

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



Fitovanie forwardových kriviek

BAKALÁRSKA PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Fitovanie forwardových kriviek

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor: 9.1.9. Aplikovaná matematika (1114)
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: RNDr. Beáta Stehlíková, PhD.



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Juraj Ivan
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Fitovanie forwardových kriviek
Fitting forward rate curves

Cieľ: 1. Popísať Vašíčkov model úrokových mier a z neho vyplývajúce forwardové úrokové miery. Použiť trhové dáta na odhad parametrov Vašíčkovho modelu, ak považujeme okamžitú úrokovú mieru za nepozorovateľnú a odhadujeme ju spolu s parametrami. Porovnať získaný priebeh odhadnutej okamžitej úrokovej miery získanej týmto postupom s priebehom získaným fitovaním výnosových kriviek podľa článku [Halgašová, Stehlíková, Bučková, 2014].

2. Popísať modelovanie forwardových kriviek prístupom Nelsona-Siegela a Svenssona. Odhadnúť parametre týchto modelov pre reálne data.

Vedúci: RNDr. Beáta Stehlíková, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Dátum zadania: 23.10.2014

Dátum schválenia: 23.11.2014

doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

PodĎakovanie Touto cestou by som sa rád poďakoval svojej vedúcej bakalárskej práce, RNDr. Beáte Stehlíkovej, PhD., za naozaj plnohodnotnú podporu, odbornú pomoc ale predovšetkým pravidelné podnetné pripomienky, ktoré mi do veľkej miery pomohli pri písaní tejto práce.

Abstrakt v štátnom jazyku

IVAN, Juraj: *Fitovanie forwardových kriviek* [bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: RNDr. Beáta Stehlíková, PhD, Bratislava, 2015, 61 strán.

Cieľom tejto bakalárskej práce bolo oboznámiť čitateľa s modelovaním forwardových úrokových mier. Predstavili sme si dva teoretické prístupy, Nelsonov-Siegelov, resp. jeho Svenssnovým rozšírením, ktoré sme porovnali a taktiež sme sa zaoberali Vašíčkovým modelom, pričom vo všetkých prípadoch sme tieto modely aplikovali na trhové dáta. Prvý prístup spočíva v odhade parametrov danej funkcie na určitú vzorku dát. My sme si za túto vzorku zobrali výnosy amerických dlhopisov v roku 2007 a 2014. Vašíčkov model vychádza z modelovania krátkodobej úrokovej miery stochastickou diferenciálnou rovnicou a naše kalibrácie vychádzali z dvoch prístupov, ktorých výsledky sme následne porovnali.

Kľúčové slová: úroková miera, časová štruktúra úrokových mier, forwardová úroková sadzba, Nelson-Siegel, Svensson, Vašíčkov model

Abstract

IVAN, Juraj: Fitting forward rate curves [Bachelor Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: RNDr. Beáta Stehlíková, PhD, Bratislava, 2015, 61p.

The aim of our work was to demonstrate basic principles of modeling forward rates. We have introduced two theoretical methods, first method includes Nelson-Siegel model and Svensson's extension of Nelson-Siegel model which we have compared against each other and second method was Vasicek single factor model. In all cases we have calibrated these models to actual market data. The first method is mostly about estimation of parameters of given function to fit market data. In our case, we have chosen US bond yields from years 2007 and 2014. Vasicek model is based on modeling short term interest rates using stochastic differential equation and our parameter estimations was based on two principles, which we have consequently compared.

Keywords: interest rate, term structure of interest rates, forward rate, Nelson-Siegel, Svensson, Vasicek model

Obsah

Zoznam obrázkov	8
Zoznam tabuliek	11
Úvod	12
1 Základné pojmy, definície a vlastnosti	14
1.1 Časová hodnota peňazí, úročenie a diskontovanie v čase	14
1.2 Dlhopisy	15
1.3 Časová štruktúra úrokových mier a okamžitá úroková miera	17
1.4 Forwardové úrokové sadzby	23
2 Nelsonov-Siegelov-Svenssonov model	27
2.1 Nelsonov-Siegelov model	27
2.2 Fitovanie skutočnej výnosovej krivky podľa modelu Nelsona-Siegela . .	31
2.3 Svenssonovo rozšírenie	34
2.4 Zmena parametrov modelov NS a NSS v čase	36
3 Vašíčkov model	42
3.1 Základné pojmy	42
3.2 Stochastická diferenciálna rovnica Vašíčkovho modelu	44
3.3 Explicitné vyjadrenie okamžitej úrokovej miery a niektoré vlastnosti Va- šíčkovho modelu	44
3.4 Cena dlhopisu, výnosová krivka a forwardová krivka vo Vašíčkovom modeli	46
3.5 Kalibrácia parametrov Vašíčkovho modelu z reálnych dát	47
Záver	56
Zoznam použitej literatúry	59

Zoznam obrázkov

1	Výnosy amerických dlhopisov z 30.5.2000 - ilustrácia konštantného tvaru výnosovej krivky (Zdroj: Reuters)	18
2	Výška sadzby EONIA v priebehu roku 2014 a vyznačené konce mesiacov (Zdroj: EMMI)	19
3	Porovnanie kriviek úrokových swapov z rokov 31.12.2010, 31.12.2012 a 31.12.2013 (Zdroj: Reuters)	22
4	Podiel jednotlivých OTC derivátov na celkovom objeme za prvý polrok 2014 (Zdroj: BIS)	24
5	Porovnanie identických kriviek namodelovaných podľa pôvodného modelu Nelsona-Siegela s parametrami $\alpha_1 = 0, 1$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 0, 5$, pričom prvý model mal hodnoty parametrov $\beta_1 = 76, 5$, $\beta_2 = 3, 5$ a druhý model mal hodnoty parametrov $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 76$	28
6	Krivky takmer rovnakého tvaru namodelované podľa pôvodného predpisu modelu Nelsona-Siegela s parametrami: $\alpha_1 = 0, 88$, $\alpha_2 = 1, 32$, $\alpha_3 = 0, 88$, $\beta_1 = 5, 94$, $\beta_2 = 88, 22$ a podľa upraveného predpisu modelu Nelsona-Siegela s parametrami: $\alpha_1 = 1, 46$, $\alpha_2 = 1, 62$, $\alpha_3 = 0, 61$, $\beta = 0, 45$. . .	29
7	Ilustrácia zmeny tvaru krivky v modeli Nelsona-Siegela v prípade zmeny parametra α_3 pri zanechaní ostatných parametrov fixných.	31
8	Ilustrácia zmeny tvaru krivky v modeli Nelsona-Siegela v prípade, že manipulujeme s parametrom β	32
9	Priebeh spotovej úrokovej sadzby podľa modelu Nelsona-Siegela pri parametroch $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 4$, $\alpha_3 = 8$, $\beta = 5$	34
10	Priebeh okamžitej forwardovej úrokovej sadzby podľa modelu Nelsona-Siegela pri parametroch $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 4$, $\alpha_3 = 8$, $\beta = 5$	35
11	Výnosová krivka amerických dlhopisov zo dňa 31.12.2014 a výnosová krivka namodelovaná modelom Nelsona-Siegela	36
12	Krivka okamžitých forwardových úrokových mier podľa modelu Nelsona-Siegela odvodená z výnosovej krivky amerických dlhopisov zo dňa 31.12.2014.	37

13	Výnosová krivka amerických dlhopisov zo dňa 30.4.2007, krivka získaná fitovaním pomocou modelu Nelsona-Siegela a krivka získaná fitovaním pomocou modelu Svenssona.	38
14	Priebeh okamžitej forwardovej úrokovej sadzby podľa rovnice podľa modelu Nelsona-Siegela-Svenssona pri parametroch: $\alpha_1 = 8, \alpha_2 = -0,5, \alpha_3 = -0,6, \alpha_4 = 0,6, \beta_1 = 5, \beta_2 = 1,2$	39
15	Porovnanie výnosu 30 ročných amerických dlhopisov v priebehu roku 2014 oproti hodnotám α_1 z modelu Nelsona Siegela.	40
16	Porovnanie výnosu mesačných amerických dlhopisov v priebehu roku 2014 oproti hodnotám $\alpha_1 + \alpha_2$ z modelu Nelsona Siegela.	40
17	Vývoj nafitovaných parametrov α_3 a β z modelu Nelsona-Siegela v priebehu roku 2014	41
18	Vývoj nafitovaných parametrov modelu Nelsona-Siegela-Svenssona v priebehu roku 2014	41
19	Simulácia piatich náhodných aproximácií trajektórií Wienerovho procesu.	43
20	Simulácie desiatich rôznych priebehov short rate s parametrami $\kappa = 0,3, \theta = 0,1, \sigma = 0,03$ a $r_0 = 0,03$ pomocou Vašíčkovho modelu.	45
21	Časová štruktúra úrokových mier podľa Vašíčkovho modelu(čierna krivka) s parametrami $\kappa = 0.49, \theta = 0.45, \sigma = 0.05, \lambda = 0.02, r(0) = 0.02, R_\infty = 0.395$. Červenou priamkou je označená hodnota $R_\infty = 0.395$	47
22	Rôzne tvary časovej štruktúry úrokových mier podľa Vašíčkovho modelu pri zmene parametrov $r(0), \kappa, \lambda, \sigma$	48
23	Porovnanie odhadnutých okamžitých úrokových mier z Vašíčkovho modelu (prvá kalibrácia z forwardových sadzieb) oproti údajom sadzieb na obdobia O/N, 1W, 2W, 1M a 3M za 1Q 2015.	51
24	Hodnoty účelovej funkcie pri kalibrácii parametrov Vašíčkovho modelu (prvá kalibrácia z forwardových sadzieb) ako aj vyznačená optimálna hodnota parametra κ	52
25	Ukážka výnosových kriviek v prvom kvartáli roku 2015.	53

26	Porovnanie odhadnutých okamžitých úrokových mier z Vašíčkovho modelu (druhá kalibrácia z výnosových kriviek) oproti údajom úrokových sadzieb na obdobia O/N, 1W, 2W, 1M a 3M za 1Q 2015.	54
27	Hodnoty účelovej funkcie pri kalibrácii parametrov Vašíčkovho modelu (druhá kalibrácia z výnosových kriviek) ako aj vyznačená optimálna hodnota parametra κ	55
28	Porovnanie odhadnutých hodnôt okamžitej úrokovej miery z Vašíčkovho modelu pri odhade z forwardových sadzieb a z výnosových kriviek. . . .	55

Zoznam tabuliek

1	Výber dvoch slovenských dlhopisoch obchodovaných na Burze cenných papierov v Bratislave (Zdroj: Burza cenných papierov v Bratislave) . .	17
2	Prehľad peňažných tokov, ktoré si strany A a B vymenia	23
3	Porovnanie spotových a forwardových sadzieb (zdroj: ECB, údaje su v %)	25
4	Vypočítané hodnoty parametrov pre Nelsonov-Siegelov model pri dátach z 31.12.2014	32
5	Výnosy amerických dlhopisov z 31.12.2014, namodelované hodnoty pomocou modelu Nelsona-Siegela a odchýlky namodelovaných hodnôt od skutočných trhových hodnôt	33
6	Hodnoty výnosov amerických dlhopisov zo dňa 31.1.2007	33
7	Vypočítané hodnoty parametrov pre Nelsonov-Siegelov-Svenssonov model.	36
8	Ukážka vstupných dát zo dňa 2.1.2015 pri kalibrácii Vašíčkovho modelu. V tabuľke sú uvedené forwardové sadzby v %, pričom v prvom stĺpci je uvedený začiatok forwardového kontraktu a v príslušnom stĺpci je uvedená dĺžka kontraktu.	50
9	Ukážka vstupných dát zo dňa 31.3.2015 pri kalibrácii Vašíčkovho modelu. V tabuľke sú uvedené forwardové sadzby v %, pričom v prvom stĺpci je uvedený začiatok forwardového kontraktu a v príslušnom stĺpci je uvedená dĺžka kontraktu.	50

Úvod

Súčasný finančný systém sa ešte stále spamätáva z udalostí z roku 2008, kedy praskla jedna z najväčších finančných bublín vôbec. Tieto udalosti boli zapríčinené aj exponenciálne rastúcim trhom s finančnými derivátmi, ktoré následne spôsobili kolaps niekoľkých obrovských finančných inštitúcií nielen v Spojených štátoch. Na prvý pohľad by sa mohlo zdať, že finančné deriváty samotné boli na vine týmto udalostiam, ale bolo to predovšetkým ich nesprávnym, špekulatívnym používaním, pričom diskusie na túto tému môžeme nájsť napríklad v [3] a [23].

Najväčší podiel na tomto trhu majú práve deriváty úrokových mier [13]. Patria sem predovšetkým rôzne druhy úrokových swapov, forwardov, futurít alebo varianty opcií.

Úroková miera je azda najdôležitejší komponent akéhokoľvek finančného systému. Forwardové úrokové miery dokážu odhadnúť alebo aspoň ukázať očakávania budúcich spotových úrokových mier. Tieto predikcie môžu byť veľmi hodnotné, či už z hľadiska odhadu budúceho smerovania ekonomiky, hedžovania úrokových rizík alebo špekuláciami s cieľom dosiahnuť zisk.

Cieľom našej práce bude naštudovanie a spracovanie dvoch rôznych prístupov na modelovanie úrokových mier. Prácu rozdelíme na tri kapitoly, pričom prvá bude pozostávať z úvodu do teórie úrokových mier, dlhopisov a úrokových derivátov. V druhej kapitole si predstavíme dva modely, Nelsonov-Siegelov a jeho Svenssonovým rozšírením a v tretej kapitole si predstavíme Vašíčkov model.

V prvej kapitole čitateľa oboznámime so základnými pojmami o úrokových mierach, ako je časová štruktúra úrokových mier alebo forwardové úrokové sadzby. Taktiež predstavíme základné finančné nástroje naviazané na úrokové miery, čo sú predovšetkým rôzne druhy dlhopisov a úrokových derivátov. Taktiež si ukážeme názorné príklady využitia týchto nástrojov a spôsob ich oceňovania.

V druhej kapitole sa budeme najprv venovať popisu modelu Nelsona-Siegela, ktorý slúži na odhadovanie tvaru výnosovej alebo forwardovej krivky. Uvedieme si základné vzťahy a taktiež popíšeme a odvodíme význam jednotlivých parametrov. Po teoretickom popise Nelsonovho-Siegelovho modelu sa pokúsime odhadnúť tvar výnosových kriviek z reálnych trhových dát výnosov amerických dlhopisov z rokov 2007 a 2014. Následne predstavíme Svenssonovo rozšírenie Nelsonovho-Siegelovho modelu, ktoré umo-

žňuje modelovať aj iné tvary výnosových kriviek a popíšeme význam niektorých parametrov. Rovnako ako v prípade Nelsonovho-Siegelovho modelu aplikujeme Svenssonovo rozšírenie modelu na reálne trhové dáta a pokúsime sa porovnať získané priebehy výnosových kriviek namodelované pomocou týchto dvoch modelov. Na koniec kapitoly si uvedieme priebeh optimálnych parametrov pre dáta z roku 2014 a získané výsledky sa pokúsime interpretovať.

V tretej kapitole sa budeme venovať Vašíčkovmu jednofaktorovému modelu, ktorý slúži na modelovanie krátkodobej úrokovej miery. Popíšeme si základné pojmy a vzťahy, ktoré sa používajú vo Vašíčkovom modeli a následne uvedieme samotný spôsob modelovania krátkodobej úrokovej miery. V ďalšej časti tejto kapitoly si uvedieme spôsob, akým sa dá z krátkodobej úrokovej miery vo Vašíčkovom modeli odvodiť tvar výnosových a forwardových kriviek. V poslednej časti kapitoly sa budeme venovať kalibrácii parametrov Vašíčkovho modelu dvoma rôznymi spôsobmi, pričom metodika kalibrácie bude vychádzať predovšetkým z článku [8] a následne získané výsledky oboch spôsobov porovnáme.

1 Základné pojmy, definície a vlastnosti

1.1 Časová hodnota peňazí, úročenie a diskontovanie v čase

Vo svete peňazí takmer vždy platí jedno základné pravidlo, a to, že 1 dnes $\neq$ 1 zajtra (alebo v inom časovom okamihu) [12]. Toto je dôsledok takzvanej časovej hodnoty peňazí. Dôvod je ten, že peniaze majú možnosť zhodnocovať resp. znehodnocovať sa v čase. Poznáme dve hlavné hodnoty peňazí [12]:

- Budúca hodnota peňazí (*FV- Future Value*), t.j. akú hodnotu bude mať M_0 peňažných jednotiek za T rokov pri ročnom úroku r . Túto hodnotu môžeme v prípade diskrétného úročenia vypočítať nasledujúcim vzorcom:

$$FV = M_0(1 + r)^T.$$

- Súčasná hodnota peňazí (*PV- Present Value*), t.j. akú hodnotu má v súčasnosti M_T peňažných jednotiek vyplatených v čase T pri ročnom úroku r . K tejto hodnote sa dostaneme, ak použijeme nasledujúci vzorec:

$$PV = \frac{M_T}{(1 + r)^T}.$$

Poznáme niekoľko typov úročenia. Z praktického hľadiska je najčastejšie používaný diskrétny spôsob úročenia. Vyššie sme si uviedli, ako sa dá vypočítať budúca, respektíve súčasná hodnota peňazí v prípade úročenia raz za rok. V prípade, že by sa peniaze úročili k -krát za rok, dostávame sa k hodnotám:

$$FV = M_0\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kT}, PV = \frac{M_T}{\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kT}}$$

V prípade, že $k \rightarrow \infty$ sa dostávame ku výpočtom cez tzv. spojité úročenie:

$$FV = M_0e^{r_s T}, PV = M_Te^{-r_s T},$$

pričom platí nasledujúci vzťah:

$$r_s = \ln(1 + r).$$

1.2 Dlhopisy

Dlhopis je cenný papier, v ktorom sa dlžník zaväzuje, že v stanovenej lehote splatí nominálnu hodnotu a v dohodnutých obdobiach bude vyplácať pravidelný úrok – tzv. kupón. Výška kupónovej platby môže byť konštantná behom celého trvania kontraktu alebo sa môže meniť na základe zmeny referenčnej sadzby, indexu alebo určitého ukazovateľa. Pri jednotlivých vzťahoch a vysvetleniach sme vychádzali predovšetkým z [12] a [15]. Dlhopisy možno rozdeliť na kupónové a bezkupónové.

Bezkupónové dlhopisy Pri bezkupónovom dlhopise dostaneme v čase jeho splatnosti nominálnu hodnotu. Okrem tejto platby, sa behom celého trvania kontraktu ne-realizuje žiadna iná, napríklad kupónová platba. Nás zaujíma, aká je hodnota tejto platby v čase T_0 . V prípade diskrétného prístupu úročenia vypočítame cenu dlhopisu so splatnosťou n rokov podľa vzťahu:

$$P = \frac{F}{(1 + r_n)^n},$$

kde P označuje cenu dlhopisu, F je nominálna hodnota dlhopisu a r_n úrok na dobu n rokov. Ak označíme T_0 dnešný dátum a T čas vypršania dlhopisu, potom cenu dlhopisu P pri spojitom úročení vypočítame pomocou vzťahu

$$P = F e^{-R(T_0, T)(T - T_0)},$$

kde $R(T_0, T)$ označuje spojitý úrok na obdobie od T_0 do T . Z matematického hľadiska je výhodnejšie používanie spojitého úročenia a preto budeme ďalej pracovať iba s týmto typom úročenia.

