

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

STOCHASTICKÉ DIFERENCIÁLNE ROVNICE A ICH
APLIKÁCIE VO FINANČNOM MODELOVANÍ

Bakalárska práca

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

STOCHASTICKÉ DIFERENCIÁLNE ROVNICE A ICH
APLIKÁCIE VO FINANČNOM MODELOVANÍ

Bakalárska práca

Študijný program: matematika

Študijný odbor: 1113 matematika

Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Školiteľ: RNDr. Beáta Stehlíková, PhD.

Bratislava, 2015

Miloslav Torda



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Mgr. Miloslav Torda
Študijný program: matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.1. matematika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Stochastické diferenciálne rovnice a ich aplikácie vo finančnom modelovaní
Stochastic differential equations and their applications in financial modelling

Cieľ:

1. Naštudovať a spracovať:
 - a) prehľad základnej teórie stochastických procesov, uviesť príklady procesov používaných vo finančnom modelovaní a ich vlastností, ilustrovať ich na reálnych dátach (geometrický Brownov pohyb, Ornstein-Uhlenbeckov proces, ich zovšeobecnenia a rozšírenia)
 - b) princípy oceňovanie derivátov aktív modelovaných stochastickými diferenciálnymi rovnicami pomocou parciálnych diferenciálnych rovníc a pomocou výpočtu strednej hodnoty pri rizikovo neutrálnej miere, ukázať príklad ich použitia
2. Použiť vedomosti z predchádzajúcej časti na analýzu reálnych dát - porovnanie trhových cien s cenami danými modelom.

Vedúci: RNDr. Beáta Stehlíková, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Dátum zadania: 24.10.2014

Dátum schválenia: 28.10.2014

prof. RNDr. Ján Filo, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Čestné vyhlásenie

Vyhlasujem, že som diplomovú prácu vypracoval samostatne a uviedol som všetku použitú literatúru.

V Bratislave 29.5.2015

.....
Miloslav Torda

Pod'akovanie

Ďakujem RNDr. Beáte Stehlíkovej, PhD. za ochotu, cenné rady, skúsenosti a skvelé vedenie pri písaní záverenej práce.

Abstrakt

TORDA, Miloslav: Stochastické diferenciálne rovnice a ich aplikácie vo finančnom modelovaní. [Bakalárska práca] - Univerzita Komenského v Bratislave. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky. Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky. - Školiteľ: RNDr. Beáta Stehlíková, PhD. Bratislava: UK, 2015, 58 s.

Práca predkladá základnú teóriu stochastického kalkulu spolu s príkladmi riešenia stochastických diferenciálnych rovníc a ich vlastnosťami, ktoré sa používajú pri finančnom modelovaní. Pozerá sa taktiež na spôsob oceňovania finančných derivátov pomocou rizikovo neutrálnej miery a pomocou parciálne diferenciálnych rovníc. Získané poznatky sa používajú pri skúmaní a empirickom testovaní jednofaktorových a dvojfaktorových modelov s mean-reverting vlastnosťou, pri oceňovaní future kontraktov kukurice. Parametre modelov sú odhadované na základe denných dát future kontraktov kukurice obchodovanej na Chicago mercantile exchange od januára 2013 do decembra 2013 a výkonnosť modelov je posudzovaná použitím future kontraktov od januára 2014 do decembra 2014.

Kľúčové slová: Brownov pohyb, Itóov kalkulus, geometrický Brownov pohyb, Ornstein - Uhlenbeckov proces, rizikovo neutrálne oceňovanie, komodity, future kontrakt, Feynmanova - Kacovova veta .

Abstract

TORDA, Miloslav: Stochastic differential equations and their applications in financial modeling. [Bachelor thesis] - Comenius University in Bratislava. Faculty of Mathematics, Physics and Informatics. Department of Applied Mathematics and Statistics. - Supervisor: RNDr. Beáta Stehlíková, PhD. Bratislava: UK, 2015, 58 p.

The thesis introduces basic theory of stochastic calculus together with examples of solutions of stochastic differential equations and their properties which are used in financial modeling. It also looks at the way the financial derivatives are priced using risk neutral measure theory and using partial differential equations. Obtained findings are then used in the examination and empirical testing of one-factor and two-factor models with the mean reverting property which are used in the pricing of corn future contracts. Parameters of models are estimated based on daily corn future contract data traded on the Chicago mercantile exchange from January 2013 to December 2013 and the performance of the models is assessed using corn future contracts from January 2014 to December 2014.

Klíčové slová: Brownian motion, Itô calculus, geometric Brownian motion, Ornstein - Uhlenbeck process, risk neutral pricing, commodity, future contract, Feynman - Kac theorem.

Obsah

Úvod	9
1 Brownov pohyb	10
1.1 Náhodná prechádzka a Brownov pohyb	10
1.2 Existencia a spojitosť Brownovho pohybu	12
2 Stochastický kalkulus a stochastické diferenciálne rovnice	16
2.1 Itóov integrál	16
2.1.1 Základné pojmy	16
2.1.2 Konštrukcia Itóovho integrálu	17
2.1.3 Vlastnosti Itóovho integrálu	18
2.2 Jednorozmerná Itóova lema	18
2.3 Stochastické diferenciálne rovnice	20
3 Geometrický Brownov pohyb	21
3.1 Riešenie stochastickej diferenciálnej rovnice geometrického Brownovho pohybu	21
3.2 Vlastnosti geometrického Brownovho pohybu	22
3.2.1 Pravdepodobnostné rozdelenie Brownovho pohybu	22
3.2.2 Momenty geometrického Brownovho pohybu	23
3.2.3 Interval spoľahlivosti pre geometrický Brownov pohyb	24
3.3 Geometrický Brownov pohyb a finančné modelovanie	25
3.3.1 Odhady parametrov geometrického Brownovho pohybu	27
3.3.2 Príklad použitia odhadov parametrov geometrického Brownovho pohybu na predikciu priebehu ceny akcie	27
4 Ornstein - Uhlenbeckov proces	29
4.1 Riešenie stochastickej diferenciálnej rovnice Ornstein - Uhlenbeckovho procesu	29
4.2 Vlastnosti Ornstein - Uhlenbeckovho procesu	29
4.2.1 Pravdepodobnostné rozdelenie Ornstein - Uhlenbeckovho procesu	29
4.2.2 Momenty Ornstein - Uhlenbeckovho procesu	30
4.2.3 Intervaly spoľahlivosti pre Ornstein - Uhlenbeckov proces	30
4.3 Odhad parametrov Ornstein - Uhlenbeckovho procesu	31
4.4 Príklad použitia odhadov parametrov Ornstein - Uhlenbeckovho procesu na predikciu priebehu úrokových mier.	33
5 Rizikovo neutrálne oceňovanie	35
5.1 Základné definície, vety a tvrdenia	35
5.2 Oceňovanie vzhľadom na rizikovo neutrálnu mieru	36
5.3 Future kontrakty	36
5.4 Forwardové kontrakty a ich vzťah s future kontraktmi	37
6 Stochastické modelovanie cien komodít.	39
6.1 Oceňovacie modely	39
6.1.1 Model 1	39

6.1.2	Model 2	40
6.1.3	Model 3	41
6.2	Odhady parametrov	46
6.2.1	Model 1	46
6.2.2	Model 2	46
6.2.3	Model 3	47
6.3	Aplikácia modelov na reálne dáta	48
6.3.1	Dáta	48
6.3.2	Empirické výsledky	49
7	Súvislosť s parciálnymi diferenciálnymi rovnicami	53
7.1	Feynman-Kacova veta	53
7.2	Alternatívny postup výpočtu ceny future kontraktu	53
	Záver	55
	Literatúra	56

Úvod

Stochastické diferenciálne rovnice majú široké využitie mimo matematiky. Modelovanie rastu populácie, správanie sa náboja v elektrickom obvode, alebo stochastické riešenie Dirichletovho problému. Jednou z aplikácií teórie stochastického kalkulu je aj finančná matematika. V roku 1969 Robert Merton zaviedol stochastický kalkulus do štúdia financií. V rovnakom čase Fischer Black a Myron Scholes vyvíjali formulu na oceňovanie opcií za ktorú v roku 1997 získali Nobelovú cenu za ekonómiu.

Cieľom práce bolo oboznámiť sa s matematickým základom stochastického kalkulu, jeho použitím pri riešení stochastických diferenciálnych rovníc a následne ich využitím vo finančnom modelovaní.

Práca je rozdelená do siedmych kapitol. Kapitola 1 sa zaoberá hlavným prostriedkom stochastického kalkulu a to Brownovým pohybom. V kapitole 2 zavádzame Itóov integrál a formulujeme niektoré dôležité vlastnosti Itoóvho integrálu ako aj formulujeme Itóovu lemu, ktorá je dôležitým nástrojom pri riešení stochastických diferenciálnych rovníc. Kapitoly 3 a 4 sa týkajú dvoch dôležitých príkladov stochastických diferenciálnych rovníc a to geometrickým Brownovým pohybom a Ornstein - Uhlenbeckovým procesom. Pre oba procesy uvádzame riešenia príslušných stochastických diferenciálnych rovníc a odvodzujeme základné vlastnosti, ako stredné hodnoty, disperzie a pravdepodobnostné rozdelenia procesov. Na záver kapitol uvádzame praktické použitie daných procesov vo finančnej matematike. Kapitola 5 je venovaná Rizikovo neutrálnej miere na základe ktorej odvodzujeme oceňovaciu formulu pre future kontrakty. Túto formulu ďalej využívame v kapitole 6, kde predstavujeme 3 modely, ktoré sa používajú pri oceňovaní futurov. Odvodzujeme ich riešenia a porovnávame ich so skutočnými cenami a tým sa snažíme určiť ako dobre sú dané modely vhodné pre aproximáciu cien future kontraktov. Záverečná kapitola 7 dáva do súvislosti parciálne diferenciálne rovnice a stochastické diferenciálne rovnice pomocou Feynmanovej - Kacovej vety.

Dúfame, že táto práca prinesie čitateľovi ľahké a zrozumiteľné predjedlo v problematike stochastických diferenciálnych rovníc, vzbudí v čitateľovi hlbší záujem o danú problematiku, poskytne zoznam literatúry a referenčný materiál pri ďalšom štúdiu.

1 Brownov pohyb

Brownov pohyb je názov pre matematický popis neusporiadaného pohybu peľu ponoreného vo vode, ktorý pozoroval v roku 1828 botanik Robert Brown. Prvú kvalitatívnu prácu týkajúcu sa Brownovho pohybu robil Bachelier (1900), ktorý sa zaujímal o výkyvy cien akcií. Prvé fyzikálne vysvetlenie fenoménu, ktorý pozoroval Brown, poskytol Einstein v roku 1905. Dôkladné matematické spracovanie Brownovho pohybu začalo s N. Wienerom (1923), ktorý ako prvý urobil dôkaz existencie Brownovho pohybu. Preto sa niekedy Brownovmu pohybu hovorí aj Wienerov proces [11, kapitola 10].

1.1 Náhodná prechádzka a Brownov pohyb

Keďže Brownov pohyb je stochastický proces, definujme tento pojem.

Definícia 1.1.1. *Stochastický proces je parametrizovaný súbor náhodných premenných*

$$\{X_t\}_{t \in T}$$

definovaný na pravdepodobnostnom priestore (Ω, \mathcal{F}, P) a nadobúda hodnoty v \mathbb{R} . [1, definícia 2.1.4]

Jednou z interpretácií Brownovho pohybu je limita symetrickej náhodnej prechádzky. Predpokladajme, že za každú časovú jednotku Δt urobíme krok Δx doprava alebo doľava s rovnakou pravdepodobnosťou. Označme $X(t)$ pozíciu v čase t tak že

$$X(t) = \Delta x \left(X_1 + \dots + X_{\lfloor \frac{t}{\Delta t} \rfloor} \right),$$
$$X_i = \begin{cases} +1 & \text{ak } i\text{-ty krok dĺžky } \Delta x \text{ je doprava,} \\ -1 & \text{ak je doľava,} \end{cases}$$

$\lfloor \frac{t}{\Delta t} \rfloor$ je najväčšie celé číslo menšie alebo rovné $\frac{t}{\Delta t}$ a predpokladáme, že X_i sú nezávislé s

$$P[X_i = 1] = P[X_i = -1] = \frac{1}{2}.$$

Keďže $E[X_i] = 0$ a $Var[X_i] = 1$ vidíme, že

$$E[X(t)] = 0,$$
$$Var[X(t)] = (\Delta x)^2 \left\lfloor \frac{t}{\Delta t} \right\rfloor.$$

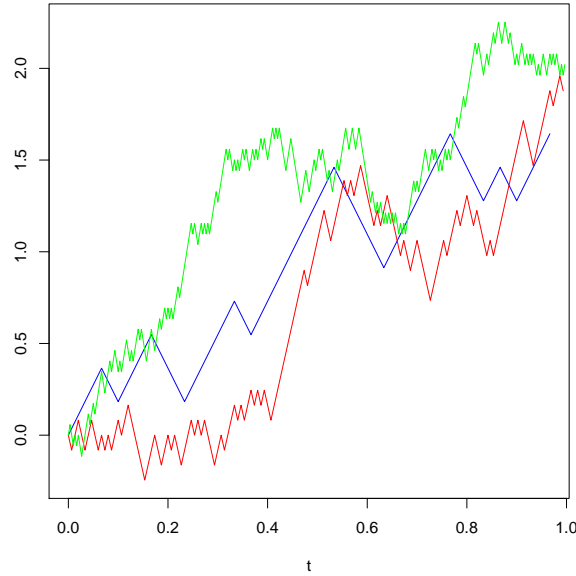
Ak položíme $\Delta x = \sigma\sqrt{\Delta t}$ pre $\sigma > 0$ a necháme Δt ísť do 0, tak z nerovnosti $\frac{t}{\Delta t} - 1 \leq \left\lfloor \frac{t}{\Delta t} \right\rfloor \leq \frac{t}{\Delta t}$ dostávame

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} Var[X(t)] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \sigma^2 \Delta t \left\lfloor \frac{t}{\Delta t} \right\rfloor = \sigma^2 t$$

a

$$E[X(t)] = 0$$

Z toho, ako je proces $X(t)$ postavený a z centrálnej limitnej vety sa zdá byť rozumné predpokladať, že v limite dostaneme proces s nasledovnými vlastnosťami



Obr. 1.1.1: Ukážka náhodnej prechádzky pre $\Delta x = \sigma\sqrt{\Delta t}$ kde $\sigma = 1$ a Δt nasledovné: **modrá** $\Delta t = \frac{1}{30}$, **červená** $\Delta t = \frac{1}{150}$ a **zelená** $\Delta t = \frac{1}{300}$.

1. $X(t)$ pochádza z normálneho rozdelenia so strednou hodnotou 0 a disperziou $\sigma^2 t$.
2. Pretože zmeny v hodnote náhodnej prechádzky v neprekrývajúcich sa časových intervaloch sú nezávislé, má $\{X(t), t \geq 0\}$ nezávislé prírastky, t.j. pre každé $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ sú

$$X(t_1), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$$

nezávislé.

3. Pretože pravdepodobnostné rozdelenie zmeny pozície náhodnej prechádzky pre ľubovoľný časový interval závisí iba na dĺžke daného intervalu, mohlo by platiť, že $\{X(t), t \geq 0\}$ má stacionárne prírastky v tom zmysle, že pravdepodobnostné rozdelenie $X(t+s) - X(t)$ nezávisí na t .

Definícia 1.1.2. *Hovoríme že stochastický proces $\{X(t), t \geq 0\}$ je proces Brownovho pohybu ak:*

1. $X(0) = 0$;
2. $\{X(t), t \geq 0\}$ má stacionárne a nezávislé prírastky t.j. pravdepodobnostné rozdelenie $X(t+s) - X(t)$ nezávisí na t a pre každé $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ sú $X(t_1), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ nezávislé.
3. pre každé $t > 0$ je $X(t)$ normálne rozdelená náhodná premenná so strednou hodnotou 0 a varianciou $\sigma^2 t$. [11, definícia 10.1]

Ak $\sigma = 1$, tak procesu hovoríme štandardizovaný Brownov pohyb.

1.2 Existencia a spojitosť Brownovho pohybu

Definícia 1.1.2 vychádza z intuitívnych úvah. Interpretácia Brownovho pohybu ako limity náhodnej prechádzky naznačuje, že $X(t)$ by mal byť spojitou funkciou t . Najším cieľom ďalej bude ukázať, že takýto spojitý proces v skutočnosti existuje. Na ukávanie existencie procesu Brownovho pohybu použijeme Kólmogorovovu vetu.

Veta 1.2.1. *Nech pre každé $t_1, \dots, t_k \in T, T = [0, \infty), k \in \mathbb{N}$ je ν_{t_1, \dots, t_k} pravdepodobnostná miera na $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B})$ taká, že*

$$\nu_{\sigma(1), \dots, \sigma(k)}(F_1 \times \dots \times F_k) = \nu_{t_1, \dots, t_k}(F_{\sigma^{-1}(1)} \times \dots \times F_{\sigma^{-1}(k)}) \quad (1.2.1)$$

pre každú permutáciu σ na $\{1, 2, \dots, k\}$, kde $F_i \subset \mathbb{R}$ borelovské a

$$\nu_{t_1, \dots, t_k}(F_1 \times \dots \times F_k) = \nu_{t_1, \dots, t_k, t_{k+1}, \dots, t_{k+m}}(F_1 \times \dots \times F_k \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}) \quad (1.2.2)$$

pre každé $m \in \mathbb{N}$, kde množina na pravej strane má spolu $k + m$ faktorov.

Potom existuje pravdepodobnostný priestor (Ω, \mathcal{F}, P) a stochastický proces $\{X_t\}$ na $\Omega, X_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, taký, že

$$\nu_{t_1, \dots, t_k}(F_1 \times \dots \times F_k) = P[X_{t_1} \in F_1, \dots, X_{t_k} \in F_k]$$

pre každé $t_i \in T$ a pre každú Borelovskú množinu F_i . [1, veta 2.1.5]

Aby sme mohli použiť vetu 1.2.1 musíme špecifikovať miery ν_{t_1, \dots, t_k} . To cheme urobiť tak, aby vznikol proces s vlastnosťami z definície 1.1.2. Predpokladajme, že $X(t)$ je takýto proces a odvodme jeho združenú hustotu v časoch t_1, t_2, \dots, t_k . To nám umožní definovať ν_{t_1, \dots, t_k} a následne použiť vetu 1.2.1.

Pretože každý Brownov pohyb vieme transformovať na štandardizovaný Brownov pohyb položením $B(t) = \frac{X(t)}{\sigma}$ budeme predpokladať, že $\sigma = 1$. Takto sa aj Brownov pohyb v literatúre často definuje [8, definícia 1.1]. Okrem toho, často sa v bode 3 definície 1.1.2 požaduje pravdepodobnostné rozdelenie prírastkov a my ho budeme neskôr potrebovať.

