývajúce sa za každou teorémou. Som uchvátená číslami a ich harmóniou v rovniciach, úplne ako v akejsi nádhernej symfónii. Áno, matematika je aj prísna veda. Vyžaduje logiku a pravdivosť, pretože jej úlohou jej riešiť problémy vesmíru. Rieši problémy, ktoré sa každodenne vyskytujú okolo nás, ale aj tie pre nás nedosiahnuteľné. Mám rada matematiku, pretože v matematike je pravda!*[34]

Zoznam použitej literatúry

[1] ABRAMOWITZ, M., STEGUN, I. A. (Eds.). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables,* 9th printing. New York: Dover, 1972.

[2] ADAMS, S.: Dilbert, 1989, dostupné na internete(17.5.2013): $http://dilbert.com/strips/comic/1989-05-15/$

[3] ANDREESCU, T.: *Number Theory Trivia: Amicable Numbers*, Illinois Mathematics and Science Academy, dostupné na internete (16.5.2013): $http://britton.disted.camosun.bc.ca/amicable.html$

[4] AUMANN, R.J.: *Game Theory in the Talmud*, Research bulletin Series on Jewish Law and Economics, Department of Economics, Bar-ilan University, 2002

[5] AUMANN, R.J., MASCHLER, M.: *Game Theoretic Analysis of a Bankruptcy Problem from the Talmud*, Journal of Economic Theory, Volume 36, 1985

[6] *BBC News: No words to describe monkeys' play,* 2003, dostupné na internete(17.5.2013) $http://news.bbc.co.uk/go/pr/fr/-/2/hi/uk_news/england/devon/3013959.stm$

[7] *Births: Final Data for 2010,* National Vital Statistics Reports, Vol. 61, 2012, dostupné na interenete (25.5.2013): $http://www.cdc.gov/nchs/data/nvsr/nvsr61/nvsr61\_01\_tables.pdf$

[8] BAILEY, D.H., BORWEIN, J.M., BORWEIN, P.B.: *Ramanujan, Modular Equations, and Approximations to Pi or How to compute One Billion Digits of Pi*, American Mathematical Monthly 96, str. 201 - 219, 1989

[9] BERNDT, B.C., CHAN, H.H.: *Eisenstein series and approximations to* π, Illionis J. Math, Volume 45, str. $75-90$, 2001

[10] BORHO, W.: *On Thabit ibn Kurrah's Formula for Amicable Numbers*, Mathematics of Computation, volume 26, 1972

[11] BORJA, M.C., HAIGH, J.: *The Birthday Problem*, Significance Volume 4, September 2007

[12] BOYER, C. B. *A History of Mathematics*, Wiley, New York, 1968.

[13] ČORNÁ, T.: *Jaroslav Franek: Ježiš sa nikdy nezriekol svojho národa*, rozhovor v denníku SME, Petit Press, 2006, dostupné na internete (17.5.2013): *http://www.sme.sk/c/2763439/jaroslav-franek-jezis-sa-nikdy-nezriekol-svojho-naroda.html*

[14] DAICHES, S.: *Baba Mezi'a, The Soncino Babylonian Talmud*, Raanana, 5771, v našom letopočte: 2010-2011, dostupné na internete (20.5.2013): *http://halakhah.com/rst/nezikin/32a%20-%20Baba%20Metziah%20-%202a-28a.pdf*

[15] DE MORGAN, A.: *A Budget of Paradoxes,* Open Court Publishing Company, Chicago, 1915 dostupné na internete (3.4.2013): *http://www.gutenberg.org/ebooks/26408*

[16] DICKENS, CH.: *A Tale of Two Cities: Pictures from Italy and Master Humphrey's Clock*, Thomas Nelson and Sons, Londýn, 1860

[17] FRANEK, J.: *Judaizmus,* Marenčin PT, Bratislava, 2009

[18] GILBERT, G., SCHMIDT, G.: *Parametric Equations for a Cycloid*, The University of Georgia, dostupné na internete (17.5.2013): *http://jwilson.coe.uga.edu/EMAT6680Fa07/Schmidt/Assignment%2010/Gayle&Greg-10.htm*