Kupónové dlhopisy Pri kupónových dlhopisoch sa v pravidelných intervaloch vyplácajú kupóny, ktoré sa zvyčajne udávajú v % p.a. z nominálnej hodnoty dlhopisu. Interval výplat kupónov označíme δ . Okrem kupónov sa pri dlhopisoch uvádzajú ďalšie parametre: doba splatnosti dlhopisu, nominálna hodnota, cena dlhopisu a v prípade dlhopisu s variabilnou výškou kupónovej sadzby navyše aj referenčnú sadzbu, index alebo iný ukazovateľ. Ak C_i bude označovať výšku ročnej kupónovej sadzby v čase i a F nominálnu hodnotu dlhopisu, potom tok platieb kupónového dlhopisu počas

n periód bude $\delta C_1, \delta C_2, \dots, \delta C_n + F$. Ak použijeme spojitý prístup úročenia, potom cena kupónového dlhopisu sa rovná

$$P = \sum_{i=1}^n C_i \delta e^{-R(T_0, T_i)(T_i - T_0)} + F e^{-R(T_0, T_n)(T_n - T_0)},$$

kde čas $T_i = T_0 + i\delta$.

Výnos do splatnosti (*Yield to Maturity - YTM*) Jeden z najdôležitejších parametrov pri dlhopisoch je tzv. výnos do splatnosti. Výnos do splatnosti udáva vnútornú mieru výnosu dlhopisu, čo je v podstate výnos, označme ho y , ktorý sa dosiahne v prípade, že dlhopis budeme držať do splatnosti. Matematicky zapísané, je to úroková sadzba y , pre ktorú platí

$$P = \sum_{i=1}^n C_i \delta e^{-y(T_i - T_0)} + F e^{-y(T_n - T_0)}.$$

Pre ilustráciu výnosu do splatnosti si uvedieme nasledovný príklad.

Majme kupónový dlhopis s nasledujúcimi parametrami:

$$T = 2, C_i = 5\%, P = 90, F = 100, \delta = 1.$$

Pri hľadaní výnosu do splatnosti y riešime nasledujúcu rovnicu:

$$90 = \sum_{i=1}^2 25e^{-yi} + 100e^{-2y}.$$

Zavedením substitúcie $x = e^{-y}$ dostávame nasledujúcu kvadratickú rovnicu:

$$90 = 5x + 5x^2 + 100x^2,$$

ktorej jediné kladné riešenie je:

$$x = \frac{1}{42}(\sqrt{1513} - 1).$$

Keď následne spravíme spätnú substitúciu, dostávame sa k výslednému riešeniu:

$$y = -2 \ln(2) - 2 \ln(3) + \ln(1 + \sqrt{1513}) \cong 0,1028.$$

Dlhopis, ktorý sme uviedli ako názorný príklad, dosahuje výnos do splatnosti približne 10,28%.

Tabuľka 1: Výber dvoch slovenských dlhopisoch obchodovaných na Burze cenných papierov v Bratislave (Zdroj: Burza cenných papierov v Bratislave)

Názov	Splatnosť v rokoch	Kupónová sadzba v % p.a.	Cena	YTM v % p.a.
ŠD 228	11,973	1,3750	98,964	1,470
ŠD 227	13,962	3,6250	127,002	1,470

V nasledujúcej tabuľke si uvedieme príklady niekoľkých slovenských dlhopisov, ich cien a výnosov do splatnosti.

Aký je vzťah medzi $R(T_0, T_n)$ a r ?

Predpokladajme, že časová štruktúra úrokových mier je rastúca. Potom ak vo vzťahu pre výpočet ceny dlhopisu každý úrok $R(T_0, T_i)$ nahradíme najvyšším z nich, tj. $R(T_0, T_n)$ a dostávame:

$$P = \sum_{i=1}^n C_i \delta e^{-R(T_0, T_i)(T_i - T_0)} + F e^{-R(T_0, T_n)(T_n - T_0)} > \sum_{i=1}^n C_i \delta e^{-R(T_0, T_n)(T_i - T_0)} + F e^{-R(T_0, T_n)(T_n - T_0)}$$

Ak by sme úrok $R(T_0, T_i)$ nahradili výnosom do splatnosti y , dostali by sme rovnosť. Medzi výnosom do splatnosti a cenou dlhopisu platí klesajúca závislosť. Teda v prípade, že sa výnos do splatnosti zvýši, cena sa zníži a opačne. Odtiaľ dostávame vzťah:

$$y < R(T_0, T_n).$$

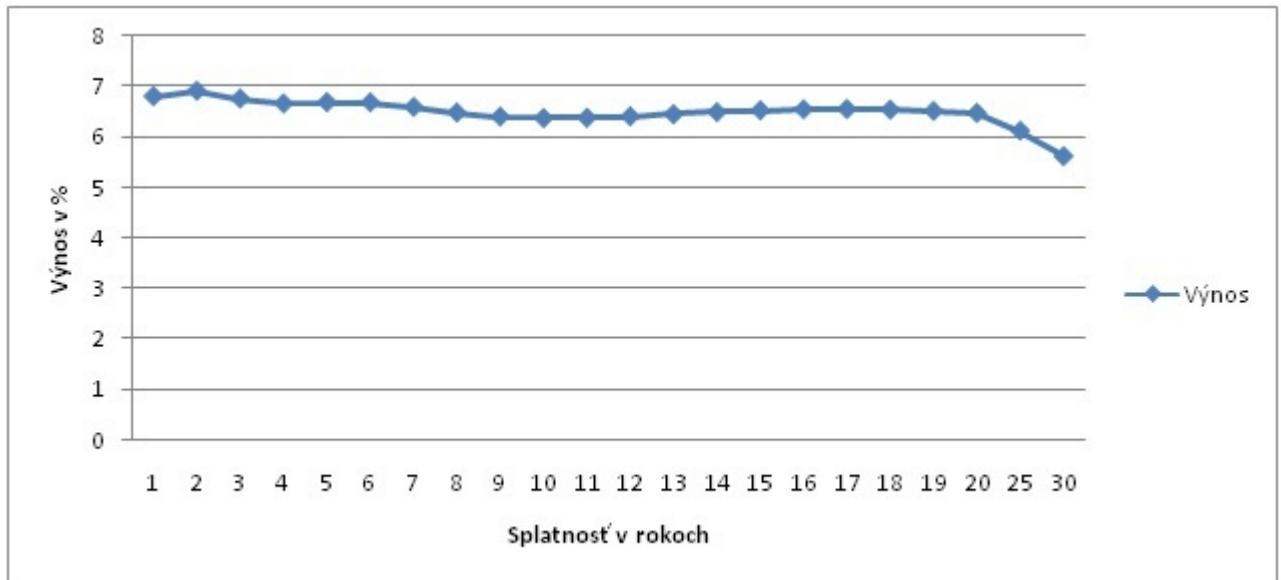
Analogicky by sme pre prípad klesajúcej časovej štruktúry odvodili vzťah $y > R(T_0, T_n)$.

1.3 Časová štruktúra úrokových mier a okamžitá úroková miera

V tejto podkapitole budeme čerpať jednotlivé vzťahy, definície a vlastnosti predovšetkým z [7] a [12]. Časová štruktúra úrokových mier vyjadruje závislosť úrokovej miery od maturity dlhopisu. Inak povedané, je to výnos do splatnosti bezkupónového dlhopisu so splatnosťou v čase T_n . Zvyčajne sa jedná o rastúcu krivku, avšak pri určitých trhovách očakávaní, ako je napríklad očakávanie znižovania úrokových sadzieb v budúcnosti, môže mať časová štruktúra úrokových mier klesajúcu tendenciu, ako je ilustrované na obrázku č. 1, na ktorom sú výnosy amerických dlhopisov z roku 2000. Niekedy sa môže

stať, že časová štruktúra úrokových mier má pre všetky splatnosti takmer konštantné hodnoty.

Obr. 1: Výnosy amerických dlhopisov z 30.5.2000 - ilustrácia konštantného tvaru výnosovej krivky (Zdroj: Reuters)



Okamžitá/krátkodobá úroková miera

Krátkodobá úroková miera (*short-rate*) predstavuje začiatok krivky časovej štruktúry úrokových mier: $r_t = R(t, t)$. Ako dôsledok spojitého úročenia a definície P a $R(t, T)$ platí

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln P(t, T). \quad (1)$$

Ak sa posunieme o čas Δt , dostaneme:

$$R(t, t + \Delta t) = -\frac{1}{\Delta t} \ln P(t, t + \Delta t) = -\frac{1}{\Delta t} [\ln P(t, t + \Delta t) - \ln P(t, t)].$$

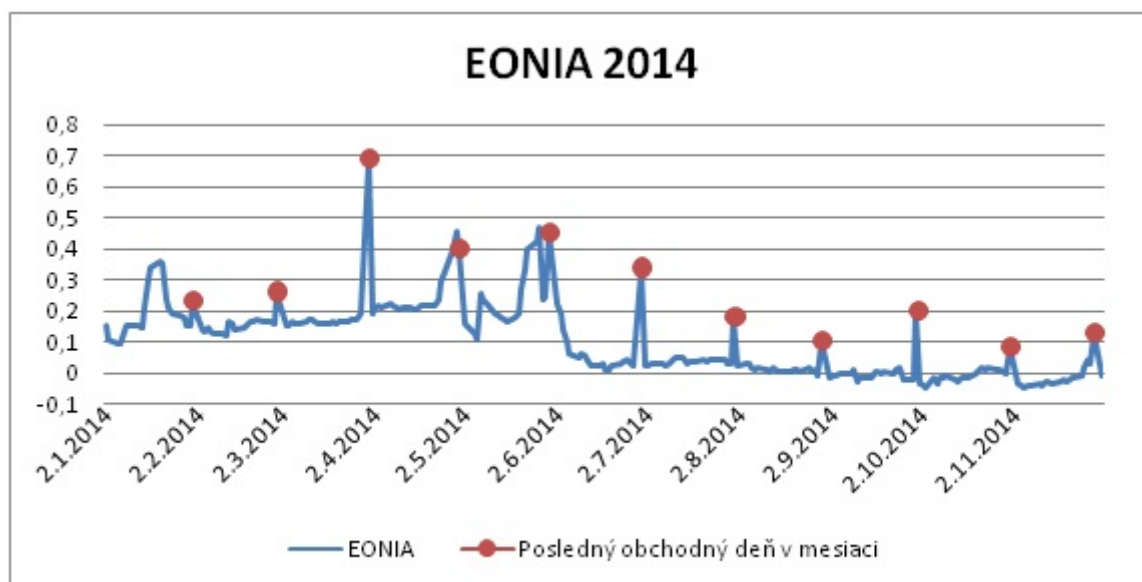
Ak využijeme fakt, že $P(t, t) = 1$, tak platí $\ln P(t, t) = 0$. Pre $\Delta t \rightarrow 0$ platí:

$$r_t = R(t, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} -\frac{\ln P(t, t + \Delta t) - \ln P(t, t)}{\Delta t}.$$

Krátkodobá úroková miera nám však vo väčšine modelov nepovie, ako bude vyzeráť celá úroková krivka. Existujú však modely, tzv. short-rate modely, kde krátkodobá úroková miera je úplná informácia. Práve jedným z týchto modelov sa budeme zaoberať v ďalšej kapitole. Na trhu sa dá táto sadzba aproximovať tzv. overnight (O/N) sadzbou,

čo je úroková miera na jeden deň (deň je vo finančnom ponímaní najmenšou časovou jednotkou). Pri analyzovaní O/N sadzby však treba brať ohľad na niektoré externality, ktoré značne dokážu ovplyvniť jej výšku. Napríklad posledný obchodný deň v mesiaci sa vo väčšine prípadov sadzba značne zvyšuje, ako možno vidieť na obrázku č. 2, kde je znázornený vývoj sadzby EONIA – O/N sadzba pre menu EUR. Toto je spôsobené predovšetkým faktom, že banky, ktoré sa na zmene tejto sadzby podieľajú najväčšou mierou, si krátkodobú likviditu kvôli koncomesačným ukazovateľom cenia viac ako v iné dni.

Obr. 2: Výška sadzby EONIA v priebehu roku 2014 a vyznačené konce mesiacov (Zdroj: EMMI)



Deriváty

Podľa medzinárodných účtovných štandardov [9] je derivát finančný nástroj, ktorý spĺňa nasledujúce tri vlastnosti:

- jeho hodnota sa mení v závislosti od podkladovej premennej, ako je napríklad výška určitej úrokovej miery, cena finančného nástroja alebo komodity, kurzu menového páru, úverového ratingu, indexu alebo inej premennej,
- nevyžaduje žiadnu počiatočnú investíciu alebo najviac takú, ktorá je nižšia ako by sa vyžadovalo pri iných typoch zmlúv, ktoré by mali podobné reakcie na zmenu trhových faktorov,

- jeho vyrovnanie nastane k budúceму dátumu, tzn. doba ktorá ubehne od dohodnutia obchodu po jeho vyrovnanie, je dlhšia ako pri spotovom obchode.

Typy úrokových derivátov Pri opisovaní jednotlivých typov úrokových derivátov budeme čerpať predovšetkým z [24].

Forward rate agreement je finančný kontrakt medzi dvoma stranami o výmene úrokovej platby z istiny vo vopred dohodnutý deň vyrovnania, za časový úsek od dátumu valuty po dátum vyrovnania. V dátume splatnosti si zmluvné strany vymenia hotovostné platby na základe podmienok vopred dohodnutých v kontrakte. Sadzba uplatnená v dátume splatnosti je dopredu dohodnutá fixná, benchmarková alebo referenčná sadzba. Referenčná sadzba môže byť napríklad výška 6M EURIBORu platného v čase splatnosti alebo výška centrálnou bankou oficiálne zverejňovanej sadzby (napr. repo sadzba). Príkladom benchmarkovej sadzby je výnos určitého dlhopisu v čase splatnosti.

Uvedieme si konkrétny príklad použitia úrokového forwardu.

Dve zmluvné strany, A a B, sa dňa 12.12.2014 dohodli na výmene vopred určených úrokových platieb v čase 12.1.2015. Dohodnutá istina činí 1 mil. EUR. Strana A má povinnosť v čase splatnosti zaplatiť strane B sumu 0,1% z istiny, strana B má povinnosť zaplatiť strane A sumu, prislúchajúcu výške 1M EURIBORu platného dňa 12.1.2015 a keďže hodnoty EURIBORu sú kótované spotovou valutou, zoberieme EURIBOR zverejnený 2 obchodné dni pred dátumom splatnosti. 1M EURIBOR sa 12.12.2014 rovnal hodnote 0,023% a vzhľadom na vtedajšiu situáciu na trhoch je pravdepodobné, že hodnota 1M EURIBORu sa bude pohybovať na tejto úrovni aj v čase splatnosti. Z toho vyplýva, že za tento kontrakt bude musieť strana B zaplatiť strane A príslušnú cenu odvodenú z forwardových úrokových sadzieb, o ktorých si povieme viac v nasledujúcich kapitolách.

Interest rate swap je finančný kontrakt medzi dvoma stranami, ktoré sa dohodnú na výmene sérií úrokových platieb z nominálnej istiny, pričom táto istina sa môže be-

hom trvania kontraktu meniť ak sa tak strany dohodnú v kontrakte. Takéto kontrakty väčšinou zahŕňajú „plávajúce za fixné“ alebo „plávajúce za plávajúce“ úrokové sadzby. Taktiež v deň platby si strany vymenia hotovostné toky na základe fixnej alebo plávajúcej úrokovej sadzby.

Výška istiny sa môže pri jednotlivých úrokových platbách líšiť, avšak podmienky týchto zmien musia byť dojednané pri uzatváraní obchodu. Vo svojej podstate sa úrokový swap dá chápať ako séria úrokových forwardov. Poznáme dva hlavné typy úrokového swapu a to:

- plávajúca sadzba/fixná sadzba, kde jedna strana platí vo vopred dohodnuté dátumy úrokové platby z plávajúcej referenčnej sadzby – napríklad EURIBOR, LIBOR, BUBOR, PRIBOR alebo inú kótovanú sadzbu a druhá strana platí vopred určenú fixnú sadzbu,
- plávajúca sadzba/plávajúca sadzba, kde si obe strany platia rôzne plávajúce referenčné alebo kótované benchmarkové sadzby.

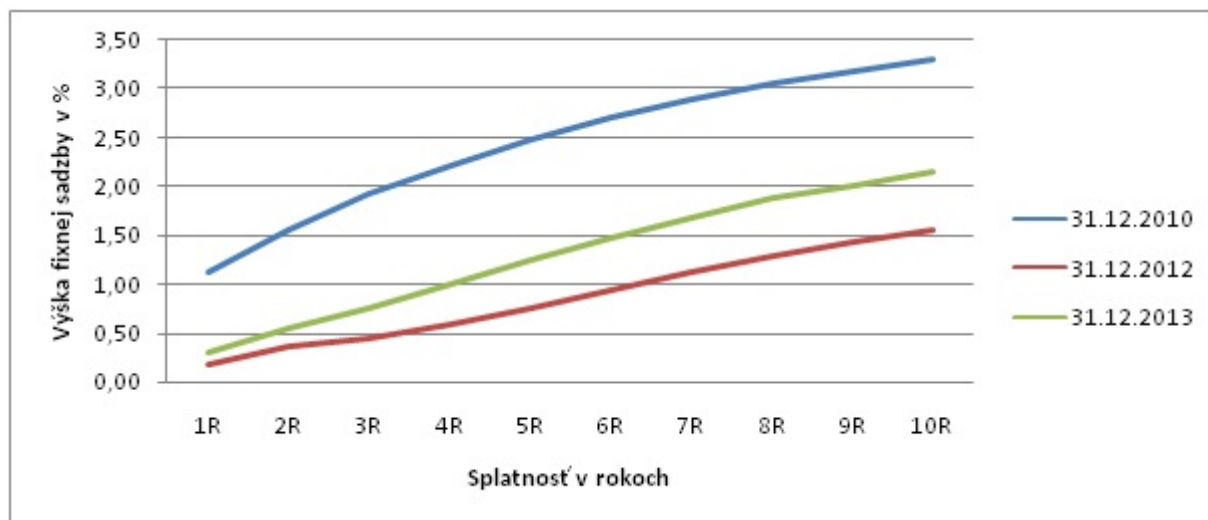
Obrázok 3 ilustruje krivku fixných úrokových sadzieb, oproti ktorým sa v daný deň obchodoval úrokový swap voči 6M EURIBORu. Na horizontálnej osi je splatnosť úrokového swapu v rokoch a na vertikálnej osi je výška sadzby v % p.a. Z tohto grafu môžeme vidieť očakávania trhu o zvýšení úrokových sadzieb v čase.

Uvedme si nasledujúci príklad:

Dve zmluvné strany, A a B, sa dňa 1.1.2014 dohodli na výmene úrokových platieb na nasledujúcich 12 mesiacov, pričom dohodnutá istina je 1 mil. EUR. Zmluvná strana A bude zmluvnej strane B platiť 0,1% z istiny a zmluvná strana B bude zmluvnej strane A platiť časť z istiny, prislúchajúcu výške 1M EURIBORu. Platby sú realizované vždy ku koncu mesiaca. V tabuľke č. 2 si uvedieme, ako vyzerali úrokové platby.