Veta 1.2.2. *Nech $X(t)$ je Brownov pohyb a $0 \leq t_{k-1} \leq t_k$. Potom $X(t_k) - X(t_{k-1})$ je normálne rozdelená náhodná premenná so strednou hodnotou 0 a varianciou $t_k - t_{k-1}$.*

Dôkaz. Z charakteristickej funkcie $X(t_k)$ dostávame

$$E[e^{iuX(t_k)}] = E[e^{iu(X(t_k) - X(t_{k-1}))} e^{iuX(t_{k-1})}]$$

a z vlastnosti nezávislých prírastkov vyplýva

$$E[e^{iu(X(t_k) - X(t_{k-1}))} e^{iuX(t_{k-1})}] = E[e^{iu(X(t_k) - X(t_{k-1}))}] E[e^{iuX(t_{k-1})}].$$

Po úprave

$$E[e^{iu(X(t_k) - X(t_{k-1}))}] = E[e^{iuX(t_k)}] E^{-1}[e^{iuX(t_{k-1})}] = \phi(t_k, u)(\phi(t_{k-1}, u))^{-1}.$$

kde $\phi(t_k, u)$ a $\phi(t_{k-1}, u)$ sú charakteristické funkcie $X(t_k)$ a $X(t_{k-1})$.

Z vlastnosti 3 definície 1.1.2 máme, že $X(t_k)$ a $X(t_{k-1})$ sú normálne rozdelené náhodné premenné a platí

$$\phi(t_k, u) = e^{-\frac{1}{2}t_k u^2}, \quad \phi(t_{k-1}, u) = e^{-\frac{1}{2}t_{k-1} u^2}.$$

Z toho dostávame, že

$$E [e^{iu[X(t_k)-X(t_{k-1})]}] = \phi(t_k, u)(\phi(t_{k-1}, u))^{-1} = e^{-\frac{1}{2}(t_k-t_{k-1})u^2} = \phi(t_k - t_{k-1}, u),$$

čo je charakteristická funkcia normálneho rozdelenia so strednou hodnotou 0 a varianciou $t_k - t_{k-1}$. \square

Ako sme už spomenuli, v niektorých definíciách Brownovho pohybu sa vlastnosť 3 v definícii 1.1.2 nahradí rozdelením prírastkov [8, definícia 1.1]. Z vety 1.2.2 vidno, že tieto definície sú ekvivalentné.

Teda $X(t)$ je normálne rozdelená náhodná premenná so strednou hodnotou 0 a varianciou t . Položme pre $t_1 < t_2 < \dots < t_n$

$$\begin{aligned} X(t_1) &= x_1 \\ X(t_2) &= x_2 \\ &\dots \\ X(t_n) &= x_n \end{aligned}$$

a to je ekvivaletné s

$$\begin{aligned} X(t_1) &= x_1 \\ X(t_2) - X(t_1) &= x_2 - x_1 \\ &\dots \\ X(t_n) - X(t_{n-1}) &= x_n - x_{n-1}. \end{aligned}$$

Teda hodnoty procesu vieme ekvivaletne charakterizovať hodnotami prírastkov. Z podmienky 2 definície Brownovho pohybu a z vety 1.2.2 máme, že $X(t_1), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_k) - X(t_{k-1})$ sú nezávislé a normálne rozdelené so strednou hodnotou 0 a disperziou $t_i - t_{i-1}$ čo nám umožní vyjadriť združenú hustotu. Označme pre $t > 0$ f_t hustotu normálneho rozdelenia $\mathcal{N}(0, t)$, potom združená hustota $X(t_1), \dots, X(t_k)$ je daná

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_k) &= f_{t_1}(x_1)f_{t_2-t_1}(x_2 - x_1)\dots f_{t_k-t_{k-1}}(x_k - x_{k-1}) \quad (1.2.3) \\ &= \frac{\exp\{-\frac{1}{2}[\frac{x_1^2}{t_1} + \frac{(x_2-x_1)^2}{t_2-t_1} + \dots + \frac{(x_k-x_{k-1})^2}{t_k-t_{k-1}}]\}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}[t_1(t_2-t_1)\dots(t_k-t_{k-1})]^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Ak definujeme pre $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k$ mieru ν_{t_1, \dots, t_k} na $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B})$ tak, že

$$\begin{aligned} \nu_{t_1, \dots, t_k}(F_1 \times \dots \times F_k) &= \\ &= \int_{F_1 \times \dots \times F_k} f_{t_1}(x_1)f_{t_2-t_1}(x_2 - x_1)\dots f_{t_k-t_{k-1}}(x_k - x_{k-1})dx_1\dots dx_k, \quad F_i \in \mathbb{R}. \quad (1.2.4) \end{aligned}$$

potom, keďže pre každé pevné $x_{i-1} \in \mathbb{R}$ platí $\int_{\mathbb{R}} f_{t_i-t_{i-1}}(x_i - x_{i-1}) dx_i = 1$ pre každé $t_i - t_{i-1} \geq 0$, spĺňa naša miera podmienku 2 vety 1.2.1. Navyiac ak konzistentne rozšírieme túto definíciu pre všetky konečné postupnosti t_i pomocou podmienky 1 vety 1.2.1, tak podľa vety 1.2.1 existuje pravdepodobnostný priestor (Ω, \mathcal{F}, P) a stochastický proces $\{B(t)\}_{t \geq 0}$ na Ω taký, že konečnorozmerné rozdelenia $B(t)$ sú dané vzťahom (1.2.4).

Teraz ukážeme, že proces $\{B(t)\}_{t \geq 0}$ spĺňa podmienky definície 1.1.2. Z (1.2.4) vyplýva $\nu_{t_1, \dots, t_k}(\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}) = 1 = P(B(0) = 0)$ a dostávame podmienku 1 definície 1.1.2. Ďalej nech $Z = (B(t_1), \dots, B(t_k))$, $B(t_i) \in F_i$ je náhodný vektor potom z (1.2.4) charakteristická funkcia Z má tvar

$$E \left[\exp \left(i \sum_{j=1}^k u_j B(t_j) \right) \right] = \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \sum_{m=1}^k u_j c_{jm} u_m \right),$$

kde $c_{jm} = E[B(t_j)B(t_m)]$ je kovariančná matica Z , t. j.

$$C = \begin{pmatrix} t_1 & t_1 & \dots & t_1 \\ t_1 & t_2 & \dots & t_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ t_1 & t_2 & \dots & t_k \end{pmatrix}. \quad (1.2.5)$$

Teda Z pochádza z viacrozmerného normálneho rozdelenia, t.j. $B(t_i) \sim \mathcal{N}(0, t_i)$, čo nám dáva podmienku 3 definície 1.1.2. Na overenie podmienky 2 nám stačí overiť, že

$$E[(B(t_i) - B(t_{i-1})) (B(t_j) - B(t_{j-1}))] = 0, t_i < t_j,$$

čo dostaneme z matice (1.2.5):

$$\begin{aligned} E[B(t_i)B(t_j) - B(t_{i-1})B(t_j) - B(t_i)B(t_{j-1}) + B(t_{i-1})B(t_{j-1})] \\ = (t_i - t_{i-1} - t_i + t_{i-1}) = 0. \end{aligned}$$

Hore uvedeným postupom sa ukazuje existencia Brownovho pohybu napríklad v [1, kapitola 2.2]. Alternatívny postup je Wienerovou vetou, ktorý sa nachádza v [8, kapitola 2.3].

Takto definovaný Brownov pohyb nie je jednoznačný. My si pre naše potreby zvolíme spojitú verziu Brownovho pohybu t.j. $B(t) \in C([0, \infty), \mathbb{R})$. Táto verzia sa nazýva kanonický Brownov pohyb [1, kapitola 2.2].

Najskôr si definujme čo znamená verzia Brownovho pohybu.

Definícia 1.2.1. *Predpokladajme, že $\{X(t)\}$ a $\{Y(t)\}$ sú stochastické procesy na (Ω, \mathcal{F}, P) . Potom hovoríme, že $\{X(t)\}$ je verziou $\{Y(t)\}$ ak*

$$P(\{\omega; X_t(\omega) = Y_t(\omega)\}) = 1, \forall t.$$

Na ukázanie existencie spojitú verziu Brownovho pohybu nám poslúži ďalšia Kolmogorova veta.

Veta 1.2.3. *Predpokladajme, že proces $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ spĺňa nasledujúcu podmienku: pre každé $T > 0$ existujú kladné konštanty α, β, D také, že*

$$E[|X_t - X_s|^\alpha] \leq D \cdot |t - s|^{1+\beta}; 0 \leq s, t \leq T. \quad (1.2.6)$$

Potom existuje spojitá verzia X . [1, veta 2.3.3]

Z vety 1.2.2 máme, že $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ a z vlastnosti normálneho rozdelenia máme $E[Y^4] = 3\sigma^4$ pre $Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Spolu dostávame

$$E[|B_t - B_s|^4] = 3|t - s|^2. \quad (1.2.7)$$

To znamená, že je splnená podmienka (1.2.6) vety 1.2.3 s koeficientami $\alpha = 4$, $D = 3$ a $\beta = 1$ a preto existuje spojitá verzia B_t .

V nasledujúcom texte budeme potrebovať všeobecnejšiu definíciu Brownovho pohybu.

Definícia 1.2.2. *Hovoríme, že $\{X(t), t \geq 0\}$ je proces Brownovho pohybu s koeficientom driftu μ a parametrom variancie σ^2 ak:*

1. $X(0) = 0$;
2. $\{X(t), t \geq 0\}$ má stacionárne a nezávislé prírastky;
3. $X(t)$ sú normálne rozdelené náhodné premenné so strednou hodnotou μt a varianciou $t\sigma^2$.

Ekvivalentnou definíciou je definovať $X(t) = \sigma B(t) + \mu t$, kde $\{B(t), t \geq 0\}$ je štandardizovaný Brownov pohyb. [11, definícia 10.3.1]

2 Stochastický kalkulus a stochastické diferenciálne rovnice

2.1 Itóov integrál

V nasledujúcom texte zavedieme

$$\int_0^t f(s, \omega) dB_s(\omega) \quad (2.1.1)$$

kde $B_t(\omega)$ je jednorozmerný Brownov pohyb so začiatkom v 0 pre istú triedu funkcií $f : [0, \infty] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Integrál (2.1.1) je dôležitým nástrojom pri vyšetrowaní stochastických diferenciálnych rovníc. Konštrukciu integrálu urobíme podľa [1, kapitola 3.1].

2.1.1 Základné pojmy

Na to aby sme definovali integrál (2.1.1) budeme potrebovať nasledujúce definície a pojmy.

Definícia 2.1.1. *Nech $B_t(\omega)$ je jednorozmerný Brownov pohyb. Potom definujeme \mathcal{F}_t ako σ -algebru generovanú náhodnými premennými $B_s(\omega)$; $s \leq t$. Inými slovami, \mathcal{F}_t je najmenšia σ -algebra obsahujúca všetky množiny tvaru*

$$\{\omega; B_{t_1}(\omega) \in F_1, \dots, B_{t_k}(\omega) \in F_k\},$$

kde $t_j \leq t$ a $F_j \subset \mathbb{R}$ sú Borelovské množiny, $j \leq k = 1, 2, \dots$ (Predpokladáme, že všetky množiny miery 0 patria do \mathcal{F}_t).

Definícia 2.1.2. *Nech $\{\mathcal{N}_t\}_{t \geq 0}$ je rastúca postupnosť σ -algebier podmnožím Ω . Proces $g(t, \omega) : [0, \infty] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sa nazýva \mathcal{N}_t -adaptovaný ak pre každé $t \geq 0$ funkcia*

$$\omega \rightarrow g(t, \omega)$$

je \mathcal{N}_t -merateľná.

Teraz popíšeme triedu funkcií pre ktoré bude definovaný Itóov integrál.

Definícia 2.1.3. *Nech $\nu = \nu(S, T)$ je trieda funkcií*

$$f(t, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

taká, že

1. $(t, \omega) \rightarrow f(t, \omega)$ je $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$ -merateľná, kde \mathcal{B} označuje Borelovskú σ -algebru na $[0, \infty)$.
2. $f(t, \omega)$ je \mathcal{F}_t -adaptovaná.
3. $E \left[\int_S^T f(t, \omega)^2 dt \right] < \infty$.

2.1.2 Konštrukcia Itóovho integrálu

Najskôr definujeme Itóov integrál pre jednoduchú triedu funkcií ϕ . Funkcia $\phi \in \nu$ sa nazýva elementárna, ak má tvar

$$\phi(t, \omega) = \sum_j e_j(\omega) [B_{t_{j+1}} - B_{t_j}] (\omega). \quad (2.1.2)$$

Pre jednoduché funkcie $\phi(t, \omega)$ definujeme Itóov integrál:

$$\int_S^T \phi(t, \omega) dB_t(\omega) = \sum_{j \geq 0} e_j(\omega) [B_{t_{j+1}} - B_{t_j}] (\omega). \quad (2.1.3)$$

Ďalej je potrebné ukázať, že každé $f \in \nu$ môžeme aproximovať jednoduchými funkciami. Tu poskytneme iba náčrt postupu, ktorý pozostáva z niekoľkých krokov.

Krok 1. *Nech $g \in \nu$ je ohraničená a $g(\cdot, \omega)$ spojitá pre každé ω . Potom existujú jednoduché funkcie $\phi_n \in \nu$ také, že*

$$E \left[\int_S^T (g - \phi_n)^2 dt \right] \rightarrow 0$$

pre $n \rightarrow \infty$.

Krok 2. *Nech $h \in \nu$ je ohraničená. Potom existujú ohraničené a spojité funkcie $g_n \in \nu$ také, že $g_n(\cdot, \omega)$ je spojitá pre každé ω a n , a*

$$E \left[\int_S^T (h - g_n)^2 dt \right] \rightarrow 0.$$

Krok 3. *Nech $f \in \nu$. Potom existuje postupnosť $\{h_n\} \subset \nu$ taká, že h_n je ohraničená pre každé n a*

$$E \left[\int_S^T (f - h_n)^2 dt \right] \rightarrow 0$$

pre $n \rightarrow \infty$.

Na dokončenie konštrukcie Itóovho integrálu budeme potrebovať nasledujúcu vetu.

Veta 2.1.1 (Itóova izometria). *Ak $\phi(t, \omega)$ je ohraničená a jednoduchá potom*

$$E \left[\left(\int_S^T \phi(t, \omega) dB_t(\omega) \right)^2 \right] = E \left[\int_S^T \phi(t, \omega)^2 dt \right]. \quad (2.1.4)$$

Ak $f \in \nu$ tak vyberieme podľa krokov 1 – 3 jednoduché funkcie $\phi_n \in \nu$ aby platilo

$$E \left[\int_S^T (f - \phi_n)^2 dt \right] \rightarrow 0.$$

Potom definujeme

$$\mathcal{I}[f](\omega) := \int_S^T f(t, \omega) dB_t(\omega) := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_S^T \phi_n(t, \omega) dB_t(\omega).$$

Táto limita existuje ako prvok $L^2(P)$, keďže $\left\{ \int_S^T \phi_n(t, \omega) dB_t(\omega) \right\}$ je podľa (2.1.4) Cauchyovská postupnosť v $L^2(P)$. Teraz môžeme zaviesť Itóov integrál pre každú $f \in \nu$.

Definícia 2.1.4. Nech $f \in \nu(S, T)$. Potom Itóov integrál f (od S do T) je definovaný následovne

$$\int_S^T f(t, \omega) dB_t(\omega) := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_S^T \phi_n(t, \omega) dB_t(\omega) \quad (2.1.5)$$

(limita v $L^2(P)$), kde $\{\phi_n\}$ je postupnosť jednoduchých funkcií takých, že

$$E \left[\int_S^T (f(t, \omega) - \phi_n(t, \omega))^2 dt \right] \rightarrow 0.$$

pre $n \rightarrow \infty$.

2.1.3 Vlastnosti Itóovho integrálu

V tejto časti uvedieme niektoré vlastnosti Itóovho integrálu, ktoré budeme v ďalších kapitolách potrebovať.

Veta 2.1.2. Nech $f, g \in \nu(0, T)$ a nech $0 \leq S < U < T$. Potom

1. $\int_S^T f dB_t = \int_S^U f dB_t + \int_U^T f dB_t$ pre skoro všetky ω
2. $\int_S^T (cf + g) dB_t = c \int_S^T f dB_t + \int_S^T g dB_t$ pre skoro všetky ω
3. $E \left[\int_S^T f dB_t \right] = 0$
4. $\int_S^T f dB_t$ je \mathcal{F}_t -merateľný
5. (Itóova izometria) $E \left[\left(\int_S^T f(t, \omega) dB_t \right)^2 \right] = E \left[\int_S^T f(t, \omega)^2 dt \right]$

V kapitole 4 budeme potrebovať ešte jednu vlastnosť, ktorú uvedieme ako samostatnú vetu.

Veta 2.1.3. Nech $B(s)$ pre $s \geq 0$ je Brownov pohyb a nech $\Delta(s)$ je nenáhodná funkcia času. Definujme $I(t) = \int_0^t \Delta(s) dB(s)$. Potom pre každé $t \geq 0$ je $I(t)$ normálne rozdelená náhodná premenná.

Vety uvádzame bez dôkazu. Dôkazy predchádzajúcich tvrdení sú napríklad v [1, veta 3.2.1] a [15, veta 4.4.9].

2.2 Jednorozmerná Itóova lema

Základná definícia Itóovho integrálu nie je veľmi užitočná na výpočet integrálov tvaru (2.1.1) a práve na to nám poslúži Itóova lema. Itóovu lemu zformulujeme pre tzv. Itóove procesy, alebo tiež stochastické integrály. Ku tomu budeme potrebovať nasledujúce dve definície.

Definícia 2.2.1. Filtrácia (na (ω, \mathcal{F})) je postupnosť $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_t\}_{t \geq 0}$ σ -algebier $\mathcal{M}_t \subset \mathcal{F}$ taká, že

$$0 \leq s < t \Rightarrow \mathcal{M}_s \subset \mathcal{M}_t$$

(t.j. $\{\mathcal{M}_t\}$ je rastúca). Stochastický proces $\{M_t\}_{t \geq 0}$ na (Ω, \mathcal{F}, P) sa nazýva martingál vzhľadom na filtráciu $\{\mathcal{M}_t\}_{t \geq 0}$ (a vzhľadom na P) ak

1. M_t je \mathcal{M}_t -merateľná pre každé t ,
2. $E[|M_t|] < \infty$ pre každé t a
3. $E[M_s | \mathcal{M}_t] = M_t$ pre každé $s \geq t$.

Definícia 2.2.2. $\mathcal{W}_{\mathcal{H}}(S, T)$ označuje triedu funkcií procesov $f(t, \omega) \in \mathbb{R}$ splňajúcich

1. $(t, \omega) \rightarrow f(t, \omega)$ je $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$ -merateľná, kde \mathcal{B} označuje Borelovskú σ -algebru na $[0, \infty)$.
2. Existuje rastúca postupnosť σ -algebier $\mathcal{H}_t; t \geq 0$ taká, že
 - a) B_t je martingál vzhľadom na \mathcal{H}_t a
 - b) f_t je \mathcal{H}_t -adaptovaná.
3. $P \left[\int_S^T f(s, \omega)^2 ds < \infty \right] = 1$

Z dôvodov zjednodušenia značenia položíme $\mathcal{W}_{\mathcal{H}} = \bigcup_{T>0} \mathcal{W}_{\mathcal{H}}(0, T)$.

Teraz môžeme zdefinovať spomínaný Itóov proces.

