

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



**3x JAPONSKO A MATEMATIKA**

Bakalárska práca

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

### **3x JAPONSKO A MATEMATIKA**

#### **Bakalárska práca**

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika  
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika  
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky  
Vedúci práce: doc. RNDr. Beáta Stehlíková, CSc.



Univerzita Komenského v Bratislave  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

---

## ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

**Meno a priezvisko študenta:** Daniela Pellerová  
**Študijný program:** ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)  
**Študijný odbor:** 9.1.9. aplikovaná matematika  
**Typ záverečnej práce:** bakalárska  
**Jazyk záverečnej práce:** slovenský  
**Sekundárny jazyk:** anglický

**Názov:** 3x Japonsko a matematika  
*3x Japan and mathematics*

**Cieľ:** Práca sa bude skladať z troch kapitol:

(a) Sangaku sú tabuľky s geometrickými úlohami, ktoré sa nachádzajú v niektorých budhistických a šintoistických chrámoch v Japonsku. V kapitole sa uvedie jednochý príklad na ukážku a potom niekoľko (2-3) náročnejších príkladov.

(b) Origami, skladanie z papiera má súvislosti s matematikou. V práci sa budeme zaoberať dvoma z nich podľa knihy [1]: skladanie do seba vložených štvorstenov (vedie na optimalizačnú úlohu - treba určiť pomer strán papiera, z ktorého sa jednotlivé časti skladajú tak, aby do seba čo najlepšie zapadali) a skladanie iterácií Mengerovej špongie [2] (treba nájsť rekurentný predpis a potom explicitný vzťah pre počet použitých papierových vizitiek, z ktorých sa model skladá).

(c) Samostatne naprogramovať riešenie niekoľkých (2-3) japonských logických hlavolamov v softvéri Minizinc. Programovanie je založené na modelovaní a matematickej formulácii problému, nie na naprogramovaní algoritmu jeho riešenia (solver je možné vybrať spomedzi dostupných možností pri spúšťaní programu).

**Literatúra:** [1] T. Hull, Project origami: activities for exploring mathematics. CRC Press, 2012.  
[2] E. W. Weisstein, Menger Sponge. From MathWorld - A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/MengerSponge.html>

**Vedúci:** RNDr. Beáta Stehlíková, PhD.  
**Katedra:** FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky  
**Vedúci katedry:** prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.  
**Dátum zadania:** 20.10.2015

**Dátum schválenia:** 19.11.2015

doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.  
garant študijného programu



Univerzita Komenského v Bratislave  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

---

.....  
študent

.....  
vedúci práce

**Podakovanie** Touto cestou sa chcem poďakovať svojej vedúcej bakalárskej práce doc. RNDr. Beáte Stehlíkovej, PhD. za kreatívnu tému, ochotu odpovedať na moje otázky a podnetné pripomienky. Ďakujem tiež mojej rodine a priateľom za podporu.

## Abstrakt v štátnom jazyku

PELLEROVÁ, Daniela: 3x Japonsko a Matematika [Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľka: doc. RNDr. Beáta Stehlíková, PhD., Bratislava, 2016, 70 s.

V prvej časti práce sa zaoberáme matematikou zobrazenou na drevených tabuľkách v šintoistických a budhistických chrámoch v Japonsku. V náročnejšom príklade uvedieme tradičné riešenie a následne vyriešime aj nami zovšeobecnené riešenie použitím analytickej geometrie. Druhá časť sa venuje aplikácii matematiky v Origami. V prvom modeli zoptimalizujeme rozmery papiera, z ktorého sa skladajú jednotlivé stavebné časti, zatiaľ čo v druhom odvodíme explicitný aj rekurentný vzorec na počet takýchto častí. Oba modely napokon skonštruujeme čím potvrdíme odvodené výsledky. V poslednej časti sa venujeme matematickej formulácii japonských hlavolamov v programovacom jazyku MiniZinc. Ide o jazyk, ktorý je špecializovaný na optimalizáciu s ohraničením, čo nám umožňuje lepšiu prácu s obmedzeniami, ktoré udávajú hlavolamy. Konkrétne rozoberáme riešenie hlavolamov Futošiki a Mrakodrapy.

**Kľúčové slová:** Sangaku, Origami, Pretínajúce sa štvorsteny, Mengerova špongia, Futošiki, Mrakodrapy, Hlavolamy

## Abstract

PELLEROVÁ, Daniela: 3x Japan and Mathematics [Bachelor Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: doc. RNDr. Beáta Stehlíková, PhD., Bratislava, 2016, 70p.

In the first part of our work, we are dealing with mathematics depicted on wooden tables in Shinto shrines and Buddhist temples of Japan. We mention a traditional solution to a more difficult problem and subsequently we solve a generalized problem using analytic geometry. Second part is dedicated to application of mathematics in Origami. Our objective in the first model is to optimize the size of paper, from which the basic building units are folded, whereas in the second model we derive a recurrent and also explicit formula for the number of its building unit. By constructing both of the models we confirm our derived results. In the last part of our work we discuss mathematical formulation of two of Japanese puzzles in programming language of MiniZinc. It is a language designed for specifying constrained optimization, which help us with formulations. Namely, we will use MiniZinc to solve Futoshiki and Skyscrapers puzzles.

**Keywords:** Sangaku, Origami, Intersecting Tetrahedra, Menger Sponge, Futoshiki, Skyscrapers, Logic Puzzles





# Obsah

Úvod . . . . .	11
<b>1 Sangaku</b>	<b>13</b>
1.1 Umenie, náboženstvo alebo matematika? . . . . .	13
1.2 Ukážky jednoduchých Sangaku . . . . .	14
1.2.1 Sangaku Pávi Chvost . . . . .	14
1.2.2 Druhé jednoduché Sangaku . . . . .	16
1.3 Ťažké Sangaku . . . . .	19
1.3.1 Tradičné riešenie - Kitagawa Moko . . . . .	20
1.3.2 Moderné riešenie . . . . .	24
1.3.3 Naše riešenie . . . . .	29
<b>2 Origami</b>	<b>35</b>
2.1 Začiatky skladania papiera . . . . .	35
2.2 Skladanie do seba vložených štvorstenov . . . . .	37
2.2.1 Odvodenie súradníc ostatných vrcholov dvanáststena . . . . .	38
2.2.2 Optimálne nastavenie hrúbky jednej stavebnej časti . . . . .	41
2.3 Skladanie iterácií Mengerovej špongie . . . . .	44
2.3.1 Hladká verzia . . . . .	46
2.3.2 Ukážky modelov . . . . .	49
<b>3 Matematická formulácia japonských hlavolamov</b>	<b>53</b>
3.1 O programe MiniZinc . . . . .	54
3.2 Futošiki . . . . .	54
3.3 Mrakodrapy . . . . .	57
Záver . . . . .	63

---

<b>Literatúra</b>	<b>65</b>
Príloha A . . . . .	69

o ich počet. Mengerova špongia je fraktálové teleso, pričom na skladanie jednotlivých iterácií sa používajú papierové vizitky. V práci sa zameriame na odvodenie rekurentného aj explicitného vzorca pre počet takýchto vizitiek potrebných na poskladanie  $n$ -tej iterácie.

Poslednou kapitolou našej práce bude kapitola o japonských hlavolamoch. Nepôjde o ich samotné riešenie, ale o ich matematickú formuláciu a programovanie v programe MiniZinc. Pre oboznámenie so samotným MiniZincom najskôr uvedieme formuláciu jednoduchšieho hlavolamu - Futošiki a naprogramujeme aj zložitejší - Mrakodrapy.

# Kapitola 1

## Sangaku

### 1.1 Umenie, náboženstvo alebo matematika?

Či už v dnešnom svete, alebo v minulosti, umenie vždy úzko súviselo s náboženstvom. Malby v kostoloch, mozaiky, vitráže, obrovské sochy a aj mnoho ďalších umeleckých diel vznikali na podnet náboženstva. Boli súčasťou bohoslužieb, prejavom úcty, vďaky, alebo oddanosti.

Spájanie umenia a matematiky tiež nie je neobvyklým javom. Využívanie symetrií, fraktálových obrazcov ale aj platónske telesá a iné geometrické útvary by sme našli v dielach mnohých známych umelcov. Na otázku, či je možné spojiť do jedného umenie, náboženstvo a aj matematiku, nám odpovedajú japonské tabuľky Sangaku.

Ide o drevené tabuľky, ktoré boli v Japonsku populárne počas éry Edo (od roku 1603 až do roku 1867 [20]) kedy ich matematici po zobrazení nechávali v chrámoch ako dary. Aj napriek tomu, že v tomto období bolo Japonsko takpovediac odrezané od zvyšku sveta <sup>1</sup>. Neznamená to ale, že úplne stagnovalo. Izolácia krajiny spôsobila,

---

<sup>1</sup>Rokom 1603 boli v Japonsku položené základy šogunátu Tokugawa. Prvý šogún, Iejasu Tokugawa, považoval kresťanstvo za podvratný živel a v roku 1606 začal vydávať prvé protikresťanské edikty. Jeho nástupcovia v nich pokračovali, až nakoniec prenasledovanie kresťanov spolu s tokugawskou politikou prísnej regulácie zahraničného obchodu priviedla šogunát do stavu takmer úplnej izolácie. Európskym lodiam bol povolený vstup len do dvoch prístavov, z krajiny boli vyhostení všetci Španieli, Japoncom bol pod hrozbou trestu smrti zakázaný odjazd do cudziny, a tým ktorí sa tam zdržiavali bol udelený zákaz návratu. Z celej Európy mali obchod s Japonskom dovolený len Holanďania a nasledujúcich 150 rokov sa Japonsko správalo akoby zvyšok sveta vôbec neexistoval [20]

že si vyvinuli iné metódy na riešenie problémov, než tie ktoré sa používali v tom čase inde vo svete. V japonských geometrických úlohách sa často používali kružnice a elipsy, zatiaľ čo v Európe takých bolo pomenej.

Tiež znalosti, ktoré sa v daných oblastiach rozvíjali v Európe boli pre Japonsko stále neznáme, preto boli často nútení vymyslieť vlastné postupy riešenia.

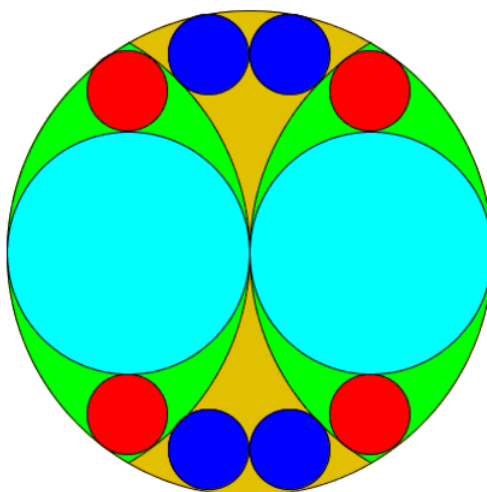
Tie boli blízke prístupom starých Grékov a boli často časovo náročnejšie. Zatiaľ čo pomocou moderných matematických metód môže riešenie Sangaku zjednodušiť na pár riadkov, pôvodné japonské riešenia boli dlhé niekoľko strán. Ich výhodou ale bolo, že matematika, ktorá sa v nich využívala bola oveľa jednoduchšia, vďaka čomu ich mohol riešiť takmer ktokoľvek. Niektoré tabuľky boli vyriešené dvanásť ročnými deťmi. To ale neznamená, že neboli náročné, len že na ne stačili základné znalosti matematiky [23].

V tejto kapitole postupne rozoberieme tri rôzne Sangaku vrátane moderných a tradičných riešení.

## 1.2 Ukážky jednoduchých Sangaku

### 1.2.1 Sangaku Páví Chvost

Veľa Sangaku obsahuje vpísané a opísané kružnice. Toto konkrétne (obrázok 1.1) zavesila Okuda Cume v roku 1865 na chrám Meiseirindži v meste Ogaki [17].



**Obr. 1.1:** Zadanie Sangaku Páví Chvost [17]

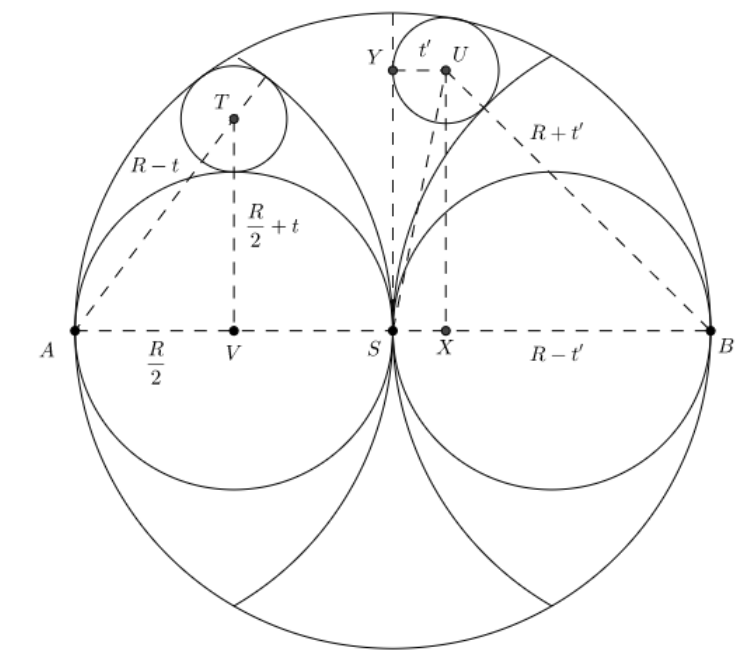
Na obrázku vidíme veľký kruh s priemerom  $2R$ . Do neho sú vpísané dva dotýkajúce

sa kružnicové oblúky s polomerom  $R$  a ďalej vpísané kruhy s priemerom  $R$ . Štvorice červených a modrých kruhov sú vpísané tak ako na obrázku pričom červené majú polomer  $t$  a modré  $t'$ . Úlohou je dokázať rovnosť

$$t = t' = \frac{R}{6}.$$

Uvedieme riešenie podľa [18]:

Vrcholy v zadaní Sangaku sme si označili ako na obrázku 1.2.