Keďže v čase uzatvorenia kontraktu neboli známe výšky EURIBORov v nasledujúcich dvanástich mesiacoch, treba nájsť vhodný spôsob, ako oceniť takýto derivát. Postupuje sa podobným spôsobom ako v prípade forward rate agreement a to tak, že

Obr. 3: Porovnanie kriviek úrokových swapov z rokov 31.12.2010, 31.12.2012 a 31.12.2013
(Zdroj: Reuters)



sa hodnoty 1M EURIBORov odhadnú podľa forwardových úrokových sadzieb.

Interest rate cap je druh úrokového derivátu, ktorý zabezpečuje, že platca úrokovej platby nebude musieť platiť viac ako vopred stanovenú maximálnu možnú výšku sadzby, tzv. cap strike. V prípade, že plávajúca referenčná sadzba presiahne túto hodnotu, je druhá strana, t.j. predajca, povinná preplatiť rozdiel medzi výškou plávajúcej referenčnej sadzby a výškou cap strike. Kupca tohto derivátu je povinný zaplatiť vopred dohodnutú výšku prémie za tento finančný inštrument.

Interest rate floor je druh úrokového derivátu, ktorý zabezpečuje minimálnu výšku plávajúcej úrokovej sadzby, tzv. floor strike. Kupujúca strana dostane úrokovú platbu zakaždým, keď výška plávajúcej referenčnej sadzby dosiahne hodnotu menšiu ako floor strike. Predávajúci tohto derivátu je povinný zaplatiť vopred dohodnutú výšku prémie za tento finančný inštrument.

Tabuľka 2: Prehľad peňažných tokov, ktoré si strany A a B vymenia

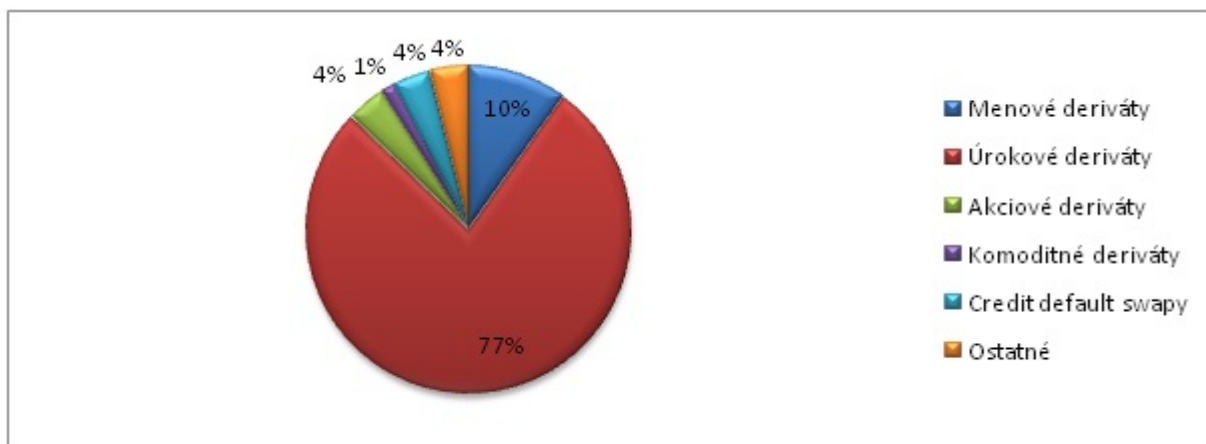
Dátum	1M EURIBORu (% p.a)	Platba strany A strane B	Platba strany B strane A
31.1.2014	0,237	1000	2370
28.2.2014	0,237	1000	2220
31.3.2014	0,222	1000	2370
30.4.2014	0,237	1000	2690
31.5.2014	0,269	1000	2550
30.6.2014	0,255	1000	1030
31.7.2014	0,103	1000	990
31.8.2014	0,099	1000	680
30.9.2014	0,068	1000	70
31.10.2014	0,007	1000	100
30.11.2014	0,010	1000	160
31.12.2014	0,016	1000	250
Súčet		12 000	15 480

Využitie úrokových swapov V júni 2014 tvorili úrokové deriváty až 81% z celosvetového Over The Counter (OTC) derivátového trhu [13], čo predstavuje objem približne 563 biliónov USD, z toho 421 biliónov USD sú swapy. Úrokové deriváty majú dve hlavné využitia a to obmedzenie úrokového rizika hedžovaním otvorenej úrokovej pozície, ale aj špekulatívne obchodovanie s cieľom dosiahnuť zisk. Podniky ich môžu využívať na riadenie úrokového rizika vzniknutého napríklad z úveru, ktorého sadzba je naviazaná na pohyblivú referenčnú sadzbu.

1.4 Forwardové úrokové sadzby

Vzťahy, definície a vlastnosti súvisiace s forwardovými úrokovými sadzbami budeme čerpať predovšetkým z [12]. Forwardová úroková sadzba je sadzba dohodnutá dnes na časový interval medzi dvoma dátumami t_1 a t_2 . Forwardová sadzba je vo svojej

Obr. 4: Podiel jednotlivých OTC derivátov na celkovom objeme za prvý polrok 2014 (Zdroj: BIS)



podstate odhad spotovej úrokovej sadzby v určitom čase v budúcnosti. Analogicky sa dá forwardová sadzba definovať ako očakávaný výnos dlhopisu v čase t_1 so splatnosťou t_2 . Forwardová sadzba sa dá veľmi jednoducho odvodiť od spotových úrokových sadzieb. Nech r_1 je spotová úroková sadzba na obdobie t_1 rokov, r_2 spotová úroková sadzba na obdobie t_2 rokov a $f(t_1, t_2)$ nech vyjadruje forwardovú sadzbu na obdobie od času t_1 do t_2 . Potom, kvôli tomu, aby nevznikla arbitrážna príležitosť, musí platiť vzťah, že ak 1 p.j. investujeme na obdobie od t_0 do t_2 , za sadzbu r_2 , tak dosiahneme rovnaký výnos ako keby sme investovali 1 p.j. od času t_0 do času t_1 za sadzbu r_1 a následne od času t_1 do času t_2 za sadzbu $f(t_1, t_2)$. Matematicky zapísané, musí platiť nasledujúca rovnosť:

$$e^{t_2 r_2} = e^{t_1 r_1} e^{(t_2 - t_1) f(t_1, t_2)},$$

rovnici zlogaritmuje a dostávame ďalšiu rovnosť:

$$t_2 r_2 = t_1 r_1 + (t_2 - t_1) f(t_1, t_2),$$

z čoho sa dostaneme až po explicitné vyjadrenie forwardovej úrokovej sadzby pomocou spotových sadzieb:

$$f(t_1, t_2) = \frac{t_2 r_2 - t_1 r_1}{t_2 - t_1}. \quad (2)$$

Tabuľka 3 obsahuje spotové sadzby európskych AAA dlhopisov ku dňu 3.2.2015 a vypočítané forwardové sadzby na obdobie od $t - 1$ po t .

Tabuľka 3: Porovnanie spotových a forwardových sadzieb (zdroj: ECB, údaje su v %)

Počet rokov t	Spotová sadzba $y(t)$	Forwardová sadzba $f(t - 1, t)$
1	-0.191	
2	-0.154	-0.117
3	-0.143	-0.121
4	-0.109	-0.007
5	-0.050	0.186
6	0.027	0.412
7	0.110	0.608
8	0.195	0.790
9	0.277	0.933
10	0.353	1.037

Okamžitá forwardová sadzba a vzťah medzi forwardovou sadzbou a výnosom dlhopisu Okamžitú forwardovú sadzbu dostaneme, ak interval medzi t_2 a t_1 budeme nekonečne zmenšovať. Je to v podstate sadzba dohodnutá dnes, platná v čase t na nekonečne malý časový interval. Ak si vo vzorci (2) na výpočet forwardovej sadzby spravíme substitúciu $t_2 = t + \Delta t$ a $t_1 = t$, dostávame nasledujúci vzorec:

$$f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} f(t, t + \Delta t) = y(t) + \frac{\partial y(t)}{\partial t} t. \quad (3)$$

Jeden zo spôsobov interpretácie okamžitej forwardovej sadzby je okamžitá spotová sadzba (short rate) v čase t .

Rovnica (3) sa dá prepísať do nasledujúceho tvaru:

$$y(t)t = \int_0^t f(s)ds \Rightarrow y(t) = \frac{\int_0^t f(s)ds}{t}, \quad (4)$$

pričom z rovnice (4) sa dá pozorovať vzťah medzi okamžitou forwardovou sadzbou a výnosom bezkupónového dlhopisu so splatnosťou v čase t , ktorý sa rovná priemeru okamžitých forwardových sadzieb za časový interval od dnes po čas t .

Odvodenie forwardovej krivky z cien dlhopisov Odvodenie forwardovej úrokovej miery pomocou forwardového kontraktu na úrokovú mieru [17], ktorý jeho držiteľovi poskytuje pôžičku dohodnutú dnes (v čase t), poskytnutú v čase S so splatnosťou v čase S , za sadzbu označenú $f(t, T, S)$, pričom túto sadzbu budeme nazývať forwardová úroková miera, je založené na ocenení tohto kontraktu tak, aby na trhu nevznikla arbitrážna príležitosť. Na to budeme potrebovať rôzne dlhopisy ocenené na úrovni $P(t, T)$, pre doby splatnosti T , vyhovujúce podmienke $T > t$.

Kontrakt sa bude realizovať v dvoch krokoch:

1. v čase t , nakrátko predáme jeden kus dlhopisu $P(t, S)$, čo znamená, že v čase splatnosti sme povinní splatiť 1 peňažnú jednotku (p.j.).
2. zároveň, v čase t nakúpime určité množstvo, dané pomerom $P(t, S)/P(t, T)$, dlhopisu $P(t, T)$ so splatnosťou v čase T . Z týchto transakcií plyní výnos vo výške

$$\frac{P(t, S)}{P(t, T)}.$$

Držiteľ teda v čase T dostane $P(t, S)/P(t, T)$ p.j. a vyplatí 1 p.j. v čase S . Príslušná forwardová úroková miera $f(t, T, S)$ je teda daná vzťahom

$$\frac{P(t, S)}{P(t, T)} e^{(S-T)f(t, T, S)} = 1, \quad (5)$$

pričom platia podmienky $0 \leq t \leq T \leq S$. Forwardová úroková miera teda vyzerá nasledovne:

$$f(t, T, S) = \frac{\ln P(t, T) - \ln P(t, S)}{S - T}. \quad (6)$$

2 Nelsonov-Siegelov-Svenssonov model

2.1 Nelsonov-Siegelov model

Jeden z modelov ktoré predstavíme v tejto práci je aj model Nelsona a Siegela, navrhnutý rovnomennými autormi v roku 1987 [16]. Tento model popisuje krivku okamžitých úrokových mier pomocou lineárnej kombinácie dvoch exponenciálnych funkcií. Jedna z výhod tohto modelu je asymptotické správanie na dlhom konci takto namodelovanej krivky, teda hodnota úrokovej miery pre $t \rightarrow \infty$ konverguje k určitej hodnote. Táto vlastnosť je dôležitá napríklad z toho dôvodu, že nenastane prípad, kedy by koniec krivky divergoval, tzn. „utekal donekonečna“. Také správanie krivky by bolo nereálne, pretože v skutočnom svete takýto prípad nastať nemôže.

Parametrizácia okamžitej forwardovej sadzby vyzerá nasledovne:

$$f(t) = \alpha_1 + \alpha_2 e^{\frac{-t}{\beta_1}} + \alpha_3 e^{\frac{-t}{\beta_2}}, \quad (7)$$

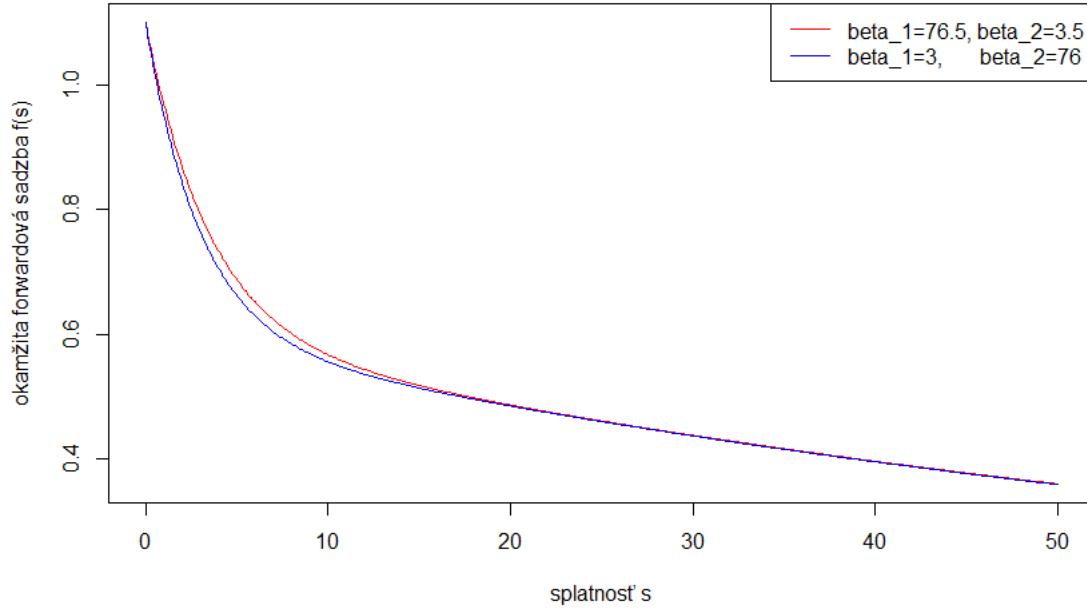
pričom pre parametre β_1 a β_2 platí:

$$\beta_1 > 0, \beta_2 > 0, \alpha_1 \in \mathbb{R}, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

Pri experimentovaní s fitovaním kriviek podľa rovnice (7) došli Nelson a Siegel k záveru [16], že takýto model je priveľmi „preparametrizovaný“. Napríklad pre rôzne hodnoty parametrov β_1 a β_2 bolo možné nafitovať takmer rovnakú krivku s použitím určitých hodnôt $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, ako je ilustrované na obrázku 5. V prípade, že hodnoty parametrov α_2 a α_3 sa rovnajú, stačí za parametre β_1 a β_2 zvoliť navzájom opačné hodnoty (tzn. vymeniť hodnoty β_1 a β_2) a dostaneme úplne totožnú krivku, čo teda znamená, že forwardová krivka neurčuje parametre jednoznačne. Ak sa však aj nezvolia úplne navzájom opačné parametre, ale veľmi podobné, výsledné forwardové krivky budú taktiež podobné. Taktiež ilustrácia toho, že upravený model dokáže nafitovať takmer identickú krivku, ako pôvodný model, je zobrazená na obrázku 6.

Ďalší dôvod zníženia parametrov bol, že vtedajšia výpočtová technika niekedy nestačila na vyriešenie optimalizačnej úlohy. Preto sa rozhodli model upraviť, pričom množina možných výsledných kriviek zostala do veľkej miery podobná, akurát sa znížil počet parametrov. Výsledný model, navrhnutý tiež v [16], potom vyzerá nasledovne:

Obr. 5: Porovnanie identických kriviek namodelovaných podľa pôvodného modelu Nelsona-Siegela s parametrami $\alpha_1 = 0, 1$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 0, 5$, pričom prvý model mal hodnoty parametrov $\beta_1 = 76, 5$, $\beta_2 = 3, 5$ a druhý model mal hodnoty parametrov $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 76$



$$f(s) = \alpha_1 + \alpha_2 e^{\frac{-s}{\beta}} + \alpha_3 \frac{s}{\beta} e^{\frac{-s}{\beta}} \quad (9)$$

Celú rovnicu zintegrujeme na intervale $[0, t]$ a predelíme premennou t pričom dostaneme nasledujúcu rovnosť:

$$\frac{\int_0^t f(s) ds}{t} = \frac{\int_0^t \alpha_1 + \alpha_2 e^{\frac{-s}{\beta}} + \alpha_3 \frac{s}{\beta} e^{\frac{-s}{\beta}} ds}{t}. \quad (10)$$

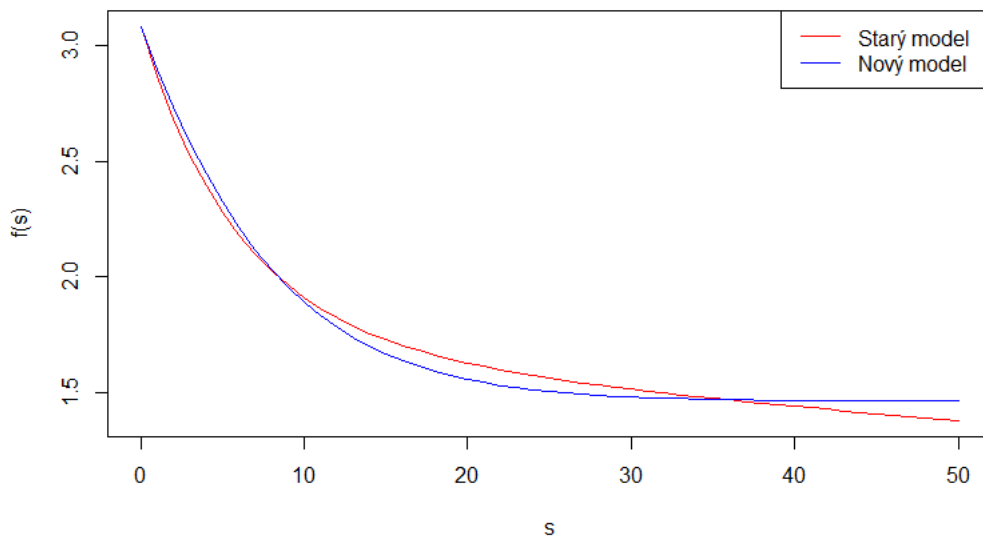
Využitím vzťahu (4) a vyriešením hore uvedeného integrálu sa dostávame k vyjadreniu spotovej úrokovej sadzby v čase t :

$$y(t) = \alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3) \frac{\beta}{t} (1 - e^{\frac{-t}{\beta}}) - \alpha_3 e^{\frac{-t}{\beta}}. \quad (11)$$

Popis jednotlivých parametrov pre odvodenú spotovú úrokovú mieru

Pri odvodzovaní vlastností parametrov modelu Nelsona-Siegela sme vychádzali predovšetkým z [5].