Definícia 2.2.3 (Jednorozmerný Itóov proces). *Nech B_t je jednorozmerný Brownov pohyb na (Ω, \mathcal{F}, P) . Jednorozmerný Itóov proces (alebo stochastický integrál) je stochastický proces X_t na (Ω, \mathcal{F}, P) tvaru*

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s, \omega) ds + \int_0^t v(s, \omega) dB_s, \quad (2.2.1)$$

kde $v \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}$ je taká, že

$$P \left[\int_0^t v(s, \omega)^2 ds < \infty; \forall t \geq 0 \right] = 1 \quad (2.2.2)$$

(pozri definíciu 2.2.2). Taktiež predpokladáme, že u je \mathcal{H}_t -adaptovaná (kde \mathcal{H}_t je ako v ii definícii 2.2.2) a

$$P \left[\int_0^t |u(s, \omega)| ds < \infty; \forall t \geq 0 \right] = 1. \quad (2.2.3)$$

Niekedy sa (2.2.1) píše v diferenciálnej forme

$$dX_t = u dt + v dB_t. \quad (2.2.4)$$

Teraz môžeme sformulovať Itóovu lemu.

Veta 2.2.1 (Jednorozmerná Itóova lema). *Nech X_t je Itóov proces daný*

$$dX_t = udt + vdB_t.$$

Nech $g(t, x) \in C^2([0, \infty) \times \mathbb{R})$ (t.j. g je dvakrát spojite diferencovateľná na $[0, \infty) \times \mathbb{R}$). Potom

$$Y_t = g(t, X_t)$$

je opäť Itóov proces a

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t) \cdot (dX_t)^2, \quad (2.2.5)$$

kde $(dX_t)^2 = (dX_t) \cdot (dX_t)$ je vypočítané podľa nasledujúcich pravidiel

$$dt \cdot dt = dt \cdot dB_t = dB_t \cdot dt = 0, \quad dB_t \cdot dB_t = dt. \quad (2.2.6)$$

Náčrt dôkazu sa nachádza napríklad v [1, veta 4.1.2].

2.3 Stochastické diferenciálne rovnice

Nech proces X_t spĺňa stochastickú integrálnu rovnicu

$$X_T = X_t + \int_t^T b(s, X_s)ds + \int_t^T \sigma(s, X_s)dB_s, \quad \text{pre } t \leq T \quad (2.3.1)$$

alebo v diferenciálnej forme

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t. \quad (2.3.2)$$

Rovnicu tvaru (2.3.2) nazývame stochastickou diferenciálnou rovnicou. Daným funkciám $b(t, x)$ a $\sigma(t, x)$ hovoríme *drift* a *difúzia*. K tejto rovnici je navyše daná počiatočná podmienka v tvare $X_0 = x$ a $x \in \mathbb{R}$.

3 Geometrický Brownov pohyb

3.1 Riešenie stochastickej diferenciálnej rovnice geometrického Brownovho pohybu

Majme stochastickú diferenciálnu rovnicu

$$dS(t) = rS(t)dt + \alpha S(t)dB(t), \quad (3.1.1)$$

alebo inak zapísané

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = rdt + \alpha dB(t), \quad (3.1.2)$$

kde r a α sú konštanty. Teda

$$\int_0^t \frac{dS(s)}{S(s)} = rt + \alpha B(t), \quad (3.1.3)$$

kde sme využili, to že $B(t)$ je Brownov pohyb a teda z vlastnosti 1 definície 1.1.2 platí, že $B(0) = 0$. Na výpočet integrálu vľavo použijeme Itóovu lemu pričom zvolíme

$$g(t, x) = \ln(x); \quad x > 0 \quad (3.1.4)$$

a dostávame

$$d(\ln(S(t))) = \frac{dS(t)}{S(t)} - \frac{(dS(t))^2}{2S(t)^2} = \frac{dS(t)}{S(t)} - \frac{\alpha^2}{2}dt. \quad (3.1.5)$$

Teda

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = d(\ln(S(t))) + \frac{\alpha^2}{2}dt \quad (3.1.6)$$

a po dosadení (3.1.6) do (3.1.3) máme

$$\int_0^t \frac{dS(s)}{S(s)} = \int_0^t [d(\ln(S(s))) + \frac{\alpha^2}{2}ds] = \ln\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right) + \frac{\alpha^2}{2}t = rt + \alpha B(t). \quad (3.1.7)$$

Riešením stochastickej diferenciálnej rovnice (3.1.1) je teda

$$\ln\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right) = \left(r - \frac{\alpha^2}{2}\right)t + \alpha B(t) \quad (3.1.8)$$

alebo

$$S(t) = S(0) \exp\left[\left(r - \frac{\alpha^2}{2}\right)t + \alpha B(t)\right]. \quad (3.1.9)$$

Stochastický proces $S(t)$, ktorý je riešením stochastickej diferenciálnej rovnice (3.1.1) sa nazýva geometrický Brownov pohyb.

Definícia 3.1.1. Ak $\{Y(t), t \geq 0\}$ je proces Brownovho pohybu s koeficientom driftu μ a parametrom variancie σ , t.j. $Y(t) = \mu t + \sigma B(t)$, kde $B(t)$ je štandardizovaný Brownov pohyb, potom proces $\{X(t), t \geq 0\}$ definovaný nasledovne

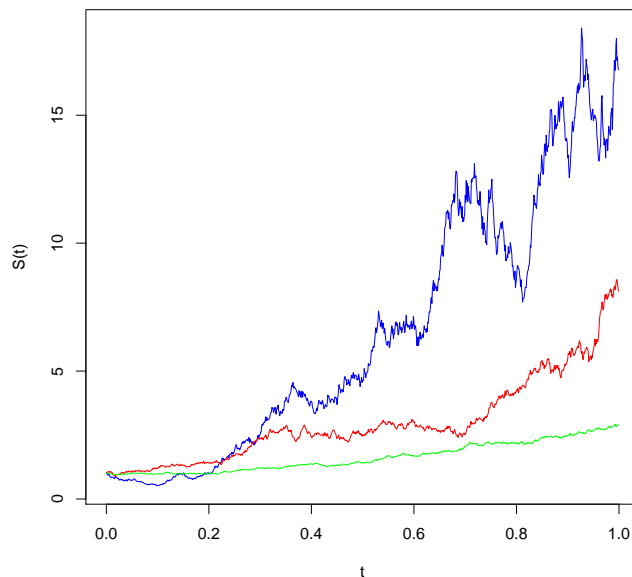
$$X(t) = e^{Y(t)} \quad (3.1.10)$$

nazývame geometrický Brownov pohyb. [11, kapitola 10.3.2]

Riešenie (3.1.9) teda definuje geometrický Brownov pohyb s parametrami

$$\mu = r - \frac{\alpha^2}{2}, \quad \sigma = \alpha \quad (3.1.11)$$

a s počiatočnou podmienkou $S(0) = s$, $s \in \mathbb{R}$. Ako vidno z obrázku 3.1.1,



Obr. 3.1.1: Ukážka troch priebehov geometrického Brownovho pohybu s počiatočnou podmienkou $S(0) = 1$ a s hodnotami parametrov: **modrá** $r = 2.1$, $\alpha = 0.9$, **červená** $r = 1.7$, $\alpha = 0.6$ a **zelená** $r = 1.1$, $\alpha = 0.3$.

parameter μ pri deterministickej časti výrazu (3.1.10) určuje rýchlosť rastu procesu a parameter σ určuje veľkosť volatility.

3.2 Vlastnosti geometrického Brownovho pohybu

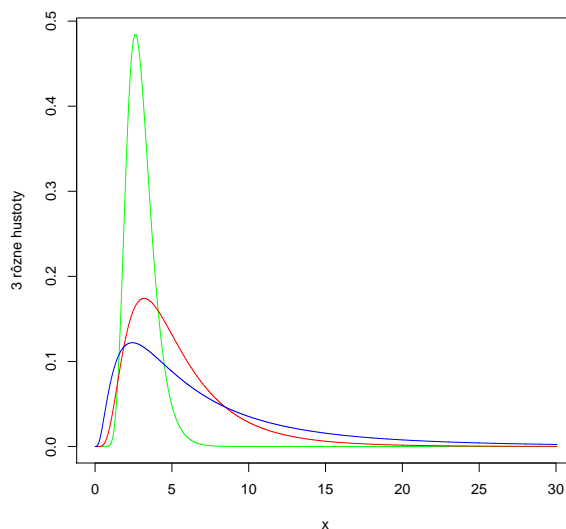
V nasledujúcej časti popíšeme niektoré vlastnosti geometrického Brownovho pohybu ako pravdepodobnostné rozdelenie, strednú hodnotu a disperziu. Naďalej budeme pracovať so stochastickou diferenciálnou rovnicou (3.1.1) a jej riešením (3.1.9).

3.2.1 Pravdepodobnostné rozdelenie Brownovho pohybu

Nech $Y(t)$ je Brownov pohyb t.j. $X(t) \sim N\left((r - \frac{\alpha^2}{2})t, \alpha^2 t\right)$. Teda proces $S(t)$ má lognormálne rozdelenie a jeho hustota má tvar

$$f_{S(t)}(s; r, \alpha, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{s\alpha\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{(\ln(s) - \ln(S(0)) - (r - \frac{1}{2}\alpha^2)t)^2}{2\alpha^2 t}\right] \quad [17]. \quad (3.2.1)$$

Príklad hustot lognormálneho rozdelenia uvádzame v obrázku 3.2.1.



Obr. 3.2.1: Ukážka troch hustot lognormálneho rozdelenia s počiatočnou podmienkou $S(0) = 1$, v čase $t = 1$ a s hodnotami parametrov: **modrá** $r = 2.1$, $\alpha = 0.9$, **červená** $r = 1.7$, $\alpha = 0.6$ a **zelená** $r = 1.1$, $\alpha = 0.3$.

3.2.2 Momenty geometrického Brownovho pohybu

Zo strednej hodnoty lognormálneho rozdelenia¹ dostávame, že

$$E[S(t)] = S(0) \exp(rt). \quad (3.2.2)$$

Všeobecnejší postup použijeme na výpočet $E[S(t)^\beta]$ pre $\beta \in \mathbb{R}$. Použitím Itóovej lemy (veta 2.2.1), kde $S(t)^\beta = e^{\beta X(t)}$ a $S(t)$ je geometrický Brownov pohyb z definície 3.1.1, dostávame

$$dS(t)^\beta = \left[\beta \left(r - \frac{\alpha^2}{2} \right) + \frac{\beta^2 \alpha^2}{2} \right] S(t)^\beta dt + \alpha \beta S(t)^\beta dB(t) \quad (3.2.3)$$

alebo

$$S(t)^\beta = S(0)^\beta + \left[\beta \left(r - \frac{\alpha^2}{2} \right) + \frac{\beta^2 \alpha^2}{2} \right] \int_0^t S(s)^\beta ds + \alpha \beta \int_0^t S(s)^\beta dB(s). \quad (3.2.4)$$

Z vlastnosti 3 vety 2.1.2 platí, že $E[\int_0^t S(s)^\beta dB(s)] = 0$, dostávame

$$E[S(t)^\beta] = E[S(0)^\beta] + \left[\beta \left(r - \frac{\alpha^2}{2} \right) + \frac{\beta^2 \alpha^2}{2} \right] \int_0^t E[S(s)^\beta] ds \quad (3.2.5)$$

alebo inak zapísané

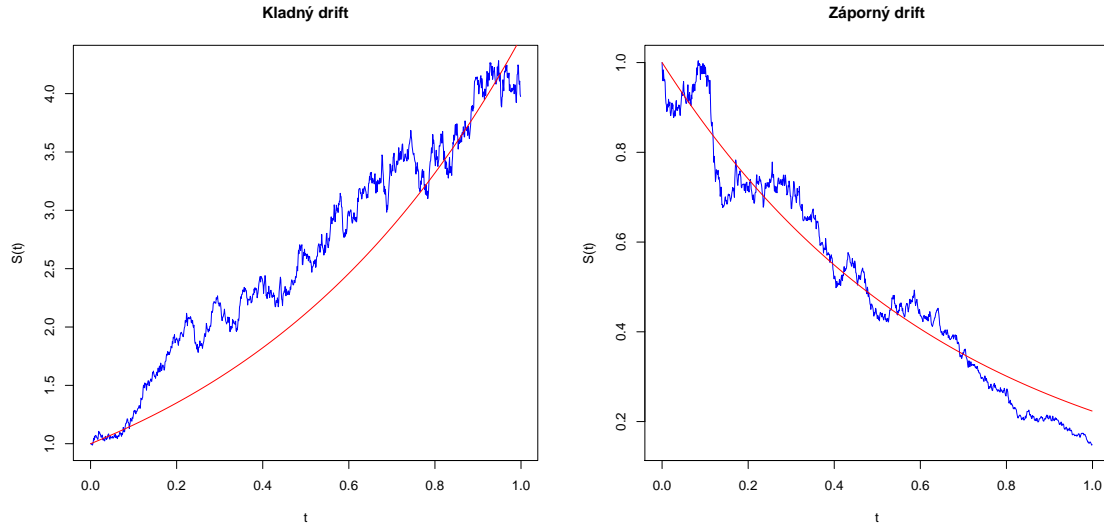
$$\frac{dE[S(t)^\beta]}{dt} = \left[\beta \left(r - \frac{\alpha^2}{2} \right) + \frac{\beta^2 \alpha^2}{2} \right] E[S(t)^\beta], \quad E[S(0)^\beta] = S(0)^\beta. \quad (3.2.6)$$

¹Stredná hodnota lognormálneho rozdelenia je daná $\mu = e^{M + \frac{\sigma^2}{2}}$ pre hustotu v tvare $f(x) = \frac{1}{S\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{(\ln x - M)^2}{2\sigma^2}}$ [17].

Riešením tejto obyčajnej diferenciálnej rovnice s počiatočnou podmienkou je

$$E[S(t)^\beta] = S(0)^\beta \exp \left[\beta \left(r - \frac{\alpha^2}{2} \right) t + \frac{\beta^2 \alpha^2}{2} t \right] \quad (3.2.7)$$

pre $S(t)$ v čase $t = 0$ dané. Ako špeciálny prípad dostávame vyjadrenie pre strednú hodnotu (3.2.2) pre $\beta = 1$. Vizualný priebeh strednej hodnoty ilustruje obrázok 3.2.2.



Obr. 3.2.2: Ukážka strednej hodnoty geometrického Brownovho pohybu. **Vľavo** pre kladnú hodnotu koeficientu driftu $\mu > 0$ a **vpravo** pre zápornú hodnotu koeficientu driftu $\mu < 0$.

3.2.3 Interval spoľahlivosti pre geometrický Brownov pohyb

Nech $S(t) = S(0) \exp \left[\left(r - \frac{\alpha^2}{2} \right) t + \alpha B(t) \right]$ potom $\ln(S(t)) = \ln(S(0)) + \left(r - \frac{\alpha^2}{2} \right) t + \alpha B(t)$ a z vlastnosti 3 definície Brownovho pohybu s driftom (definícia 1.2.2) platí

$$\ln(S(t)) \sim \mathcal{N} \left(\ln(S(0)) + \left(r - \frac{\alpha^2}{2} \right) t, \alpha^2 t \right) \quad (3.2.8)$$

alebo po úprave

$$\frac{\ln(S(t)) - \ln(S(0)) - \left(r - \frac{\alpha^2}{2} \right) t}{\sqrt{\alpha^2 t}} \sim \mathcal{N}(0, 1). \quad (3.2.9)$$

Pre $\ln(S(t))$ dostaneme $100(1 - \beta)\%$ -ný dvojstranný bodový interval spoľahlivosti

$$P \left(-u \left(\frac{\beta}{2} \right) \leq \frac{\ln(S(t)) - \ln(S(0)) - \left(r - \frac{\alpha^2}{2} \right) t}{\sqrt{\alpha^2 t}} \leq u \left(\frac{\beta}{2} \right) \right) = 1 - \beta, \quad (3.2.10)$$

kde $u \left(\frac{\beta}{2} \right)$ je kvantil rozdelenia $N(0, 1)$. Teda $100(1 - \beta)\%$ -ný obojstranný bodový interval spoľahlivosti pre $S(t)$ je

$$P \left(S(0) e^{\left(r - \frac{\alpha^2}{2} \right) t - u \left(\frac{\beta}{2} \right) \sqrt{\alpha^2 t}} \leq S(t) \leq S(0) e^{\left(r - \frac{\alpha^2}{2} \right) t + u \left(\frac{\beta}{2} \right) \sqrt{\alpha^2 t}} \right) = 1 - \beta. \quad (3.2.11)$$

Alternatívne, ak označíme $U(t) = \frac{\ln(S(t)) - \ln(S(0)) - \left(r - \frac{\alpha^2}{2}\right)t}{\sqrt{\alpha^2 t}}$, tak zo vzťahu (3.2.9) a zo vzťahu s_β a u_β

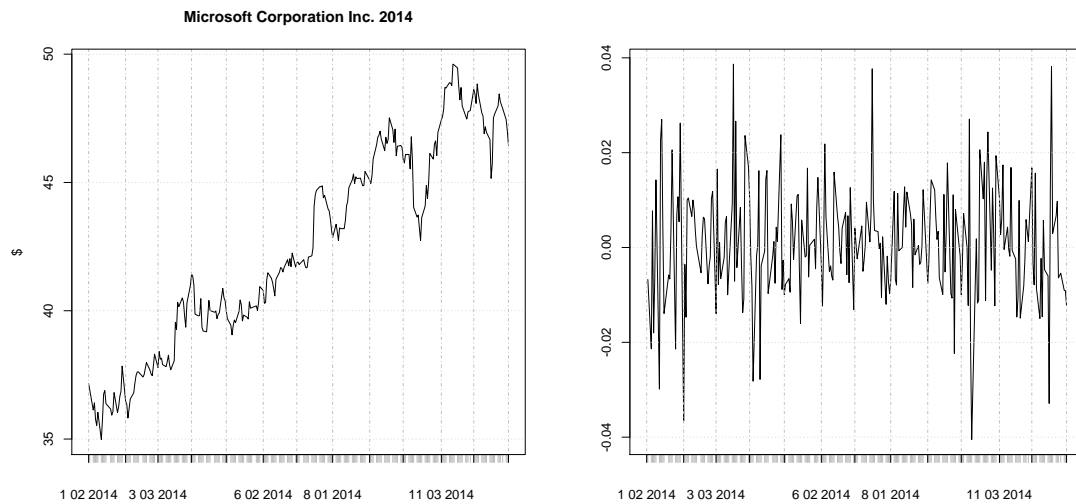
$$s_\beta = S(0)e^{\left(r - \frac{\alpha^2}{2}\right)t + u_\beta\sqrt{\alpha^2 t}},$$

kde s_β je hodnota taká, že $P[S(t) < s_\beta] = \beta$ a , môžeme písať

$$P\left(s_{\frac{\beta}{2}} \leq S(t) \leq s_{1-\frac{\beta}{2}}\right) = 1 - \beta,$$

kde $s_{\frac{\beta}{2}}$ a $s_{1-\frac{\beta}{2}}$ sú príslušné kvantily log-normálneho rozdelenia s parametrami $\mu = \ln(S(0)) + \left(r - \frac{\alpha^2}{2}\right)t$ a $\sigma^2 = \alpha^2 t$.

3.3 Geometrický Brownov pohyb a finančné modelovanie



Obr. 3.3.1: **Vľavo:** Priebeh denných close cien Microsoft Corporation Inc. za rok 2014. **Vpravo:** $\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$, kde S_t je hodnota close akcie v čase t .