**Obr. 1.2:** Zavedené označenie pri riešení Sangaku Pávi Chvost [18]

Potom v pravouhlom trojuholníku  $AVT$  platí

$$\begin{aligned} |AV| &= \frac{R}{2}, \\ |VT| &= \frac{R}{2} + t, \\ |AT| &= R - t. \end{aligned}$$

Použitím Pytagorovej vety pre tento trojuholník dostávame vzťah

$$(R - t)^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + \left(\frac{R}{2} + t\right)^2. \quad (1.1)$$

Máme teda vzťah pre  $R$  a  $t$ . Z pravej časti obrázka teraz podobným spôsobom vyjadríme vzťah  $R$  a  $t'$ .

Z Pytagorovej vety v trojuholníku  $USX$  vyjadríme  $|UX|^2 = |US|^2 - |SX|^2$ . Rovnako z trojuholníka  $UXB$  máme  $|UX|^2 = |UB|^2 - |BX|^2$ . Preto

$$|US|^2 - |SX|^2 = |UB|^2 - |BX|^2. \quad (1.2)$$

Keďže z obrázka 1.2 vidno, že  $|SX| = |UY| = t'$ , tak  $|BX| = R - t'$ . Ďalej  $|UB| = R + t'$  a  $|US| = R - t'$ . Dosadením do (1.2) dostávame:

$$(R - t')^2 - t'^2 = (R + t')^2 - (R - t')^2. \quad (1.3)$$

Z rovnice (1.1) potom ekvivalentnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} R^2 - 2Rt + t^2 &= \frac{R^2}{4} + \frac{R^2}{4} + Rt + t^2, \\ t &= \frac{R}{6}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Analogicky, úpravami vzťahu (1.3) vyjadríme

$$\begin{aligned} R^2 - 2Rt' + t'^2 - t'^2 &= R^2 + 2Rt' + t'^2 - R^2 + 2Rt' - t'^2, \\ t' &= \frac{R}{6}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Potom podľa (1.4) a (1.5) vidno, že

$$t = t' = \frac{R}{6}, \quad (1.6)$$

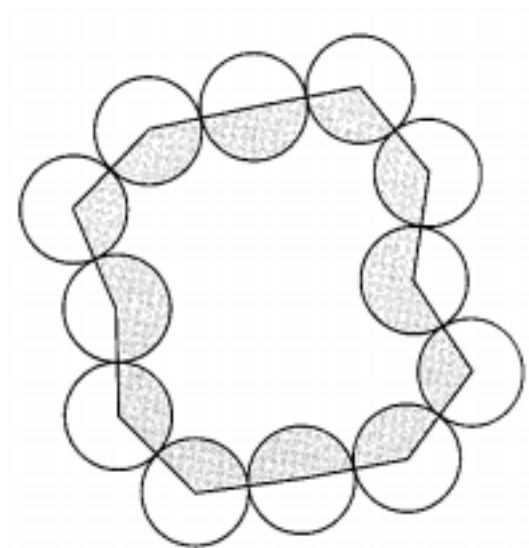
čím je Sangaku vyriešené.

### 1.2.2 Druhé jednoduché Sangaku

Pred tým, než sa budeme zaoberať ťažším Sangaku, uvedieme ešte jedno jednoduchšie.

Toto pochádza zo zbierky Suri Šinpen, ktorej autorom je Saito Gigi (1816-1889). V tejto knihe z roku 1860 je uvedených 34 tabuliek, z ktorých väčšina vyžaduje vyššie znalosti matematickej analýzy. V našej práci si z nich vyberáme ale jednu z jednoduchších, ktorá v knihe nie je vyriešená [11].

Majme kruhy s polomerom  $r$ . Vytvoríme z nich postupnosť tak, že ich stredy tvoria  $n$ -uholník, napríklad ako na obrázku 1.3. Úlohou je vypočítať rozdiel obsahov tej časti kruhov, ktorá je vo vnútri a ktorá je vo vonkajšej časti  $n$ -uholníka.



Obr. 1.3: Zadanie Sangaku z knihy [11]

Súčet vnútorných uhlov ľubovoľného konvexného  $n$ -uholníka vieme vyjadriť ako  $(n - 2) \cdot 180^\circ$  [10].

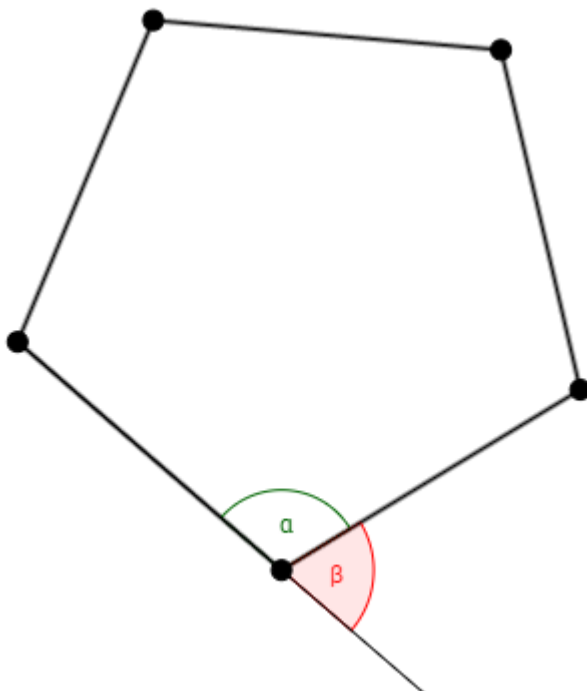
Pod vonkajším uhlom  $n$ -uholníka rozumieme susedný uhol k vnútornému (na obrázku 1.4 je  $\beta$  vonkajším uhlom). Pri takejto definícii môžeme povedať, že súčet vnútorného a vonkajšieho uhla pri danom vrchole bude vždy  $180^\circ$ , pričom vonkajší uhol nám udáva, o aký veľký uhol sa musíme otočiť, aby sme sa dostali k ďalšej hrane  $n$ -uholníka. Treba povedať, že nás zaujíma otočenie sa vždy jedným a tým istým smerom pre každý vrchol. Keďže sa nakoniec dostaneme k tej hrane, z ktorej sme začínali, môžeme povedať, že súčet vonkajších uhlov v konvexnom  $n$ -uholníku bude  $360^\circ$ .

Naše kružnice ale môžu vytvoriť aj nekonvexný  $n$ -uholník, preto by sme potrebovali niečo podobné ukázať aj pre takýto prípad.

Pokiaľ by sme chceli naďalej chápať vonkajší uhol ako otočenie sa k najbližšej hrane  $n$ -uholníka, musíme si uvedomiť, že pri vrchole, ktorý spôsobuje nekonvexnosť (vrchol, pri ktorom je vnútorný uhol väčší ako  $180^\circ$ ) by sme sa v danom smere museli otočiť o viac ako  $180^\circ$ . To by nám ale nesedelo s pôvodným predpokladom, že súčet vonkajšieho a vnútorného uhla bude vždy  $180^\circ$ .

Preto budeme pod vonkajším uhlom pri takomto vrchole chápať uhol menší ako  $180^\circ$ , ktorým sa otočíme k najbližšej hrane (obrázok 1.5). Potom bude ich súčet opäť  $180^\circ$ , ale pri otáčaní k najbližšej hrane sa otočíme do opačnej strany ako pri ostatných





**Obr. 1.4:** Vonkajší uhol  $\beta$  a vnútorný uhol  $\alpha$

vrcholoch preto ich pri výslednom súčte budeme brať s opačným znamienkom. Keďže rovnako ako pri konvexných  $n$ -uholníkoch aj teraz po  $n$  otočeniach skončíme na rovnakej hrane, dokopy sa otočíme o  $360^\circ$ .

Ukázali sme, že súčet vonkajších uhlov je  $360^\circ$  v ľubovoľnom  $n$ -uholníku bez ohľadu na to, či je konvexný alebo nekonvexný [6].

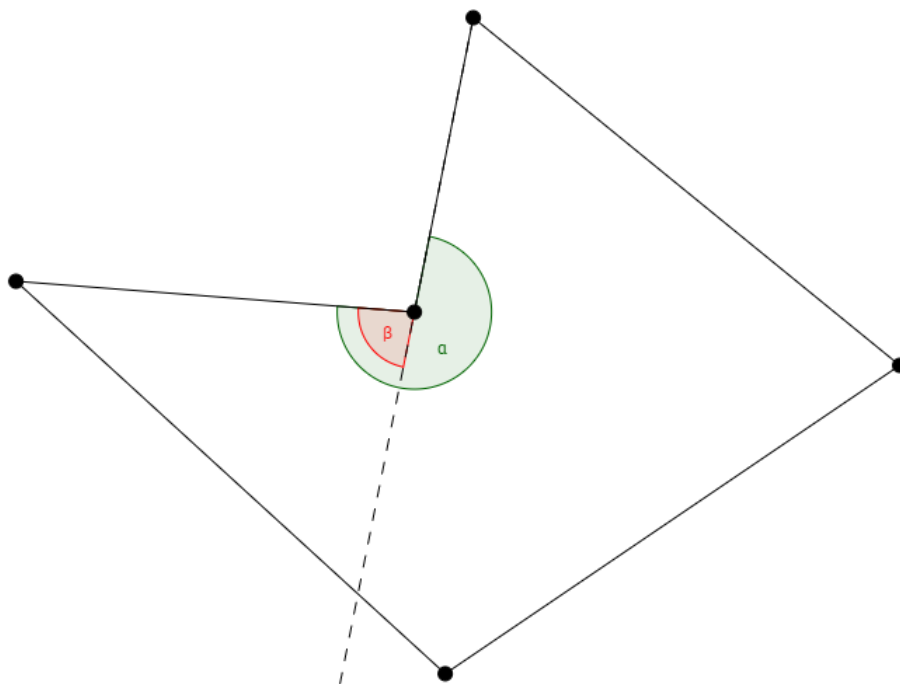
Keďže  $n$ -uholník má  $n$  vrcholov, má aj  $n$  dvojíc vnútorných a vonkajších uhlov. Každá takáto dvojica má v súčte  $180^\circ$ , preto súčet všetkých vnútorných aj vonkajších uhlov v  $n$ -uholníku je vždy  $n \cdot 180^\circ$ . Nakoľko sme ale ukázali, že súčet vonkajších uhlov v ľubovoľnom  $n$ -uholníku je  $360^\circ$ , súčet vnútorných môžeme chápať ako súčet vonkajších aj vnútorných, bez vonkajších.

Preto súčet vnútorných uhlov ľubovoľného  $n$ -uholníka bude  $(n \cdot 180^\circ) - 360^\circ = (n - 2) \cdot 180^\circ$  [6].

Potom súčet obsahov tých častí kruhov, ktoré ležia vo vnútri  $n$ -uholníka bude

$$S_{\text{vnútri}} = \frac{1}{360^\circ} \pi r^2 (n - 2) \cdot 180^\circ = \frac{1}{2} \pi r^2 (n - 2).$$

Vonkajšiu časť vieme vypočítať ako rozdiel súčtu obsahu všetkých kruhov a ich



Obr. 1.5: Vonkajší uhol  $\beta$  a vnútorný uhol  $\alpha$

vnútornej časti, teda

$$\begin{aligned} S_{\text{vonkajšie}} &= n\pi r^2 - S_{\text{vnútri}}, \\ S_{\text{vonkajšie}} &= \frac{n+2}{2}\pi r^2. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Potom rozdiel vyjadríme ako

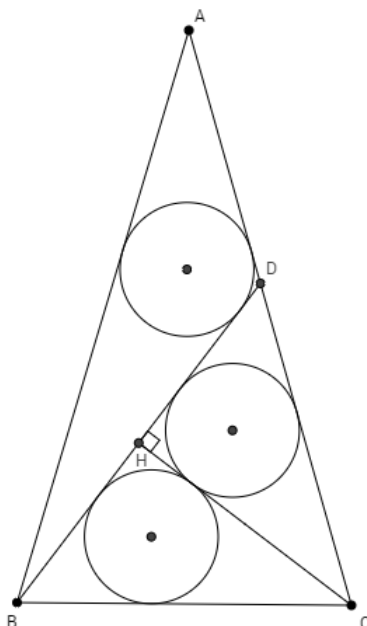
$$S_{\text{vonkajšie}} - S_{\text{vnútri}} = \pi r^2 \left( \frac{n+2}{2} - \frac{n-2}{2} \right) = 2\pi r^2. \quad (1.8)$$

### 1.3 Ťažké Sangaku

Už sme ukázali princíp riešenia Sangaku na jednoduchších príkladoch, takže v nasledujúcej časti sa budeme detailnejšie venovať jednému zložitejšiemu.