Obr. 6: Krivky takmer rovnakého tvaru namodelované podľa pôvodného predpisu modelu Nelsona-Siegela s parametrami: $\alpha_1 = 0,88, \alpha_2 = 1,32, \alpha_3 = 0,88, \beta_1 = 5,94, \beta_2 = 88,22$ a podľa upraveného predpisu modelu Nelsona-Siegela s parametrami: $\alpha_1 = 1,46, \alpha_2 = 1,62, \alpha_3 = 0,61, \beta = 0,45$



- $\alpha_1 + \alpha_2$ je okamžitá spotová úroková miera (short rate), tzn. $\alpha_1 + \alpha_2 = y(0) = f(0)$. Tento vzťah sa dá odvodiť, ak vypočítame limitu $y(t)$ pre $t \rightarrow 0$. Teda

$$\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3) \frac{\beta}{t} (1 - e^{-\frac{t}{\beta}}) - \alpha_3 e^{-\frac{t}{\beta}},$$

kde sme využili, že:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\beta}{t} (1 - e^{-\frac{t}{\beta}}).$$

Takisto sa dá ukázať že

$$\lim_{s \rightarrow 0} f(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \alpha_1 + \alpha_2 e^{-\frac{s}{\beta}} + \alpha_3 e^{-\frac{s}{\beta}},$$

pretože platí

$$\lim_{s \rightarrow 0} e^{-\frac{s}{\beta}} = 1, \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{\beta} e^{-\frac{s}{\beta}} = 0.$$

- α_1 je parameter, ktorý krivku posúva vertikálne a teda na tvar krivky nemá žiadny vplyv, takisto je α_1 hodnota, ku ktorej sa krivka asymptoticky blíži, či už v prípade spotovej úrokovej sadzby alebo okamžitej forwardovej sadzby tzn. $\alpha_1 = y(\infty) = f(\infty)$. Vyplýva to z výpočtu limity

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3) \frac{\beta}{t} (1 - e^{-\frac{t}{\beta}}) - \alpha_3 e^{-\frac{t}{\beta}} = \alpha_1,$$

kde sme využili, že

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\beta}{t} (1 - e^{-\frac{t}{\beta}}) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{t}{\beta}} = 0.$$

Pre okamžitú forwardovú sadzbu taktiež platí:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \alpha_1 + \alpha_2 e^{-\frac{s}{\beta}} + \alpha_3 e^{-\frac{s}{\beta}} = \alpha_1.$$

- Hodnota α_2 sa dá interpretovať napríklad ako sklon časovej štruktúry okamžitých úrokových mier, teda rozdiel medzi hodnotou, v ktorej krivka začína a hodnotou, ku ktorej asymptoticky konverguje. Tento parameter najviac ovplyvňuje hodnoty pre krátke splatnosti a na dlhé splatnosti má jeho zmena minimálny vplyv. Tento fakt sa dá odvodiť na základe toho, že ak si z rovnice (11) osamostatníme tento parameter a zafixujeme hodnotu β , tak sa dostávame k funkcii

$$g(t) = \frac{\beta}{t} (1 - e^{-\frac{t}{\beta}}),$$

pričom táto funkcia g limitne začína v čase $t = 0$ na hodnote 1 a pre $t \rightarrow \infty$ sa blíži k hodnote 0, čiže pre vysoké t má len malý vplyv na zmenu sadzby

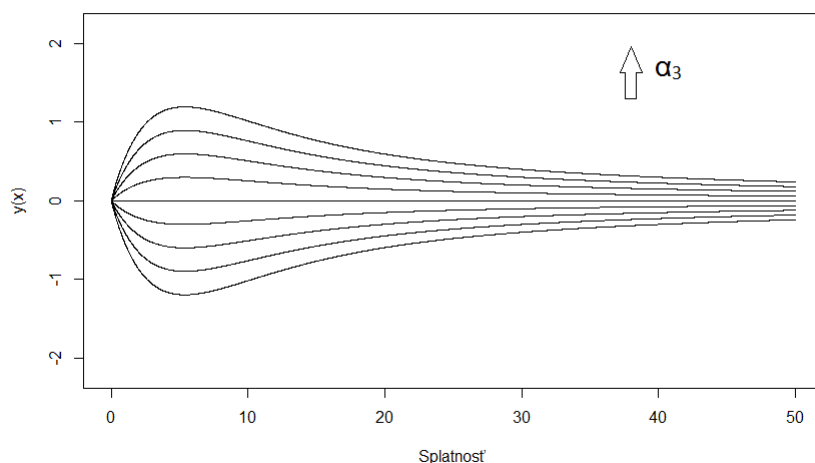
- Parameter α_3 , ako je ilustrované na obrázku 7, určuje zakrivenie krivky v strednodobom horizonte, tzn. „v strede“ krivky, čo znamená, že jeho zmena má len minimálny dopad na to, ako bude výsledná krivka vyzeráť pri krátkych a dlhých splatnostiach. Podobne ako v prípade parametra α_2 , sa dá ukázať, že v prípade ak si osamostatníme z rovnice (11) parameter α_3 , dostaneme funkciu h :

$$h(t) = g(t) = \frac{\beta}{t} (1 - e^{-\frac{t}{\beta}}) - e^{-\frac{t}{\beta}},$$

ktorá v čase $t = 0$ limitne začína na hodnote 0, následne sa hodnota tejto funkcie zvyšuje až kým dosiahne maximum a opäť začne klesať ku hodnote 0.

- Parameter β ovplyvňuje rýchlosť konverencie krivky k hodnote α_1 , čo môžeme vidieť na obrázku 8. Nižšia hodnota tohto parametra indikuje pomalšiu konverenciu k α_1 a teda krivka dokáže lepšie fitovať skutočné trhové dáta pre krátke splatnosti, zatiaľ čo vysoká hodnota parametra β značí rýchlejšiu konverenciu k hodnote α_1 .

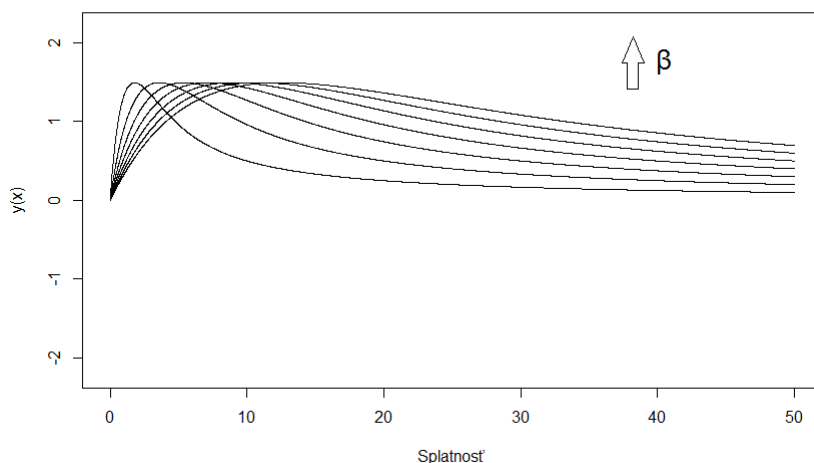
Obr. 7: Ilustrácia zmeny tvaru krivky v modeli Nelsona-Siegela v prípade zmeny parametra α_3 pri zanechaní ostatných parametrov fixných.



2.2 Fitovanie skutočnej výnosovej krivky podľa modelu Nelsona-Siegela

Ako príklad fitovania výnosovej krivky použijeme výnosovú krivku amerických dlhopisov zo dňa 31.12.2014, pričom dáta sme čerpali zo stránky ministerstva financií Spojených štátov amerických [4]. Na výpočet parametrov použijeme metódu najmenších štvorcov. Model dokázal namodelovať výnosovú krivku s vysokou presnosťou. Na nájdenie parametrov sme využili funkciu softvéru R `nls` (nonlinear least squares) [19], ktorá slúži na fitovanie funkcií metódou najmenších štvorcov. Pre voľbu počiatočných hodnôt sme využili interpretácie parametrov α_1 a α_2 v Nelsonovom-Siegelovom modeli. Nakoľko parametre α_3 a β nemajú intuitívnu interpretáciu, použili sme knižnicu `manipulate` [18], pomocou ktorej sme metódou pokus-omyl skúšali odhadnúť hodnoty týchto parametrov aby sme sa tvarom čo najviac priblížili k trhovým hodnotám.

Obr. 8: Ilustrácia zmeny tvaru krivky v modeli Nelsona-Siegela v prípade, že manipulujeme s parametrom β .



Tabuľka 4: Vypočítané hodnoty parametrov pre Nelsonov-Siegelov model pri dátach z 31.12.2014

Parameter	α_1	α_2	α_3	β
Hodnota	3.5090373	-4.0155981	0.6840886	3.3120192

Na obrázku 11 sú bodmi zobrazené skutočné výnosy amerických dlhopisov zo dňa 31.12.2014 a krivka namodelovaná modelom Nelsona-Siegela. V tabuľke č. 5 sú uvedené skutočné hodnoty výnosov, výnosy podľa modelu Nelsona-Siegela ako aj odchýlky jednotlivých výnosov.

Nakoľko sme získali všetky potrebné parametre, na obrázku 12 si ukážeme ako bude vyzeráť príslušná krivka okamžitých forwardových úrokových mier.

Pri niektorých tvaroch trhovej výnosovej krivky však narazíme na problém, že množina možných kriviek v modeli Nelsona-Siegela neobsahuje prípady, keď potrebujeme namodelovať dva lokálne extrémny. Príklad takejto výnosovej krivky sú výnosy amerických dlhopisov zo dňa 31.1.2007, uvedené v tabuľke č. 6. V tomto prípade je výsledná krivka nafitovaná podľa modelu Nelsona-Siegela vcelku nepresná. Dôvod nepresného nafitovania je práve výskyt dvoch extrémov, pričom najskôr sa dosahuje maximum pri splatnosti 3 roky a následne sa dosahuje minimum pri splatnosti 7 rokov.

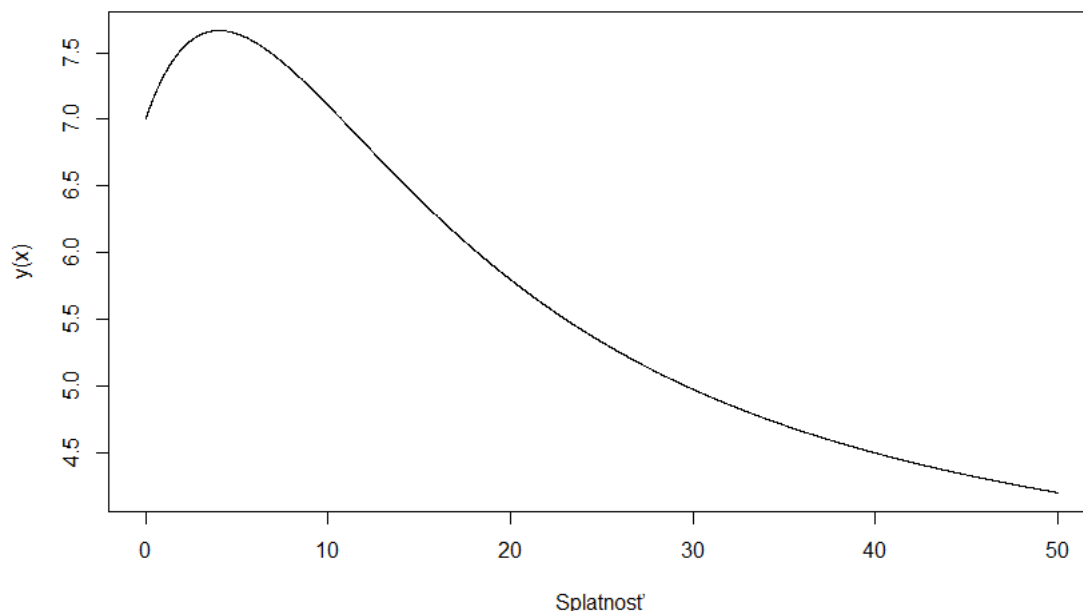
Tabuľka 5: Výnosy amerických dlhopisov z 31.12.2014, namodelované hodnoty pomocou modelu Nelsona-Siegela a odchýlky namodelovaných hodnôt od skutočných trhových hodnôt

Splatnosť	Výnos trh v %	Výnos NS	Odchýlka
1M	0,03	-0,0733	0.1032
3M	0,04	0,0134	0.0265
6M	0,12	0,1379	-0.0179
1R	0,25	0,3685	-0.1184
2R	0,67	0,7644	-0.0944
3R	1,1	1,0875	0.0124
5R	1,65	1,5684	0.0815
7R	1,97	1,8935	0.0764
10R	2,17	2,2002	-0.0302
20R	2,47	2.5784	-0.1083
30R	2,75	2.6810	0.0690

Tabuľka 6: Hodnoty výnosov amerických dlhopisov zo dňa 31.1.2007

Splatnosť	Výnos trh v %	Výnos NS	Odchýlka NS	NSS	Odchýlka NSS
1M	5	5,009	-0,009	5,020	-0,020
3M	5,12	4,876	0,244	5,097	0,023
6M	5,16	4,827	0,333	5,144	0,016
1R	5,09	4,877	0,213	5,113	-0,023
2R	4,94	4,974	-0,034	4,950	-0,010
3R	4,85	5,016	-0,166	4,844	0,006
5R	4,82	5,050	-0,230	4,790	0,030
7R	4,82	5,065	-0,245	4,815	0,005
10R	4,83	5,076	-0,246	4,876	-0,046
20R	5,02	5,089	-0,069	5,982	-0,038
30R	4,93	5,093	-0,163	4,949	-0,019

Obr. 9: Priebeh spotovej úrokovej sadzby podľa modelu Nelsona-Siegela pri parametroch $\alpha_1 = 3, \alpha_2 = 4, \alpha_3 = 8, \beta = 5$.



2.3 Svenssonovo rozšírenie

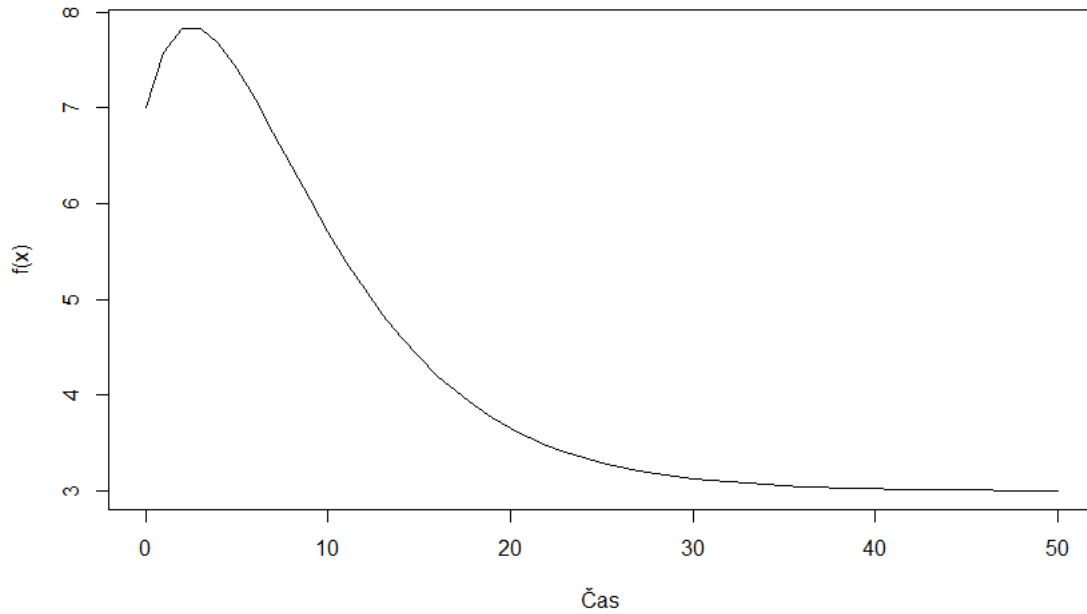
Nakoľko množina možných kriviek, ktoré dokážeme namodelovať pomocou Nelsonovej-Siegelovej parametrizácie niekedy nevyhovuje potrebám fitovania, bolo treba tento model nejakým spôsobom rozšíriť tak, aby sa dali namodelovať aj krivky, ktoré model Nelsona-Siegela nepokrýva. Hlavná výhoda Svenssonovho modelu [25] spočíva najmä v možnosti vygenerovať krivky, ktoré majú dva lokálne extrémny, čo sa dosiahne pridaním výrazu.

Samotný model, závislý od 6 parametrov, ktoré spĺňajú podmienky $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \alpha_3 \in \mathbb{R}, \alpha_4 \in \mathbb{R}, \beta_1 > 0, \beta_2 > 0$, vyzerá nasledovne

$$f(s) = \alpha_1 + \alpha_2 e^{\frac{-s}{\beta_1}} + \alpha_3 \frac{s}{\beta_1} e^{\frac{-s}{\beta_1}} + \alpha_4 \frac{s}{\beta_2} e^{\frac{-s}{\beta_2}}. \quad (12)$$

Rovnakým spôsobom ako v prípade modelu Nelsona-Siegela vieme odvodiť rovnicu pre spotovú úrokovú mieru:

Obr. 10: Priebeh okamžitej forwardovej úrokovej sadzby podľa modelu Nelsona-Siegela pri parametroch $\alpha_1 = 3, \alpha_2 = 4, \alpha_3 = 8, \beta = 5$.



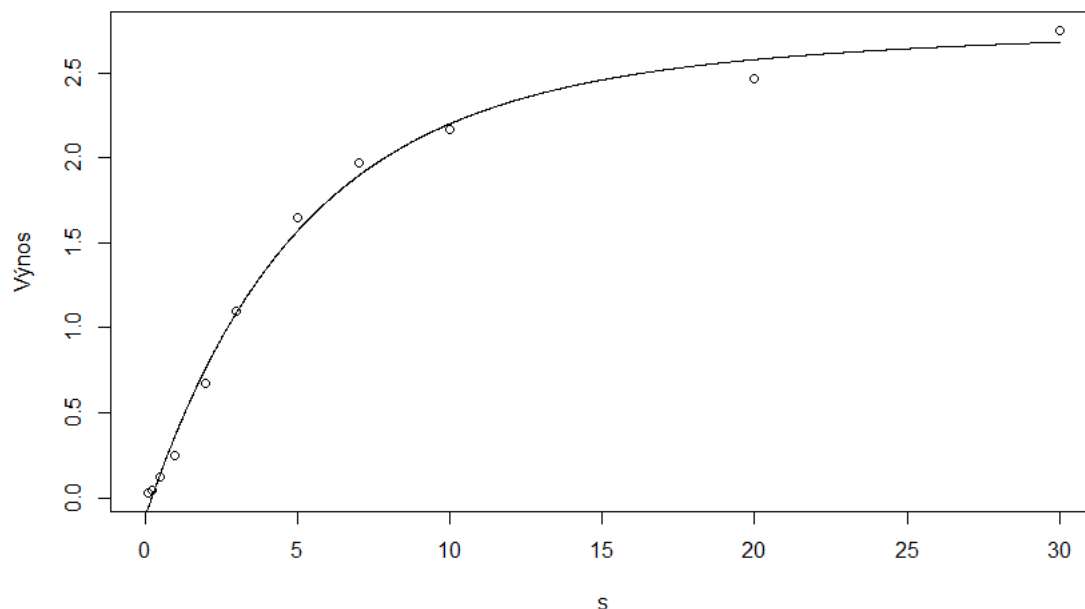
$$y(t) = \alpha_1 + \alpha_2 \frac{1 - e^{\frac{-t}{\beta_1}}}{\frac{t}{\beta_1}} + \alpha_3 \left(\frac{1 - e^{\frac{-t}{\beta_1}}}{\frac{t}{\beta_1}} - e^{\frac{-t}{\beta_1}} \right) + \alpha_4 \left(\frac{1 - e^{\frac{-t}{\beta_2}}}{\frac{t}{\beta_2}} - e^{\frac{-t}{\beta_2}} \right). \quad (13)$$

Tak ako pri modeli Nelsona-Siegelov, aj v prípade Svenssonovho rozšírenia vieme interpretovať súčet parametrov α_1 a α_2 ako okamžitú forwardovú úrokovú mieru v čase $t = 0$, pričom tento súčet je v prípade výnosovej krivky hodnota short-rate sadzby. Takisto parameter α_1 reprezentuje hodnotu, ku ktorej obe krivky, okamžitá forwardová sadzba aj výnosová krivka, asymptoticky konvergujú.