Geometrický Brownov pohyb je užitočný pri modelovaní časového priebehu cien akcií, ak sa zdá, že percentuálne zmeny ceny sú nezávislé a rovnako rozdelené [11, kapitola 10.3.2]. Predpokladajme, že S_n je cena cenného papiera v čase n . Potom sa zdá byť rozumné predpokladať, že $\frac{S_n}{S_{n-1}}$, $n \geq 1$ sú nezávislé a normálne rozdelené náhodné premenné. Položme

$$Y_n = \frac{S_n}{S_{n-1}} \quad (3.3.1)$$

alebo

$$S_n = Y_n S_{n-1}. \quad (3.3.2)$$

Iterovaním dostaneme

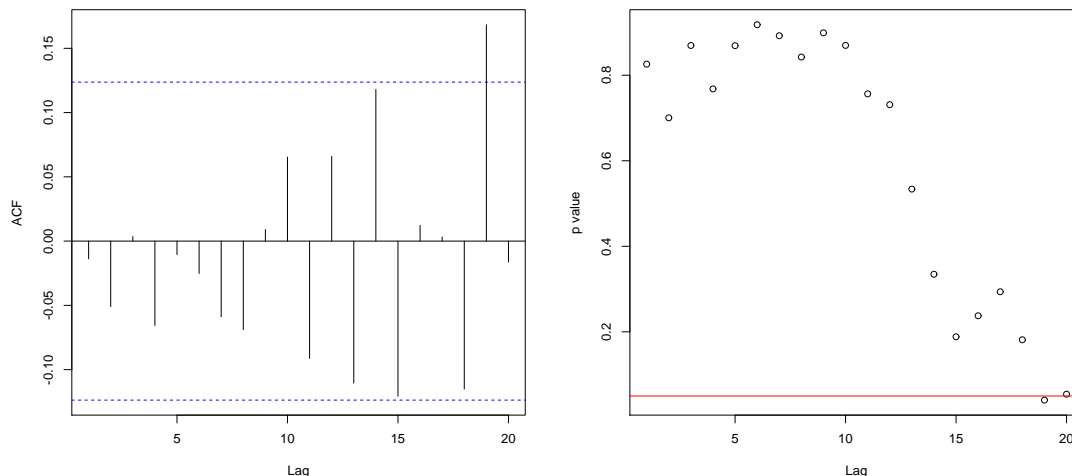
$$S_n = Y_n S_{n-1} = Y_n Y_{n-1} S_{n-2} = \dots = Y_n Y_{n-1} \dots Y_1 S_0. \quad (3.3.3)$$

Teda

$$\ln(S_n) = \sum_{i=1}^n \ln(Y_i) + \ln(S_0). \quad (3.3.4)$$

Keďže $\ln(Y_i)$, $i \geq 1$ sú nezávislé normálne rozdelené náhodné premenné bude $\{\ln(S_n)\}$ po znormovaní približne Brownov pohyb s driftom a $\{S_n\}$ približne geometrický Brownov pohyb (pozri kapitolu 1 o Brownovom pohybe pre $\ln(\frac{S_n}{S_0}) = \sum_{i=1}^n \ln(Y_i)$ [11]).

Pokúsime sa teraz ukázať, že predpoklad nezávislosti logaritmu percentuálnej



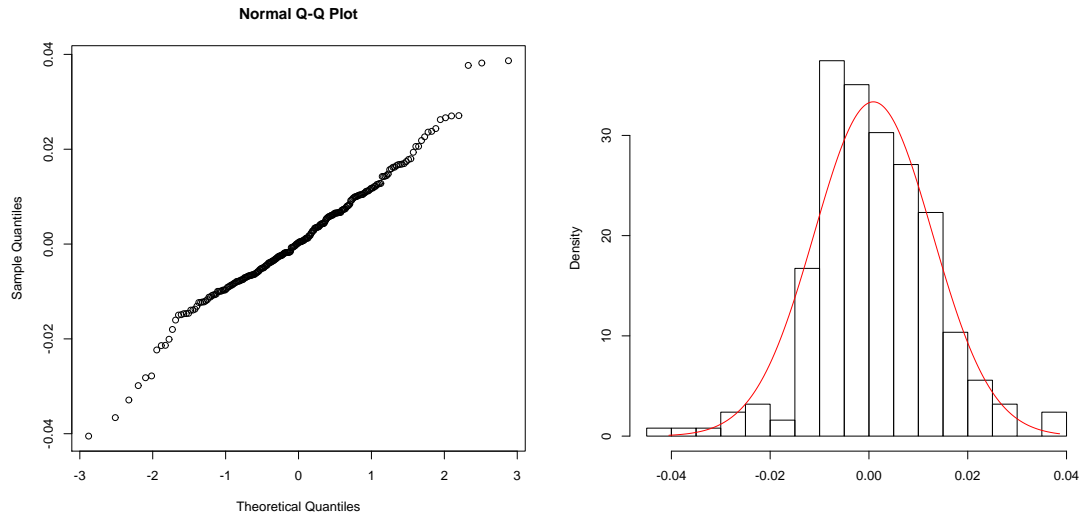
Obr. 3.3.2: **Vľavo:** Hodnoty autokorelačnej funkcie pre hodnoty lag 1 až 20. - - - - značí hranice intervalov na testovanie $\rho(\tau) = 0$ pre každé τ samostatne. **Vpravo:** p-hodnoty Ljung-Box testu pre rôzne hodnoty lag. — značí p-hodnotu = 0.05.

zmeny cien akcií je splnený na denných close dátach akcii Microsoft Corporation. Časový priebeh ceny a $\ln(\frac{S_t}{S_{t-1}})$ ilustruje obrázok 3.3.1. Na testovanie nezávislosti použijeme autokoreláciu a Ljungov-Boxov test. Ljungov - Boxov test testuje nulovú hypotézu $H_0 : \rho(\tau) = 0$ pre každé $\tau = 1, 2, \dots, m$, $m < T$, kde

$$\rho(\tau) = \frac{E[(S_t - \mu)(S_{t+\tau} - \mu)]}{E[(S_t - \mu)^2]}$$

je tzv. autokorelačná funkcia a T je rozsah pozorovaní [9, kapitola 1]. Obrázok 3.3.2 vpravo ukazuje p-hodnoty Ljungovho-Boxovho testu pre hodnoty parametra m od 1 až po 20. Ako vidno z obrázku, p-hodnota je menej ako 0.05 iba pre hodnotu parametra $m = 19$. Navyše hodnoty $\ln(\frac{S_t}{S_{t-1}})$ vykazujú známky, že pochádzajú z normálneho rozdelenia (obrázok 3.3.3), čo potvrdzuje aj Kolmogorov - Smirnovov test, kde nám p-hodnota vyšla 0.535. Teda predpoklad, že $\ln(Y_i)$ pre $i \geq 1$ sú nezávislé a pochádzajú z normálneho rozdelenia sa zdá byť pre logaritmus podielu denných close hodnôt Microsoft Corporation Inc. za rok 2014 opodstatnený. Ak prejdeme ku spojitému času, podobne ako v prípade limity náhodnej prechádzky, je $\left\{ \ln\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right) \right\}$ Brownov pohyb a $\{S(t)\}$ je geometrický Brownov pohyb.

Na základe predchádzajúcich úvah budeme používať geometrický Brownov pohyb ako model cien akcií. Historicky vznikol práve na tento účel ako modifikácia, modelu ktorý použil Bachelier [12].



Obr. 3.3.3: **Vľavo:** Q-Q plot na dátach $\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$. **Vpravo:** Porovnanie histogramu dát $\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$ a hustoty normálneho rozdelenia.

3.3.1 Odhady parametrov geometrického Brownovho pohybu

Nech $S(t) = S(0) \exp\left(\left(r - \frac{\alpha^2}{2}\right)t + \alpha B(t)\right)$. Potom pre diskretizáciu $S(t)$ platí

$$\ln\left(\frac{S(t)}{S(t-\Delta t)}\right) = \left(r - \frac{\alpha^2}{2}\right)\Delta t + \alpha(B(t) - B(t-\Delta t)). \quad (3.3.5)$$

Z defície Brownovho pohybu vyplýva, že

$$\ln\left(\frac{S(t)}{S(t-\Delta t)}\right) \sim \mathcal{N}\left(\left(r - \frac{\alpha^2}{2}\right)\Delta t, \alpha^2\Delta t\right). \quad (3.3.6)$$

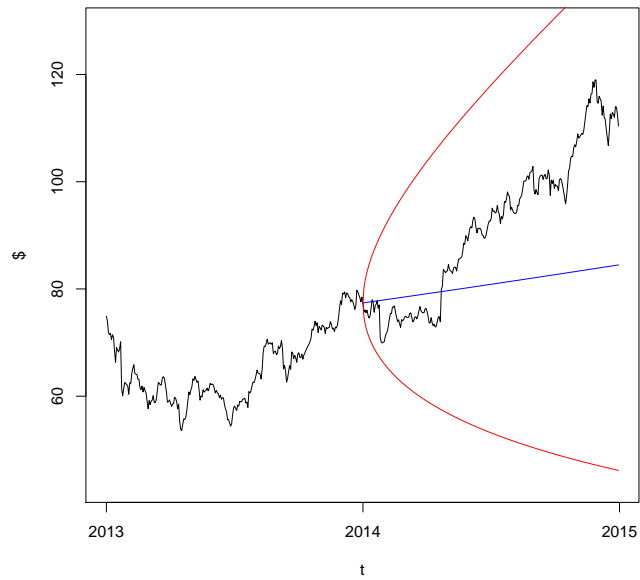
Odhadom $\left(r - \frac{\alpha^2}{2}\right)\Delta t$ je teda výberový priemer m a odhadom $\alpha^2\Delta t$ je výberová disperzia s^2 z $\ln\left(\frac{S(t)}{S(t-\Delta t)}\right)$. Následne po úprave dostávame odhady parametrov

$$\hat{r} = \frac{m}{\Delta t} + \frac{\hat{\alpha}^2}{2}, \quad \hat{\alpha} = \sqrt{\frac{s^2}{\Delta t}}. \quad (3.3.7)$$

3.3.2 Príklad použitia odhadov parametrov geometrického Brownovho pohybu na predikciu priebehu ceny akcie

Predchádzajúce úvahy teraz použijeme na predikciu priebehu ceny akcie Apple Inc. Na odhad sme použili denné hodnoty close z roku 2013. Na overenie podmienky normality $\ln\left(\frac{S(t)}{S(t-\Delta t)}\right)$ sme použili Kolmogorovov-Smirnovov test, kde $\Delta t = 1/252$. P-hodnota Kolmogorovho - Smirnovovho testu bola 0.141. Hodnoty odhadov parametrov sme dostali $\hat{\alpha} = 0.2878715$ a $\hat{r} = 0.08805954$. Obrázok 3.3.4 ilustruje priebeh ceny akcie, predikciu strednej hodnoty v roku 2014 a bodový interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu.

Na záver ešte spomenieme, že stredná hodnota a intervaly spoľahlivosti by boli presné, ak by sme mali presné hodnoty parametrov, ale my máme len odhady.



Obr. 3.3.4: Ukážka použitia odhadov parametrov modelu geometrického Brownovho pohybu na dátach Apple Inc. na predikciu vývoja ceny akcie v roku 2014. — označuje strednú hodnotu GBP s odhadnutými parametrami a — označuje 95%-ný bodový pás spoľahlivosti.

4 Ornstein - Uhlenbeckov proces

4.1 Riešenie stochastickej diferenciálnej rovnice Ornstein - Uhlenbeckovho procesu

Majme stochastickú diferenciálnu rovnicu

$$dX_t = \theta(\mu - X_t)dt + \sigma dB_t \quad (4.1.1)$$

s počiatočnou podmienkou X_0 , kde $\theta > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ a $\sigma > 0$ sú konštanty a B_t je Brownov pohyb.

Danú stochastickú diferenciálnu rovnicu vyriešime použitím Itóovej lemy, kde funkcia

$$g(t, x) = xe^{\theta t}; \quad t \geq 0 \quad (4.1.2)$$

a dostávame

$$d(X_t e^{\theta t}) = \theta X_t e^{\theta t} dt + e^{\theta t} dX_t = \theta \mu e^{\theta t} dt + \sigma e^{\theta t} dB_t. \quad (4.1.3)$$

Po integrovaní od 0 do t dostávame

$$X_t e^{\theta t} - X_0 = \int_0^t \theta \mu e^{\theta s} ds + \int_0^t \sigma e^{\theta s} dB_s. \quad (4.1.4)$$

Teda

$$X_t = X_0 e^{-\theta t} + \mu(1 - e^{-\theta t}) + \int_0^t \sigma e^{-\theta(t-s)} dB_s, \quad 0 \leq t < \infty. \quad (4.1.5)$$

Proces $\{X(t), t \geq 0\}$ sa nazýva Ornstein - Uhlenbeckov proces. Langevin v roku 1908 bol priekopníkom prístupu ku Brownovmu pohybu zameranému na dynamickú rovnicu (4.1.1), kde X_t predstavuje rýchlosť voľnej častice s hmotnosťou m v poli pozostávajúcom z tretej a fluktuáčnej sily. Ak položíme v (4.1.1) $\theta = -\alpha$, kde α je koeficient trenia, $\mu = 0$ a $\sigma^2 = \frac{2\alpha kT}{m}$, kde T je teplota a k je Boltzmannova konštanta, tak dostaneme tvar rovnice (4.1.1), ktorý navrhol Langevin [8, poznámky 5.10 ku časti 5.6]. Ornstein - Uhlenbeckov proces sa používa taktiež v ekonómii pri modelovaní úrokových mier [16].

4.2 Vlastnosti Ornstein - Uhlenbeckovho procesu

V nasledujúcej časti odvodíme podmienenú strednú hodnotu a podmienenú disperziu procesu (4.1.5), ktorý je riešením stochastickej diferenciálnej rovnice (4.1.1) s počiatočnou podmienkou X_0 v čase $t = 0$.

4.2.1 Pravdepodobnostné rozdelenie Ornstein - Uhlenbeckovho procesu

Z vety 2.1.3 priamo dostávame, že $X(t)$ pochádza z normálneho rozdelenia.

4.2.2 Momenty Ornstein - Uhlenbeckovho procesu

Pre podmienenú strednú hodnotu $X(t)$ pri danom X_0 máme

$$E[X_t|X_0] = X_0e^{-\theta t} + \mu(1 - e^{-\theta t}) + E\left[\int_0^t \sigma e^{-\theta(t-s)} dB_s\right]. \quad (4.2.1)$$

Z vlastnosti 3 Itóovho integrálu (veta 2.1.2) vyplýva, že $E[\int_0^t \sigma e^{-\theta(t-s)} dB_s] = 0$ a dostávame

$$E[X_t|X_0] = X_0e^{-\theta t} + \mu(1 - e^{-\theta t}). \quad (4.2.2)$$

Pre varianciu X_t dostávame

$$Var[X_t|X_0] = Var\left[\int_0^t \sigma e^{-\theta(t-s)} dB_s\right] = E\left[\left(\int_0^t \sigma e^{-\theta(t-s)} dB_s\right)^2\right] \quad (4.2.3)$$

a použitím Itoóvej izometrie (veta 2.1.2 vlastnosť 5) máme

$$\begin{aligned} E\left[\left(\int_0^t \sigma e^{-\theta(t-s)} dB_s\right)^2\right] &= E\left[\int_0^t (\sigma e^{-\theta(t-s)})^2 ds\right] \\ &= \int_0^t (\sigma e^{-\theta(t-s)})^2 ds \\ &= \sigma^2 e^{-2\theta t} \int_0^t e^{2\theta s} ds \\ &= \frac{\sigma^2}{2\theta} (1 - e^{-2\theta t}). \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Teda

$$Var[X_t|X_0] = \frac{\sigma^2}{2\theta} (1 - e^{-2\theta t}). \quad (4.2.5)$$

Spolu pre Ornstein-Uhlenbeckov proces X_t dostávame

$$(X_t|X_0) \sim \mathcal{N}\left(X_0e^{-\theta t} + \mu(1 - e^{-\theta t}), \frac{\sigma^2}{2\theta}(1 - e^{-2\theta t})\right). \quad (4.2.6)$$

Poznamenajme, že ak budeme uvažovať $t \rightarrow \infty$, tak

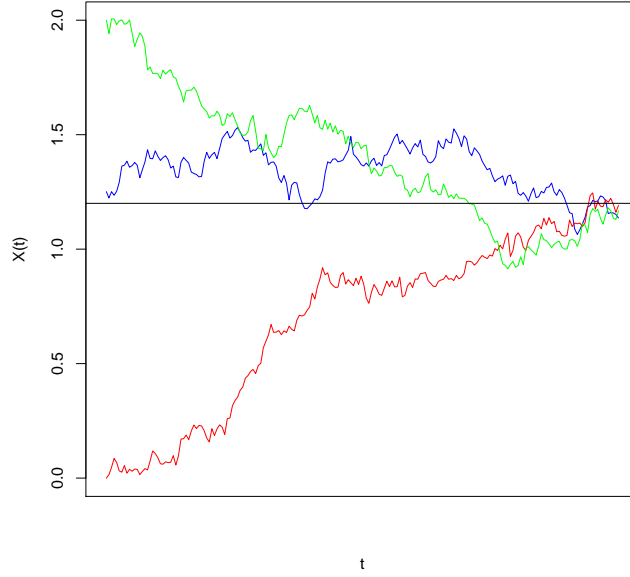
$$X_\infty \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{2\theta}\right). \quad (4.2.7)$$

Teda proces sa približuje s časom ku svojmu dlhodobému priemeru. Takýto proces sa nazýva mean-reverting. Túto vlastnosť ilustruje obrázok 4.2.1. Hodnoty priebehu procesu sme dostali použitím Eulerej-Marujamovej metódy [14, algoritmus 1.11] pre numerický vypočet stochastickej diferenciálnej rovnice (3.1.1).