[19] GRIFFITS, D.: *Introduction to Quantum Mechanics*, Prentice Hall, Upper Saddle River, USA, 1995

[20] HARDY, G.H.: *Ramanujan: Twelve Lectures on Subjects Suggested by His Life and Work,* American Mathematical Society, Rhode Island, 1999

[21] KANIGEL, R.: *The Man Who Knew Infinity: a Life of the Genius Ramanujan,* Charles Scribner's Sons, New York, 1991.

[22] KASMAN, A.: *After Math, The Fractal Murders, and Other Mathematical Murder Mysteries*, Notices of the AMS, Volume 50, 2003

[23] KELLER, M.T.: *Mathematics Genealogy Project*, North Dakota State University, Fargo, North Dakota, dostupné na internete (20.4.2013):
http://genealogy.math.ndsu.nodak.edu

[24] KOLLÁR, M.: *Prednášky z Matematickej analýzy 2*, 2011

[25] KOLLÁR, M., KOSSACZKÁ, Ľ., ŠEVČOVIČ, D.: *Diferenciálny a integrálny počet funkcií viac premenných v príkladoch*, Knižničné a edičné centrum FMFI UK, Bratislava, 2012, dostupné na internete (30.4.2013):
http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/sevcovic/knihy/difint-kks.pdf

[26] LAPLACE, P.S.: *Théorie analytique des probabilités*, Courcier, Ve., Paríž, 1812 dostupné na internete (2.5.2013): *http://books.google.com*

[27] LEE, P.M.: The Probability Integral, dostupné na internete (17.5.2013):
http://www.york.ac.uk/depts/maths/histstat/normal%20history.pdf.

[28] LORGE, G.: *The Best Thought Experiments: Schrödinger's Cat, Borel's Monkeys*, Wired Magazine, máj 2007, dostupné na internete (17.5.2013):
http://www.wired.com/science/discoveries/magazine/15-06/st_best

[29] *Matematica Applicata: Divulgazione e Didattica, Il Test di Proust,* dostupné na internete (9.4.2013): *http://maddmaths.simai.eu/il-test-di-proust*

[30] *Matematica Applicata: Divulgazione e Didattica, Il Test di Proust,* Franco Brezzi, dostupné na internete (9.4.2013):
http://maddmaths.simai.eu/il-test-di-proust/franco-brezzi/

[31] MELVILLE, H.: *Moby Dick*, Bantam Classics, New York, 1981

[32] MÉSZÁROSOVÁ, M.: *tooShy*, 2013, osobný blog, dostupné na internete (17.5.2013): *http://tooshyarts.blogspot.sk*

[33] *One Million Digits of Pi*, dostupné na internete (5.5.2013):
http://www.piday.org/million/

[34] MUSIELAK, D.: *Sophie's Diary*, Mathematical Association of America, Inc., USA, 2012

[35] PAENZA, A.: *Matematiko, jsi to ty?*, Kniha Zlín, Zlín, 2010

[36] PENGELLEY, D.: *Sophies's Diary by Dora Musielak*, recenzia knihy, Katedra matematiky, New Mexico State University, Las Cruces, USA, 2008, dostupné na internete (3.4.2013):
$http://www.math.rochester.edu/people/faculty/doug/otherpapers/sophiesdiary-review.pdf$

[37] *Porovnanie a úrokové sadzby sporiacich účtov - Financie.sk*, 2013, dostupné na internete (25.5.2013): http://www.finance.sk/bankovnictvo/sporiace-ucty/porovnanie/

[38] *Postcard DE - 308715,* dostupné na internete (24.4.2013): $http://www.postcrossing.com/postcards/DE-308715$

[39] PROUST, M.: *Á la recherche du temps perdu*, Éditions de la Nouvelle Revue Francaise, Paríž, 1921

[40] PROUST, M., PEILLARD, L.: *Cent écrivains français répondent au "Questionnaire Marcel Proust"*, A. Michel, Paríž, 1969

[41] RAMANUJAN, S.: *Modular equations and approximations to* π, Quarterly Journal of Mathematics, Oxford, 1914.