Fitovanie skutočnej výnosovej krivky podľa modelu Nelsona-Siegela-Svenssona

Nakoľko v predchádzajúcej časti sme narazili na problém fitovania výnosových kriviek v prípade, že krivka obsahuje dva lokálne extrémny, skúsime teraz pre rovnaké dáta namodelovať výnosovú krivku za pomoci Svenssonovho rozšírenia, ktoré umožňuje aj takéto tvary výnosových kriviek. Na nájdenie optimálnych parametrov sme využili knižnicu softvéru R YieldCurve [19]. Táto knižnica obsahuje aj funkciu Svensson, ktorá má v sebe už priamo zakomponovaný výpočet optimálnych parametrov pre model Nelsona-

Obr. 11: Výnosová krivka amerických dlhopisov zo dňa 31.12.2014 a výnosová krivka na-modelovaná modelom Nelsona-Siegela



Siegela-Svenssona. Výsledný model má parametre uvedené v tabuľke č. 7

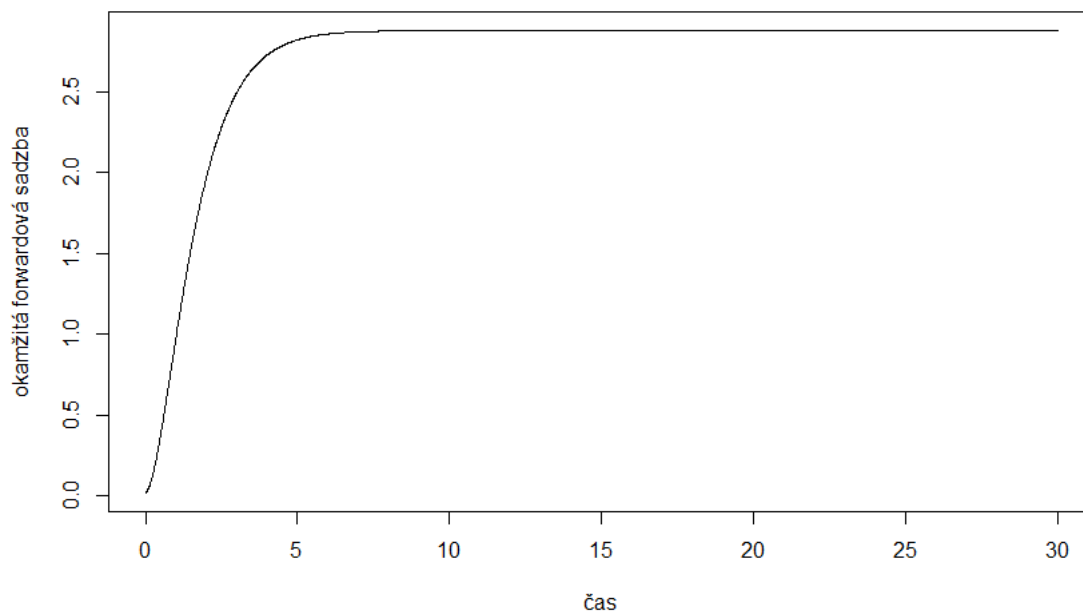
Tabuľka 7: Vypočítané hodnoty parametrov pre Nelsonov-Siegelov-Svenssonov model.

Parameter	α_1	α_2	α_3	α_4	β_1	β_2
Hodnota	4,046284	0,9164984	1,731936	2,903449	0,6041237	13,38328

2.4 Zmena parametrov modelov NS a NSS v čase

Aby sme dostali približný pohľad o tom, ako sa môžu parametre modelov Nelsona-Siegela, ako aj jeho Svenssonovho rozšírenia meniť v čase, vypočítali sme optimálne hodnoty týchto parametrov pre každý deň v roku 2014. Celkovo sme mali teda k dispozícii súbor 250 výnosových kriviek so splatnosťou 1M, 3M, 6M, 1R, 2R, 3R, 5R, 7R, 10R, 20R a 30R. Aby sme získali intuitívne pochopenie zmeny týchto parametrov, pripomeňme si, že napríklad α_1 v oboch modeloch je hodnota, ku ktorej výnosová krivka konverguje. Ako trhový ekvivalent tejto hodnoty môžeme teda brať výnos na obdobie

Obr. 12: Krivka okamžitých forwardových úrokových mier podľa modelu Nelsona-Siegela odvodená z výnosovej krivky amerických dlhopisov zo dňa 31.12.2014.



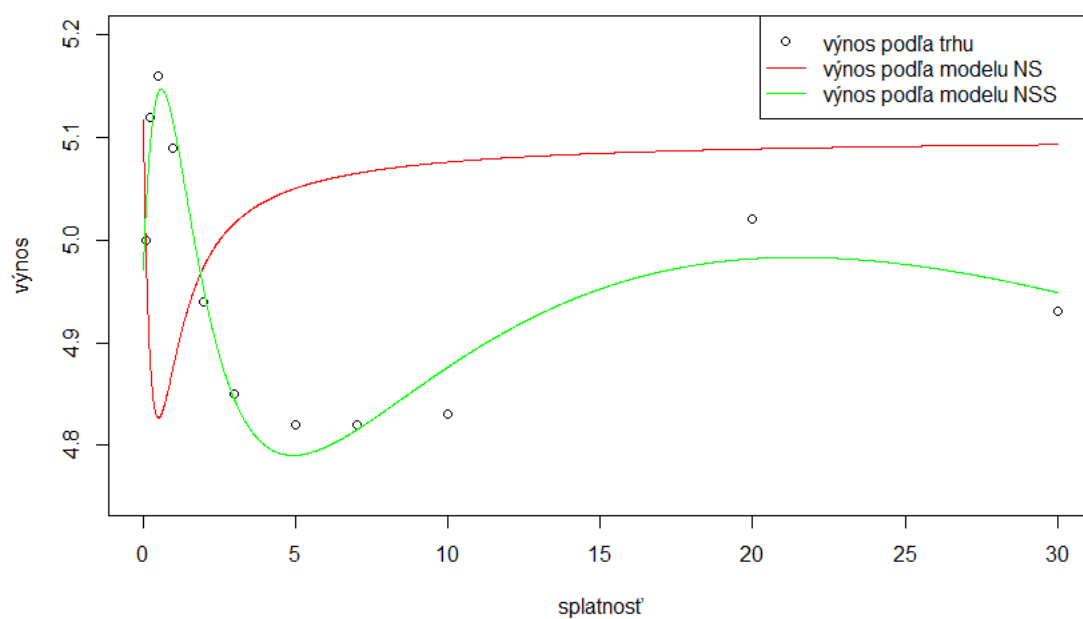
30R. Porovnanie týchto dvoch hodnôt môžeme vidieť na obrázku 15. Takisto súčet parametrov $\alpha_1 + \alpha_2$ v oboch modeloch reprezentuje začiatok výnosovej krivky a teda pri našich dátach je to ekvivalent mesačného trhového výnosu amerických dlhopisov. Porovnanie týchto hodnôt v priebehu roku 2014 je znázornené na obrázku 16.

Ako vidno z obrázku 15, hodnota α_1 je v prípade oboch modelov mierne vyššia ako výnos 30 ročných amerických dlhopisov. Je to spôsobené aj tým, že ekvivalent k α_1 by mohol byť výnos dlhopisov z vyššou splatnosťou ako je 30 rokov, avšak takéto dáta sme už k dispozícii nemali. Takisto vidíme, že α_1 zo Svenssonovho rozšírenia bola takmer identická ako α_1 v Nelsonovom-Siegelovom modeli v priebehu prvej polovice roku 2014, avšak neskôr sa začala výrazne odkláňať.

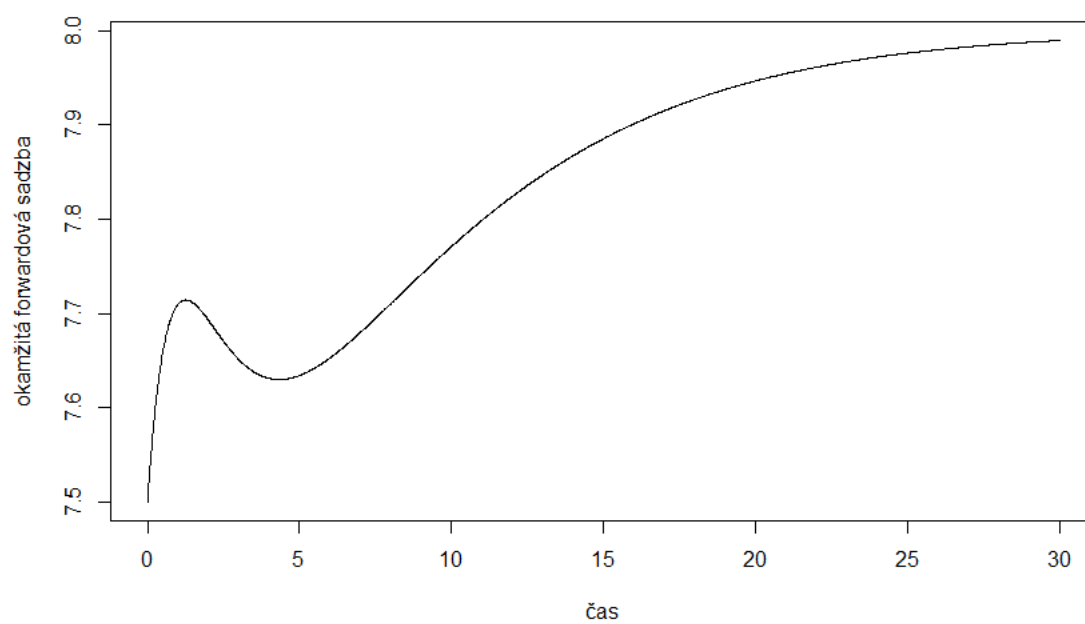
Na obrázku 17 môžeme vidieť priebeh nafitovaných parametrov α_3 a β z modelu Nelsona-Siegela. Tieto parametre však už nemajú úplne jasný a interpretovateľný význam.

Na obrázku 18 je priebeh parametrov α_3 , α_4 , β_1 a β_2 z modelu Nelsona-Siegela-Svenssona v priebehu roku 2014.

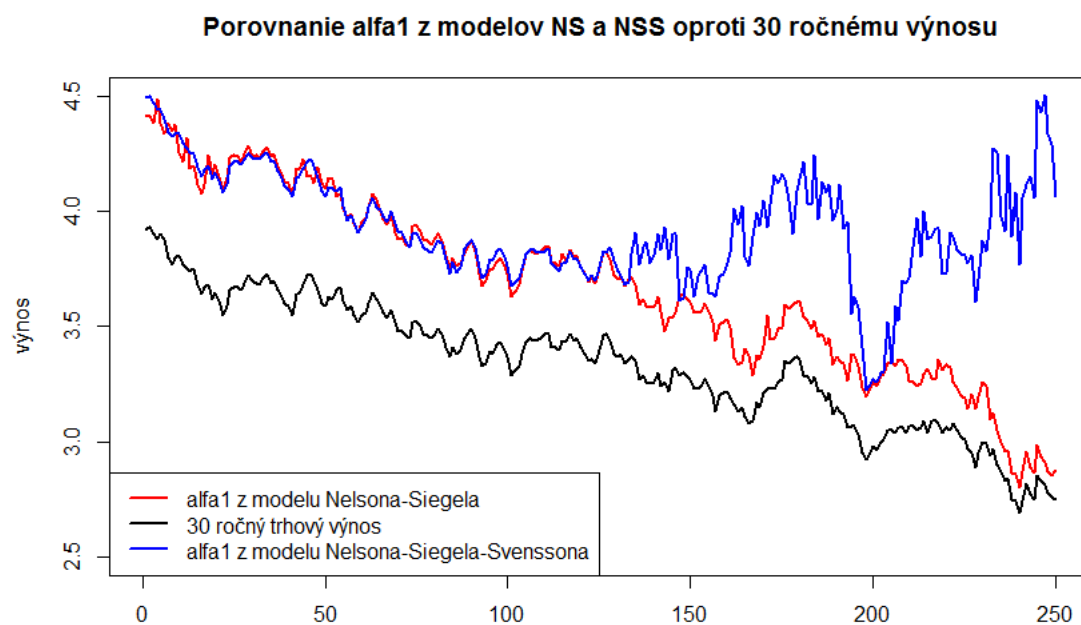
Obr. 13: Výnosová krivka amerických dluhopisů ze dne 30.4.2007, krivka získaná fitováním pomocí modelu Nelsona-Siegela a krivka získaná fitováním pomocí modelu Svenssona.



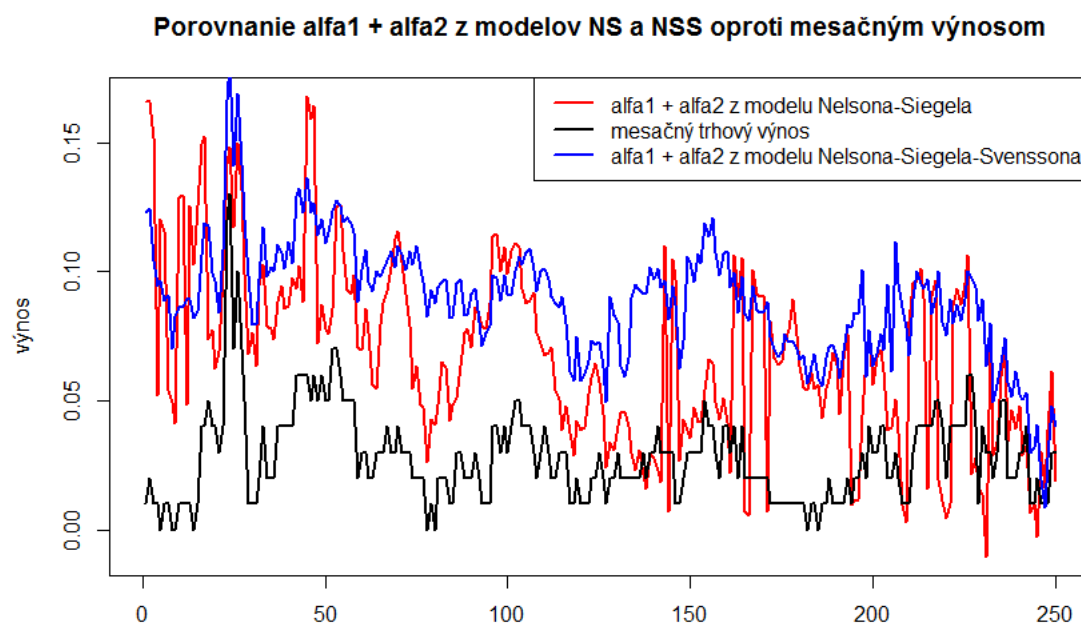
Obr. 14: Priebeh okamžitej forwardovej úrokovej sadzby podľa rovnice podľa modelu Nelsona-Siegela-Svenssona pri parametroch: $\alpha_1 = 8, \alpha_2 = -0,5, \alpha_3 = -0,6, \alpha_4 = 0,6, \beta_1 = 5, \beta_2 = 1,2$



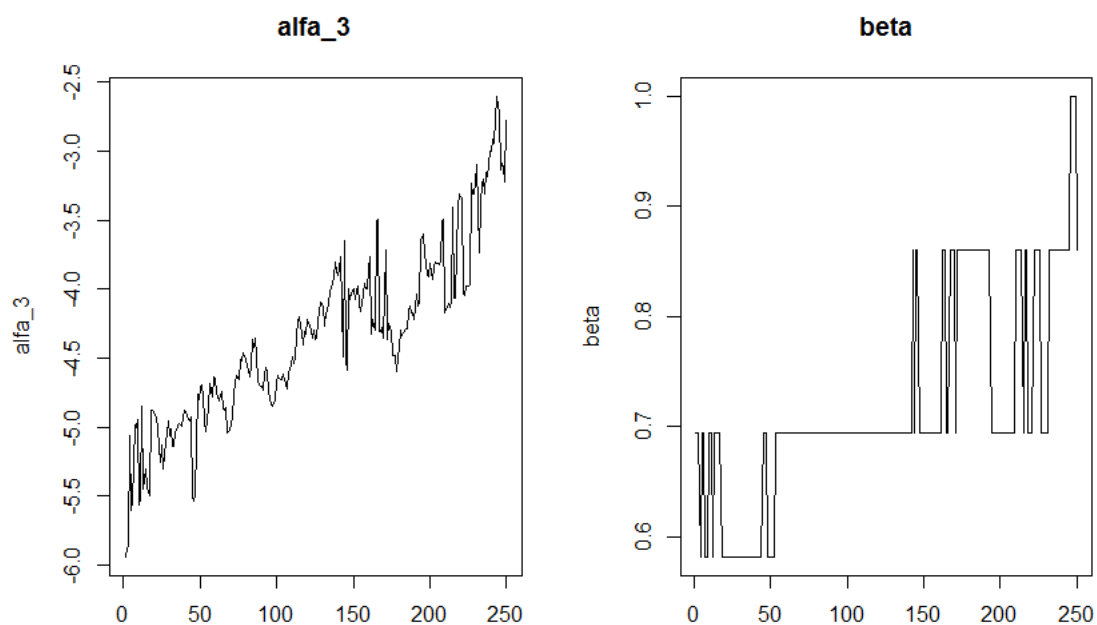
Obr. 15: Porovnanie výnosu 30 ročných amerických dlhopisov v priebehu roku 2014 oproti hodnotám α_1 z modelu Nelsona Siegela.



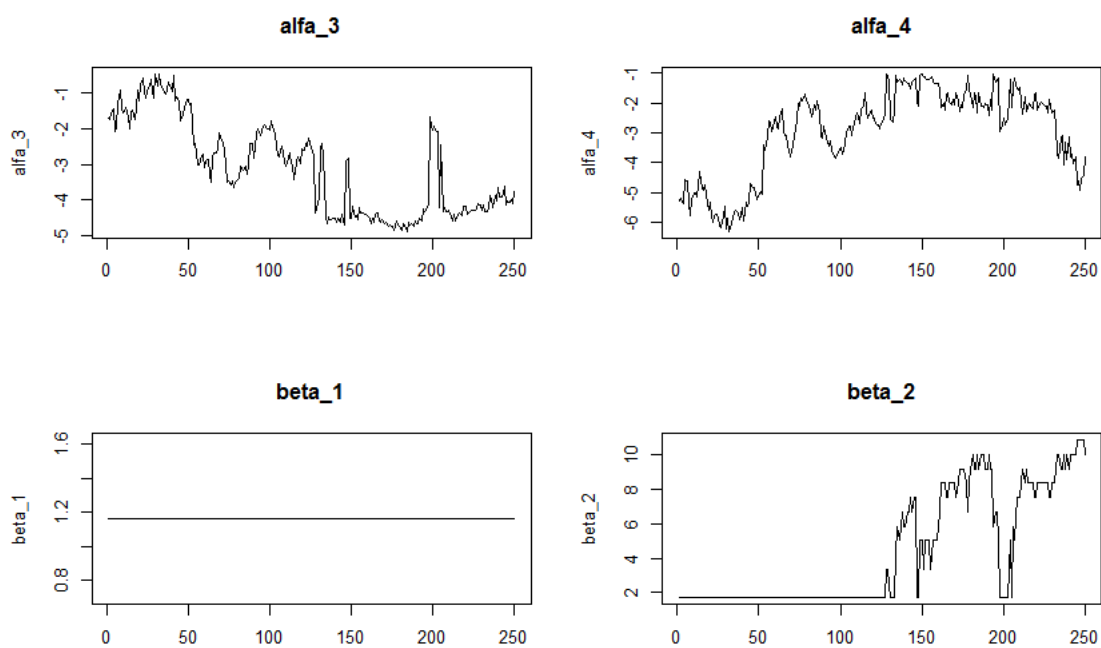
Obr. 16: Porovnanie výnosu mesačných amerických dlhopisov v priebehu roku 2014 oproti hodnotám $\alpha_1 + \alpha_2$ z modelu Nelsona Siegela.