4.2.3 Intervaly spoľahlivosti pre Ornstein - Uhlenbeckov proces

Z (4.2.6) platí, že

$$X_t \sim \mathcal{N}\left(X_0e^{-\theta t} + \mu(1 - e^{-\theta t}), \frac{\sigma^2}{2\theta}(1 - e^{-2\theta t})\right) \quad (4.2.8)$$



Obr. 4.2.1: Ukážka troch vzoriek priebehu Ornstein-Uhlenbeckovho procesu s hodnotami parametrov $\theta = 1$, $\mu = 1.2$, $\sigma = 0.3$ a s rôznymi počiatocnými podmienkam: **modrá** $X(0) \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{2\theta})$, **červená** $X(0) = 0$ a **zelená** $X(0) = 2$. — označuje μ .

alebo po úprave

$$\frac{X_t - X_0 e^{-\theta t} - \mu(1 - e^{-\theta t})}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\theta}(1 - e^{-2\theta t})}} \sim \mathcal{N}(0, 1). \quad (4.2.9)$$

Teda $100(1 - \alpha)\%$ -ný interval spoľahlivosti pre Ornstein-Uhlenbeckov proces dostaneme z rovnosti

$$P\left(-u\left(\frac{\alpha}{2}\right) \leq \frac{X_t - X_0 e^{-\theta t} - \mu(1 - e^{-\theta t})}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\theta}(1 - e^{-2\theta t})}} \leq u\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = 1 - \alpha, \quad (4.2.10)$$

z ktorej dostávame hľadaný $100(1 - \alpha)\%$ -ný interval spoľahlivosti

$$\begin{aligned} P\left[-u\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sqrt{\frac{\sigma^2}{2\theta}(1 - e^{-2\theta t})} + X_0 e^{-\theta t} + \mu(1 - e^{-\theta t}) \leq X_t \leq \right. \\ \left. \leq u\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sqrt{\frac{\sigma^2}{2\theta}(1 - e^{-2\theta t})} + X_0 e^{-\theta t} + \mu(1 - e^{-\theta t})\right] = 1 - \alpha. \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

4.3 Odhad parametrov Ornstein - Uhlenbeckovho procesu

Odhady parametrov Ornstein - Uhlenbeckovho modelu budeme robiť pomocou metódy maximálnej vierohodnosti. Z predchádzajúcej časti pre $t_{i-1} < t_i$ máme

$$X_{t_i} = X_{t_{i-1}} e^{-\theta(t_i - t_{i-1})} + \mu(1 - e^{-\theta(t_i - t_{i-1})}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sigma e^{-\theta(t_i - s)} dB_s, \quad (4.3.1)$$

kde X_{t_i} je normálne rozdelená náhodná premenná so strednou hodnotou

$$E[X_{t_i}|X_{t_{i-1}}] = X_{t_{i-1}}e^{-\theta(t_i-t_{i-1})} + \mu(1 - e^{-\theta(t_i-t_{i-1})}) \quad (4.3.2)$$

a s varianciou

$$Var[X_{t_i}|X_{t_{i-1}}] = \frac{\sigma^2}{2\theta}(1 - e^{-2\theta(t_i-t_{i-1})}). \quad (4.3.3)$$

Teda podmienená hustota $X_{t_i}|X_{t_{i-1}}$ je

$$f(x_{t_i}|x_{t_{i-1}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tilde{\sigma}^2}} \exp \left[-\frac{x_{t_i} - x_{t_{i-1}}e^{-\theta(t_i-t_{i-1})} - \mu(1 - e^{-\theta(t_i-t_{i-1})})}{2\tilde{\sigma}^2} \right], \quad (4.3.4)$$

kde

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{\sigma^2}{2\theta}(1 - e^{-2\theta(t_i-t_{i-1})}). \quad (4.3.5)$$

Položme $t_i - t_{i-1} = \Delta t$ pre $i = 1, \dots, n$. To znamená, že medzi dvoma pozorovaniami je rovnaký časový interval Δt . Pre vektor pozorovaní $x = [x_{t_0}, x_{t_1}, \dots, x_{t_n}]$ procesu X_t je virohodnostná funkcia daná

$$L(x, \mu, \theta, \tilde{\sigma}) = \prod_{i=1}^n f(x_{t_i}|x_{t_{i-1}}). \quad (4.3.6)$$

Označíme prirodzený logaritmus virohodnostnej funkcie

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, \mu, \theta, \tilde{\sigma}) &= \ln[L(x, \mu, \theta, \tilde{\sigma})] = \\ &= -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - n \ln(\tilde{\sigma}) - \frac{1}{2\tilde{\sigma}^2} \sum_{i=1}^n [x_{t_i} - x_{t_{i-1}}e^{-\theta\Delta t} - \mu(1 - e^{-\theta\Delta t})]^2. \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

V literatúre sú dostupné vzorce pre odhady (napríklad [3, kapitola 3.2.1]), ale väčšinou sa uvádzajú bez výpočtu a preto sme výpočet urobili podľa [18]. Odhady parametrov určíme riešením systému rovníc

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x, \mu, \theta, \tilde{\sigma})}{\partial \mu} = \frac{(1 - e^{-\theta\Delta t})}{\tilde{\sigma}^2} \sum_{i=1}^n [x_{t_i} - x_{t_{i-1}}e^{-\theta\Delta t} - \mu(1 - e^{-\theta\Delta t})] = 0, \quad (4.3.8)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x, \mu, \theta, \tilde{\sigma})}{\partial \theta} = -\frac{\Delta t e^{-\theta\Delta t}}{\tilde{\sigma}^2} \sum_{i=1}^n [(x_{t_i} - \mu)(x_{t_{i-1}} - \mu) - e^{-\theta\Delta t}(x_{t_{i-1}} - \mu)^2] = 0, \quad (4.3.9)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x, \mu, \theta, \tilde{\sigma})}{\partial \tilde{\sigma}} = -\frac{n}{\tilde{\sigma}} + \frac{1}{\tilde{\sigma}^3} \sum_{i=1}^n [x_{t_i} - x_{t_{i-1}}e^{-\theta\Delta t} - \mu(1 - e^{-\theta\Delta t})]^2 = 0, \quad (4.3.10)$$

alebo inak zapísané

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^n (x_{t_i} - x_{t_{i-1}}e^{-\theta\Delta t})}{n(1 - e^{-\theta\Delta t})}, \quad (4.3.11)$$

$$\theta = -\frac{1}{\Delta t} \ln \left[\frac{\sum_{i=1}^n (x_{t_i} - \mu)(x_{t_{i-1}} - \mu)}{\sum_{i=1}^n (x_{t_{i-1}} - \mu)^2} \right], \quad (4.3.12)$$

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [x_{t_i} - x_{t_{i-1}}e^{-\theta\Delta t} - \mu(1 - e^{-\theta\Delta t})]^2. \quad (4.3.13)$$

Rovnice vyriešime dosadením najskôr (4.3.12) do (4.3.11)

$$n\mu = \frac{\sum_{i=1}^n x_{t_i} - \frac{\sum_{i=1}^n x_{t_i} x_{t_{i-1}} - \mu \sum_{i=1}^n x_{t_{i-1}} - \mu \sum_{i=1}^n x_{t_i} + n\mu^2}{\sum_{i=1}^n x_{t_{i-1}}^2 - 2\mu \sum_{i=1}^n x_{t_{i-1}} + n\mu^2}}{1 - \frac{\sum_{i=1}^n x_{t_i} x_{t_{i-1}} - \mu \sum_{i=1}^n x_{t_{i-1}} - \mu \sum_{i=1}^n x_{t_i} + n\mu^2}{\sum_{i=1}^n x_{t_{i-1}}^2 - 2\mu \sum_{i=1}^n x_{t_{i-1}} + n\mu^2}}. \quad (4.3.14)$$

Po úprave dostávame

$$n\mu = \frac{\sum_{i=1}^n x_{t_i} \sum_{i=1}^n x_{t_{i-1}}^2 - \sum_{i=1}^n x_{t_{i-1}} \sum_{i=1}^n x_{t_i} x_{t_{i-1}}}{\sum_{i=1}^n x_{t_{i-1}}^2 - \sum_{i=1}^n x_{t_i} x_{t_{i-1}} + \mu (\sum_{i=1}^n x_{t_i} - \sum_{i=1}^n x_{t_{i-1}})} + \frac{\mu [(\sum_{i=1}^n x_{t_{i-1}})^2 - \sum_{i=1}^n x_{t_{i-1}} \sum_{i=1}^n x_{t_i}] + \mu^2 n (\sum_{i=1}^n x_{t_i} - \sum_{i=1}^n x_{t_{i-1}})}{\sum_{i=1}^n x_{t_{i-1}}^2 - \sum_{i=1}^n x_{t_i} x_{t_{i-1}} + \mu (\sum_{i=1}^n x_{t_i} - \sum_{i=1}^n x_{t_{i-1}})} \quad (4.3.15)$$

a po ďalšej úprave dostávame

$$n\mu \left(\sum_{i=1}^n x_{t_{i-1}}^2 - \sum_{i=1}^n x_{t_i} x_{t_{i-1}} \right) - \mu \left[\left(\sum_{i=1}^n x_{t_{i-1}} \right)^2 - \sum_{i=1}^n x_{t_{i-1}} \sum_{i=1}^n x_{t_i} \right] = \sum_{i=1}^n x_{t_i} \sum_{i=1}^n x_{t_{i-1}}^2 - \sum_{i=1}^n x_{t_{i-1}} \sum_{i=1}^n x_{t_i} x_{t_{i-1}}. \quad (4.3.16)$$

Potom odhady parametrov Ornstein - Uhlenbeckovho modelu pomocou metódy maximálnej vierohodnosti majú tvar

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^n x_{t_i} \sum_{i=1}^n x_{t_{i-1}}^2 - \sum_{i=1}^n x_{t_{i-1}} \sum_{i=1}^n x_{t_i} x_{t_{i-1}}}{n \left(\sum_{i=1}^n x_{t_{i-1}}^2 - \sum_{i=1}^n x_{t_i} x_{t_{i-1}} \right) - \left[\left(\sum_{i=1}^n x_{t_{i-1}} \right)^2 - \sum_{i=1}^n x_{t_{i-1}} \sum_{i=1}^n x_{t_i} \right]}, \quad (4.3.17)$$

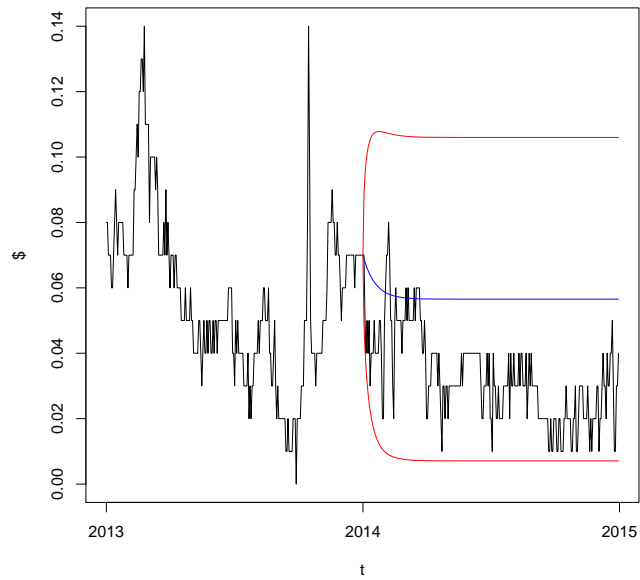
$$\hat{\theta} = -\frac{1}{\Delta t} \ln \left[\frac{\sum_{i=1}^n (x_{t_i} - \hat{\mu})(x_{t_{i-1}} - \hat{\mu})}{\sum_{i=1}^n (x_{t_{i-1}} - \hat{\mu})^2} \right], \quad (4.3.18)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [x_{t_i} - x_{t_{i-1}} e^{-\hat{\theta} \Delta t} - \hat{\mu} (1 - e^{-\hat{\theta} \Delta t})]^2, \quad (4.3.19)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\sigma}^2 \frac{2\hat{\theta}}{1 - e^{-2\hat{\theta} \Delta t}}. \quad (4.3.20)$$

4.4 Príklad použitia odhadov parametrov Ornstein - Uhlenbeckovho procesu na predikciu priebehu úrokových mier.

Ako sme už spomenuli na začiatku kapitoly, jedným z použití Ornstein - Uhlenbeckovho procesu je modelovanie úrokových mier. My sme použili predchádzajúce výpočty na odhadnutie parametrov priebehu procesu na denných dátach trojmesačných Treasury bills v roku 2013. Hodnoty odhadnutých parametrov nám vyšli nasledovné $\hat{\theta} = 21.46409$, $\hat{\mu} = 0.05654$, $\hat{\sigma}^2 = 0.02733$. Následne sme použili odhadnuté parametre na predikciu vývoja Treasury bills v roku 2014. Obrázok 4.4.1 ilustruje priebeh aj naše predikcie. Na záver ešte poznamenajme, že tak ako pri geometrickom Brownovom pohybe, strednú hodnotu, aj interval spoľahlivosti robíme z odhadov, a teda sú nepresné. Presné by boli, keby sme mali presné hodnoty parametrov procesu.



Obr. 4.4.1: Ukážka použitia odhadov parametrov Ornstein-Uhlenbeckovho procesu na denných dátach trojmesačných T-Bills z roku 2013 na predikciu vývoja trojmesačných T-Bills v roku 2014. — označuje strednú hodnotu Ornstein-Uhlenbeckovho procesu s odhadnutými parametrami a — označuje 95%-ný bodový pás spoľahlivosti.

5 Rizikovo neutrálne oceňovanie

Rizikovo neutrálne oceňovanie je silnou metódou na výpočet cien finančných derivátov, ktorú využijeme v ďalšej kapitole práce. Ku tomu nám však treba uviesť niekoľko základných definícií a viet.

5.1 Základné definície, vety a tvrdenia

Veta 5.1.1 (Girsonovova veta). *Nech $W(t)$, $0 \leq t \leq T$ je Brownov pohyb na (Ω, \mathcal{F}, P) a nech \mathcal{F}_t , $0 \leq t \leq T$ je filtrácia pre tento Brownov pohyb. Nech $\Theta(t)$, $0 \leq t \leq T$ je adaptovaný proces. Definujme*

$$Z(t) = \exp \left\{ - \int_0^t \Theta(u) dW(u) - \frac{1}{2} \int_0^t \Theta^2(u) du \right\},$$

$$\widetilde{W}(t) = W(t) + \int_0^t \Theta(u) du,$$

a predpokladajme, že

$$E \left[\int_0^T \theta^2(u) Z^2(u) du \right] < \infty.$$

Položme $Z = Z(T)$. Potom $E[Z] = 1$ a vzhľadom ku pravdepodobnostnej miere \widetilde{P} danou nasledovne

$$\widetilde{P}(A) = \int_A Z(\omega) dP(\omega) \text{ pre každé } A \in \mathcal{F}$$

je proces $\widetilde{W}(t)$, $0 \leq t \leq T$ Brownov pohyb.

Dôkaz Girsanovovej vety sa nachádza napríklad v [15, veta 5.2.3].

Definícia 5.1.1. *Hovoríme, že pravdepodobnostná miera \widetilde{P} je rizikovo neutrálna, ak*

1. \widetilde{P} a P sú ekvivalentné (t.j., pre každé $A \in \mathcal{F}$, $P(A) = 0$ vtedy a len vtedy ak $\widetilde{P}(A) = 0$),
2. vzhľadom k \widetilde{P} odúročená cena akcie $D(t)S(t)$ je martingál.

[15, definícia 5.4.3]

Tvrdenie 1. *Nech \widetilde{P} je rizikovo neutrálna miera a nech $X(t)$ je hodnota portfólia. Vzhľadom k \widetilde{P} je odúročená hodnota portfólia $D(t)X(t)$ martingálom, kde*

$$D(t) = e^{-\int_0^t R(s) ds}$$

je tzv. discount proces a $R(t)$ je adaptovaný proces úrokovej miery.

Definícia 5.1.2. *Arbitráž je proces $X(t)$ vývoja ceny portfólia, ktorý spĺňa $X(0) = 0$ a tiež spĺňa pre nejaký čas $T > 0$*

$$P \{X(T) \geq 0\} = 1, \quad P \{X(T) > 0\} > 0. \quad (5.1.1)$$

[15, definícia 5.4.6]

Veta 5.1.2 (Prvá základná veta asset pricing). *Ak trhový model má rizikovo neutrálnu mieru, potom neumožňuje arbitráž.*

Dôkaz vety je uvedený v [15, veta 5.4.7].

5.2 Oceňovanie vzhľadom na rizikovo neutrálnu mieru

Nech $V(T)$ je $\mathcal{F}(T)$ -merateľná náhodná premenná, ktorá reprezentuje zisk finančného derivátu v čase T . Chceme vedieť, aký počiatočný kapitál $X(0)$ a portfólio proces $\Delta(t)$, $0 \leq t \leq T$ by obchodník potreboval na hedgovanie krátkej pozície v tomto finančnom deriváte t.j.

$$X(T) = V(T) \text{ skoro isto.} \quad (5.2.1)$$

Predpokladajme, že takýto počiatočný kapitál a portfólio proces máme. Potom fakt, že $D(t)X(t)$ je martingál vzhľadom ku \tilde{P} implikuje

$$D(t)X(t) = \tilde{E}[D(T)X(T)|\mathcal{F}(T)] = \tilde{E}[D(T)V(T)|\mathcal{F}(t)]. \quad (5.2.2)$$

Hodnota $X(t)$ hedgujúceho portfólia je kapitál potrebný v čase t na úspešné dokončenie hedgu krátkej pozície v danom finančnom deriváte so ziskom $V(T)$. $V(t)$ nazývame cenou finančného derivátu v čase t . Spojením (5.2.1) a (5.2.2) dostávame

$$D(t)V(t) = \tilde{E}[D(T)V(T)|\mathcal{F}(t)], \quad 0 \leq t \leq T. \quad (5.2.3)$$

Predelením (5.2.3) $D(t)$, ktorá je $\mathcal{F}(t)$ -merateľná a teda môžeme ju dať do vnútra podmienenej strednej hodnoty (5.2.3) a z definície $D(t)$, dostávame z (5.2.3)

$$V(t) = \tilde{E}[e^{-\int_t^T R(u)du}V(T)|\mathcal{F}(t)], \quad 0 \leq t \leq T. \quad (5.2.4)$$

Výraz (5.2.4) budeme nazývať rizikovo neutrálna oceňovacia formula.

5.3 Future kontrakty

V tejto časti ukážeme konštrukciu jedného konkrétneho finančného derivátu, ktorý budeme nazývať future kontrakt. Konštrukciu urobíme podľa [5, kapitola 5.6.2]. Vytvoríme cenu future $F(t, T)$ nasledovne. Ak obchodník drží dlhú pozíciu vo futuroch medzi časmi t_k a t_{k+1} , potom v čase t_{k+1} dostane zaplatené

$$F(t_{k+1}, T) - F(t_k, T). \quad (5.3.1)$$

Výraz (5.3.1) sa nazýva *marking to margin*. Stochastický proces $F(t, T)$ je skoštruovaný tak aby $F(t, T)$ bol $\mathcal{F}(t)$ -merateľný pre každé t a

$$F(T, T) = S(T), \quad (5.3.2)$$

kde $S(t)$ je proces ceny podkladového aktíva nášho finančného derivátu.

Preto suma platieb obdržaných obchodníkom, ktorý nakúpil future kontrakt v čase 0 a drží ho do doby splatnosti T je

$$\begin{aligned} (F(t_1, T) - F(t_0, T)) + (F(t_2, T) - F(t_1, T)) + \dots \\ \dots + (F(t_n, T) - F(t_{n-1}, T)) = F(t_T, T) - F(t_0, T) \\ = S(T) - F(0, T). \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

Okrem podmienky $F(T, T) = S(T)$ je cena future zvolená tak, aby v každom čase t_k bola hodnota platby, ktorú obchodník dostane v čase t_{k+1} , a taktiež v každom budúcom čase $t_j > t_k$, nula. Táto podmienka sa dá zapísať nasledovne

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{D(t_k)} \tilde{E}[D(t_{k+1})(F(t_{k+1}, T) - F(t_k, T)) | \mathcal{F}(t_k)] \\ &= \frac{D(t_{k+1})}{D(t_k)} \{ \tilde{E}[F(t_{k+1}, T) | \mathcal{F}(t_k)] - F(t_k, T) \}, \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

kde sme využili to, že $D(t_{k+1})$ je $\mathcal{F}(t_k)$ merateľná, aby sme mohli vybrať $D(t_{k+1})$ von z podmienenej strednej hodnoty. Z rovnosti (5.3.4) vidíme, že

$$\tilde{E}[F(t_{k+1}, T) | \mathcal{F}(t_k)] = F(t_k, T), \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (5.3.5)$$

Toto naznačuje, že $F(t_k, T)$ musí byť martingálom vzhľadom ku \tilde{P} . Taktiež požadujeme, aby $F(T, T) = S(T)$, z čoho usudzujeme, že cena future musí byť daná

$$F(t_k, T) = \tilde{E}[S(T) | \mathcal{F}(t_k)], \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (5.3.6)$$

Tieto úvahy vedú ku definícii pre plne spojitý prípad.