Túto tabuľku zavesil Ehara Masanori v roku 1806 v chráme Acua. Obsahovala iba toto jedno zadanie bez riešenia a následnej bola stratená. Našťastie však Kitagawa Moko v neznámom dátume navštívil chrám a zaznamenal toto Sangaku ako Kjúka Sankei, alebo Deväť kvetov matematiky spolu s riešením [11].

Na obrázku 1.6 je rovnoramenný trojuholník  $ABC$ . Dve priamky  $BD$  a  $CH$  ho rozdeľujú na tri malé trojuholníky s vpísanými kružnicami o rovnakom polomere  $r$ .



**Obr. 1.6:** Zadanie ťažšieho Sangaku z knihy Deväť kvetov matematiky

Vyjadrite pomocou neho dĺžku  $CH$ .

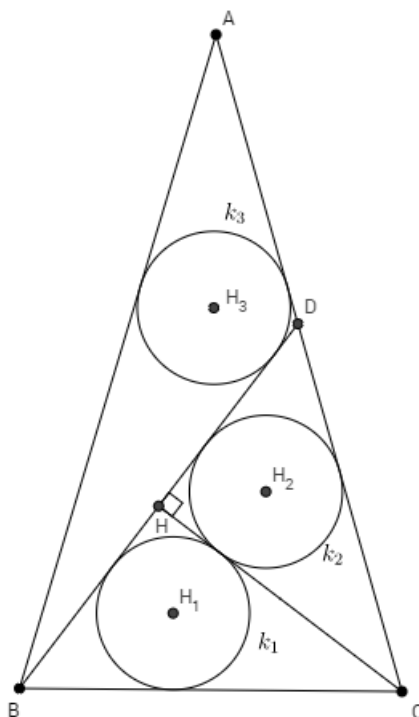
Pre porovnanie uvedieme pôvodné riešenie od Kitagawu Moka [11] a aj moderné riešenie [22]. Ohľadom tohto konkrétneho riešenia sa rozvinuli dlhšie diskusie [2], kvôli chýbajúcej podmienke kolmosti úsečiek  $CH$  a  $BD$  v zadaní [22]. Preto výsledkom tohto riešenia nebolo vyjadrenie dĺžky  $CH$  iba pomocou  $r$  ale aj pomocou iných premenných zo zadania. Jednotlivé premenné vo výsledom vzťahu ale neboli nezávislé, preto sa v našom riešení pokúsime o zjednodušenie tohto vzťahu. Naším cieľom teda bude dostať vzťah dĺžky  $CH$  od čo najmenšieho počtu iných nezávislých premenných zo zadania.

### 1.3.1 Tradičné riešenie - Kitagawa Moko

Ako prvé uvádzame tradičné riešenie podľa [11]. Označme vrcholy trojuholníka, priesečníky a stredy kružníc ako na obrázku 1.7.

Keďže priamka  $CH$  je kolmá na priamku  $BD$  a zároveň polomer  $k_1$  je rovnaký ako polomer  $k_2$ , a teda rovný  $r$ , tak  $|\angle DCH| = |\angle HCB|$ , z čoho vyplíva, že trojuholník  $BCD$  je rovnoramenný.

Označme teda  $b = |BC| = |CD|$ ,  $a = |BD|$  a  $k = |CH|$ . Nech bod  $D'$  leží na strane  $AB$  a bod  $D''$  leží na strane  $AC$ , pričom  $|BD| = |BD'| = |CD''| = a$ , ako na obrázku



Obr. 1.7: Zadanie s označením pre tradičné riešenie

1.8. Označme ďalej  $T, T'$  a  $T''$  body dotyku kružnice  $k_3$  a trojuholníka  $\triangle ABD$ .

Vieme, že body dotyku kružnice (u nás napríklad kružnica  $k_2$  a body  $V, V'$  a  $V''$ ) majú po dvojiciach rovnaké vzdialenosti od príslušného vrcholu trojuholníka (u nás teda napríklad  $|CV| = |CV''|$ ).

Ďalej keďže  $\triangle ABC$  je rovnoramenný, môžeme povedať, že  $|D'T'| = |D''T''|$  a zároveň  $|D'T'| = |DT|$ . Potom  $|DT| = |D''T''|$ . Ďalej keďže body  $T$  a  $T''$  sú bodmi dotyku  $k_3$  a  $\triangle ABD$ , tak  $|DT| = |DT''|$ . Dostávame  $|D''T''| = |DT''|$ . Označme túto vzdialenosť ako  $s$ . Potom

$$s = |D''T''| = |DT''| = \frac{CD'' - CD}{2} = \frac{a - b}{2}. \quad (1.9)$$

Tiež z obrázka 1.8 vidno, že

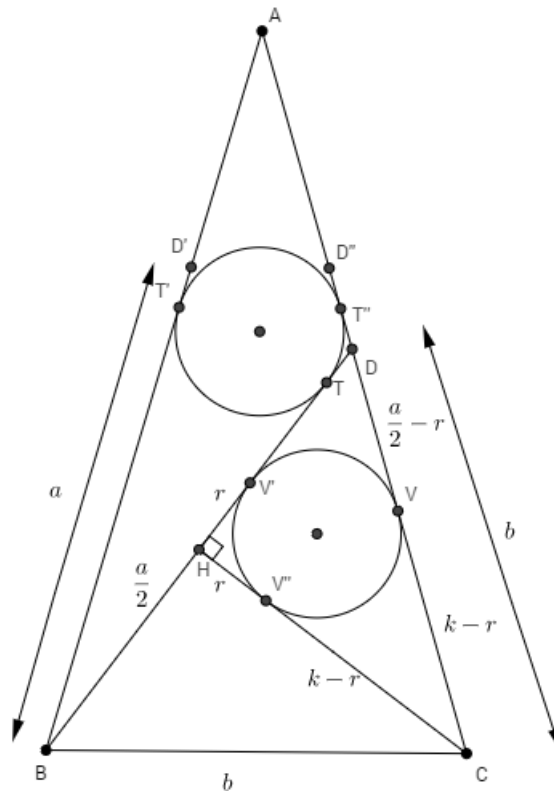
$$b = |BC| = |CD| = |CV| + |VD| = (k - r) + \left(\frac{a}{2} - r\right). \quad (1.10)$$

Po dosadení tohto vzťahu do (1.9) dostávame

$$s = \frac{a}{4} - \frac{k - 2r}{2}. \quad (1.11)$$

Ďalej z obrázku 1.9 a z Pytagorovej vety v trojuholníku  $BCH$  dostávame

$$b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + k^2. \quad (1.12)$$

Obr. 1.8: Zostrojenie bodov  $D', D'', T'$  a  $T''$ 

Umocnením (1.10) a dosadením z (1.12) máme rovnosť

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{4} + k^2 &= \frac{a^2}{4} + k^2 + 4r^2 + ak - 4kr - 2ar, \\ 0 &= 4r^2 + ak - 4kr - 2ar, \\ a &= \frac{4r(k-r)}{k-2r}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

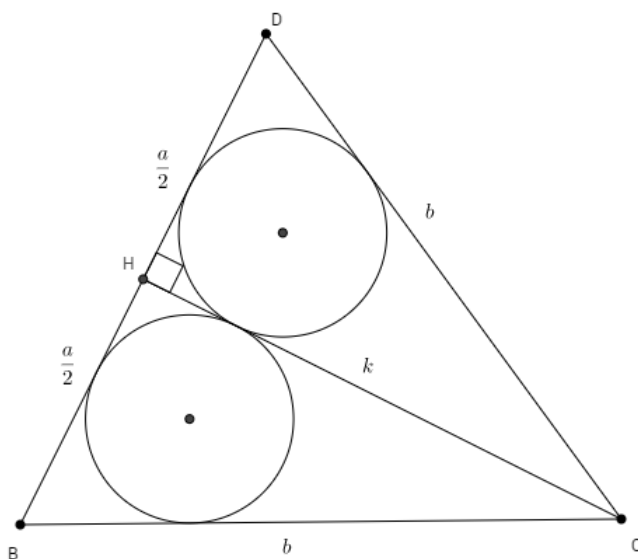
Vpíšme teraz do trojuholníka  $BCD$  novú kružnicu  $k_4$  so stredom  $H_4$  a polomerom  $R$  ako na obrázku 1.10. Označme  $Q$  bod jej dotyku so stranou  $BC$ . Z Pytagorovej vety v trojuholníku  $CH_4Q$  vyjadríme dĺžku strany  $CQ$ :

$$|CQ| = \sqrt{(k-R)^2 - R^2} = \sqrt{k^2 - 2Rk} = b - \frac{a}{2} = k - 2r, \quad (1.14)$$

kde posledná rovnosť vyplýva z (1.10). Z (1.14) potom vieme vyjadriť  $R$  ako

$$R = \frac{2r(k-r)}{k}. \quad (1.15)$$

Poslednou úlohou v rámci riešenia bude vyjadriť  $R$  pomocou  $r$  a  $k$ . Pomocou Pytagorovej vety a dvoch dokreslených pravouhlých trojuholníkov  $XYH_4$  a  $XZH_4$  si vyjadríme ich spoločnú stranu  $XH_4$  (obr. 1.11):



**Obr. 1.9:** Trojúhelník  $BCD$  s označením stran

$$|XH_4|^2 = (R+r)^2 + \left(\frac{a}{2} - s\right)^2, \quad (1.16)$$

$$|XH_4|^2 = (R-r)^2 + \left(s + \frac{a}{2}\right)^2, \quad (1.17)$$

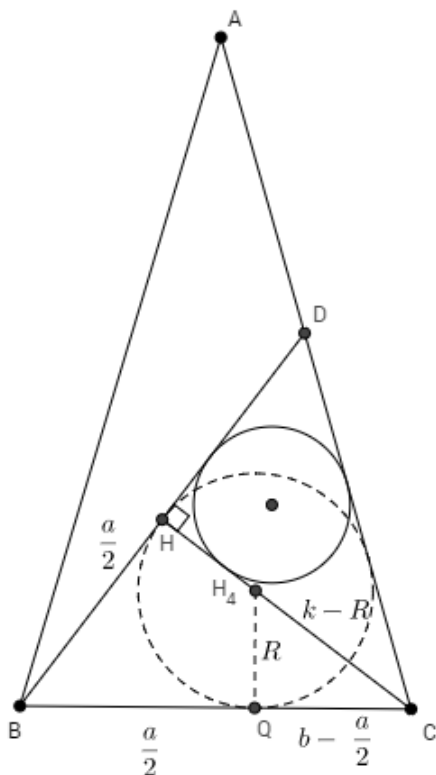
kde (1.16) vyplývá z trojúhelníka  $XYH_4$  a (1.17) vyplývá z trojúhelníka  $XH_4Z$ .  
Použitím rovností (1.16) (1.17) dostaneme vztah

$$(R+r)^2 + \left(\frac{a}{2} - s\right)^2 = (R-r)^2 + \left(s + \frac{a}{2}\right)^2, \quad (1.18)$$

z čoho po roznásobení dostaneme

$$2Rr = as. \quad (1.19)$$

Do rovnice (1.19) dosadíme  $R$  z (1.15) a za pravú stranu dosadíme vyjadrenia z rovníc (1.11) a (1.13):



Obr. 1.10: Trojuholník  $ABC$  a vyjadrenia dĺžok jeho strán po dokreslení novej kružnice

$$\begin{aligned}
 2 \cdot \frac{2r(k-r)}{k} &= \frac{4r(k-r)}{k-2r} \left( \frac{r(k-r)}{k-2r} - \frac{k-2r}{2} \right), \\
 0 &= k^3 - 4rk^2 - 2kr^2 + 8r^3, \\
 0 &= (k^2 - 2r^2)(k - 4r).
 \end{aligned}$$

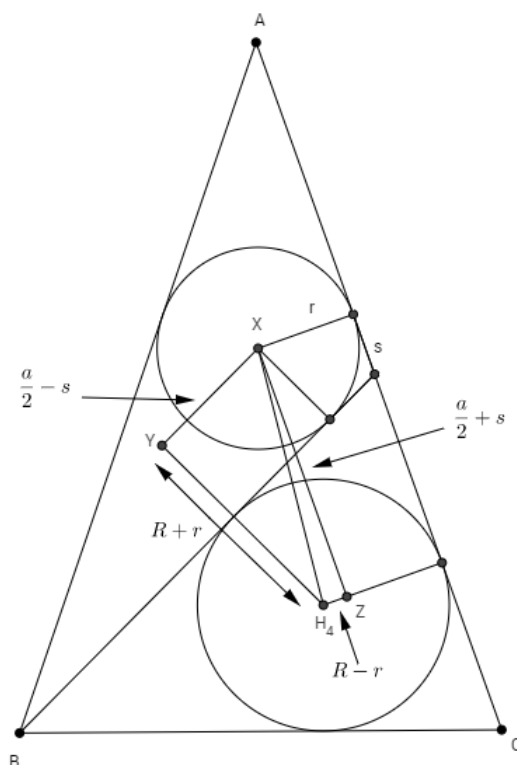
Riešenie  $k^2 = 2r^2$  by znamenalo, že  $|CH| = \sqrt{2}r$ , čo ale nie je možné, keďže strana trojuholníka nemôže byť menšia ako priemer jeho vpísanej kružnice.