Obr. 17: Vývoj naftovaných parametrov α_3 a β z modelu Nelsona-Siegela v priebehu roku 2014



Obr. 18: Vývoj naftovaných parametrov modelu Nelsona-Siegela-Svenssona v priebehu roku 2014



3 Vašíčkov model

3.1 Základné pojmy

Pri modelovaní krátkodobých úrokových mier pomocou Vašíčkovho modelu budeme využívať stochastický proces a jeho vlastnosti, na rozdiel od modelov Nelsona-Siegela respektíve Svenssonovho rozšírenia, kde sme vychádzali z forwardovej krivky pomocou určitej funkcie. Preto si na začiatok uvedieme niekoľko dôležitých pojmov zo stochastického počtu pred samotným popisom Vašíčkovho modelu.

Stochastický proces [22] je t -parametrický systém náhodných premenných $\{X(t), t \in I\}$, kde I je interval alebo diskretná množina

Wienerov proces [22] $\{w(t), t \geq 0\}$ je náhodný proces, ktorý spĺňa :

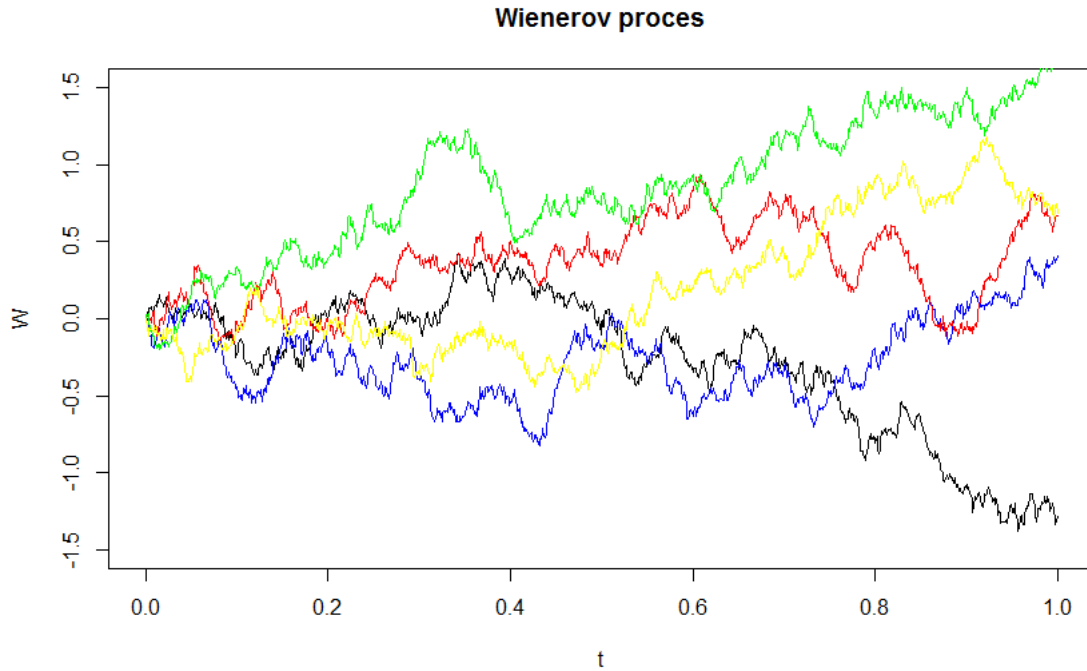
- $w(0) = 0$
- prírastky $w(t + \Delta) - w(t)$ majú normálne rozdelenie so strednou hodnotou 0 a disperziou Δ ,
- pre každé delenie $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < t_3 \dots < t_n$ sú prírastky $w(t_1) - w(t_0), w(t_2) - w(t_1), w(t_3) - w(t_2), \dots, w(t_n) - w(t_{n-1})$ nezávislé,
- trajektórie sú spojité.

Mean reversion proces [21] je model ktorý spĺňa vlastnosť, že hodnota procesu sa približuje k dlhodobu rovnovážnej hodnote, t.j. k dlhodobému priemeru. K tomuto trendu sa však pridávajú náhodné fluktuácie spĺňajúce vlastnosti Wienerovho procesu. Stochastická diferenciálna rovnica má nasledujúci tvar:

$$dr = \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma(r)dw,$$

kde dw je zmena Wienerovho procesu na nekonečne malom intervale, pričom $\kappa > 0, \theta > 0, \sigma(r(t)) > 0$. Pre bližšie pochopenie, čo je to stochastická diferenciálna rovnica, si môžeme princíp fungovania tejto rovnice vysvetliť v prípade ak uvažujeme jej aproximáciu v diskretnom čase. Majme

$$\Delta r(t) = \kappa(\theta - r(t))\Delta t + \sigma(r(t)), \quad (14)$$

Obr. 19: Simulácia piatich náhodných aproximácií trajektórií Wienerovho procesu.

a teda

$$r(t + \Delta t) = r(t) + \kappa(\theta - r(t))\Delta t + \sigma(r(t))\Delta w.$$

Toto nám dáva predpis na generovanie aproximácií trajektórií procesu, pričom čím menší interval Δt zvolíme, tým presnejšiu aproximáciu dostaneme.

Ornstein-Uhlenbeckov proces je špeciálny prípad mean reversion procesu, v ktorom platí, že volatilita σ je konštantná. Pripomeňme si, že pre jednotlivé parametre platí $\kappa > 0$, $\theta > 0$, $\sigma > 0$, $r_0 > 0$. V prípade, ak $r(t) > \theta$, nastáva tzv. negatívny drift a naopak ak $r(t) < \theta$, drift je kladný. Drift v tejto súvislosti znamená, akým smerom (kladný alebo záporný) je hodnota tohto procesu nasmerovaná. Nakoľko drift Ornstein-Uhlenbeckovho procesu zabezpečí, že hodnota procesu je vždy nasmerovaná k hodnote θ , môžeme ju považovať za niečo ako dlhodobý priemer hodnoty $r(t)$. Hodnota parametra κ potom určuje "silu", akou sa hodnota $r(t)$ blíži ku dlhodobému priemeru. Predpis takéhoto procesu vyzerá nasledovne

$$dr = \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma dw. \quad (15)$$

3.2 Stochastická diferenciálna rovnica Vašíčkovho modelu

Vašíčkov model [27] patrí k jedným z historicky prvých short rate modelov na modelovanie krátkodobej úrokovej miery [12]. Za jednu z nevýhod Vašíčkovho modelu sa považovala prípustnosť záporných hodnôt, ako bolo uvedené napríklad v [12] alebo [2], čo ešte pred niekoľkými rokmi bolo nepredstaviteľné. Dnes sa bežne stretávame so zápornými sadzbami rôznych IBOR sadzieb [11] a dokonca aj výnosy dlhopisov niektorých krajín dosahujú záporné hodnoty [6]. Dokonca aj Slovenská republika dňa 16.3.2015 prvýkrát emitovala dvojročné dlhopisy so záporným výnosom do splatnosti vo výške -0,0178% [28]. Preto sa jedna z hlavných nevýhod tohto modelu stáva irelevantnou. Nakoľko Vašíčkov model je založený na Ornstein-Uhlenbeckovom procese, tvar stochastickej diferenciálnej rovnice vyzerá nasledovne:

$$dr = \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma dw. \quad (16)$$

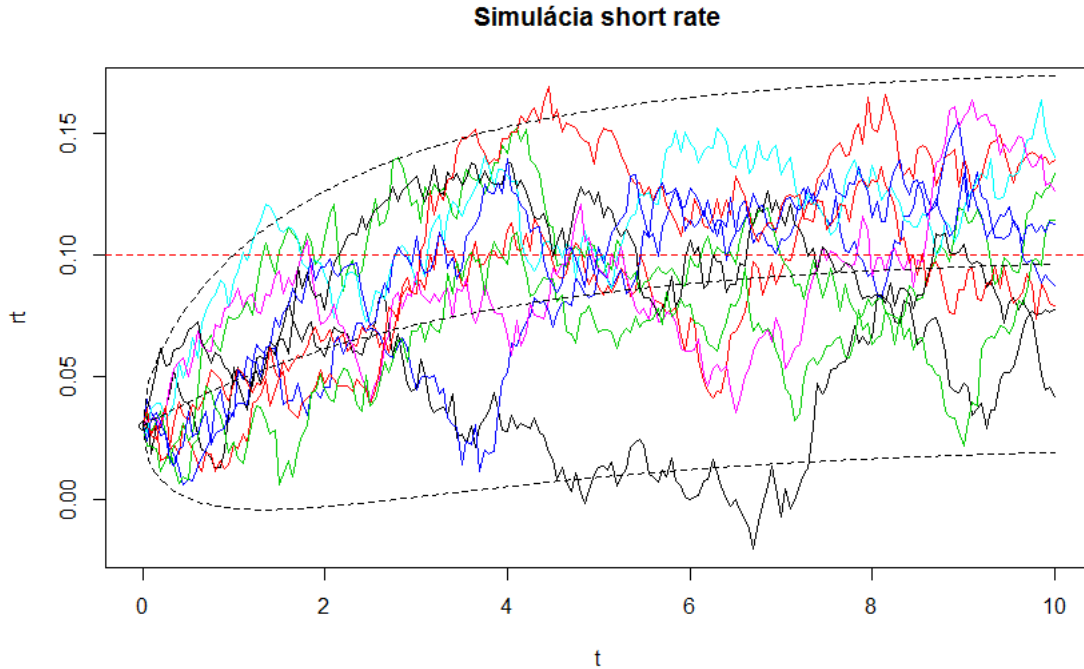
Prvý člen v rovnici (16) je deterministický a druhý člen, obsahujúci prírastky Wienerovho procesu dw je stochastický. V nasledujúcej kapitole si nasimulujeme priebeh 10 rôznych priebehov okamžitej úrokovej miery v čase s parametrami $\kappa = 0,3$, $\theta = 0,1$, $\sigma = 0,03$ a $r_0 = 0,03$, ako je ilustrované na obrázku 20. Červenou prerušovanou čiarou je vyznačená hodnota $\theta = 0,1$, ku ktorej sa short rate v dlhodobom priemere blíži. Stredná prerušovaná čiara predstavuje očakávanú hodnotu a ostatné dve prerušované čiary tvoria pás spoľahlivosti, reprezentujúci dve štandardné odchýlky od očakávanej hodnoty.

3.3 Explicitné vyjadrenie okamžitej úrokovej miery a niektoré vlastnosti Vašíčkovho modelu

Nakoľko podrobné odvádzanie vzťahov platných vo Vašíčkovom modeli by bolo nad rámec tejto bakalárskej práce, budeme tu uvádzať iba jednotlivé vlastnosti a vzťahy, pričom budeme odkazovať na literatúru, v ktorej odvodenie bolo vysvetlené podrobne. $r(t)$ sa dá explicitne vyjadriť do tvaru uvedenom v rovnici (17). [27]

$$r(t) = \theta + (r_0 - \theta)e^{-\kappa t} + \sigma e^{-\kappa t} \int_0^t e^{\kappa s} dw. \quad (17)$$

Obr. 20: Simulácie desiatich rôznych priebehov short rate s parametrami $\kappa = 0,3$, $\theta = 0,1$, $\sigma = 0,03$ a $r_0 = 0,03$ pomocou Vašíčkovho modelu.



Jediný problém v rovnici (17) môže nastať v pochopení členu

$$\int_0^t e^{\kappa s} dw,$$

čo je príklad stochastického integrálu vzhľadom na Wienerov proces. Stochastický integrál môžeme chápať taktiež ako určitú náhodnú premennú. Myšlienku definície stochastického integrálu môžeme podľa [14] naznačiť tým, že ide o limitu výrazu

$$\sum_{i=1}^n f(s_i)(w(s_{i+1}) - w(s_i)),$$

ak zjemňujeme delenie, tzn. $n \rightarrow \infty$. Jedna z vlastností uvedených v [2] je, že stochastický integrál deterministickej funkcie $f(s)$ vzhľadom na Wienerov proces má normálne rozdelenie so strednou hodnotou 0 a varianciou $\int_0^t f^2(s)ds$, t.j.

$$\int_0^t f(s)dw \approx N\left(0, \int_0^t f^2(s)ds\right).$$

Využitím týchto vzťahov sa dostávame k nasledujúcim vlastnostiam short rate $r(t)$. Krátkodobá úroková miera $r(t)$ má normálne rozdelenie, pre ktoré platí $E[r(t)] =$

$\theta + (r_0 - \theta)e^{-\kappa t}$, čo taktiež implikuje, že ak $t \rightarrow \infty$, dostávame $E[r(t)] \rightarrow \theta$, čo je v súlade s predpokladom interpretácie parametra θ , že sa jedná o dlhodobý priemer. Pre varianciu krátkodobej úrokovej miery platí

$$\text{Var}[r(t)] = \text{Var}[\sigma e^{-\kappa t} \int_0^t e^{\kappa s} dw] = \sigma^2 e^{-2\kappa t} \int_0^t e^{2\kappa s} ds = \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa t}),$$

a teda pre $t \rightarrow \infty$, $\text{Var}[r(t)] \rightarrow \frac{\sigma^2}{2\kappa}$, čo teda znamená, že variancia $r(t)$ konverguje ku konečnej hodnote, čo môžeme vidieť aj na obrázku 20.

3.4 Cena dlhopisu, výnosová krivka a forwardová krivka vo Vašíčkovom modeli

Podľa článku [27], cena dlhopisu $P(\tau, r)$, kde $\tau = T - t$ označuje čas do expirácie dlhopisu a r súčasnú hodnotu short rate a uvažujeme s konštantnou trhovou cenou rizika¹ λ , sa dá určiť ako riešenie parabolickej nasledujúcej parciálnej diferenciálnej rovnice.

$$-\frac{\partial P}{\partial \tau} + (\kappa(\theta - r) - \lambda\sigma)\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0, \quad (18)$$

pričom je splnená počiatočná podmienka $P(0, r) = 1$ pre všetky hodnoty r . Táto rovnica vedie k riešeniu, ktoré vyzerá nasledovne:

$$\ln P(\tau, r) = \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa}(R_\infty - r) - R_\infty\tau - \frac{\sigma^2}{4\kappa^3}(1 - e^{-\kappa\tau})^2, \quad (19)$$

kde $R_\infty = \frac{\kappa\theta - \lambda\sigma}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}$ [27].

Je však dôležité upozorniť na fakt, že pri dosadzovaní hodnôt r musíme brať túto hodnotu ako desatinné číslo a nie v percentách. Toto je dôsledok jedného z krokov pri odvodzovaní parciálnej diferenciálnej rovnice (18) v [27]. Ten udáva, že bezrizikové portfólio s hodnotou Π sa s ohľadom na dt zmení o $\Pi r dt$. Matematicky zapísané: $d\Pi = \Pi r dt$

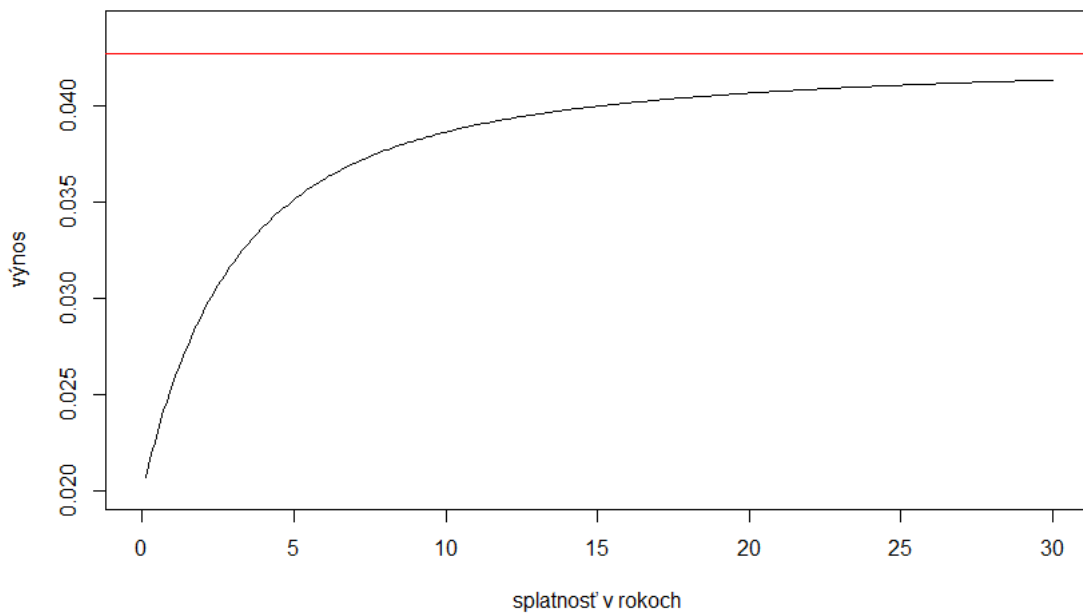
Ak rovnicu (19) dosadíme do vzťahu (1), dokážeme taktiež určiť časovú štruktúru úrokových mier, ktorá vyzerá nasledovne:

$$R(\tau, r) = R_\infty + (r - R_\infty)\frac{1}{\kappa\tau}(1 - e^{-\kappa\tau}) + \frac{\sigma^2}{4\kappa^3\tau}(1 - e^{-\kappa\tau})^2. \quad (20)$$

¹Pod pojmom trhovú cenu rizika, môžeme chápať číslo, ktoré nám vyjadruje, koľko jednotiek výnosu pri dlhopisoch investori požadujú na jednu jednotku rizika. [26]

Taktiež platí, že $\lim_{T \rightarrow \infty} R(\tau) = R_\infty$, čo aj vysvetľuje označenie R_∞ . Na obrázku 21 môžeme vidieť, že časová štruktúra úrokových mier namodelovaná podľa Vašíčkovho modelu naozaj konverguje ku hodnote R_∞ .

Obr. 21: Časová štruktúra úrokových mier podľa Vašíčkovho modelu (čierna krivka) s parametrami $\kappa = 0.49, \theta = 0.45, \sigma = 0.05, \lambda = 0.02, r(0) = 0.02, R_\infty = 0.395$. Červenou priamkou je označená hodnota $R_\infty = 0.395$.