Definícia 5.3.1. *Future cena aktíva, ktorého hodnota v čase T je $S(T)$, je daná formulou*

$$F(t, T) = \tilde{E}[S(T) | \mathcal{F}(t)], \quad 0 \leq t \leq T. \quad (5.3.7)$$

Longová pozícia vo future kontrakte je dohoda obdržať vo forme cash flow zmeny v cene future (ktorá môže byť kladná aj záporná) počas doby, kedy je pozícia držaná. Shortová pozícia vo future kontrakte obdrží opačný cash flow. [5, definícia 5.6.4]

5.4 Forwardové kontrakty a ich vzťah s future kontraktmi

V tejto časti ukážeme, že za istých podmienok sa ceny future a forwardových kontraktov zhodujú.

Definícia 5.4.1. *Forwardový kontrakt je dohoda zaplatiť špecifikovanú dodaciu cenu K v čase dodania T , kde $0 \leq T < \bar{T}$ pre aktívum, ktorého cena v čase t je $S(t)$. T -forwardova cena $For(t, T)$ tohto aktíva v čase t , kde $0 \leq t \leq T \leq \bar{T}$ je hodnota taká, že forwardový kontrakt má v čase t bezarbitrážnu cenu. [5, definícia 5.6.1]*

Veta 5.4.1. *Predpokladajme, že zero-coupon dlhopisy so všetkými splatnosťami môžu byť obchodované. Potom*

$$For(t, T) = \frac{S(t)}{B(t, T)}, \quad 0 \leq t \leq T \leq \bar{T}, \quad (5.4.1)$$

kde

$$B(t, T) = \frac{1}{D(t)} \tilde{E}[D(T) | \mathcal{F}(t)], \quad 0 \leq t \leq T \leq \bar{T} \quad (5.4.2)$$

je cena zero-coupon dlhopisu v čase t platiac 1 v čase T ,

$$D(t) = e^{-\int_0^t R(s) ds}$$

je tzv. discount proces a $R(t)$ je adaptovaný proces úrokovej miery.

Dôkaz vety sa nachádza v [5, veta 5.6.2].

Ak úroková miera je konštanta r , potom $B(t, T) = e^{-r(T-t)}$ a

$$For(t, T) = e^{r(T-t)} S(t)$$

$$F(t, T) = e^{rT} \tilde{E}[e^{-rT} S(T) | \mathcal{F}(t)] = e^{rT} e^{-rT} S(T) = e^{r(T-t)} S(t).$$

V takomto prípade sa forwardové a future ceny rovnajú.

6 Stochastické modelovanie cien komodít.

V tejto časti sa pozrieme na 3 modely stochastického správania sa komodít a ich schopnosť oceňovať existujúce future kontrakty.

6.1 Oceňovacie modely

6.1.1 Model 1

Prvý model je jedno-faktorový model, o ktorom predpokladáme, že logaritmus spotovej ceny komodity sa správa podľa *mean reverting* procesu Ornstein - Uhlenbeckovho typu. Predpokladajme, že spotová cena komodity sa správa podľa stochastického procesu

$$dS = \kappa(\mu - \ln S)Sdt + \sigma SdB. \quad (6.1.1)$$

V [13, model 1] je takto definovaný model a potom sa uvádza (6.1.3). My ale (6.1.3) odvodíme.

Položme $X = \ln S$ a použime Itóovu lemu. Dostávame

$$\begin{aligned} dX &= \frac{1}{S}dS - \frac{1}{2S^2}(dS)^2 = \\ &= \kappa(\mu - \ln S)dt + \sigma dB - \frac{1}{2}\sigma^2 dt \\ &= \kappa\left(\mu - \frac{1}{2\kappa}\sigma^2 - X\right)dt + \sigma dB. \end{aligned} \quad (6.1.2)$$

Teda logaritmus ceny môže byť charakterizovaný Ornstein - Uhlenbeckovým procesom

$$dX = \kappa(\alpha - X)dt + \sigma dB \quad (6.1.3)$$

$$\alpha = \mu - \frac{1}{2\kappa}\sigma^2. \quad (6.1.4)$$

(6.1.3) vysvetľuje, prečo má zmysel definovať model ako (6.1.1), kde táto interpretácia nie je tak jasná.

Dynamiku Ornstein Uhlenbeckovho procesu (6.1.3) môžeme prepísať vzhľadom na rizikovo neutrálnu mieru ako

$$dX = \kappa(\alpha^* - X)dt + \sigma dB^*, \quad (6.1.5)$$

kde $\alpha^* = \alpha - \lambda$, λ je trhovú cenu rizika (predpokladáme, že je konštantná) a dB^* je prírastok Brownovho pohybu vzhľadom ku ekvivalentnej rizikovo neutrálnej miere. Z (4.2.6) kapitoly o Ornstein-Uhlenbeckovom procese máme, že

$$X \sim N\left(X(0)e^{-\kappa t} + \alpha^*(1 - e^{-\kappa t}), \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa t})\right).$$

Keďže $X = \ln S$, spotová cena S v čase T je lognormálne rozdelená náhodná premenná a predpokladáme konštantnú úrokovú mieru, tak cena future komodity so splatnosťou v čase T je stredná hodnota ceny komodity v čase T , vzhľadom ku ekvivalentnej rizikovo neutrálnej miere (definícia 5.4.1). Potom zo strednej hodnoty lognormálneho rozdelenia dostávame

$$\begin{aligned}
F(S, T) &= \tilde{E}[S(T)] = \exp\left(\tilde{E}[X(T)] + \frac{1}{2}\tilde{D}[X(T)]\right) \\
&= \exp\left(\ln S(0)e^{-\kappa T} + \alpha^*(1 - e^{-\kappa T}) + \frac{\sigma^2}{4\kappa}(1 - e^{-2\kappa T})\right).
\end{aligned} \tag{6.1.6}$$

Zo (6.1.6) ďalej dostávame cenu future pre komoditu v čase t so splatnosťou v čase T

$$F(S, t) = \exp\left(\ln S(t)e^{-\kappa(T-t)} + \alpha^*(1 - e^{-\kappa(T-t)}) + \frac{\sigma^2}{4\kappa}(1 - e^{-2\kappa(T-t)})\right). \tag{6.1.7}$$

6.1.2 Model 2

V [14, kapitola 5, appendix] je uvedený nasledujúci proces s *mean - reverting* vlastnosťou

$$dS_t^C = \kappa(\alpha - S_t^C) dt + \sigma(S_t^C)^\gamma dB_t. \tag{6.1.8}$$

Tento model je modifikáciou Cox - Ingersoll - Rossovoho modelu pre okamžitú úrokovú mieru [15, príklad 4.4.11].

Predpokladajme, že spotová cena komodity spĺňa proces (6.1.8) pre nejakú rizikovo neutrálnu mieru. Danú stochastickú rovnicu vyriešime podobne ako pri riešení Ornstein - Uhlenbeckovho procesu. Teda použijeme funkciu $f(t, x) = xe^{\kappa t}$ a Itóovu lemu (veta 2.2.1) a dostávame

$$\begin{aligned}
d(S_t^C e^{\kappa t}) &= \kappa S_t^C e^{\kappa t} dt + e^{\kappa t} dS_t^C \\
&= \kappa \alpha e^{\kappa t} dt + \sigma e^{\kappa t} d(S_t^C)^\gamma B_t.
\end{aligned} \tag{6.1.9}$$

Integrovaním oboch strán (6.1.9) od t do T , kde $t < T$ dostávame

$$\begin{aligned}
S_T^C e^{\kappa T} &= S_t^C e^{\kappa t} + \int_t^T \kappa \alpha e^{\kappa u} du + \int_t^T \sigma e^{\kappa u} d(S_u^C)^\gamma dB_u \\
&= S_t^C e^{\kappa t} + \alpha e^{\kappa T} - \alpha e^{\kappa t} + \int_t^T \sigma e^{\kappa u} d(S_u^C)^\gamma dB_u.
\end{aligned} \tag{6.1.10}$$

Z toho, že stredná hodnota Itóovho integrálu (veta 2.1.2 vlastnosť 3) sa rovná nule platí

$$e^{\kappa T} \tilde{E}[S_T^C] = S_t^C e^{\kappa t} + \alpha e^{\kappa T} - \alpha e^{\kappa t}, \tag{6.1.11}$$

alebo ekvivalentne

$$\tilde{E}[S_T^C] = e^{-\kappa(T-t)}[S_t^C - \alpha(1 - e^{\kappa(T-t)})]. \tag{6.1.12}$$

Z definície 5.4.1 je teda cena futuru so splatnosťou v čase T

$$F(S, T) = e^{-\kappa(T-t)}[S_t^C - \alpha(1 - e^{\kappa(T-t)})]. \tag{6.1.13}$$

6.1.3 Model 3

V [6] sa uvádza dvoj faktorový model použitý na oceňovanie finančných derivátov ropy. Prvý faktor je spotová cena S_t ropy, ktorú popisuje geometrický brownov pohyb a druhým faktorom okamžitý *convenience yield* δ_t , ktorý je popísaný Ornstein-Uhlenbeckovým procesom. Teda

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma_1 S_t dW_t, \quad (6.1.14)$$

$$d\delta_t = \kappa(\alpha - \delta_t)dt + \sigma_2 dZ_t, \quad (6.1.15)$$

kde dW_t a dZ_t sú prírastky štandardného Brownovho pohybu s koreláciou

$$dW_t dZ_t = \rho dt. \quad (6.1.16)$$

V ďalšom texte odvodíme cenu future na základe tohto modelu. Postupovať budeme podľa [2].

Nech

$$Y(T) = Y(T, S(T), X(T)) \quad (6.1.17)$$

je zisk z *contingent claim* s dobou splatnosti T , kde

$$X(t) = \int_0^t \delta(s) ds. \quad (6.1.18)$$

Z teórie oceňovania pri rizikovo neutrálnej miere (5.2.4) máme, že súčasná cena tejto *contingent claim* je

$$V_t[Y(T)] = e^{-r(T-t)} E_t^*[Y(T)], \quad (6.1.19)$$

kde $E_t^*[\cdot]$ je stredná hodnota pri ekvivalentnej rizikovo neutrálnej miere. Vzťah medzi skutočnou pravdepodobnostnou mierou a rizikovo neutrálnou mierou je

$$dW_t = dW_t^* - \left(\frac{\mu + \delta_t - r}{\sigma_1} \right) dt, \quad (6.1.20)$$

$$dZ_t = dZ_t^* - \lambda dt, \quad (6.1.21)$$

kde r je konštantná úroková miera a λ je konštantná cena rizika *convenience yield*. Neprítomnosť arbitráže implikuje, že cena forwardu For je daná vzťahom

$$V_t[S(T) - For] = 0 \quad (6.1.22)$$

a z rovnosti (6.1.19) vyplýva, že

$$For(T - t, S, \delta) = e^{r(T-t)} V_t[S(T)]. \quad (6.1.23)$$

Ale keďže r je konštantná úroková miera tak cena future a forward sa rovnajú (časť 5.4) a teda cena future je

$$F(T - t, S, \delta) = e^{r(T-t)} V_t[S(T)]. \quad (6.1.24)$$

Teraz vyjadríme

$$V_t[S(T)] = e^{-r(T-t)} E[S(T)]. \quad (6.1.25)$$

Z toho, že S_t je geometrický Brownov pohyb dostávame

$$e^{-r(T-t)} S(T) = S(t) \exp \left\{ (\mu - r - \frac{1}{2} \sigma_1^2)(T-t) + \sigma_1 \int_t^T dW_t \right\}. \quad (6.1.26)$$

Z (6.1.20) dostávame, že

$$\sigma_1 \int_t^T dW_s = \sigma_1 \int_t^T dW_s^* - (\mu - r)(T-t) - \int_t^T \delta_s ds. \quad (6.1.27)$$

Z (6.1.15) vyplýva, že

$$\begin{aligned} \int_t^T d\delta_s &= \int_t^T \kappa(\alpha - \delta_s) ds + \int_t^T \sigma_2 dZ_s \\ &= \kappa\alpha(T-t) - \kappa \int_t^T \delta_s ds + \sigma_2 \int_t^T dZ_s, \end{aligned} \quad (6.1.28)$$

kde položíme

$$\int_t^T d\delta_s = \delta_T - \delta_t. \quad (6.1.29)$$

Dosadením (6.1.29) do (6.1.28) a preusporiadaním dostaneme

$$\int_t^T \delta_s ds = \alpha(T-t) - \frac{1}{\kappa}(\delta_T - \delta_t) + \frac{\sigma_2}{\kappa} \int_t^T dZ_s. \quad (6.1.30)$$

Keďže δ_t je Ornstein-Uhlenbeckov proces, riešením (6.1.15) je

$$\delta_T = e^{-\kappa(T-t)} \delta(t) + (1 - e^{-\kappa(T-t)})\alpha + \sigma_2 e^{-\kappa T} \int_t^T e^{\kappa s} dZ_s \quad (6.1.31)$$

a po dosadení (6.1.31) do (6.1.30) máme

$$\begin{aligned} \int_t^T \delta_s ds &= \alpha(T-t) + \frac{1}{\kappa}(1 - e^{-\kappa(T-t)})(\delta_t - \alpha) \\ &\quad + \frac{\sigma_2}{\kappa} \int_t^T dZ_s - \frac{1}{\kappa} \sigma_2 e^{-\kappa T} \int_t^T e^{\kappa s} dZ_s. \end{aligned} \quad (6.1.32)$$

Ďalej dosadením (6.1.32) do (6.1.27)

$$\begin{aligned} \sigma_1 \int_t^T dW_s &= \sigma_1 \int_t^T dW_s^* - (\mu - r)(T-t) \\ &\quad - \alpha(T-t) - \frac{1}{\kappa}(1 - e^{-\kappa(T-t)})(\delta_t - \alpha) \\ &\quad - \frac{\sigma_2}{\kappa} \int_t^T dZ_s + \frac{1}{\kappa} \sigma_2 e^{-\kappa T} \int_t^T e^{\kappa s} dZ_s \end{aligned} \quad (6.1.33)$$

a (6.1.21) do (6.1.33) dostávame

$$\begin{aligned}
\sigma_1 \int_t^T dW_s &= -(\mu - r + \alpha - \frac{\sigma_2}{\kappa} \lambda)(T - t) \\
&+ \frac{1}{\kappa}(1 - e^{-\kappa(T-t)})(\alpha - \delta_t - \frac{1}{\kappa} \sigma_2 \lambda) \\
&+ \sigma_1 \int_t^T dW_s^* - \frac{\sigma_2}{\kappa} \int_t^T dZ_s^* \\
&+ \frac{1}{\kappa} \sigma_2 e^{-\kappa T} \int_t^T e^{\kappa s} dZ_s^*.
\end{aligned} \tag{6.1.34}$$

Nakoniec dosadením (6.1.34) do (6.1.26) máme

$$\begin{aligned}
e^{-r(T-t)} S(T) &= S(t) \exp\left\{-\left(\frac{1}{2} \sigma_1^2 + \alpha - \frac{\sigma_2}{\kappa} \lambda\right)(T - t)\right. \\
&+ \frac{1}{\kappa}(1 - e^{-\kappa(T-t)})(\alpha - \delta_t - \frac{1}{\kappa} \sigma_2 \lambda) \\
&+ \sigma_1 \int_t^T dW_s^* - \frac{\sigma_2}{\kappa} \int_t^T dZ_s^* \\
&+ \left.\frac{1}{\kappa} \sigma_2 e^{-\kappa T} \int_t^T e^{\kappa s} dZ_s^*\right\} = \\
&= S(t) \exp\{z^*\}.
\end{aligned} \tag{6.1.35}$$

Z vety 2.1.3 platí, že z^* je normálne rozdelená náhodná premenná a teda $e^{-r(T-t)} S(T)$ je lognormálne rozdelená náhodná premenná a zo strednej hodnoty lognormálneho rozdelenia (časť 3.1.2) dostávame, že

$$V_t[S(T)] = E_t^*[e^{-r(T-t)} S(T)] = E_t^*[S(t) \exp\{z^*\}] = S(t) \exp\left\{M + \frac{S^2}{2}\right\}. \tag{6.1.36}$$

Teraz vyrátame M a S^2 . V [2] sa uvádzajú vyjadrenia pre M a S^2 , ale bez výpočtu. Preto sme tu výpočet urobili.

Z vlastnosti 3 vety 2.1.2 máme

$$M = E_t^*[z^*] = -\left(\frac{1}{2} \sigma_1^2 + \alpha - \frac{\sigma_2}{\kappa} \lambda\right)(T - t) + \frac{1}{\kappa}(1 - e^{-\kappa(T-t)})(\alpha - \delta_t - \frac{1}{\kappa} \sigma_2 \lambda). \tag{6.1.37}$$

Ďalej pre disperziu z^* máme

$$S^2 = E_t^*[(z^*)^2] - (E_t^*[z^*])^2 \tag{6.1.38}$$

$$= E_t^* \left[\left(\sigma_1 \int_t^T dW_s^* \right)^2 \right] + E_t^* \left[\left(\frac{\sigma_2}{\kappa} \int_t^T dZ_s^* \right)^2 \right] + E_t^* \left[\left(\frac{1}{\kappa} \sigma_2 e^{-\kappa T} \int_t^T e^{\kappa s} dZ_s^* \right)^2 \right]$$

$$- 2E_t^* \left[\left(\sigma_1 \int_t^T dW_s^* \right) \left(\frac{\sigma_2}{\kappa} \int_t^T dZ_s^* \right) \right] \tag{6.1.39}$$

$$+ 2E_t^* \left[\left(\sigma_1 \int_t^T dW_s^* \right) \left(\frac{1}{\kappa} \sigma_2 e^{-\kappa T} \int_t^T e^{\kappa s} dZ_s^* \right) \right] \tag{6.1.40}$$

$$- 2E_t^* \left[\left(\frac{\sigma_2}{\kappa} \int_t^T dZ_s^* \right) \left(\frac{1}{\kappa} \sigma_2 e^{-\kappa T} \int_t^T e^{\kappa s} dZ_s^* \right) \right], \tag{6.1.41}$$

kde sme využili vlastnosť 3 vety 2.1.2. Z Itóovej izometrie (veta 2.1.2 vlastnosť 5) dostávame vyjadrenie stredných hodnot integrálov

$$E_t^* \left[\left(\sigma_1 \int_t^T dW_s^* \right)^2 \right] = \sigma_1^2 (T - t) \quad (6.1.42)$$

$$E_t^* \left[\left(\frac{\sigma_2}{\kappa} \int_t^T dZ_s^* \right)^2 \right] = \left(\frac{\sigma_2}{\kappa} \right)^2 (T - t) \quad (6.1.43)$$

$$E_t^* \left[\left(\frac{1}{\kappa} \sigma_2 e^{-\kappa T} \int_t^T e^{\kappa s} dZ_s^* \right)^2 \right] = \left(\frac{\sigma_2}{\kappa} \right)^2 \frac{1}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa(T-t)}). \quad (6.1.44)$$

Pre vyjadrenie zostávajúcich troch členov v (6.1.38) budeme potrebovať nasledujúce tvrdenie, ktoré je priamym dôsledkom Itóovej izometrie. Takto sformulované tvrdenie sme našli v [19], čo je diskusné fórum a preto sme tvrdenie, ktoré sa tam uvádza, tu aj dokázali.