Preto riešenie spĺňajúce podmienky zadania je pre nás  $k = 4r$  a teda výsledkom je

$$|CH| = 4r. \quad (1.20)$$

### 1.3.2 Moderné riešenie

Aj napriek tomu, že Sangaku bolo vyriešené, sa našli aj takí, ktorým to nestačilo a hľadali iné spôsoby riešenia. V nasledujúcom riešení, ktoré pochádza z [21] je zadanie zovšeobecnené tak, že namiesto pravého uhla pri vrchole  $H$  budeme brať ľubovoľný



**Obr. 1.11:** Trojuholník  $ABC$  spolu s vyjadreniami jednotlivých dĺžok

uhol [22].

Zvoľme súradnicovú sústavu, v ktorej body  $A, B, C$  majú súradnice  $A = [a, h]$ ,  $B = [0, 0]$  a  $C = [2a, 0]$ . Označme  $H_1, H_2$  a  $H_3$  postupne stredy vpísaných kružníc trojuholníkom  $BHC, HDC$  a  $BAD$ . Vypočítame teraz súradnice bodu  $H_3$ .

Označme  $M$  stred strany  $BC$  a  $P$  bod dotyku kružnice so stredom v  $H_3$  a strany  $AB$ , ako na obrázku 1.12. Potom trojuholníky  $AMB$  a  $APH_3$  sú oba pravouhlé a navyše  $|\angle PAH_3| = |\angle BAM|$ , teda sú podobné. Z podobnosti máme potom

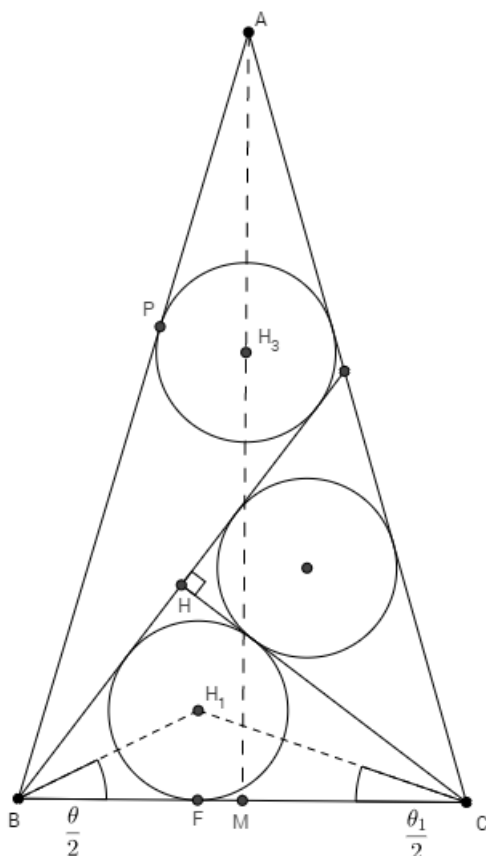
$$\begin{aligned} \frac{|AH_3|}{|H_3P|} &= \frac{|AB|}{|BM|}, \\ |AH_3| &= \frac{r \cdot c}{a}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Potom súradnice bodu  $H_3$  môžeme zapísať ako  $H_3 = [a, b]$ , kde  $b = h - \frac{r \cdot c}{a}$ , kde  $c$  je dĺžka strany  $AB$ .

Označme ďalej  $m = \operatorname{tg} \theta$  a  $m_1 = \operatorname{tg} \theta_1$ , kde  $\theta$  a  $\theta_1$  sú veľkosti uhlov  $HBC$  a  $HCB$ . Potom priamka  $BD$  prechádza bodom  $B = [0, 0]$  so smernicou  $m$  teda

$$BD : y = mx. \quad (1.22)$$





**Obr. 1.12:** Zadanie s označením jednotlivých bodov a strán pre moderné riešenie

Podobne  $CH$  prechádza bodom  $C = [2a, 0]$  a s priamkou  $BC$  zvierá uhol  $180 - \theta_1$ , teda

$$CH : y = -m_1x + 2am_1. \quad (1.23)$$

Bod  $H$  leží v prieniku  $CH$  a  $BD$ , teda jeho súradnice dostaneme riešením sústavy rovníc (1.34) a (1.34). Preto  $x_H = \frac{2am_1}{m+m_1}$  a  $y_H = \frac{2amm_1}{m+m_1}$ . Keďže máme známe súradnice bodov  $C$  aj  $H$ , môžeme vypočítať ich vzdialenosť ako

$$|CH| = \frac{2am}{m+m_1} \sqrt{1+m_1^2}. \quad (1.24)$$

Vyjadriť sme dĺžku  $CH$ , no máme navyše premenné  $m$  a  $m_1$ . Tie sa v ďalších krokoch pokúsime z vyjadrenia odstrániť.

Vzdialenosť bodu  $H_3$  od priamky  $BD$  je vlastne polomer  $r$ , no môžeme ju vyjadriť pomocou zavedeného označenia aj ako  $\frac{ma-b}{\sqrt{m^2+1}}$ , teda

$$r\sqrt{m^2+1} = ma - b. \quad (1.25)$$

Označme nakoniec ešte súradnice  $H_1 = [t, r]$ , kde  $t$  je neznáme. Tangens vyjadruje pomer protilahlej a prilahlej odvesny v pravouhlom trojuholníku, preto z trojuholníkov  $H_1BF$  a  $H_1FC$  kde  $F$  je bod dotyku kružnice  $k_3$  a strany  $BC$ , dostávame vzťahy

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} &= \frac{r}{t}, \\ \operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2} &= \frac{r}{2a - t}. \end{aligned}$$

Na základe vzťahu pre tangens dvojnásobného uhla

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

vieme vyjadriť

$$m = \operatorname{tg}\theta = \frac{2rt}{t^2 - r^2}, \quad (1.26)$$

$$m_1 = \operatorname{tg}\theta_1 = \frac{2r(2a - t)}{(2a - t)^2 - r^2}. \quad (1.27)$$

Po dosadení (1.26) a (1.27) do (1.24) a (1.25) dostávame nové vzťahy pre dĺžku úsečky  $CH$  a polomer  $r$ , už bez pomocných premenných  $m$  a  $m_1$ , s jedinou neznámou  $t$ :

$$|CH|(2at - t^2 - r^2) = t(4a^2 - 4at + t^2 + r^2), \quad (1.28)$$

$$(r + b)t^2 - 2art + (r^3 - br^2) = 0. \quad (1.29)$$

Po označení dĺžky  $|CH| = X$  môžeme chápať naše zadanie ako riešenie funkcie  $F(X, r) = 0$ .

Upravíme si ju do tvaru

$$\begin{cases} A_0t^3 + A_1t^2 + A_2t + A_3 = 0 \\ B_0t^2 + B_1t + B_2 = 0 \end{cases}$$

Koeficienty pri mocninách  $t$  dopočítame roznásobením rovníc (1.28) a (1.29), a dostaneme:

$$A_0 = 1$$

$$A_1 = X - 4a$$

$$A_2 = 4a^2 + r^2 - 2aX$$

$$A_3 = r^2X$$

$$B_0 = r + b$$

$$B_1 = -2ar$$

$$B_2 = r^3 - br^2$$



kde  $f_2, f_1$  a  $f_0$  vieme vyjadriť pomocou doteraz používaných parametrov:

$$f_2(r) = (dr - h)^2(a - r)(a + r)(c_1r - h),$$

$$f_1(r) = -2a(dr - h)(c_2r^4 + c_3r^3 + c_4r^2 - 4a^2hdr + 2a^2h^2),$$

$$f_0(r) = (c_5r - h)(d^2r^6 - 2dhr^5 + c_6r^4 + 4a^2hr^3 + 4a^4d^2r^2 - 8a^4dhr + 4a^4h^2).$$

Vo vyjadrení autor riešenia ešte označil pomocou  $c_1, \dots, c_6$  nasledujúce výrazy:

$$c_1 = d - 1,$$

$$c_2 = 1 - d - d^2,$$

$$c_3 = h(2d + 1),$$

$$c_4 = 2a^2d^2 - a^2 - h^2,$$

$$c_5 = d + 1,$$

$$c_6 = -4a^2d + a^2 + h^2.,$$

kde navyše  $d = \frac{c}{a}$ , a  $c$  a  $a$  sú známe, ale závislé parametre.

[22]

### 1.3.3 Naše riešenie

Naše riešenie sa bude uberať cestou, ktorá je bližšia modernému riešeniu, avšak sa bude snažiť vyjadriť dĺžku  $|CH|$  pomocou čo najmenej iných nezávislých premenných.

Začneme rovnako ako pri modernom riešení.

Zavedieme súradnicovú sústavu, pri ktorej bod  $B = [0, 0]$  a priamka  $BC$  bude x-ovou osou. Dĺžku úsečky  $BC$  označíme ako  $2a$ , teda potom  $C = [0, 2a]$ . Ďalej označme  $|\angle HBC| = \theta$  a  $|\angle HCB| = \theta_1$ . Spoločný polomer vpísaných kružníc trojuholníkom  $BCH$ ,  $CHD$  a  $ABD$  označíme  $r$ .

Súradnice bodu  $A$  a  $H_3$ , ako aj rovnice priamok  $BD$  a  $CH$  určíme rovnako ako pri modernom riešení a dostávame

$$A = [a, h]$$

$$H_3 = [a, h - \frac{r}{a} \cdot \sqrt{h^2 + a^2}] \quad (1.32)$$

$$BD : y = mx \quad (1.33)$$

$$CH : y = -m_1x + 2am_1 \quad (1.34)$$

kde

$$\begin{aligned} m &= \operatorname{tg}\theta = \frac{2rt}{t^2 - r^2} \\ m_1 &= \operatorname{tg}\theta_1 = \frac{2r(2a - t)}{(2a - t)^2 - r^2} \end{aligned}$$

Použitím rovnice priamky  $BD$  (1.34) a súradníc bodu  $H_3$  (1.33) vieme vyjadriť ich vzdialenosť ako  $\rho(BD, H_3) = \frac{|Y_3 - mX_3|}{\sqrt{m^2 + 1}}$ , z čoho po dosadení y-ovej súradnice bodu  $H_3$  a položením do rovnosti s polomerom  $r$  dostávame

$$\frac{h - \frac{r}{a} \cdot \sqrt{h^2 + a^2} - ma}{\sqrt{m^2 + 1}} = r. \quad (1.35)$$

Rovnosť (1.35) je potom pre premenú  $h$  kvadratickou rovnicou. Pri jej úprave kvôli umocňovaniu strácame jedno riešenie ( $h = am$ ), a teda má pre  $h$  jediný koreň:

$$h = \frac{a^3m + 2a^2r\sqrt{m^2 + 1} + amr^2}{a^2 - r^2}. \quad (1.36)$$

Máme teda vyjadrenú premennú  $h$  iba pomocou premenných  $a, r$  a  $t$ . V (1.36) vystupujú aj  $m$  a  $m_1$ , tie ale vieme tiež vyjadriť cez  $a, r$  a  $t$ .

Ďalej sa pozrieme na bod  $H_2$ . Vieme, že stredom vpísanej kružnice trojuholníku  $CHD$  a teda jeho vzdialenosť od priamok  $BD$ ,  $CH$  a  $AC$  je rovná polomeru  $r$ . Vyjadrením uvedených vzdialeností získame jeho súradnice a dodatočnú podmienku na vzťah  $a, r$  a  $t$ .

Ako prvú vyjadríme vzdialenosť bodu  $H_2$ , ktorého súradnice označíme  $[X_2, Y_2]$  od priamky  $BD$  danej rovnicou (1.34). Keď túto vzdialenosť položíme do rovnosti s polomerom  $r$  dostávame vzťah:

$$\begin{aligned} \rho(BD, H_2) &= \frac{|mX_2 - Y_2|}{\sqrt{m^2 + 1}} = r, \\ -Y_2 + mX_2 &= r\sqrt{m^2 + 1}. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Druhý vzťah, v ktorom budú vystupovať súradnice bodu  $H_2$ , získame vyjadrením jeho vzdialenosti od priamky  $CH$ . Túto priamku máme danú rovnicou (1.34) a pre ich vzdialenosť preto dostávame vzťah

$$\begin{aligned} \rho(CH, H_2) &= \frac{|m_1X_2 + Y_2 - 2am_1|}{\sqrt{m_1^2 + 1}} = r, \\ Y_2 + m_1X_2 - 2am_1 &= r\sqrt{m_1^2 + 1}. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Z (1.37) a (1.38) potom dostávame sústavu rovníc pre  $X_2$  a  $Y_2$ . Vyjadrením týchto súradníc pomocou  $a, r$  a  $t$  dostávame:

$$X_2 = \frac{r(\sqrt{m_1^2 + 1} + \sqrt{m^2 + 1}) + 2am_1}{m + m_1}, \quad (1.39)$$

$$Y_2 = \frac{r(m\sqrt{m_1^2 + 1} - m_1\sqrt{m^2 + 1}) + 2amm_1}{m + m_1}. \quad (1.40)$$

Pomocou súradníc bodov  $A = [a, h]$  a  $C = [0, 2a]$ , vieme priamku  $AC$  definovať rovnicou

$$0 = \frac{h}{a}x + y - 2h. \quad (1.41)$$

Rovnako ako v prípadoch priamok  $BD$  a  $CH$  aj jej vzdialenosť od bodu  $H_2$  bude rovná polomeru  $r$ , teda dostávame posledný vzťah

$$\begin{aligned} \rho(H_2, AC) &= \frac{|Y_2 + \frac{h}{a}X_2 - 2h|}{\sqrt{1 + \frac{h^2}{a^2}}} \\ \rho(H_2, AC) &= \frac{-Y_2 - \frac{h}{a}X_2 + 2h}{\sqrt{1 + \frac{h^2}{a^2}}} = r \end{aligned} \quad (1.42)$$

Po dosadení (1.39), (1.40) a (1.36) do (1.42) dostávame vzťah pre  $a, r$  a  $t$ .