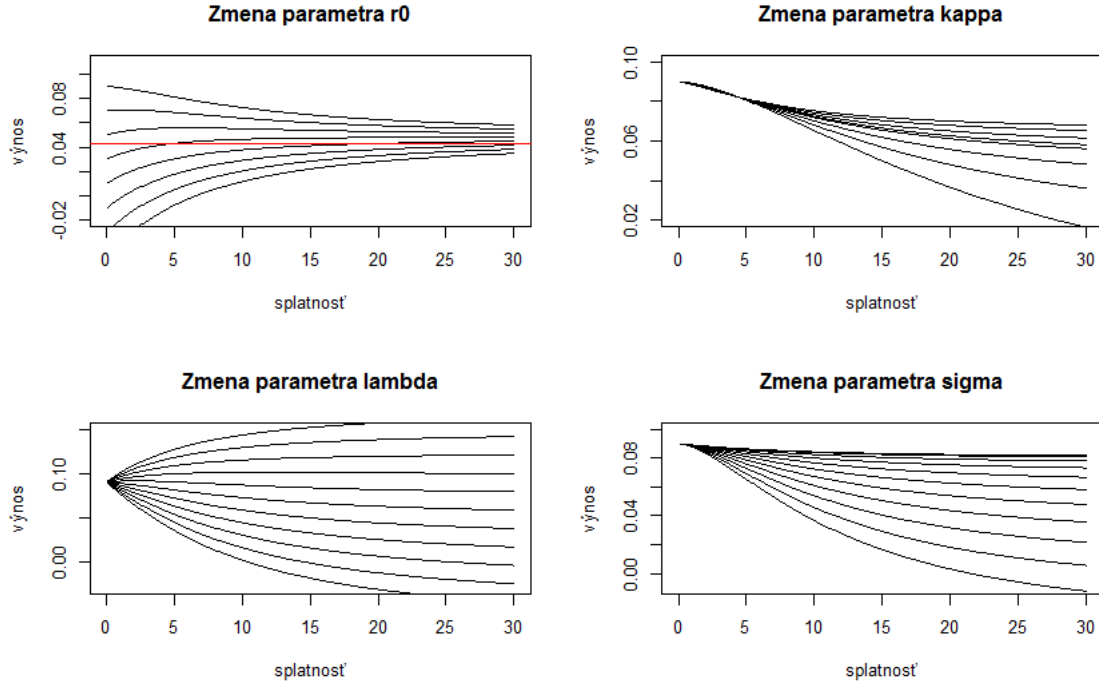
V kapitole ?? sme si uviedli spôsob odvodenia forwardových sadzieb z cien dlhopisov. Ak teda použijeme vzorec (6), dostaneme sa k nasledovnému vyjadreniu forwardovej úrokovej sadzby

$$f(\tau_T, \tau_S, r(t)) = \frac{1}{\tau_S - \tau_T} \left[(R_\infty - r(t)) \frac{(e^{-\kappa\tau_S} - e^{-\kappa\tau_T})}{\kappa} + R_\infty(\tau_S - \tau_T) + \frac{\sigma^2}{4\kappa^3} (e^{-2\kappa\tau_S} - 2e^{-\kappa\tau_S}) - \frac{\sigma^2}{4\kappa^3} (e^{-2\kappa\tau_T} - 2e^{-\kappa\tau_T}) \right]. \quad (21)$$

3.5 Kalibrácia parametrov Vašíčkovho modelu z reálnych dát

Naše dáta pozostávali z forwardových sadzieb so začiatkom kontraktu o 3M, 6M, 1R, 3R, 5R a ku každému začiatku sme mali splatnosť kontraktu o 3M, 6M, 1R, 3R, 5R.

Obr. 22: Rôzne tvary časovej štruktúry úrokových mier podľa Vašíčkovho modelu pri zmene parametrov $r(0)$, κ , λ , σ .



Dáta sme zozbierali za prvý kvartál 2015. Ukážka našich dát je uvedená v tabuľke č. 8 a 9. V predošlej podkapitole sme si v rovnici (21) odvodili vyjadrenie forwardovej úrokovej miery a pri odhade parametrov sme vychádzali práve z tejto rovnice. Pre naše potreby, sme si však rovnicu (21) upravili na jednoduchší tvar, vyjadrený v rovnici (22), kde forwardová sadzba pri daných splatnostiach a hodnote κ je lineárna kombinácia premenných σ^2 , $\alpha = \kappa\theta - \lambda\sigma$, r . Toto vyjadrenie do veľkej miery zjednodušuje výpočty pri odhadovaní parametrov Vašíčkovho modelu.

$$f(\tau_T, \tau_S, r) = \sigma^2 c_1(\kappa, \tau_T, \tau_S) + \alpha c_2(\kappa, \tau_T, \tau_S) + r c_3(\kappa, \tau_T, \tau_S), \quad (22)$$

pričom

$$c_1(\kappa, \tau_T, \tau_S) = \frac{1}{\tau_S - \tau_T} \left(\frac{e^{-2\kappa\tau_S}}{4\kappa^3} - \frac{e^{-2\kappa\tau_T}}{4\kappa^3} + \frac{\tau_S}{2\kappa^2} - \frac{\tau_T}{2\kappa^2} \right)$$

$$c_2(\kappa, \tau_T, \tau_S) = \frac{1}{\tau_S - \tau_T} \left(\frac{e^{-\kappa\tau_T}}{\kappa^2} - \frac{e^{\kappa\tau_S}}{\kappa^2} + \frac{\tau_T}{\kappa} - \frac{\tau_S}{\kappa} \right)$$

$$c_3(\kappa, \tau_T, \tau_S) = \frac{1}{\tau_S - \tau_T} \left(\frac{e^{-\kappa\tau_T}}{\kappa} - \frac{e^{-\kappa\tau_S}}{\kappa} \right)$$

Účelová funkcia $F(\kappa)$, určujúca súčet štvorcov rezíduí pri danej hodnote κ má predpis:

$$F(\kappa) = \sum_{i=1}^{63} \sum_{j=1}^5 \sum_{k=1}^5 (f(r_i, \tau_{Tj}, \tau_{Sk}, \kappa) - f_{i,j,k})^2,$$

ktorú ak si rozpíšeme pomocou $c_1(\kappa, \tau_T, \tau_S)$, $c_2(\kappa, \tau_T, \tau_S)$, $c_3(\kappa, \tau_T, \tau_S)$ dostávame:

$$F(\kappa, \sigma^2, \alpha, r) = \sum_{i=1}^{63} \sum_{j=1}^5 \sum_{k=1}^5 ((\sigma^2 c_1(\kappa, \tau_T, \tau_S) + \alpha c_2(\kappa, \tau_T, \tau_S) + r_i c_3(\kappa, \tau_T, \tau_S)) - f_{i,j,k})^2,$$

pričom hodnoty parametrov σ^2, α a $r = r_i, i \in \{1, \dots, 63\}$ dostaneme minimalizáciou $F(\kappa, \sigma^2, \alpha, r)$ pri pevne stanovenej hodnote κ , čo teda vedie k úlohe lineárnej regresie riešenej metódou najmenších štvorcov, s regresormi $c_1(\kappa, \tau)$, $c_2(\kappa, \tau)$ a $c_3(\kappa, \tau)$ a odhadovanými parametrami σ^2, α a r . Vo všeobecnosti možno na kalibráciu parametrov Vašíčkovho modelu, v závislosti od vstupných dát, použiť napríklad ešte metódu maximálnej vierohodnosti (Maximum likelihood estimate) alebo metódu Kalmanovho filtra. Viac o použití týchto metód, ako aj ich porovnanie môžeme nájsť v práci [1].

Postupovali sme teda tak, že pre jednotlivé hodnoty κ sme si vypočítali hodnotu účelovej funkcie a následne sme hľadali, pre akú hodnotu κ bude súčet štvorcov rezíduí najnižší.

Pre naše údaje nám vyšli nasledujúce hodnoty optimálnych parametrov:

$$\sigma^2 = 0,014796494, \alpha = -0,0197673491, \kappa = 0,1869846$$

Priebeh hodnôt $r_i, i \in 1, \dots, 63$ je uvedený na obrázku 23.

Okamžitá úroková miera je definovaná matematicky ako úrok na najkratšie možné obdobie. Pri odhade parametrov a následnom porovnávaní oproti trhovým dátam, však ako okamžitú úrokovú sadzbu môžeme považovať napríklad aj sadzby na krátke obdobia, napríklad O/N, 1W, 2W, 1M alebo 3M. Na obrázku 23 môžeme vidieť porovnanie odhadnutej okamžitej úrokovej miery z Vašíčkovho modelu oproti sadzbám na obdobia O/N, 1W, 2W, 1M a 3M.

Naša druhá kalibrácia bude tentokrát pozostávať zo vstupných hodnôt trhových výnosových kriviek, z ktorých sa pokúsime taktiež odhadnúť jednotlivé parametre Vašíčkovho modelu rovnakým spôsobom, ako v článku [8], s tým rozdielom, že budeme

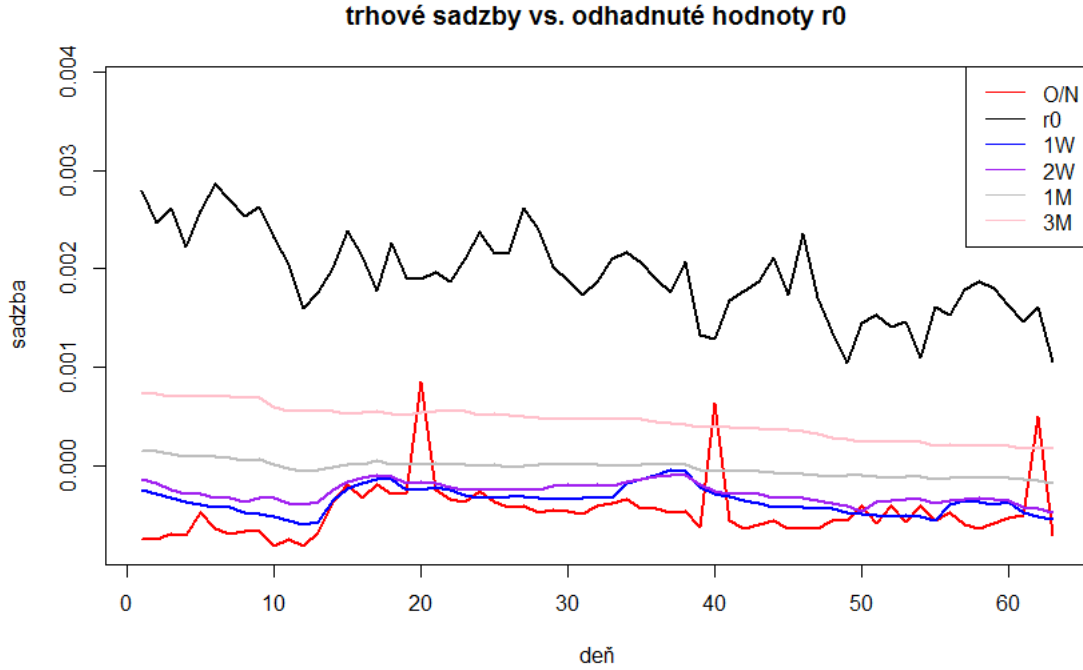
Tabuľka 8: Ukážka vstupných dát zo dňa 2.1.2015 pri kalibrácii Vašíčkovho modelu. V tabuľke sú uvedené forwardové sadzby v %, pričom v prvom stĺpci je uvedený začiatok forwardového kontraktu a v príslušnom stĺpci je uvedená dĺžka kontraktu.

	3M	6M	1R	3R	5R
3M	0,1957	0,1851	0,1467	0,2461	0,3915
6M	0,1744	0,1103	0,1482	0,2668	0,4232
1R	0,1778	0,1898	0,2147	0,3323	0,5038
3R	0,4176	0,4331	0,4647	0,6624	0,8809
5R	0,7968	0,8180	0,8610	1,0931	1,3039

Tabuľka 9: Ukážka vstupných dát zo dňa 31.3.2015 pri kalibrácii Vašíčkovho modelu. V tabuľke sú uvedené forwardové sadzby v %, pričom v prvom stĺpci je uvedený začiatok forwardového kontraktu a v príslušnom stĺpci je uvedená dĺžka kontraktu.

	3M	6M	1R	3R	5R
3M	0,2193	0,0914	0,0697	0,1497	0,2754
6M	-0,0363	-0,0183	0,0462	0,1589	0,2967
1R	0,1003	0,1122	0,1342	0,2247	0,3698
3R	0,3025	0,3166	0,3445	0,5066	0,6467
5R	0,6151	0,6328	0,6686	0,7943	0,8805

Obr. 23: Porovnanie odhadnutých okamžitých úrokových mier z Vašíčkovho modelu (prvá kalibrácia z forwardových sadzieb) oproti údajom sadzieb na obdobia O/N, 1W, 2W, 1M a 3M za 1Q 2015.



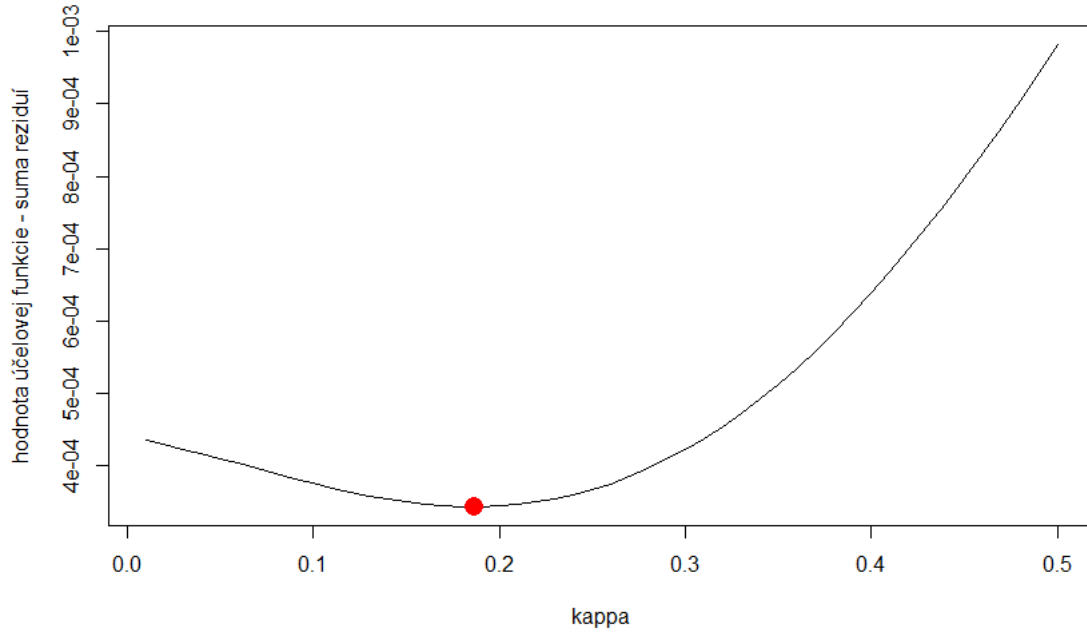
fitovať hodnoty z výnosových kriviek bez uplatnenia váh na jednotlivé merania (analógia je však totožná). Naše dáta pozostávali z výnosov pre menu EUR so splatnosťou 3M, 6M, 9M, 1R, 2R, 3R. Príklady rôznych tvarov vstupných výnosových kriviek sú uvedené na obrázku 25. Postupovali sme podobne ako pri odhade z forwardových sadzieb, tentokrát sme si však z rovnice (20) odvodili výšku výnosu $R(\tau, r)$ ako kombináciu parametrov $\sigma^2, \alpha = \kappa\theta - \lambda\sigma, r$ pri danej hodote κ . Výnos pri okamžitej úrokovej miere r a so splatnosťou τ teda môžeme vyjadriť nasledovne:

$$R(\tau, r) = \sigma^2 c_1(\kappa, \tau) + \alpha c_2(\kappa, \tau) + r c_3(\kappa, \tau), \quad (23)$$

kde $c_1(\kappa, \tau), c_2(\kappa, \tau), c_3(\kappa, \tau)$ vyjadríme nasledovne:

$$\begin{aligned} c_1(\kappa, \tau) &= \frac{(1 - e^{-\kappa\tau})^2}{4\kappa^3\tau} + \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{2\kappa^3\tau} - \frac{1}{2\kappa^2} \\ c_2(\kappa, \tau) &= \frac{1}{\kappa} - \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa^2\tau} \\ c_3(\kappa, \tau) &= \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa\tau} \end{aligned}$$

Obr. 24: Hodnoty účelovej funkcie pri kalibrácii parametrov Vašíčkovho modelu (prvá kalibrácia z forwardových sadzieb) ako aj vyznačená optimálna hodnota parametra κ .



V prípade kalibrácie parametrov z časovej štruktúry úrokových mier vyzerala účelová funkcia pri zvolenej hodnote κ nasledovne:

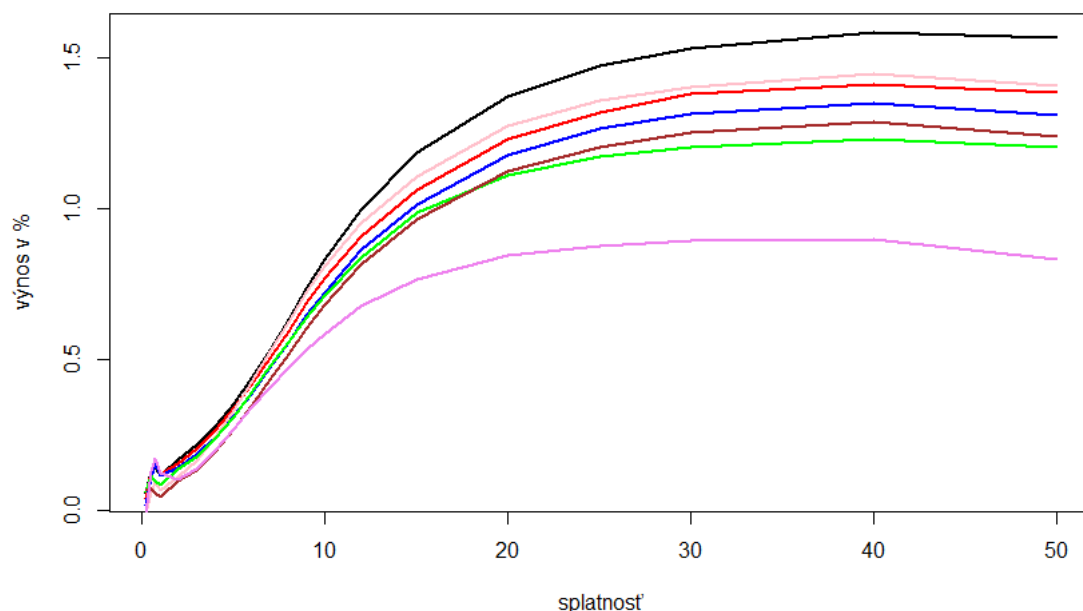
$$F(\kappa) = \sum_{i=1}^{63} \sum_{j=1}^6 (R(\tau_j, r_i) - R_{ij})^2,$$

čo si môžeme rozpísať do tvaru:

$$F(\kappa, \sigma^2, \alpha, r) = \sum_{i=1}^{63} \sum_{j=1}^6 (\sigma^2 c_1(\kappa, \tau) + \alpha c_2(\kappa, \tau) + r_i c_3(\kappa, \tau) - R_{ij}),$$

pričom hodnoty parametrov σ^2, α a $r = (r_1, \dots, r_6)$ získame minimalizáciou funkcie $F(\kappa, \sigma^2, \alpha, r)$, čo taktiež vedie k úlohe lineárnej regresie riešenej metódou najmenších štvorcov, s regresormi $c_1(\kappa, \tau), c_2(\kappa, \tau)$ a $c_3(\kappa, \tau)$ a odhadovanými parametrami σ^2, α a r . Po získaní optimálnych hodnôt týchto parametrov, pri zvolenej hodnote κ môžeme teda optimalizovať funkciu $F(\kappa)$ a hľadať, pre akú hodnotu κ je funkčná hodnota najmenšia. Pre naše dáta nám vyšli nasledujúce optimálne hodnoty parametrov:

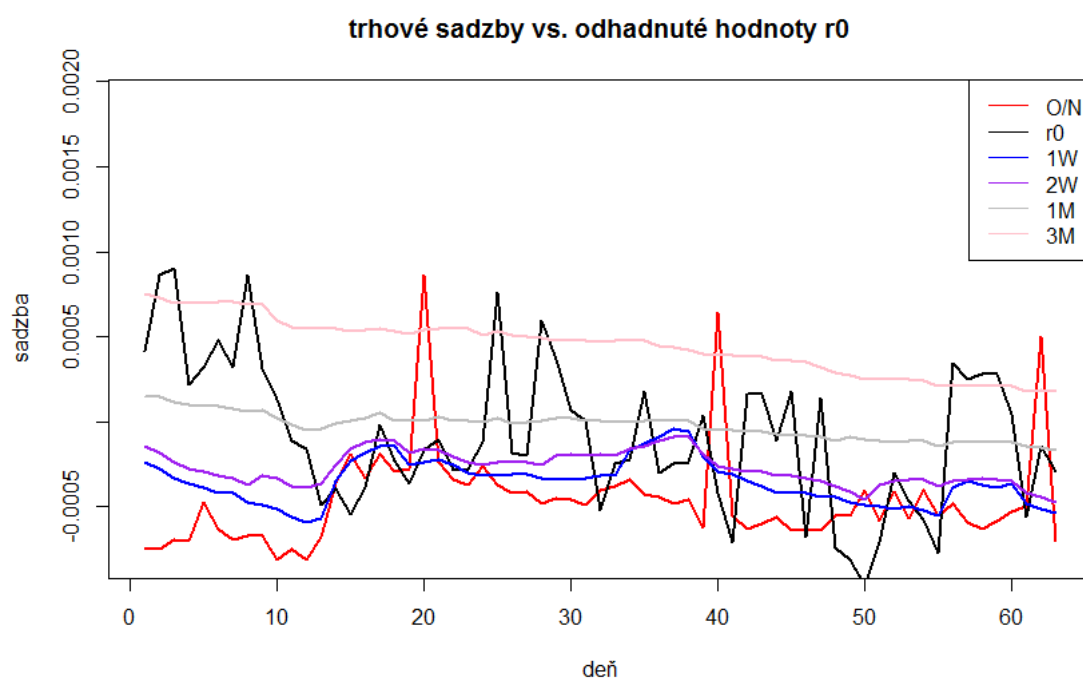
$$\sigma^2 = 0,0089331510, \alpha = 0.0053641787, \kappa = 1,42441.$$

Obr. 25: Ukážka výnosových kriviek v prvom kvartáli roku 2015.