[42] ROSENTHAL, E.: *The calculus of murder,* St. Martin's Press, New York, 1986.

[43] RYAN, M.: *How to Calculate Arc Length with Integration*, dostupné na internete (17.5.2013): $http://media.wiley.com/Lux/11/204911.image0.jpg$

[44] SHOR, M.: *Princess Bride - Game Theory in film*, dostupné na internete (5.12.2012):
$http://www.gametheory.net/popular/reviews/PrincessBride.html$

[45] SPRUGNOLI, R.: *Introduzione alla Matematica*, Katedra systémov a informatiky, Florencia, Taliansko, 2005
dostupné na internete (28.5.2013): $http://www.dsi.unifi.it/resp/media.pdf$

[46] *Srinivasa Ramanujan's 125th Birthday,* 22.12.2012, India dostupné na internete(5.5.2013):
$http://www.google.com/doodles/srinivasa-ramanujans-125th-birthday$

[47] STURM, J.C.F.: *Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique,* Paris, 1864
dostupné na internete (28.4.2013):
$http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k900940$

[48] *The Legacy of Srinivasa Ramanujan - An International Conference*, Delhi, 17-22 December 2012 dostupné na internete(5.5.2013):
$http://www.legacyoframanujan.com/$

[49] *University of New Haven: Rosenthal Erik,* dostupné na internete (4.5.2013):
$http://www.newhaven.edu/4544/$

[50] VILLANUEVA, J.C.: *Atoms in the Universe*, Universe Today, 2009, dostupné na internete (17.5.2013):
$http://www.universetoday.com/\$36302/atoms-in-the-universe/$

[51] WEBSTER M.: *After Math*, Zinka Press, Incorporated, 1997.

[52] WEISSTEIN, E. W.: *Tautochrone Problem,* MathWorld-A Wolfram Web Resource, dostupné na internete(6.5.2013):
$http://mathworld.wolfram.com/TautochroneProblem.html$

[53] WEISSTEIN, E. W.: *Cycloid*, MathWorld-A Wolfram Web Resource, dostupné na internete (6.5.2013): $http://mathworld.wolfram.com/Cycloid.html$

[54] WENCIKER, B.: *Numb3rs Activity: Cycloid II Episode: „The Mole“*, Texas Instruments Incorporated, 2006, dostupné na internete (6.5.2013):
$http://education.ti.com/en/us/activity/detail?id=EE4725D734B14$
$D32A47952F31F3D730B$

[55] ZORICH, V.A.: *Mathematical Analysis II.*, Springer, 2004

Filmy a seriály:

[56] ARONOFSKY, D.: *Pi*, Harvest FIlmworks, USA, 1998

[57] CONOLLY, R.: *The Bank*, Arenafilm, Australia, 2001

[58] GERONIMI, C., JACKSON, W., CAROLL, L.: *Alice in Wonderland*, Walt Disney Productions, USA, 1951

[59] GROENING, M.: *The Simpsons*, Last Exit to Springfield, 4. séria, 17. dielGracie Films & 20th Century Fox Television, USA, 1993, Last Exit to Springfield, 4. séria, 17. diel

[60] LEINER, D.: *Harold & Kumar Escape from Guantanamo Bay*, New Line Cinema, USA, 2008.

[61] NAYMAN, M.: *The Black Shell*, študentský film, Toronto, 2008

[62] NOLAN, CH.: *The Dark Knight*, Warner Bros. Pictures, USA UK, 2008.

[63] ORTEGA, K.: *High School Musical,* Disney Channel, USA, 2011.

[64] REINER, R.: *The Princess Bride*, Act III Communications, USA, 1987

[65] SCOTT, R., SCOTT, T.: *Numb3rs*, CBS Television Studios, USA, 2005-2010