Naším cieľom je vyjadriť dĺžku úsečky  $CH$  pomocou  $r$ . Tú vyjadríme rovnako ako v modernom riešení ako

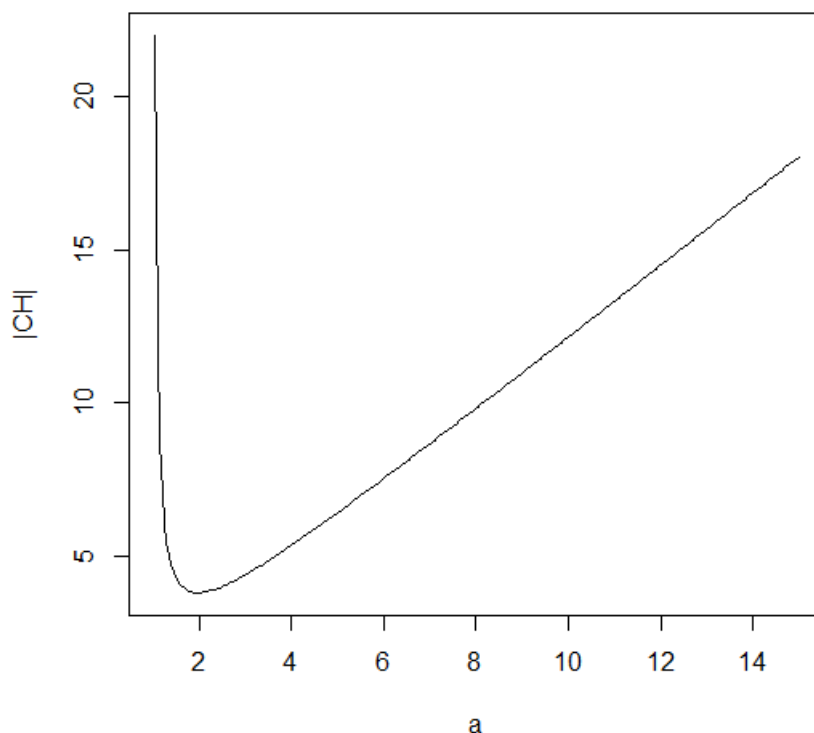
$$|CH| = \frac{2am}{m + m_1} \sqrt{1 + m_1^2} \quad (1.43)$$

Vyjadrenie si zjednodušíme určením  $r = 1$ , teda polomer bude jednotková dĺžka, a bude nás zaujímať  $|CH|$  v týchto istých jednotkách.

Pomocou programu wxMaxima sme dosadili jednotlivé premenné a získali sme vzájomný vzťah premenných  $a$  a  $t$ . Teda ak si zvolíme fixné  $a$  (alebo  $2a$  ako dĺžku strany  $BC$ ), vieme k nemu dopočítať  $t$  z otvoreného intervalu  $(r, 2a - r)$ , teda v našom prípade  $(1, 2a - 1)$ . Interval sme takto určili preto, aby boli uhly pri vrcholoch  $B$  a  $C$  ostré, teda aby mohol byť splnený predpoklad o rovnoramennom trojuholníku  $ABC$ .

V programe R (kód 9 v prílohe) vieme potom do grafu zakresliť závislosť výslednej dĺžky  $CH$  od voľby dĺžky strany  $BC$ , resp. parametra  $a$  (obr. 1.13).

Dopočítali sme teda všeobecne dĺžku úsečky  $CH$  a ukázali sme jej závislosť od dĺžky strany  $BC$  (teda parametra  $a$ ).



**Obr. 1.13:** Graf funkcie závislosti premennej  $a$  a dĺžky strany  $CH$

Pre overenie správnosti nášho výpočtu, použijeme tradičné riešenie. Do vzťahu (1.13) dosadíme  $r = 1$  a  $k = 4$ . Potom pomocou (1.12) dopočítame dĺžku  $BC$ . Dostávame

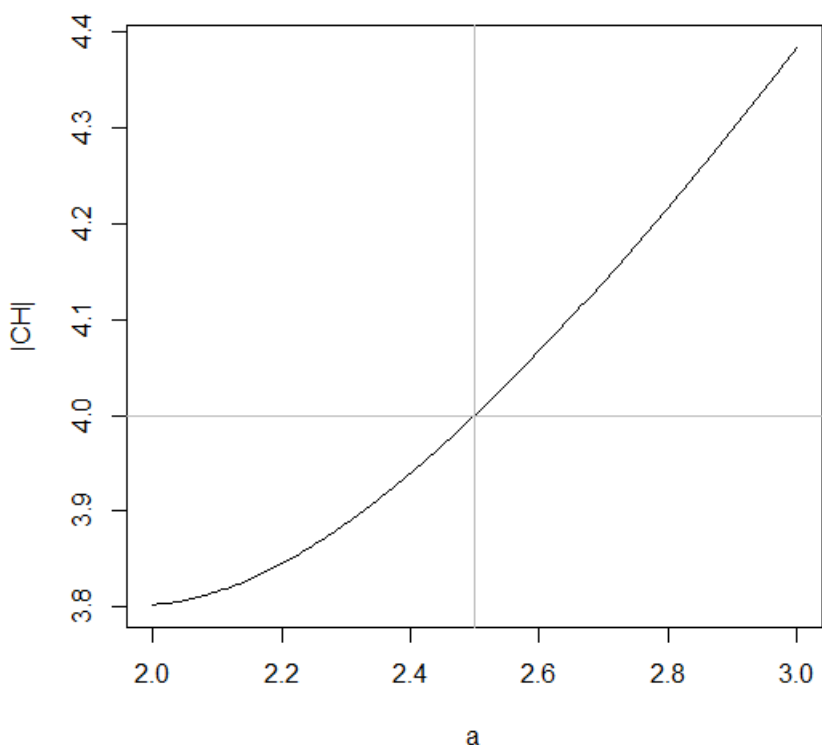
$$|BC| = 5 = 2a. \quad (1.44)$$

Ako môžeme vidieť na grafe 1.14, po dosadení  $a = 2.5$  do nášho vzťahu dostávame dĺžku úsečky  $|CH| = 4$ , čím sme overili správnosť nášho vzťahu.

Ak by sme chceli dopočítať dĺžku úsečky  $CH$  v prípade kolmosti pomocou nášho vzťahu, pokračovali by sme nasledovne:

Ak priamky  $CH$  a  $BD$  zvierajú pravý uhol, trojuholník  $HBC$  vyzerá ako na obrázku 1.15.

Pre dopočítanie dĺžok jednotlivých strán sme vychádzali zo súradníc bodu  $H_1 = [t, r]$ . Na základe toho vieme pomocou Pytagorovej vety vyjadriť vzťah medzi  $a$  a  $t$  nasledovne:



**Obr. 1.14:** Overenie nášho vzťahu, pre  $a = 2.5$  dostávame  $|CH| = 4$

$$4a^2 = (t+1)^2 + ((2a-t)+1)^2$$

$$a = \frac{t^2 + 1}{2t - 2} \quad (1.45)$$

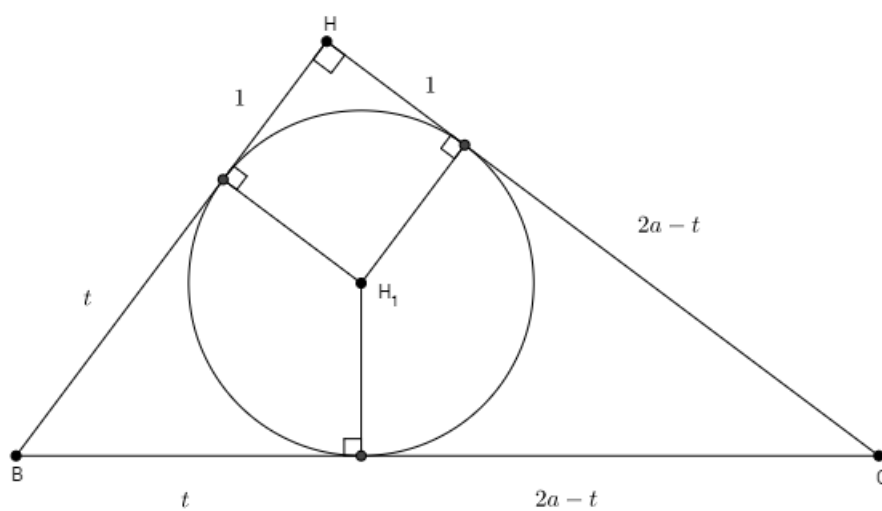
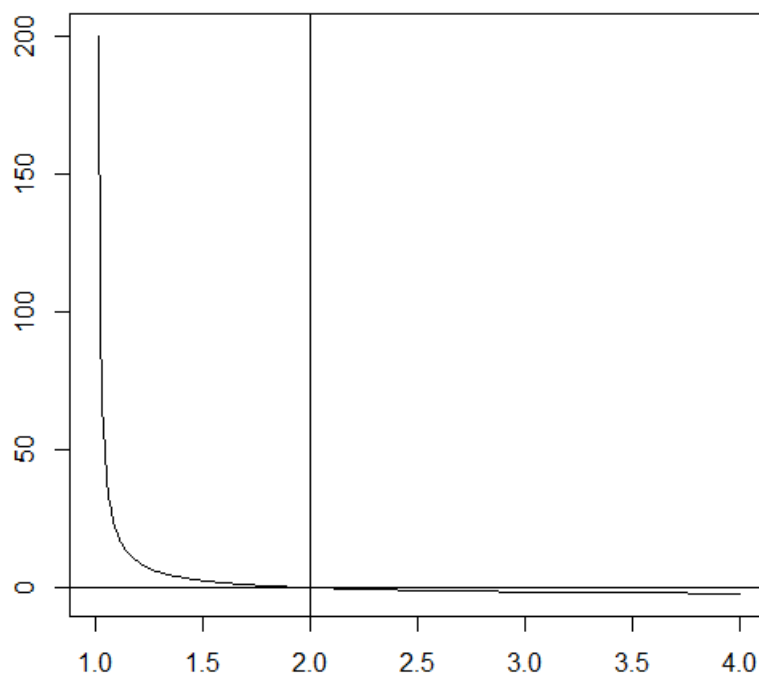
$$(1.46)$$

Vzťah premenných  $a$  a  $t$  máme teraz charakterizovaný rovnicou 1.45 a rovnicou zo všeobecnejšieho postupu, ktorú sme odvodili vyššie. Keď do nej dosadíme 1.45, dostaneme funkciu jednej premennej, ktorej korene numericky dopočítame v programe R (kód 10 v prílohe).

Pre prípad kolmosti nám vychádza koreň  $t = 2.000016$  (obr. 1.16). Dosadením do vyššie odvodených vzťahov dostávame  $a = 2.499992$ ,  $m = 1.333315556$ ,  $m_1 = 0.75001$  a nakoniec  $|CH| = 3.999995072$ . Rovnako môžeme dĺžku dostať aj z obrázku 1.15, kde  $|CH| = 2a - t + 1 = 3.999968$

Keďže sme korene rovníc vysokých rádov dopočítali numericky, hodnoty nie sú celkom presné. Ak ale zoberieme za  $t = 2$ , dopočítame  $a = 2.5$  a nakoniec  $|CH| = 4$ . Dopočítali sme teda, že pri polomere  $r = 1$  dostaneme dĺžku úsečky  $|CH| = 4$ .



Obr. 1.15:  $\triangle HBC$  v prípade kolmostiObr. 1.16: Graf funkcie pre jeden parameter  $t$  v prípade kolmosti

# Kapitola 2

## Origami

### 2.1 Začiatky skladania papiera

Umenie skladania papiera je oveľa staršie ako by sa mohlo zdať. Aj to je jeden z dôvodov, prečo sa ohľadom presného miesta jeho vzniku vyvíjalo postupne veľa teórií, z ktorých každá má svoje opodstatnenie, ale žiadna nie je úplne jednoznačne dokázaná.

Či už ide o papierové obaly na kimono, staré básne, alebo náboženské obrady, je zrejmé, že skladanie papiera našlo veľa využití v rôznych krajinách [14].