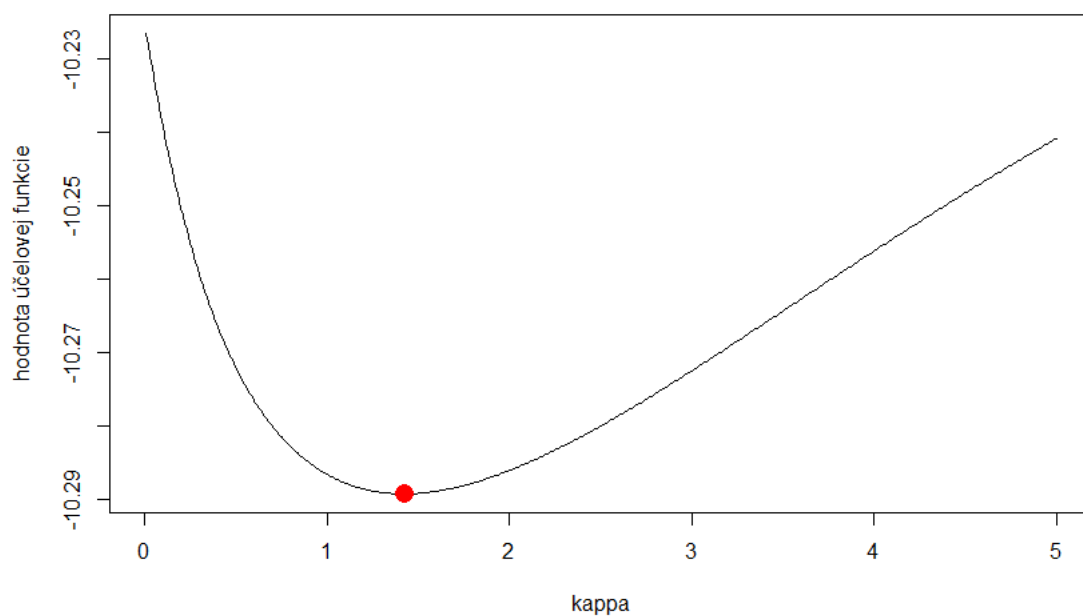
Priebeh hodnôt $r_i, i \in 1 \dots 63$ je uvedený na obrázku 26. Nakoľko forwardová úroková sadzba je teoreticky priamo určená príslušnými výnosmi časovej štruktúry úrokových mier, ako bolo uvedené vo vzťahu (2), dalo by sa očakávať, že hodnoty okamžitej úrokovej miery odhadnuté z forwardových úrokových sadzieb ako aj výsledné parametre κ, σ^2, α sa budú len minimálne líšiť od hodnôt odhadnutých z výnosových kriviek. Fakt, že nám hodnoty parametrov a okamžitej úrokovej miery vyšli pri týchto kalibráciách rozdielne, môže byť spôsobený aj tým, že vo všeobecnosti vzťah (2) v období krízy prestáva platiť[10].

Porovnanie kalibrácie s článkom [8] V našej práci sme pri kalibrácii vychádzali predovšetkým z článku [8], avšak rozdielny prístup bol v tom, že pri kalibrácii parametrov z našich dát sme používali jednotné váhy pre všetky pozorovania, na rozdiel od [8]. V článku [8] sa však okrem odhadu krátkodobej úrokovej miery taktiež porovnávalo, ako dobre Vašíčkov model fituje celú časovú štruktúru úrokových mier. Porovnanie týchto dvoch prístupov hľadania optimálnych parametrov Vašíčkovho modelu je znázornené na obrázku 28, kde sú vykreslené výsledné hodnoty $r = (r_1, \dots, r_{63})$ pre obe kalibrácie.

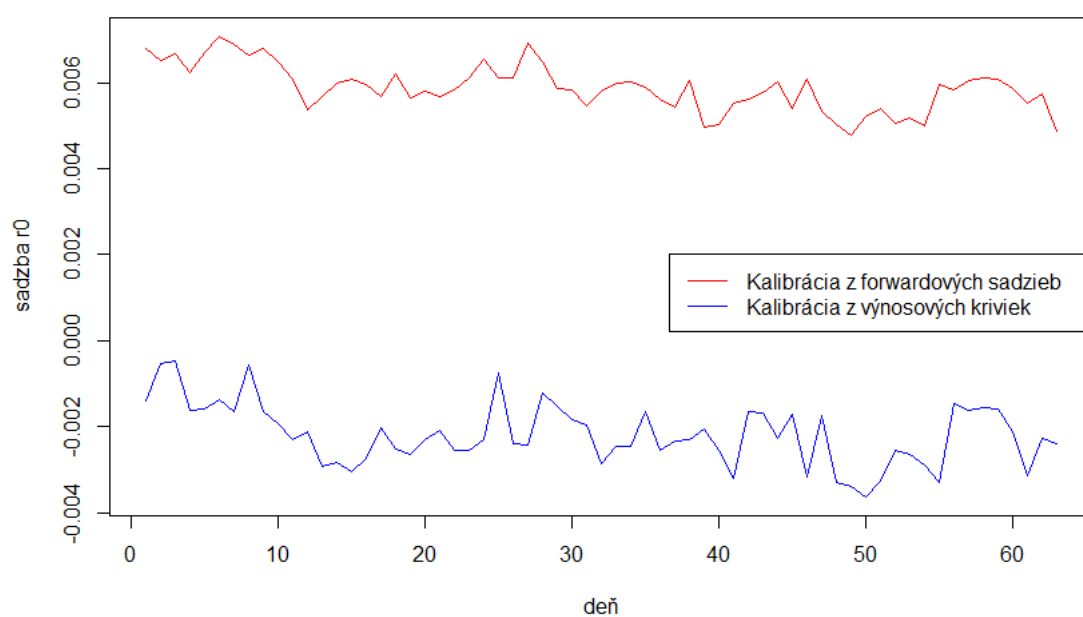
Obr. 26: Porovnanie odhadnutých okamžitých úrokových mier z Vašíčkovho modelu (druhá kalibrácia z výnosových kriviek) oproti údajom úrokových sadzieb na obdobia O/N, 1W, 2W, 1M a 3M za 1Q 2015.



Obr. 27: Hodnoty účelovej funkcie pri kalibrácii parametrov Vašíčkovho modelu (druhá kalibrácia z výnosových kriviek) ako aj vyznačená optimálna hodnota parametra κ .



Obr. 28: Porovnanie odhadnutých hodnôt okamžitej úrokovej miery z Vašíčkovho modelu pri odhade z forwardových sadzieb a z výnosových kriviek.



Záver

Cieľom bakalárskej práce bolo naštudovať a spracovať dva rôzne prístupy modelovania úrokových mier a to pomocou modelu Nelsona-Siegela, respektíve Svenssonovho rozšírenia tohto modelu a druhý prístup bol Vašíčkov model na simulovanie krátkodobej úrokovej miery, z ktorej však vieme vyvodiť celú časovú štruktúru úrokových mier a teda aj forwardové sadzby. Prácu sme rozdelili na tri hlavné kapitoly.

V prvej sme čitateľa oboznámili so základnými pojmami súvisiacimi s úrokovými sadzbami, ako aj praktické použitie úrokových mier pri rôznych finančných nástrojoch akými forwardové kontrakty na úrokovú mieru, úrokové swapy kde sme si aj na názornom príklade vysvetlili ich princíp, ale aj rôzne formy či už klasických alebo exotických opcí. Rovnako sme pozornosť venovali dôkladnému odvodeniu forwardových úrokových sadzieb z časovej štruktúry úrokových mier, spôsobu oceňovania dlhopisov a súvis medzi cenou dlhopisov a forwardovými úrokovými sadzbami.

V druhej kapitole sme sa najprv venovali popisu modelovania forwardových úrokových mier a časovej štruktúry úrokových mier pomocou modelu Nelsona-Siegela. Tento model, spolu so Svenssonovým rozšírením spočíva vo fitovaní určitej funkcie na trhové dáta. Náorne sme vysvetlili jeho parametrizáciu ako aj dôvod, prečo bol pôvodný model upravený. Opísali sme význam jednotlivých parametrov a intuitívne ukázali, čo spôsobí ich zmena. Následne sme model aplikovali na reálne trhové dáta, výnosy amerických dlhopisov so splatnosťou od 3 mesiacov po 30 rokov zo dňa 31.12.2014, na ktorých bolo vidieť, že pre určité tvary výnosových kriviek je model Nelsona-Siegela ideálny. Následne sme popísali Svenssonovo rozšírenie tohto modelu, v ktorom pribudli dva nové parametre a tie nám umožňujú modelovať úrokové krivky iných tvarov. Na reálnych dátach z čias krízy, konkrétne zo dňa 31.1.2007, sme opäť ilustrovali fitovanie výnosových kriviek a porovnali výsledky jednotlivých modelov, pričom sa ukázalo, že pre časovú štruktúru pozostávajúcu z 2 vrcholov, je vhodnejšie práve Svenssonovo rozšírenie. Na koniec kapitoly si ukážeme priebeh optimálnych parametrov pre dáta z roku 2014 a pokúsime sa výsledky interpretovať.

V tretej kapitole sme sa venovali Vašíčkovmu jednofaktorovému modelu na modelovanie krátkodobej úrokovej miery. Najskôr sme si popísali jednotlivé pojmy, potrebné na pochopenie modelu, ako sú napríklad rôzne druhy stochastických procesov - Wienerov proces, Mean reversion proces alebo Ornstein-Uhlenbackov proces. Následne sme uviedli základnú stochastickú diferenciálnu rovnicu, z ktorej Vašíčkov model vychádza. Z tejto rovnice sa dá priamo odvodiť explicitné vyjadrenie krátkodobej úrokovej miery. Tomuto odvodeniu sme sa však do hĺbky nevenovali, nakoľko matematický aparát v tejto práci nebol dostatočný pre dôkladné odvodenie. Z toho dôvodu sme uviedli zdroj na práce, v ktorých sa čitateľ môže s týmto odvodením oboznámiť bližšie. Taktiež sme si ukázali spôsob, akým sa dá z krátkodobej úrokovej miery namodelovať celá časová štruktúra úrokových mier a z nej následne odvodiť forwardové úrokové sadzby. Na konci kapitoly sme si na obrázku ukázali, aký vplyv má zmena jednotlivých parametrov na výsledný tvar úrokovej krivky. Posledná časť tretej kapitoly pozostávala z kalibrácie parametrov Vašíčkovho modelu, pričom sme sa rozhodli odhadovať tieto parametre z dvoch typov vstupných dát. Prvý model pozostával z odhadu parametrov na základe hodnôt forwardových úrokových sadzieb za prvý kvartál roku 2015. Pri hľadaní optimálnych parametrov nenastal žiaden problém a dokázali sme odhadnúť optimálne parametre spĺňajúce podmienky pre Vašíčkov model. Pri druhom modeli sme odhadovali parametre Vašíčkovho modelu z údajov výnosových kriviek taktiež za prvý kvartál 2015. Pri kalibrácii tohto modelu však nastal problém, pretože optimálna hodnota jedného z parametrov, ktorý musel spĺňať podmienku kladnosti, vyšla ako záporné číslo. Preto sme museli naše dáta prispôbiť voľbou vhodných splatností vstupujúcich do kalibrácie tak, aby sme boli schopní dostať výsledné parametre spĺňajúce všetky podmienky Vašíčkovho modelu. Toto by sme mohli považovať za jeden z otvorených problémov, ktorý by sa dal odstrániť napríklad tým, že by sme pri optimalizácii zvolili komplexnejší postup zahrňujúci podmienky kladnosti niektorých parametrov. V záverečnej časti kapitole sme nakoniec porovnali náš postup pri kalibrácii parametrov Vašíčkovho modelu s postupom uvedeným v práci [8], ako aj samotné výsledky jednotlivých odhadov.

Táto bakalárska práca umožnila autorovi rozšíriť si vedomosti z oblasti modelovania

úrokových mier dvoma rôznymi prístupmi. Práca pozostávala taktiež z aplikácie teoretických znalostí na reálne dáta a preto umožnila autorovi oboznámiť sa s danými použitými metódami. Prínosom práce pre čitateľa je najmä oboznámenie sa so základnými pojmami v oblasti modelovania úrokových mier ako aj aplikácie jednotlivých modelov na praktické príklady.

Zoznam použitej literatúry

- [1] Amin, H., H., N., Calibration of different Interest Rate Models for a Good Fit of Yield Curves, diplomová práca, Faculty of Electrical Engineering, Mathematics and Computer Science, Delft University of Technology, Holandsko, 2012
- [2] Breccia, A., Interest Rate Models I: Short Rate Models, Londýn, Spojené kráľovstvo, 2012, dostupné na internete (12.4.2015): http://www.bbk.ac.uk/ems/for_students/msc_finEng/pricing.emms014p/ab7.pdf
- [3] Business Insider: Forget About Housing, The The Real Cause Of The Crisis Was OTC Derivatives, dostupné na internete (16.3.2015): <http://www.businessinsider.com/bubble-derivatives-otc-2010-5>
- [4] Daily Treasury Yield Curve Rates, dostupné na internete (21.3.2015): <http://www.treasury.gov/resource-center/data-chart-center/interest-rates/Pages/TextView.aspx?data=yield>
- [5] Diebold, F., X., Canlin, L., Forecasting the term structure of government bond yields, Journal of Econometrics 130 (2006), 337–364
- [6] Euro area yield curve, dostupné na internete (21.5.2015): <https://www.ecb.europa.eu/stats/money/yc/html/index.en.html>
- [7] Gibson R., Lhabitant, F.S., Talay, D., Modeling the Term Structure of Interest Rates, Now Publishers Inc, Norwell, 2010
- [8] Halgašová, J., Stehlíková, B., Bučková, Z., Estimating the short rate from term structures in the Vasicek model, Tatra Mountains Mathematical Publications 61 (2014), 87-104
- [9] IAS 39 — Financial Instruments: Recognition and Measurement, dostupné na internete (21.5.2015): <http://www.iasplus.com/en/standards/ias/ias39>

- [10] Jurča, P., Forward Rate Modeling, učebný text, Nanyang Technological University, Nanyang, 2010, dostupné na internete (21.5.2015): <http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/jurca/qrm/Chapter1.pdf>
- [11] LIBOR - current LIBOR interest rates, dostupné na internete (21.5.2015): <http://www.global-rates.com/interest-rates/libor/libor.aspx>
- [12] Melicherčík, I., Olšarová, L., Úradníček, V., Kapitoly z finančnej matematiky, Epos, Bratislava, 2005
- [13] Monetary and Economic Department of BIS, OTC derivatives statistics at end-June 2014, statistical release, Bank for International Settlements, Basel, Switzerland, 2014, dostupné na internete (16.3.2015) http://www.bis.org/publ/otc_hy1411.pdf
- [14] Munk, C., Fixed Income Modelling, Oxford University Press, Oxford, 2011
- [15] Nawalkha, S., K., Soto, G., M., Baliaeva, N., K., Interest Rate Risk Modeling: The Fixed Income Valuation Course, John Wiley & Sons, Hoboken, 2005
- [16] Nelson, Ch., R., Siegel, A., F., Parsimonious Modeling of Yield Curves, The Journal of Business 60 (1987), 473-489
- [17] Privault, N., Quantitative methods in risk management, učebný text, FMPH UK, Bratislava, 2014, dostupné na internete (21.5.2015): <http://www.ntu.edu.sg/home/nprivault/MA5182/forward-rate-modeling.pdf>
- [18] R Package 'manipulate', dostupné na internete (21.3.2015): <http://cran.r-project.org/web/packages/manipulate/manipulate.pdf>
- [19] R Package 'YieldCurve', dostupné na internete (21.3.2015): <http://cran.r-project.org/web/packages/YieldCurve/YieldCurve.pdf>
- [20] Rajwade, A.W., Handbook of debt securities and interest rate securities, McGraw-Hill, New Delhi, 2007

- [21] Stehlíková, B., Modelovanie okamžitej úrokovej miery, prednáška, SvF STU, Bratislava, 2011, dostupné na internete (31.3.2015): http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/stehlikova/fd12svf/prednasky/urokove_miery.pdf
- [22] Stehlíková, B., Stochastické procesy, prednáška, SvF STU, Bratislava, 2011, dostupné na internete (31.3.2015): <http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/stehlikova/fd12svf/prednasky/stochastika.pdf>
- [23] Stout, L., A., Derivatives and the legal origin of the 2008 credit crisis, working paper, UCLA School of Law, Los Angeles, 2014, <http://www.hblr.org/wp-content/uploads/2014/09/Derivatives-and-Credit-Crisis.pdf>
- [24] Subramani, R.W., Accounting for Investments, Fixed Income Securities and Interest Rate Derivatives: A Practitioner's Handbook, John Wiley & Sons, Hoboken, 2011
- [25] Svensson, L., E., O., Estimating and Interpreting Forward Interest Rates, International Economic Studies 579 (1994), 13-26
- [26] The market price of risk and the equity premium: A legacy of the Great Depression?, Journal of Monetary Economics 55 (2008), 454-476
- [27] Vasicek, O., An Equilibrium Characterization of the term structure, Journal of Financial Economics 5 (1977), 177-188
- [28] Výsledky aukcie štátnych dlhopisov ŠD 219 M, dostupné na internete (21.5.2015): <https://www.ardal.sk/sk/statne-cenne-papiere/statne-dlhopisy/vysledky-aukcii-sd>