Tvrdenie. *Nech $f, g \in L^2([0, T] \otimes \mathbb{P})$ potom*

$$E \left[\left(\int_t^T f dW_s \right) \left(\int_t^T g dW_s \right) \right] = E \left[\int_t^T f g ds \right]. \quad (6.1.45)$$

Dôkaz. Použitím identity

$$ab = \frac{1}{4} [(a + b)^2 - (a - b)^2]$$

pre

$$a := \left(\int_t^T f dW_s \right), \quad b := \left(\int_t^T g dW_s \right)$$

dostávame

$$E \left[\left(\int_t^T f dW_s \right) \left(\int_t^T g dW_s \right) \right] = \frac{1}{4} E \left[\left(\int_t^T (f + g) dW_s \right)^2 \right] - \frac{1}{4} E \left[\left(\int_t^T (f - g) dW_s \right)^2 \right]$$

a použitím Itóovej izometrie (veta 2.1.2 vlastnosť 5) dostávame rovnosť (6.1.45):

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} E \left[\left(\int_t^T (f + g) dW_s \right)^2 \right] - \frac{1}{4} E \left[\left(\int_t^T (f - g) dW_s \right)^2 \right] &= E \left[\int_t^T \frac{1}{4} (f + g)^2 - \frac{1}{4} (f - g)^2 ds \right] \\ &= E \left[\int_t^T f g ds \right]. \end{aligned}$$

□

Teda na základe predchádzajúceho tvrdenia dostávame pre strednú hodnotu v (6.1.41)

$$E_t^* \left[\left(\frac{\sigma_2}{\kappa} \int_t^T dZ_s^* \right) \left(\frac{1}{\kappa} \sigma_2 e^{-\kappa T} \int_t^T e^{\kappa s} dZ_s^* \right) \right] = \frac{\sigma_2^2}{\kappa^3} (1 - e^{-\kappa(T-t)}). \quad (6.1.46)$$

Pre vyjadrenie strednej hodnoty v (6.1.40) zapíšeme Z_s^* ako

$$Z_s^* = \rho W_s^* + \sqrt{1 - \rho^2} \widetilde{W}_s^*, \quad (6.1.47)$$

kde W_s^* a \widetilde{W}_s^* sú nezávislé. Po dosadení do strednej hodnoty v (6.1.40) máme

$$\begin{aligned} E_t^* \left[\left(\sigma_1 \int_t^T dW_s^* \right) \left(\frac{1}{\kappa} \sigma_2 e^{-\kappa T} \int_t^T e^{\kappa s} dZ_s^* \right) \right] &= \\ &= E_t^* \left[\left(\sigma_1 \int_t^T dW_s^* \right) \left(\frac{1}{\kappa} \sigma_2 e^{-\kappa T} \rho \int_t^T e^{\kappa s} dW_s^* \right) \right] \\ &+ E_t^* \left[\left(\sigma_1 \int_t^T dW_s^* \right) \left(\frac{1}{\kappa} \sigma_2 e^{-\kappa T} \rho \sqrt{1 - \rho^2} \int_t^T e^{\kappa s} d\widetilde{W}_s^* \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.1.48)$$

Z nezávislosti W_s^* a \widetilde{W}_s^* a z vlastnosti 3 vety 2.1.2 dostávame pre druhý člen na pravej strane rovnosti (6.1.48)

$$\begin{aligned} E_t^* \left[\left(\sigma_1 \int_t^T dW_s^* \right) \left(\frac{1}{\kappa} \sigma_2 e^{-\kappa T} \rho \sqrt{1 - \rho^2} \int_t^T e^{\kappa s} d\widetilde{W}_s^* \right) \right] &= \\ = E_t^* \left[\left(\sigma_1 \int_t^T dW_s^* \right) \right] E \left[\left(\frac{1}{\kappa} \sigma_2 e^{-\kappa T} \rho \sqrt{1 - \rho^2} \int_t^T e^{\kappa s} d\widetilde{W}_s^* \right) \right] &= 0 \end{aligned} \quad (6.1.49)$$

a použitím tvrdenia 1 na prvý člen na pravej strane v (6.1.48) dostávame

$$\begin{aligned} E_t^* \left[\left(\sigma_1 \int_t^T dW_s^* \right) \left(\frac{1}{\kappa} \sigma_2 e^{-\kappa T} \rho \int_t^T e^{\kappa s} dW_s^* \right) \right] &= \\ = E_t^* \left[\left(\frac{1}{\kappa} \sigma_1 \sigma_2 e^{-\kappa T} \rho \int_t^T e^{\kappa s} ds \right) \right] &= \left(\frac{1}{\kappa} \right)^2 \sigma_1 \sigma_2 \rho (1 - e^{-\kappa(T-t)}). \end{aligned} \quad (6.1.50)$$

Teda dosadením (6.1.49) a (6.1.50) do (6.1.48) dostávame vyjadrenie pre strednú hodnotu v (6.1.40), ktorá je

$$E_t^* \left[\left(\sigma_1 \int_t^T dW_s^* \right) \left(\frac{1}{\kappa} \sigma_2 e^{-\kappa T} \int_t^T e^{\kappa s} dZ_s^* \right) \right] = \left(\frac{1}{\kappa} \right)^2 \sigma_1 \sigma_2 \rho (1 - e^{-\kappa(T-t)}). \quad (6.1.51)$$

Rovnakým postupom nájdeme vyjadrenie pre strednú hodnotu v (6.1.39) a dostávame

$$E_t^* \left[\left(\sigma_1 \int_t^T dW_s^* \right) \left(\frac{\sigma_2}{\kappa} \int_t^T dZ_s^* \right) \right] = \frac{1}{\kappa} \sigma_1 \sigma_2 \rho (T - t). \quad (6.1.52)$$

Dosadením (6.1.42), (6.1.43), (6.1.44), (6.1.46), (6.1.51) a (6.1.52) do (6.1.38) dostávame pre S^2

$$\begin{aligned} S^2 &= \left(\sigma_1^2 + \left(\frac{\sigma_2}{\kappa} \right)^2 - 2 \frac{1}{\kappa} \sigma_1 \sigma_2 \rho \right) (T - t) \\ &+ 2 \left(\left(\frac{1}{\kappa} \right)^2 \sigma_1 \sigma_2 \rho - \frac{\sigma_2^2}{\kappa^3} \right) (1 - e^{-\kappa(T-t)}) \\ &+ \left(\frac{\sigma_2}{\kappa} \right)^2 \frac{1}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa(T-t)}). \end{aligned} \quad (6.1.53)$$

Nakoniec spojením (6.1.24), (6.1.36), (6.1.37) a (6.1.53) dostávame pre cenu future

$$\begin{aligned}
F(T-t, S, \delta) = & S(t) \exp\left\{\left[(-\alpha + \frac{1}{\kappa}(\sigma_2\lambda - \sigma_1\sigma_2\rho + r) + \frac{\sigma_2^2}{2\kappa^2})\right](T-t)\right\} \quad (6.1.54) \\
& - \frac{1}{\kappa}[\delta_t - \alpha + \frac{1}{\kappa}(\sigma_2\lambda - \sigma_1\sigma_2\rho) + \frac{\sigma_2^2}{\kappa^2}](1 - e^{-\kappa(T-t)}) \\
& + \left(\frac{\sigma_2}{\kappa}\right)^2 \frac{1}{4\kappa}(1 - e^{-2\kappa(T-t)}).
\end{aligned}$$

6.2 Odhady parametrov

6.2.1 Model 1

Na odhady parametrov κ a σ v (6.1.1) použijeme odhady parametrov z časti o Ornstein - Uhlenbeckovom procese (časť 4.2). Na odhad parametra α^* v (6.1.7) použijeme metódu najmenších štvorcov. Chceme teda minimalizovať funkciu

$$f(\hat{\alpha}^*) = \sum_{i=1}^N \left[\ln F_i - \ln S_i e^{-\kappa(T_i-t_i)} - \alpha^*(1 - e^{-\kappa(T_i-t_i)}) - \frac{\sigma^2}{4\kappa}(1 - e^{-2\kappa(T_i-t_i)}) \right]^2. \quad (6.2.1)$$

Derivovaním (6.2.1) dostávame

$$\begin{aligned}
\frac{df(\hat{\alpha}^*)}{d\hat{\alpha}^*} = & \quad (6.2.2) \\
= & -2 \sum_{i=1}^N \left[\ln F_i - \ln S_i e^{-\kappa(T_i-t_i)} - \alpha^*(1 - e^{-\kappa(T_i-t_i)}) - \frac{\sigma^2}{4\kappa}(1 - e^{-2\kappa(T_i-t_i)}) \right] (1 - e^{-\kappa(T_i-t_i)}) \\
= & 0.
\end{aligned}$$

Úpravou (6.2.2) dostávame

$$\hat{\alpha}^* = \frac{\sum_{i=1}^N \left[\ln F_i - \ln S_i e^{-\kappa(T_i-t_i)} - \frac{\sigma^2}{4\kappa}(1 - e^{-2\kappa(T_i-t_i)}) \right] (1 - e^{-\kappa(T_i-t_i)})}{\sum_{i=1}^N (1 - e^{-\kappa(T_i-t_i)})^2}. \quad (6.2.3)$$

V ďalšom kroku použijeme vyššie uvedené odhady parametrov ako štartovací bod pre nelineárnu regresiu funkcie (6.2.1) vo forme R funkcie `optim()`.

6.2.2 Model 2

Na odhady parametrov modelu 2 sme použili podobne ako v predchádzajúcom prípade nelineárnu regresiu funkcie (6.2.6). Na určenie počiatkových hodnôt optimalizácie sme zvolil lineárnu regresiu implementovanú programom R, ktorú sme aplikovali na diskretizáciu rovnice (6.1.8) tj.

$$S_{t_{i+1}} - S_{t_i} = \kappa(\alpha - S_{t_i}) \Delta t + \sigma (S_{t_i})^\gamma \epsilon_{t_i}, \quad (6.2.4)$$

kde ϵ_{t_i} je normálne rozdelená náhodná premenná so strednou hodnotou 0 a disperziou Δt .

Pre praktické použitie lineárnej regresie upravíme (6.2.4) do tvaru

$$\frac{S_{t_{i+1}} - S_{t_i}}{(S_{t_i})^\gamma} = \frac{\kappa\alpha\Delta t}{(S_{t_i})^\gamma} - \frac{\kappa S_{t_i}\Delta t}{(S_{t_i})^\gamma} + \sigma\epsilon_{t_i} \quad (6.2.5)$$

a položíme $\gamma = \frac{1}{2}$. Z empirických pozorovaní takto zvolená γ postačujúco fituje naše dáta. Pripomeňme si ešte, že pre $\gamma = \frac{1}{2}$ sa rovnica (6.1.8) nazýva Cox - Ingersoll - Ross model.

Získané odhady sme následne použili ako štartovací bod pre optimalizáciu funkcie

$$f(\kappa, \alpha) = \sum_{i=1}^N [\ln F_i + \kappa(T - t) - \ln[S_t^C - \alpha(1 - \alpha e^{\kappa(T-t)})]]^2 \quad (6.2.6)$$

pomocou funkcie `optim()`.

6.2.3 Model 3

Na prvotné odhady parametrov κ , α , σ_1 , σ_2 a ρ sme podľa vzoru [6] použili SUR model (seemingly unrelated regression model) na diskretizovanú aproximáciu (6.1.15)

$$\delta_t - \delta_{t-1} = \alpha k + k\delta_{t-1} + \varepsilon_t \quad (6.2.7)$$

v spojení s modelom pre $\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$, ktorého forma je nasledovná

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = a + \varepsilon_t. \quad (6.2.8)$$

Na výpočet parametrov SUR sme použili R balíček *systemfit* [7].

Na odhad λ sme použili MNS na (6.1.54) tj. minimalizujeme

$$\begin{aligned} f(\lambda) = & \sum_{i=1}^n \left\{ \ln F_i - \ln S_i - \left[(-\alpha + \frac{1}{\kappa}(\sigma_2 \lambda - \sigma_1 \sigma_2 \rho + r) + \frac{\sigma_2^2}{2\kappa^2}) \right] (T_i - t_i) \right. \\ & + \frac{1}{\kappa} [\delta_t - \alpha + \frac{1}{\kappa}(\sigma_2 \lambda - \sigma_1 \sigma_2 \rho) + \frac{\sigma_2^2}{\kappa^2}] (1 - e^{-\kappa(T_i - t_i)}) \\ & \left. - \left(\frac{\sigma_2}{\kappa} \right)^2 \frac{1}{4\kappa} (1 - e^{-2\kappa(T_i - t_i)}) \right\}^2, \end{aligned} \quad (6.2.9)$$

z čoho dostávame pre odhad $\hat{\lambda}$

$$\begin{aligned} \hat{\lambda} = & \frac{\sum_{i=1}^n \left\{ \ln F_i - \ln S_i - \left[(-\alpha + \frac{1}{\kappa}(-\sigma_1 \sigma_2 \rho + r) + \frac{\sigma_2^2}{2\kappa^2}) \right] (T_i - t_i) \right\} (T_i - t_i - 1 + e^{\kappa(T_i - t_i)})}{\sum_{i=1}^n \frac{\sigma_2}{\kappa} (T_i - t_i - 1 + e^{\kappa(T_i - t_i)})^2} \\ & + \frac{\sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{\kappa} [\delta_t - \alpha + \frac{1}{\kappa}(\sigma_2 \lambda - \sigma_1 \sigma_2 \rho) + \frac{\sigma_2^2}{\kappa^2}] (1 - e^{-\kappa(T_i - t_i)}) \right\} (T_i - t_i - 1 + e^{\kappa(T_i - t_i)})}{\sum_{i=1}^n \frac{\sigma_2}{\kappa} (T_i - t_i - 1 + e^{\kappa(T_i - t_i)})^2} \\ & - \frac{\sum_{i=1}^n \left\{ \left(\frac{\sigma_2}{\kappa} \right)^2 \frac{1}{4\kappa} (1 - e^{-2\kappa(T_i - t_i)}) \right\} (T_i - t_i - 1 + e^{\kappa(T_i - t_i)})}{\sum_{i=1}^n \frac{\sigma_2}{\kappa} (T_i - t_i - 1 + e^{\kappa(T_i - t_i)})^2}. \end{aligned} \quad (6.2.10)$$

Tak ako v predchádzajúcich dvoch prípadoch sme získané odhady použili ako štartovacie hodnoty pre nelineárnu regresiu funkcie

$$f(\alpha, \kappa, \rho, \lambda, \sigma_1, \sigma_2) = \sum_{i=1}^n \left\{ \ln F_i - \ln S_i - \left[(-\alpha + \frac{1}{\kappa}(\sigma_2 \lambda - \sigma_1 \sigma_2 \rho + r) + \frac{\sigma_2^2}{2\kappa^2}) \right] (T_i - t_i) \right. \quad (6.2.11)$$

$$\begin{aligned} & + \frac{1}{\kappa} [\delta_t - \alpha + \frac{1}{\kappa}(\sigma_2 \lambda - \sigma_1 \sigma_2 \rho) + \frac{\sigma_2^2}{\kappa^2}] (1 - e^{-\kappa(T_i - t_i)}) \\ & \left. - \left(\frac{\sigma_2}{\kappa} \right)^2 \frac{1}{4\kappa} (1 - e^{-2\kappa(T_i - t_i)}) \right\}^2. \end{aligned}$$

6.3 Aplikácia modelov na reálne dáta

6.3.1 Dáta

Dáta, ktoré sme použili na testovanie modelov, pozostávajú z denných pozorovaní cien future kukurice obchodované na Chicago Mercantile Exchange a Chicago Board of Trade. Kvôli povahe future kontraktov je veľmi komplikované sa dopracovať ku spotovým cenám, na ktorých študované modely stoja, a tak sme namiesto spotovej ceny použili future kontrakty najbližšie expirácii. Tento spôsob sa použil napríklad v [6] a [13]. Pri odhadoch parametrov sme využili aj cenu future kontraktu s dobou splatnosti inou ako future, ktorý používame ako náhradu za spotovú cenu. Na to sme použili future kontrakt s dobou splatnosti najbližšou nasledujúcou t.j. ak na odhad spotovej ceny S_i sme použili kontrakt so splatnosťou v marci, ako data odhadovaného future F_i sme použili kontrakt so splatnosťou v máji a tak ďalej. Na odhadovanie parametrov modelov sme použili denné dáta 6 kontraktov za rok 2013 (marec 2013, máj 2013, júl 2013, september 2013, december 2013, marec 2014). Získané odhady sme použili na predikciu cien future kontraktu v roku 2014 a porovnali s reálnym priebehom ceny. Na to sme použili ďalších 6 future kontraktov (marec 2014, máj 2014, júl 2014, september 2014, december 2014, marec 2015). Future dáta nám poskytla spoločnosť iQFeed.

Pre potreby modelu 3 sme na výpočet *convenience yield* použili vzťah medzi cenou future kontraktu a spotovou cenou, kde ani úroková miera ani *convenience yield* nie sú náhodné [5, kapitola 5] tj.

$$F(S, T) = Se^{(r-\delta)(T-t)} \quad (6.3.1)$$

a to nám dovolilo určiť denný forwardový *convenience yield* pomocou dvoch future kontraktov s rozdielom dôb splatnosti rovným jednej perióde (čo sú v našom prípade dva, alebo tri mesiace) podľa vzorca

$$\delta = r_{T-3,T} - \frac{1}{\frac{3}{12}} \times \ln \left[\frac{F(S, T)}{F(S, T-3)} \right], \quad (6.3.2)$$

kde $r_{T-3,T}$ označuje $T-3$ periódu vopred anualizovanú dennú forwardovú úrokovú mieru. Poznamenajme, že v našom prípade nebol rozdiel dvoch po sebe idúcich kontraktov stále 3 mesiace. Napríklad rozdiel medzi marcovým kontraktom a májovým kontraktom bol 2 mesiace a medzi septembrovým a decembrovým bol 3 mesiace. My sme si pre naše výpočty zvolili v (6.3.2) 3 mesiace. Na výpočet $r_{T-3,T}$ sme použili vzorec [10, kapitola 1.4]

$$r_{i,j} = \left[\frac{(1+r_j)^j}{(1+r_i)^i} \right]^{\frac{1}{j-i}}, \quad (6.3.3)$$

kde r_j reprezentuje denné úroky Treasury bill s dobou splatnosti j najbližšou ku dobe splatnosti futuru $F(S, T)$ a r_i úroky Treasury bill s dobou splatnosti i o jednu periodu kratšou ako r_j . To znamená, že ak aj najbližší dobe splatnosti $F(S, T)$ bol 6-mesačný Treasury bill, tak za r_j sme dosadili úrok na 6-mesačných Treasury bill a za r_i úrok na 3-mesačných Treasury bill. Takýmto spôsobom sme použili denné dáta úrokov 1-mesačných, 3-mesačných a 6-mesačných Treasury bill kontraktov za rok 2013 a 2014. Dáta Treasury bill poskytol web U.S. Department of the Treasury. V modeli 3 sa používa konštantná úroková miera r , na ktorej odhad sme použili priemernú hodnotu úrokov 3-mesačných Treasury bill za rok 2013.

6.3.2 Empirické výsledky

Hodnoty parametrov, ktoré sme získali použitím výsledkov z časti 6.2 sú v tabuľkách 1, 2 a 3 uvedených nižšie. Okrem odhadov parametrov sa v tabuľkách nachádzajú hodnoty RMSE (*Root Mean Square Error*), ako pre samotné priebehy procesov (6.1.7), (6.1.13) a (6.1.54), tak pre funkcie, na ktoré sme aplikovali nelineárnu regresiu a to sú (6.2.1), (6.2.6), a (6.2.11). Použitý odhad pre úrokovú mieru pre model 3 bol $r = 0.0004780083$. Pri odhadovaní parametrov σ_1 a σ_2 modelu 3 nelineárnou regresiou vo forme príkazu `optim()` sme sa obmedzili na σ_1 a σ_2 nezáporné. V tabuľke 4 uvádzame pre porovnanie hodnoty RMSE modelu, ktorý sme nazvali *triviálny*. To znamená, že cena *future kontraktu* sa správa podľa vzťahu $F(S, t) = S(t)$. Ďalej uvádzame ku príslušným modelom obrázky porovnania odhadovaného priebehu so skutočným priebehom future ceny kukurice.