Pre potreby našej práce budeme slovom Origami označovať naše modely, ktoré ne-skôr poskladáme. Mnoho ľudí, ktorí sa tomuto umeniu venujú viac ale používa radšej iba názov „skladanie z papiera“. Dôvodom je fakt, že skladanie z papiera bolo pomenované Origami prvýkrát v básni Ihara Saikaku z roku 1680 v Japonsku [14], ale pôvod samotného skladania nie je jasný a je pravdepodobné, že sa rozvíjalo na viacerých miestach na svete. Rozdielom medzi pravým Origami a len skladaním papiera, ako aj samotnej definícii Origami sa venujú rôzne diskusie a články [3].

Ako sa skladanie papiera rozvíjalo, vyvíjali sa aj rôzne techniky, jednotlivé ohyby papiera dostali svoje pomenovania a aj samotný papier na skladanie sa zdokonaľoval. Ten, z ktorého sa Origami prevažne skladá dnes máva tvar štvorca, ktorý býva základom modelov. Ako zistíme na našich modeloch, nie je to ale pravidlom. Papier býva tenší ako bežný kancelársky, pretože je potrebné aby sa dal ohýbať veľa krát. Pre umocnenie estetického dojmu sa tiež používa papier, ktorý je z jednej strany inak pokreslený, alebo farebne odlíšeny, ako z druhej. Vďaka tomu môžu modely pôsobiť ešte umeleckejším

dojmom (obrázok 2.1).



**Obr. 2.1:** Rôzne druhy papiera na skladanie Origami [26]

Keďže papier bol v minulosti vzácnosťou, Origami sa používali väčšinou pri obradoch a slávnostiach. Pre tieto účely boli typickými napríklad Origami Ocho a Mecho (obrázok 2.2), ktoré sa používali pri šintoistických svadbách v Japonsku ako ozdoba na fľaše s japonským vínom. Ďalším obradným Origami by sme mohli nazvať Origami Cuki. Japonsko malo veľmi striktné pravidlá a etiketu v samotnom obdarovávaní, a pokiaľ bolo k darčekom pribalené práve toto Origami, slúžilo ako certifikát jedinečnosti a autenticity [27].



**Obr. 2.2:** Ocho Mecho origami model [4]

V našej práci sa budeme zaoberať dvoma konkrétnymi modelmi - Mengerovou špongiou [15] a skladaním do seba vložených štvorstenov [12].

## 2.2 Skladanie do seba vložených štvorstenov

Na obrázku 2.3 môžeme vidieť, že už samotné skladanie modelu patrí k tým zložitejším. Rovnako ako pri väčšine Origami, ani v našom modeli sa nepoužíva lepidlo ani lepiaca páska a na spájanie jednotlivých stavebných častí sme používali výlučne ohyby papiera.

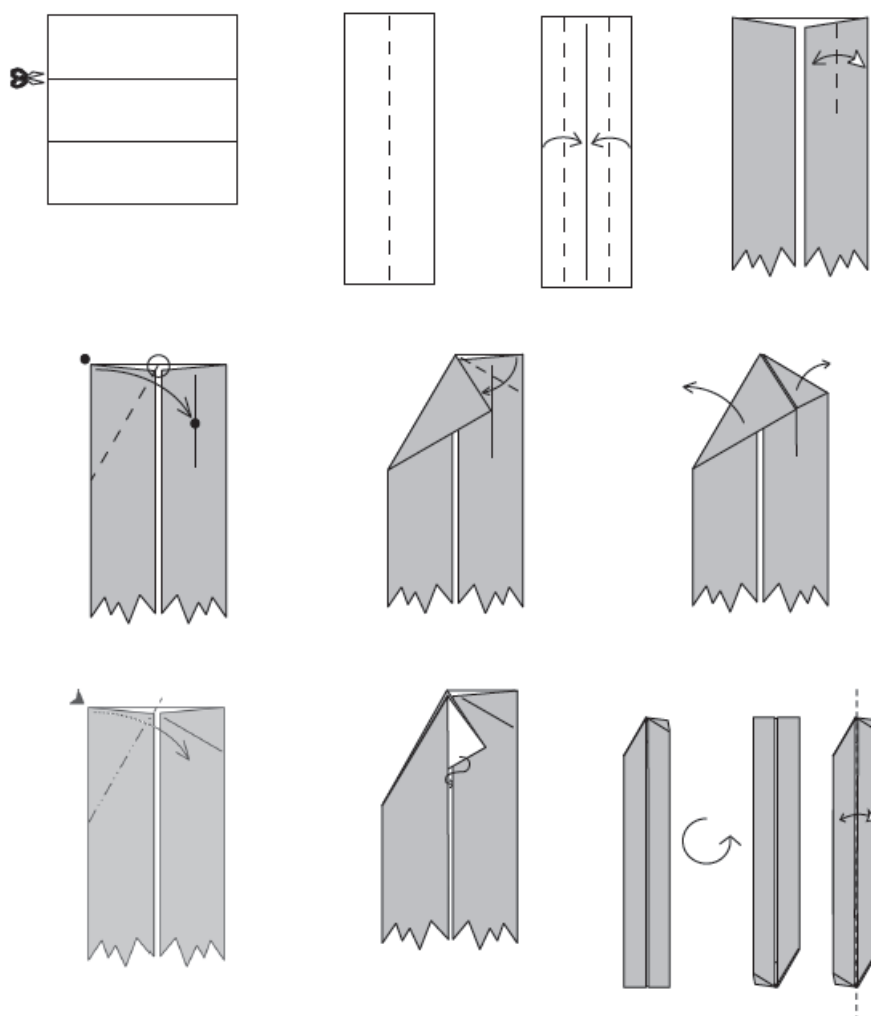


**Obr. 2.3:** Nami poskladaný model piatich do seba vložených štvorstenov

Pri skladaní jednej hrany štvorstenu podľa knihy [12] sme použili papier, ktorého strany boli v pomere 1:3 (návod z [12] uvádzame na obrázku 2.4). Tento pomer v našom modeli určuje hrúbku, resp. šírku jednej hrany štvorstenu. Ak by sme stavali model z príliš hrubých stavebných častí vkladanie by nebolo možné, zatiaľ čo pri stavebných častiach s príliš malou šírkou by sa jednotlivé štvorsteny nedotýkali a teda by model nedržal požadovaný tvar. Našou úlohou bude nájsť túto ideálnu hrúbku a teda zistiť ideálny pomer strán papiera na poskladanie jednej hrany.

Na obrázku 2.5 z [12] je hrúbka jednej hrany (podpery) štvorstenu označená ako  $L$ . Túto vzdialenosť sa budeme snažiť minimalizovať pri podmienke toho, že sa hrany dotýkajú.

Vzájomné vzdialenosti bodov a priamok budeme vyjadrovať pomocou analytickej geometrie. Zvoľme si takú súradnicovú sústavu, aby body  $v_1$  a  $v_2$  mali súradnice  $[-1, 1, 1]$  a  $[1, -1, 1]$ . Potom bod  $h$ , ktorý je stredom úsečky  $v_1v_2$  bude mať súradnice  $[0, 0, 1]$ .



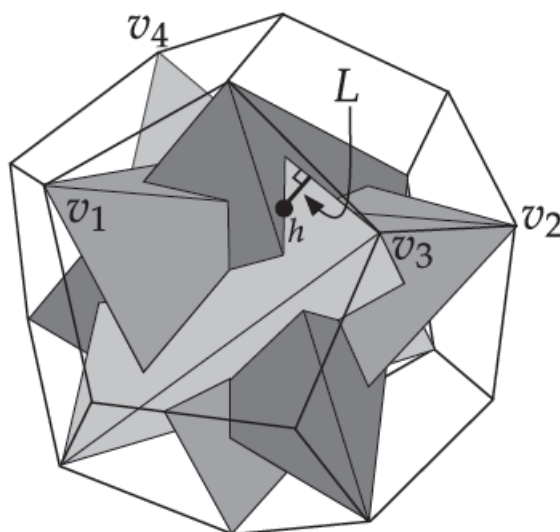
Obr. 2.4: Postup skladania jednej hrany podľa [12]

### 2.2.1 Odvodenie súradníc ostatných vrcholov dvanáststena

Pri takto nastavených súradniciach treba dopočítať súradnice ďalších vrcholov. Jednotlivé vrcholy nášho modelu tvoria pravidelný dvanáststen (obrázok 2.6). Oranžové vrcholy sú vrcholmi kocky a ich súradnice sú  $[\pm 1, \pm 1, \pm 1]$ .

Zo symetrie dvanáststenu, a teda aj zo symetrie nášho modelu vyplýva, že vrcholy, ktorých súradnice ešte nepoznáme (na obrázku všetky okrem oranžových) majú vždy rovnakú vzdialenosť od najbližšej steny aj od najbližšej hrany. Stačí nám teda dopočítať jednu z nich a potom sa o túto vzdialenosť budeme od vrcholu kocky (ktorého súradnice poznáme) pohybovať po x-ovej, y-ovej, alebo z-ovej osi. Vypočítame teda súradnice zeleného vrcholu  $C$ .

Na to budeme potrebovať zistiť dĺžku hrany medzi dvoma priľahlými vrcholmi. Na



**Obr. 2.5:** Označenie hrúbky  $L$ , ktorú treba optimalizovať

obrázku 2.7 je jedna zo stien dvanásťstena. Pre určenie dĺžky hrany sa bližšie pozrieme na trojuholník  $ABC$ , kde farby vrcholov zodpovedajú farbám vrcholov z obrázku 2.6.

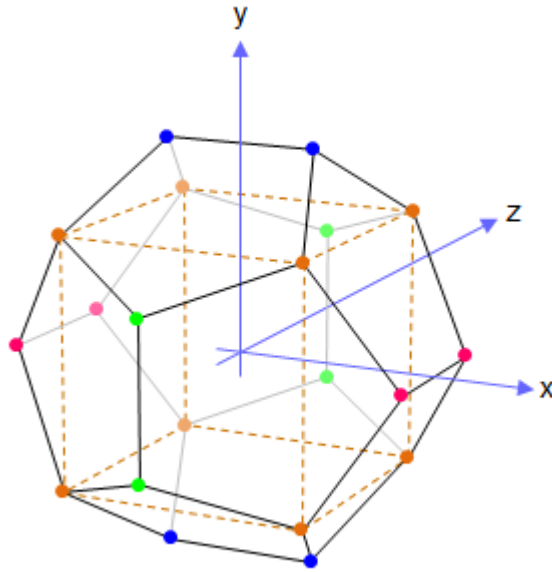
Keďže oranžové vrcholy  $A, B$  sú vrcholmi kocky, ich vzdialenosť je 2. Úsečka  $AB$  je uhlopriečkou päťuholníka a strana  $AC$  je jeho stranou. Podľa [5, str. 22] vieme, že pomer uhlopriečky a strany pravidelného päťuholníka je  $\phi$ , kde  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . Označme dĺžku strany  $AC$  ako  $x$ . Potom  $\frac{2}{x} = \phi$ , a teda  $x = \frac{2}{\phi}$ .

Zo symetrie modelu vieme povedať, že x-ová súradnica zeleného vrcholu  $C$ , podľa obrázku 2.7 bude nulová (ozn.  $C_x = 0$ ). Potrebujeme teda správne dopočítať ešte y-ovú a z-ovú súradnicu. Na určenie z-ovej súradnice budeme potrebovať zistiť vzdialenosť bodu  $C$  od prednej steny kocky. Aby sme zistili túto vzdialenosť, ale potrebujeme vypočítať aj vzdialenosť bodu  $C$  od hrany  $BF$ .

Lichobežník  $BCDF$  (obrázok 2.8) má tri rovnako dlhé strany a dlhšiu základňu, ktorú tvorí hrana kocky. Ramená a kratšia základňa sú stranami päťuholníka, a teda ich dĺžka je  $\frac{2}{\phi}$ . Dĺžka, ktorú chceme zistiť je na obrázku znázornená čiarkovanou čiarou, ako úsečka  $CX$ . Jej dĺžku potom vyrátame cez Pytagorovu vetu ako

$$|CX| = \sqrt{\left(\frac{2}{\phi}\right)^2 - \left(1 - \frac{1}{\phi}\right)^2} = \frac{1}{\phi} \cdot \sqrt{3 - \phi^2 - 2 \cdot \phi}. \quad (2.1)$$

Teraz už máme dost informácií na to, aby sme vedeli určiť z-súradnicu, resp. vzdialenosť bodu  $C$  od steny  $ABEF$ . Označme si ju  $z$  Rovnako ako pri vzdialenosti  $CX$  si



Obr. 2.6: Pravidelný dvanásťsten [19]

hľadanú vzdialenosť vyjadríme pomocou Pytagorovej vety ako

$$z = \sqrt{\frac{1}{\phi} \cdot (3 - \phi^2 + 2 \cdot \phi) - 1} = \frac{1}{\phi} \cdot \sqrt{3 - 2 \cdot \phi^2 + 2 \cdot \phi} \quad (2.2)$$

Kedže  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , tak potom

$$z = \frac{1}{\phi} \cdot \sqrt{3 - 2 \cdot \phi^2 + 2 \cdot \phi} = \frac{1}{\phi} \cdot \sqrt{3 - 3 - \sqrt{5} + 1 + \sqrt{5}} = \frac{1}{\phi} \quad (2.3)$$

Celkovo sme teda zistili, že ak z-ovú súradnicu bodov steny  $ABEF$  posunieme o  $\frac{1}{\phi}$ , dostaneme z-ovú súradnicu bodu  $C$ , ozn.  $C_z$ . Tá potom bude

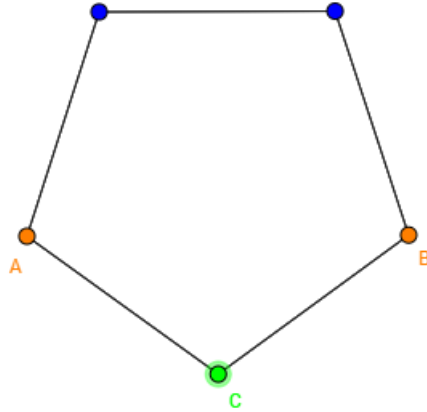
$$C_z = -1 - \frac{1}{\phi} = -1 - \frac{2}{\sqrt{5} + 1} = \frac{-\sqrt{5} - 1}{2} = -\phi \quad (2.4)$$

Zostáva nám ešte dopočítať y-ovú súradnicu. Označme  $v$  výšku trojuholníka  $ABC$  z obrázku 2.9. Potom z Pytagorovej vety,

$$v = \sqrt{\left(\frac{2}{\phi}\right)^2 - 1} = \sqrt{\frac{4}{\phi^2} - 1} \quad (2.5)$$

Teraz už môžeme v trojuholníku na obrázku 2.9 vypočítať y-ovú vzdialenosť od hrany  $AB$ , označíme ju  $y$ . Potom

$$y = \sqrt{\frac{4}{\phi^2} - 1} - \frac{1}{\phi^2} = \sqrt{\frac{3}{\phi^2} - 1}$$



**Obr. 2.7:** Jedna zo stien dvanáststena

a keďže y-ová súradnica hrany  $AB$  je 1, tak y-ová súradnica bodu  $C$ , ozn.  $C_y$ , bude

$$C_y = 1 - \sqrt{\frac{3}{\phi^2} - 1} = 1 - \sqrt{\frac{3}{\frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})} - 1} = 1 - \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}}} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\phi}$$

Analogicky vieme dopočítať, že všetky zelené vrcholy na obrázku 2.7 majú súradnice  $[0, \pm \frac{1}{\phi}, \pm \phi]$ , modré  $[\pm \frac{1}{\phi}, \pm \phi, 0]$  a ružové  $[\pm \phi, 0, \pm \frac{1}{\phi}]$

### 2.2.2 Optimálne nastavenie hrúbky jednej stavebnej časti

Podľa odvodených súradníc a obrázku 2.5 dostávame  $v_3 = [0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$  a  $v_4 = [\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, 0]$ .

V prvom kroku nájdeme parametrické vyjadrenie priamky, ktorá prechádza bodmi  $v_3$  a  $v_4$ . Normálový vektor je  $v = (\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \sqrt{5}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2})$ , teda hľadaná priamka má parametrické vyjadrenie

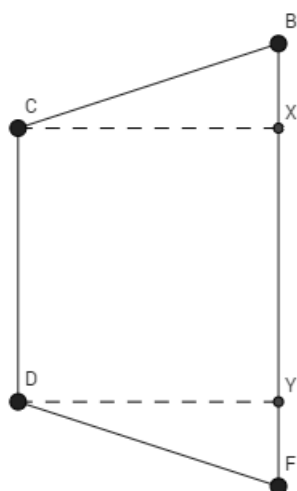
$$F(t) = \{x(t), y(t), z(t)\} = \left\{ 0 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot t, \frac{-1+\sqrt{5}}{2} - \sqrt{5} \cdot t, \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \cdot t \right\}.$$

Ďalej vypočítame vzdialenosť bodu  $h = [0, 0, 1]$  od tejto priamky, resp. jej druhú mocninu (kvôli jednoduchšiemu výpočtu).

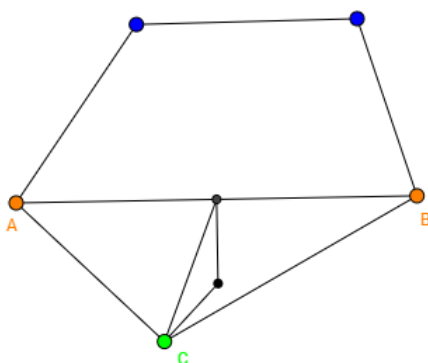
$$L^2 = (0 - 0 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}t)^2 + (\frac{-1+\sqrt{5}}{2} - 0 + (-\sqrt{5})t)^2 + (\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 + \frac{-1-\sqrt{5}}{2}t)^2,$$

$$L^2 = 8t^2 + (\sqrt{5} - 7)t + 3 - \sqrt{5}.$$





Obr. 2.8: Lichobežník BCDF



Obr. 2.9: Zobrazenie y-ovej a z-ovej vzdialenosti bodu  $C$  od steny kocky  $ABEF$

Túto vzdialenosť chceme minimalizovať. Nakoľko je to kvadratická funkcia s kladným koeficientom pri kvadratickom člene, vieme, že má globálne minimum. Jej deriváciu položíme rovnú nule, a dostávame

$$\begin{aligned} \frac{\delta L^2(t)}{\delta t} &= 16t + (\sqrt{5} - 7) = 0 \\ t &= \frac{7 - \sqrt{5}}{16} \end{aligned}$$

hodnota v tomto bode je  $L^2 = \frac{3}{16}(7 - 3\sqrt{5})$ . Potom

$$L = \sqrt{\frac{3}{16}(7 - 3\sqrt{5})} \approx 0.2339.$$

Vypočítali sme, že ak máme body umiestnené tak ako na obrázku, ideálna hrúbka

jednej hrany štvorstenu bude  $L \approx 0.2339$ .

V pôvodnom modeli podľa zadania sme mali hrúbku danú ako  $\frac{1}{12}$  z dĺžky hrany štvorstenu. V našom obrázku je dĺžka hrany štvorstenu rovná vzdialenosti bodov  $v_1$  a  $v_2$ , teda  $|v_1v_2| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{8}$ , preto hrúbka jednej hrany štvorstenu by bola  $\frac{1}{12} \cdot \sqrt{8} \approx 0.2357$ .

V ďalšom kroku prakticky ukážeme rozdiel medzi pôvodným pomerom strán a novým, vypočítaným. Podľa návodu z knihy [12] sme poskladali najprv pôvodný model, pričom dĺžku jednej hrany štvorstenu sme zvolili  $21\text{cm}$ . Pri skladaní podľa pôvodného návodu je potom šírka jednej stavebnej časti

$$L_{\text{pôvodné}} = \frac{1}{12} \cdot 21 = 1,75\text{cm}.$$

Pre nový, optimálny rozmer papiera zvolíme kvôli dobrému porovnávaniu rovnakú dĺžku hrany  $21\text{cm}$ . Potom, podľa predchádzajúcich výpočtov, nová hrúbka, preškálovaná na dĺžku  $21\text{cm}$  bude

$$L_{\text{optimálne}} = \sqrt{\frac{3}{16}(7 - 3\sqrt{5})} \cdot \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot 21 \approx 1.7367\text{cm}.$$

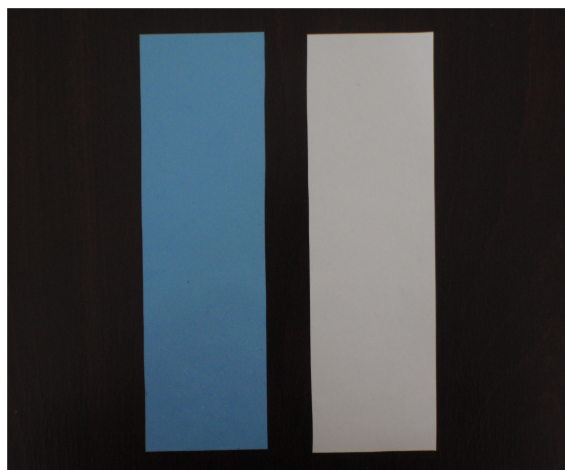
Rozdiel v hrúbkach jednotlivých stavebných častí bude teda  $\approx 0.0133\text{cm}$ .

Pre rozmery papiera to znamená, že pokiaľ sme pôvodný model stavali z papiera s dĺžkou  $21\text{cm}$  a jeho šírka bola  $4 \cdot L_{\text{pôvodné}} = 4 \cdot 1.75\text{cm} = 7\text{cm}$  (pretože výsledná stavebná časť je štyrikrát zložená po šírke, viď obrázok 2.4), nová šírka papiera by bola  $4 \cdot L_{\text{optimálne}} \approx 6.9468\text{cm}$ .

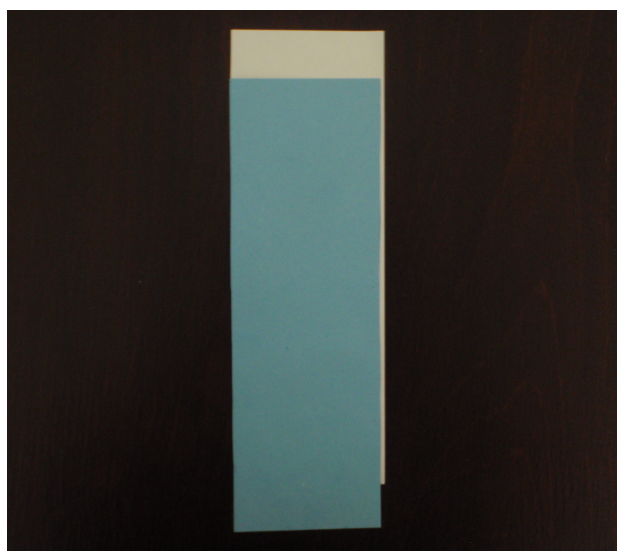
Ako v skutočnosti tento rozdiel širok vyzerá môžeme vidieť na obrázku 2.10, kde modrý papier má rozmery, ktoré sme dopočítali, zatiaľ čo biely má pôvodné rozmery zo zadania.

Kedže rozmery sa líšia o menej ako  $1\text{mm}$ , ich rozdiel si všimneme lepšie na obrázku 2.11.

Zistili sme teda, že rozmery papiera, z ktorého sme pôvodne skladali model piatich pretínajúcich sa štvorstenov sa od optimálnych dopočítaných rozmerov líšia o menej ako  $1\text{mm}$ , teda náš model je od optimálneho modelu len veľmi ťažko rozlíšiteľný.



Obr. 2.10: Modrý, optimálny rozmer papiera, vedľa bieleho papiera pôvodných rozmerov

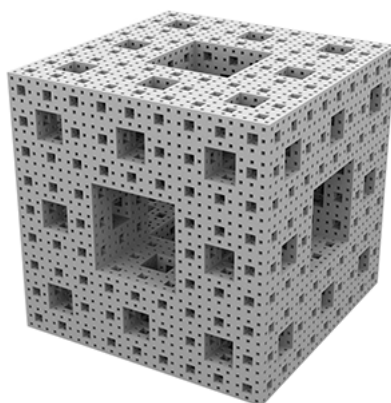


Obr. 2.11: Porovnanie širok papiera

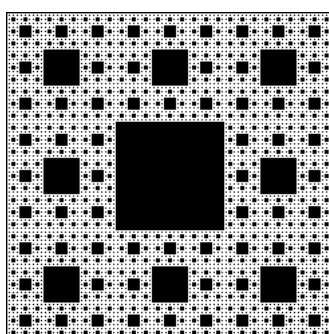
## 2.3 Skladanie iterácií Mengerovej špongie

Druhý model, ktorému sa budeme v práci venovať môžeme vidieť na obrázku 2.12. Ide o priestorové zobrazenie rovinného fraktálu Sierpinskeho koberca (obrázok 2.13), ktoré ako prvý popísal Karl Menger v roku 1926.

Podľa knihy [12] sa jednotlivé iterácie Mengerovej špongie dajú poskladať pomocou papierových vizitiek. Označme  $U_0$  nultú iteráciu - jednu kocku. Na túto iteráciu potrebujeme takýchto vizitiek 6. Na obrázku 2.14 si môžeme všimnúť, že z modelu trčia malé časti vizitiek, ktoré budeme používať na spájanie iterácií do nasledujúcej. Ak by sme nechceli, aby nám z výsledného modelu trčali tieto časti, vieme na ne napojiť ďalšie

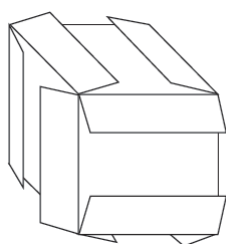


Obr. 2.12: Mengerova špongia [15]



Obr. 2.13: Sierpinského koberec [24]

vizitky a vznikla by nám tak "hladká" verzia modelu.

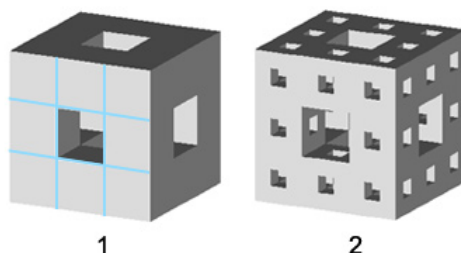


Obr. 2.14: Nultá iterácia Mengerovej špongie poskladaná z vizitiek [12]

V nasledujúcej časti vypočítame najskôr rekurentný a napokon aj explicitný vzorec pre počet vizitiek, ktoré sú potrebné na poskladanie  $n$ -tej iterácie Mengerovej špongie. Začneme s modelom, kde nám nebudú vadit malé časti vizitiek na povrchu.