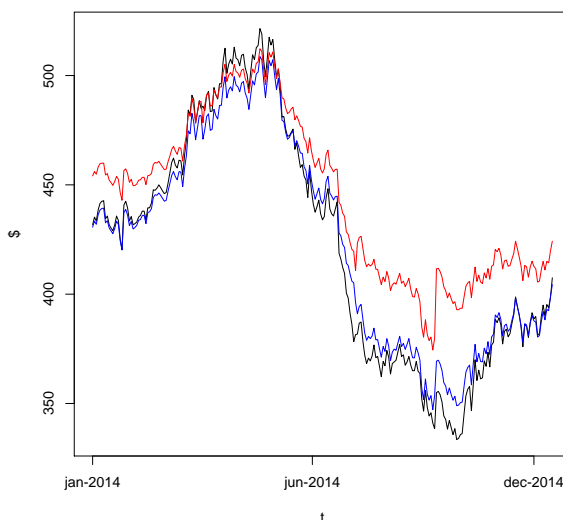
Model 1

Tabuľka 1

	Naše odhady	<code>optim()</code>
α^*	6.1504853	6.127819e+00
θ	0.9516584	4.143069e-01
σ^2	0.1477166	2.754954e-09
RMSE ₁	28.70621	8.251041
RMSE ₂	0.05789166	0.01991426

$$\text{RMSE}_1 = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{F}_i - F_i)^2}$$

$$\text{RMSE}_2 = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\ln(\hat{F}_i) - \ln(F_i)]^2}$$



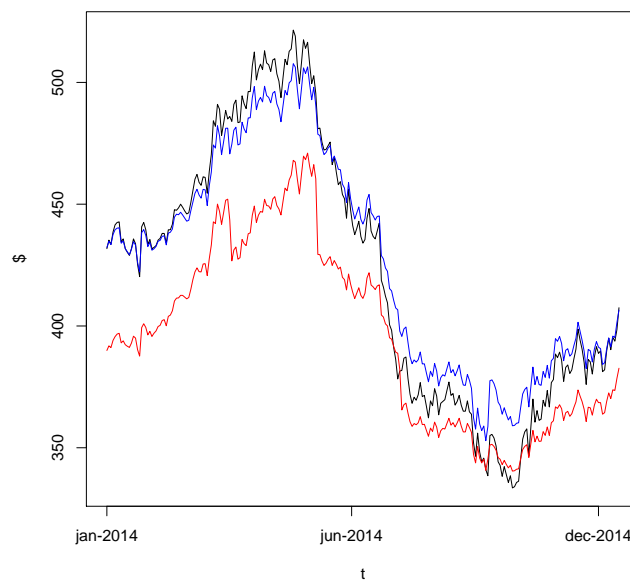
Obr. 6.3.1: **Priebehy pre model 1:** čierna reálne dáta future kukurice, červená predikcie na základe odhadov parametrov z časti 6.2, modrá predikcie na základe odhadov parametrov `optim()`.

Model 2

Tabuľka 2

	Lineárna regresia	optim()
α	357.2541	458.2553718
κ	1.188226	0.5010952
RMSE ₁	33.359	11.25532
RMSE ₂	0.07366489	0.02836555

$$\text{RMSE}_1 = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{F}_i - F_i)^2}$$
$$\text{RMSE}_2 = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\ln(\hat{F}_i) - \ln(F_i)]^2}$$



Obr. 6.3.2: **Priebehy pre model 2:** čierna reálne dáta future kukurice, červená predikcie na základe odhadov lineárnej regresie, modrá predikcie na základe odhadov parametrov optim().

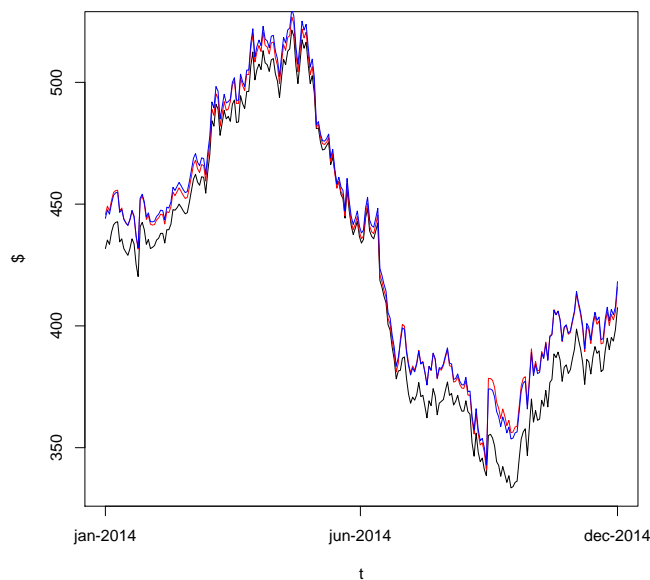
Model 3

Tabuľka 3

	SUR a MNŠ	optim()
α	0.13051337	0.131009916
κ	0.01066044	0.005171215
ρ	0.59788300	0.597961434
λ	-1.90872920	-1.911964878
σ_1	0.02422901	0.026163569
σ_2	0.06216214	0.158931695
RMSE ₁	11.55318	11.80623
RMSE ₂	0.03005018	0.03005476

$$\text{RMSE}_1 = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{F}_i - F_i)^2}$$

$$\text{RMSE}_2 = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\ln(\hat{F}_i) - \ln(F_i)]^2}$$

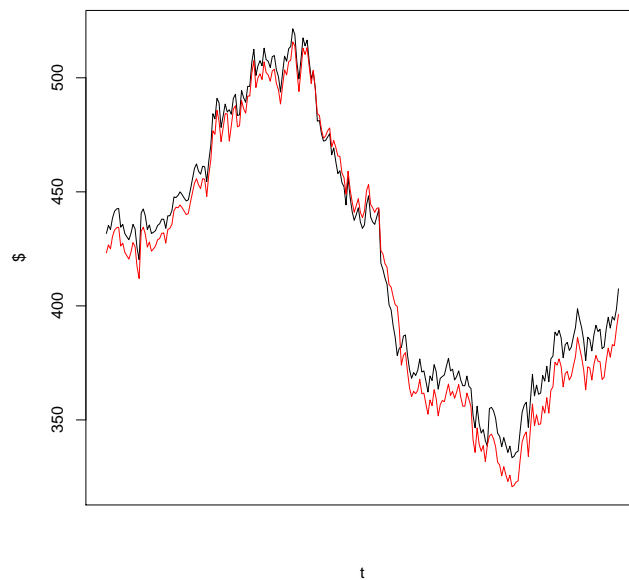


Obr. 6.3.3: **Priebehy pre model 3:** čierna reálne dáta future kukurice, **červená** predikcie na základe odhadov SUR a MNŠ, **modrá** predikcie na základe odhadov parametrov optim().

Triviálny model

Tabuľka 4

RMSE ₁	8.962294
RMSE ₂	0.02353489

$$\text{RMSE}_1 = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (F_i - S_i)^2}$$
$$\text{RMSE}_2 = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\ln(F_i) - \ln(S_i)]^2}$$


Obr. 6.3.4: **Priebehy pre triviálny model** čierna reálne dáta future kukurice, **červená** predikcie na základe triválneho modelu.

7 Súvislosť s parciálnymi diferenciálnymi rovnicami

7.1 Feynman-Kacova veta

Nasledujúca veta dáva do spojitosti stochastické diferenciálne rovnice a parciálne diferenciálne rovnice.

Veta 7.1.1 (Feynmanova-Kacova veta). *Uvažujme stochastickú diferenciálnu rovnicu*

$$dX(u) = \beta(u, X(u))du + \gamma(u, X(u))dW(u). \quad (7.1.1)$$

Nech $h(y)$ je Borelovsky-merateľná funkcia. Fixujme $T > 0$, a nech $t \in [0, T]$ je dané. Definujme funkciu

$$g(t, x) = E^{t,x}h(X(T)). \quad (7.1.2)$$

(Predpokladáme, že $E^{t,x}|h(X(T))| < \infty$ pre každé t a x .) Potom $g(t, x)$ spĺňa parciálnu diferenciálnu rovnicu

$$g_t(t, x) + \beta(t, x)g_x(t, x) + \frac{1}{2}\gamma^2(t, x)g_{xx}(t, x) = 0 \quad (7.1.3)$$

s koncovou podmienkou

$$g(T, x) = h(x) \text{ pre každé } x. \quad (7.1.4)$$

Náčrt dôkazu Feynmanovej-Kacovej vety sa nachádza v [15, veta 6.4.1].

7.2 Alternatívny postup výpočtu ceny future kontraktu

V časti 6 sme použili tzv. rizikovo neutrálne oceňovanie na odovodenie ceny future kontraktu danej komodity. Ku rovnakým výsledkom sa vieme dostať aj pomocou Feynmanovej - Kacovej vety. Ukážku ododenia ceny future kontraktu pomocou Feynmanovej - Kacovej vety urobíme pre model 1.

V modeli 1 je priebeh spotovej ceny komodity daný

$$dS = \kappa(\mu - \ln S)Sdt + \sigma SdB. \quad (7.2.1)$$

Budeme pracovať s procesom Ornstein-Uhlenbeckovho typu tak ako je definovaný v časti 6.1.1 t.j.

$$dX = \kappa(\alpha - X)dt + \sigma dB, \quad (7.2.2)$$

kde $X = \ln S$ a S je spotová cena danej komodity.

Ďalej vyjadríme (7.2.2) vzhľadom ku rizikovo neutrálnej miere \tilde{P} a dostávame

$$dX = \kappa(\alpha^* - X)dt + \sigma dB^*. \quad (7.2.3)$$

Z teórie rizikovo neutrálneho oceňovania (5.3.7) máme formulu

$$F(t, S) = \tilde{E}[S(t)] = \tilde{E}[e^x] \quad (7.2.4)$$

a priamo použitím Feynmanovej-Kacovej vety dostávame parciálnu diferenciálnu rovnicu

$$F_t + \kappa(\alpha^* - x)F_x + \frac{1}{2}\sigma^2 F_{xx} = 0 \quad (7.2.5)$$

s koncovou podmienkou

$$F(T, x) = e^x. \quad (7.2.6)$$

Teraz rovnicu (7.2.5) vyriešime.

Na začiatok predpokladajme, že riešenie bude v tvare

$$F(t, x) = e^{-xA(t,T) - B(t,T)} \quad (7.2.7)$$

pre nejaké nenáhodné funkcie $A(t, T)$ a $B(t, T)$, ktoré určíme. Potom platí

$$\begin{aligned} F_t(t, x) &= (-xA'(t, T) - B'(t, T))F(t, x) \\ F_x(t, x) &= -A(t, T)F(t, x) \\ F_{xx}(t, x) &= A^2(t, T)F(t, x), \end{aligned}$$

kde $A'(t, T) = \frac{\partial A(t, T)}{\partial t}$ a $B'(t, T) = \frac{\partial B(t, T)}{\partial t}$. Dosadenie do parciálnej diferenciálnej rovnice (7.2.5) nám dáva rovnicu

$$\left[(-A'(t, T) + \kappa A(t, T))x - B'(t, T) - \kappa\alpha^* A(t, T) + \frac{1}{2}\sigma^2 A^2(t, T) \right] F(t, x) = 0. \quad (7.2.8)$$

Keďže rovnica (7.2.8) musí platiť pre každé x dostávame systém obyčajných diferenciálnych rovníc

$$A'(t, T) = \kappa A(t, T), \quad (7.2.9)$$

$$B'(t, T) = -\kappa\alpha^* A(t, T) + \frac{1}{2}\sigma^2 A^2(t, T). \quad (7.2.10)$$

Koncová podmienka (7.2.6) musí taktiež platiť pre každé x a to implikuje, že $A(T, T) = -1$ a $B(T, T) = 0$. To nám dáva dostatok informácií na to aby sme určili funkcie $A(t, T)$ a $B(t, T)$ pre $0 \leq t \leq T$. Tie sú

$$A(t, T) = -e^{-\kappa(T-t)} \quad (7.2.11)$$

a

$$\begin{aligned} B(t, T) &= \int_t^T \left(\kappa\alpha^* e^{-\kappa(T-s)} + \frac{1}{2}\sigma^2 e^{-2\kappa(T-s)} \right) ds \\ &= -\alpha^*(1 - e^{-\kappa(T-t)}) - \frac{\sigma^2}{4\kappa}(1 - e^{-2\kappa(T-t)}). \end{aligned} \quad (7.2.12)$$

Nakoniec spojením (7.2.7), (7.2.11) a (7.2.12) dostávame riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice (7.2.5) s koncovou podmienkou (7.2.6)

$$F(t, X) = \exp \left(Xe^{-\kappa(T-t)} + \alpha^*(1 - e^{-\kappa(T-t)}) + \frac{\sigma^2}{4\kappa}(1 - e^{-2\kappa(T-t)}) \right) \quad (7.2.13)$$

a keďže $X = \ln S$ dostávame pre cenu future kontraktu

$$F(t, S) = \exp \left(\ln S(t)e^{-\kappa(T-t)} + \alpha^*(1 - e^{-\kappa(T-t)}) + \frac{\sigma^2}{4\kappa}(1 - e^{-2\kappa(T-t)}) \right), \quad (7.2.14)$$

čo sa zhoduje s výsledkom z časti 6.1.1.

Záver

V tejto práci sme sa pozreli na prípad, kedy povolíme istú formu náhodnosti pri niektorých koeficientoch diferenciálnej rovnice. Pokúsili sme jednoduchým a zrozumiteľným spôsobom priblížiť teoretické pozadie, na ktorom je riešenie stochastických diferenciálnych rovníc založené. Veľkú časť tejto zaujímavej teórie sme z praktických dôvodov vynechali a uvádzame iba to, čo bolo nevyhnutné pre samotné riešenie rovnice (2.3.2) a odvádzanie niektorých vlastností riešení konkrétnych rovníc.

Kulmináciou kapitol 1 až 4 je praktická časť práce (kapitola 5 a 6), kde sme použili získané výsledky na stochastické modelovanie správania sa cien future kontraktov kukurice, ktoré vychádza z teórie rizikovo neutrálneho oceňovania. Vybrali sme si tri modely reprezentované troma stochastickými diferenciálnymi rovnicami a skúmali, ako dobre predikujú cenu future kontraktu kukurice obchodovaného počas roku 2014. Za mieru ako dobre predikuje daný model skutočné dáta sme si zvolili RMSE (*Root Mean Square Error*). Na základe získaných výsledkov, ktoré sú prezentované v tabuľkách 1, 2 a 3 a k nim prislúchajúcich obrazkoch 6.3.1, 6.3.2 a 6.3.3, najlepšie predikcie nám vyšli pre model 1 s odhadmi parametrov pomocou nelineárnej regresie vo forme funkcie `optim()`, potom pre náš *triviálny* model (tabuľka 4 a obrázok 6.3.4), a následne pre model 2 s odhadmi parametrov pomocou nelineárnej regresie vo forme funkcie `optim()` a model 3 s odhadmi pomocou SUR (poznamenajme, že hodnoty RMSE pre model 2 a model 3 sú relatívne blízko seba). Naše výsledky sa zhodujú s literatúrou, kde v [5, kapitola 3.4] sa model 1 uvádza ako populárny model pre oceňovanie energetických a poľnohospodárskych komodít a model 3 bol navrhnutý pre oceňovanie ropných kontraktov [5, kapitola 3.6].

Prácu uzavrieme spomenutím niekoľkých možných rozšírení a smerov, kam by ďalšie štúdium stochastického modelovania komodít, naše alebo iného záujemcu, mohlo pokračovať. My sme sa zaoberali jednofaktorovými a dvojfaktorovými modelmi pre ceny komodít. Existujú aj trojfaktorové modely (napríklad [5, kapitola 3.6]) a bolo by zaujímavé sa na ne bližšie pozrieť. Ďalej pre odhady parametrov modelov 1 až 3 sme použili lineárnu regresiu v rôznych formách a potom nelineárnu regresiu vo forme R funkcie `optim()`. V [13] bol použitý na odhady parametrov modelov Kalman - Bucyho filter. Tento filter úzko súvisí so stochastickými diferenciálnymi rovnicami a to tak, že dáva postup na odhad stavu systému, ktorý spĺňa lineárnu diferenciálnu rovnicu so *šumom* na základe pozorovaní so *šumom* [1, kapitola 1.2]. Je možné, že by sme na základe týchto odhadov prišli k lepším predikciám.

Literatúra

- [1] Bernt Ø., Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications, Springer, 1998.
- [2] Bjerksund P., Contingent Claims Evaluation when the Convenience Yield is Stochastic: Analytical Results, Norwegian School of Economics, <http://www.nhh.no/Files/Filer/institutter/for/dp/1991/0191.pdf>, 1991.
- [3] Brigo D., Mercurio F., Interest Rate Models - Theory and Practice: With Smile, Inflation and Credit, Second Edition, Springer, 2007.
- [4] Fabbozi F. J., Fuss R., Kaiser D. G. The Handbook of Commodity Investing, John Wiley & Sons, 2008.
- [5] Geman H., Commodities and Commodity Derivatives: Modelling and Pricing for Agriculturals, Metals and Energy, John Wiley & Sons, 2005.
- [6] Gibson R., Schwartz E. S., Stochastic Convenience Yield and Pricing of Oil Contingent Claims, The Journal of Finance, Vol. 45, Issue 3, Jul., 1990.
- [7] Henningsen A., Hamann J. D., systemfit: A Package for Estimating Systems of Simultaneous Equations in R, <http://cran.r-project.org/web/packages/systemfit/vignettes/systemfit.pdf>, 8. 5 2015.
- [8] Karatzas I., Shreve S., Brownian Motion and Stochastic Calculus, Springer, 1983.
- [9] Kirchgässner G., Wolters J., Introduction to Modern Time Series Analysis, Springer, 2007.
- [10] Melicherčík I., Olšarová L., Úradníček. V., Kapitoly z finančnej matematiky, EPOS, 2005.
- [11] Ross S. M., Introduction to Probability Models, Tenth Edition, Academic Press, 2010.
- [12] Samuelson P. A., Rational theory of warrant pricing, Industrial management review, Vol. 6, Issue 2, 1965.
- [13] Schwartz E. S., The Stochastic Behavior of Commodity Prices: Implications for Valuation and Hedging, The Journal of Finance, Vol. 52, Issue 3, 1997.
- [14] Seydel R., Tools for Computational Finance, Springer, 2006.
- [15] Shreve S., Stochastic Calculus for Finance II: Continuous - Time Models, Springer, 2010.
- [16] Vasicek O., An Equilibrium Characterisation of the Term Structure, Journal of Financial Economics, Vol. 5, Issue 2, 1977.
- [17] Weisstein E. W. Log Normal Distribution. From MathWorld—A Wolfram Web Resource, <http://mathworld.wolfram.com/LogNormalDistribution.html>, 8.5 2015.

- [18] Calibrating the Ornstein-Uhlenbeck (Vasicek) model, <http://www.sitmo.com/article/calibrating-the-ornstein-uhlenbeck-model/>, 8. 5 2015.
- [19] Product of stochastic integral and brownian motion, <http://math.stackexchange.com/questions/1133558/product-of-stochastic-integral-and-brownian-motion>, 8. 5 2015.