Máme teda dané, že  $U_0 = 6$ . Počet vizitiek, ktoré sú potrebné na prvú iteráciu (obrázok 2.15), vypočítame tak, že spočítame koľko iterácií  $U_0$  sa v nej nachádza. Ak by prvá iterácia bola obyčajnou kockou, bolo by nám treba  $3^3 = 27$  iterácií  $U_0$ . Oproti klasickej kocke nám ale chýba v každej stene jedna kocka a navyše taktiež kocka presne

v strede - teda dokopy 7 kociek. Teda prvá iterácia  $U_1 = (27 - 7) \cdot U_0 = 20 \cdot 6 = 120$  vizitiek



Obr. 2.15: Prvá a druhá iterácia Mengerovej špongie

Počet vizitiek v iterácii  $U_2$  (obrázok 2.15) vypočítame pomocou iterácie  $U_1$ . Rovnako ako v predošlom výpočte by sme potrebovali 20 iterácii  $U_1$ , teda  $U_2 = 20 \cdot U_1 = 20 \cdot 120 = 2400$  papierových vizitiek.

Teraz sa pozrieme na iteráciu  $U_n$ . Analogicky k predchádzajúcim výpočtom by sme potrebovali 20 modelov predchádzajúcej iterácie, teda  $U_n = 20 \cdot U_{n-1}$ .

V ďalšom kroku z rekurentného vzorca 2.3 odvodíme explicitný. Keďže

$$U_n = 20 \cdot U_{n-1}$$

môžeme v rozpisovaní pokračovať

$$U_n = 20 \cdot 20 \cdot U_{n-2} = 20^2 \cdot U_{n-2} = 20^3 \cdot U_{n-3} = \dots = 20^n \cdot U_0.$$

Keďže počet papierových vizitiek potrebných na poskladanie nulte iterácie poznáme, môžeme povedať, že

$$U_n = 20^n \cdot 6$$

a teda sme sa dostali k explicitnému vzorcu pre počet vizitiek potrebných na poskladanie  $n$ -tej iterácie Mengerovej špongie.

V predchádzajúcom výpočte sme sa zaoberali iteráciami, kde nám neprekážali trčiace časti papierových vizitiek. V ďalšom výpočte ukážeme, ako by to vyzeralo, ak by sme sa snažili tieto časti zakryť ďalšími vizitkami.

### 2.3.1 Hladká verzia

Na to aby sme zistili, koľko papierových vizitiek je potrebné mať na poskladanie  $n$ -tej iterácie Mengerovej špongie bez trčiacich častí budeme potrebovať vedieť dve základné

informácie - koľko vizitiek nám zaberie samotná konštrukcia a koľko ich použijeme na zakrytie trčiach častí.

Prvú informáciu sme vypočítali v prechádzajúcej časti, preto sa teraz budeme venovať viac druhej informácii. Keďže každá vizitka na povrchu má takéto trčiace časti, našou úlohou je vyjadriť povrch Mengerovej špongie cez počet vizitiek.

Začneme rekurentným vyjadrením. Označme  $S_0$  počet vizitiek na povrchu iterácie 0. Keďže iterácia 0 je obyčajnou kockou, vidíme že  $S_0 = 6$ . V ďalšej iterácii sa už vyskytujú aj diery, ktoré budeme musieť zarátavať tiež. Pre ďalšiu iteráciu máme teda 6 strán, pričom na každej z nich je 8 vizitiek a v každej strane je jedna diera, na ktorú použijeme 4 vizitky. Dokopy je to teda  $S_1 = 6 \cdot 8 + 6 \cdot 4 = 72$  vizitiek.

Pre druhú iteráciu sa situácia skomplikuje tým, že diery už nebudú len najmensej moźnej veľkosti, ale aj väčšie. Vieme ale povedať, že v ľubovoľnej iterácii bude v každej "kocke" veľkosti  $U_1$  presne 6 najmenších dier, pričom na každú z nich použijeme 4 vizitky. Z predchádzajúcej časti vieme, že

$$U_n = 20^n \cdot U_0$$

a že  $U_1 = 20 \cdot U_0$ , preto  $U_n = 20^{n-1} \cdot U_1$ . Zo vzťahu vyplýva že v  $n$ -tej iterácii sa nachádza  $20^{n-1}$  "kociek" iterácie  $n - 1$  a keďže každá má 6 dier, na ktoré treba po 4 vizitky, na najmenšie diery v  $n$ -tej iterácii minieme

$$6 \cdot 4 \cdot 20^{n-1}$$

Zostáva nám vyriešiť väčšie diery a steny samotnej "kocky". Keď sa pozrieme na prechod z iterácie 2 do iterácie 3, vidíme, že z každej jednej celistvej steny (teda pre nás z jednej vizitky) sa stalo 8 vizitiek (zároveň aj vznikla menšia diera, ale tie sme už všetky zarátali vyššie). Z toho teda môžeme usúdiť, že na tretiu iteráciu treba osemkrát viac vizitiek ako na druhú.

Potom rekurentný vzorec vyzerá nasledovne:

$$S_n = 8 \cdot S_{n-1} + 6 \cdot 4 \cdot 20^{n-1}$$

Napokon budeme chcieť z rekurentného vzorca odvodiť explicitný:

$$\begin{aligned} S_n &= 8 \cdot S_{n-1} + 6 \cdot 4 \cdot 20^{n-1} \\ \frac{1}{8^n} \cdot S_n &= \frac{8}{8^n} \cdot S_{n-1} + \frac{1}{8^n} \cdot 24 \cdot 20^{n-1} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Najskôr obe strany rovnice predelíme nenulovým členom  $8^n$ . Potom úpravou člena pred  $S_{n-1}$  dostávame

$$\begin{aligned} \frac{1}{8^n} \cdot S_n &= \frac{1}{8^{n-1}} \cdot S_{n-1} + 3 \cdot \left(\frac{20}{8}\right)^{n-1} \\ \frac{1}{8^n} \cdot S_n &= \frac{1}{8^{n-1}} \cdot S_{n-1} + 3 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{n-1} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Vzťah (2.7) môžeme chápať ako modifikovaný rekurentný vzorec, podľa ktorého vieme vyjadriť

$$\frac{1}{8^{n-1}} \cdot S_{n-1} = \frac{1}{8^{n-2}} \cdot S_{n-2} + 3 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{n-2} \quad (2.8)$$

Potom keď (2.8) dosadíme do (2.7) dostávame

$$\frac{1}{8^n} \cdot S_n = \frac{1}{8^{n-2}} \cdot S_{n-2} + 3 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{n-2} + \left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}.$$

Analogicky po ďalšom dosadzovaní dostávame vzťah

$$\begin{aligned} \frac{1}{8^n} \cdot S_n &= \frac{1}{8} \cdot S_1 + 3 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^1 + \dots + \left(\frac{5}{2}\right)^{n-2} + 3 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}, \\ \frac{1}{8^n} \cdot S_n &= S_0 + 3 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^0 + 3 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^1 + \dots + \left(\frac{5}{2}\right)^{n-2} + 3 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

Súčet geometrického radu vypočítame ako  $S_n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$  [9], pričom pre nás  $r = \frac{5}{2}$ .

Potom pokračujeme v úpravách

$$\begin{aligned} \frac{1}{8^n} \cdot S_n &= S_0 + 3 \cdot \left(\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^n - 1}{\frac{5}{2} - 1}\right) \\ S_n &= 8^n \cdot S_0 + 8^n \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(\left(\frac{5}{2}\right)^n - 1\right) \\ S_n &= 8^n \cdot S_0 + 2 \cdot 8^n \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^n - 2 \cdot 8^n \end{aligned}$$

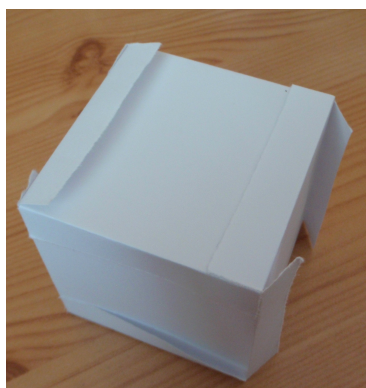
a keďže  $S_0 = 6$  tak

$$S_n = 4 \cdot 8^n + 2 \cdot \frac{5^n \cdot 8^n}{2^n} = 4 \cdot 8^n + 2 \cdot 20^n$$

Teda celkový počet vizitiek pre "hladkú" verziu n-tej iterácie Mengerovej špongie je  $6 \cdot 20^n + 4 \cdot 8^n + 2 \cdot 20^n = 8 \cdot 20^n + 4 \cdot 8^n$ .

### 2.3.2 Ukážky modelov

Pre účely tejto práce sme poskladali jeden model prvej iterácie Mengerovej špongie: Na obrázku 2.16 je model nultej iterácie. Na poskladanie prvej iterácie budeme potrebovať 20 takýchto modelov a spájať ich budeme pomocou malých častí viziek, ktoré trčia z modelu (ako môžeme vidieť na obrázku 2.17)



Obr. 2.16: Nultá iterácia



Obr. 2.17: Spojenie dvoch nultých iterácií

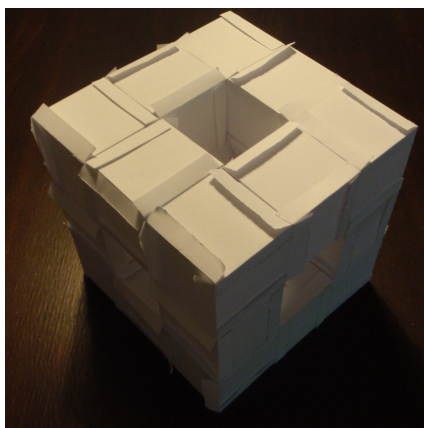
Na obrázkoch 2.18 a 2.19 vidíme dokončenie prvej iterácie Mengerovej špongie.

Našli sa však ľudia, ktorí to so skladaním zobrali oveľa vážnejšie. Známa Origami umelkyňa, doktorka Jeannine Mosely z Pittsburghu, si dala za cieľ postaviť tretiu





**Obr. 2.18:** Takmer hotový model prvej iterácie



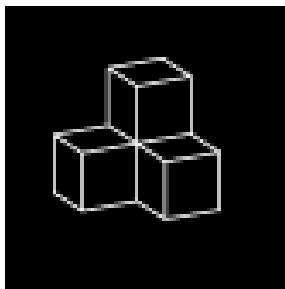
**Obr. 2.19:** Model prvej iterácie

iteráciu Mengerovej špongie. Na to si musela pripraviť 8000 malých kociek, každú zo 6 vizitiek a 18048 ďalších vizitiek na doskladanie hladkej verzie.

Podľa [25] bolo cieľom jej projektu nielen postaviť model, ale zapojiť doňho viac ľudí. Najprv poskladala druhú iteráciu špongie, ktorá trvala približne 30 hodín. Celkovo by teda tretia iterácia mala trvať asi 600 hodín, keďže sa skladá z 20 menších iterácií. Treba ale počítať s tým, že samotné spájanie iterácií dokopy často zaberá rovnako alebo aj viac času ako ich skladanie.

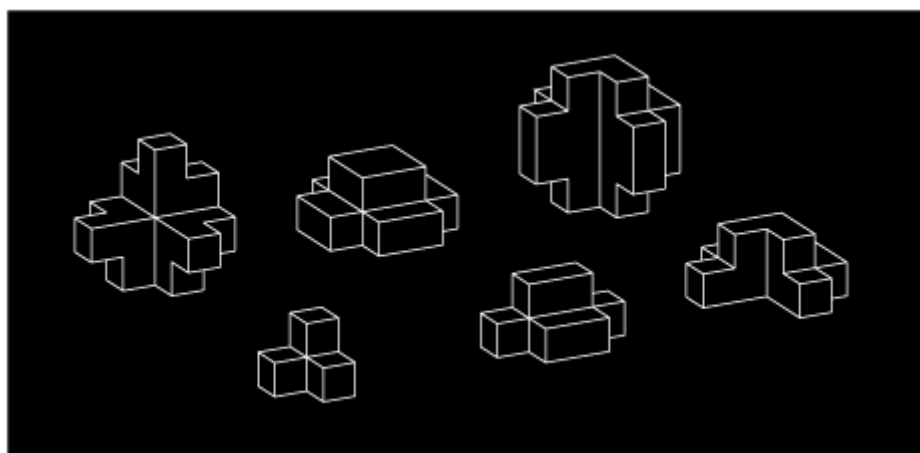
Pôvodný nápad bol založený na 4-8 dobrovoľníkoch, ktorí by simultánne skladali najprv vizitky, a neskôr z nich nulté iterácie. Takto by projekt mal trvať okolo 100 hodín. Nájsť dobrovoľníkov na skladanie vizitiek na 100 hodín sa ale ukázalo byť ťažké, preto sa Jeannine Mosely rozhodla, že si nechá pomáhať od dobrovoľníkov po celej krajine.

Ich úlohou bolo skladať stavebné časti, ktoré potom posielali Jeannine. Najprv musela ale povedať ako tieto súčiastky majú vyzerieť, aby sa potom dali dobre spájať. Jej návrh bol skladať "trojnožky", pričom pod jednou trojnožkou sú myslené štyri kocky pospájané tak, ako na obrázku 2.20.



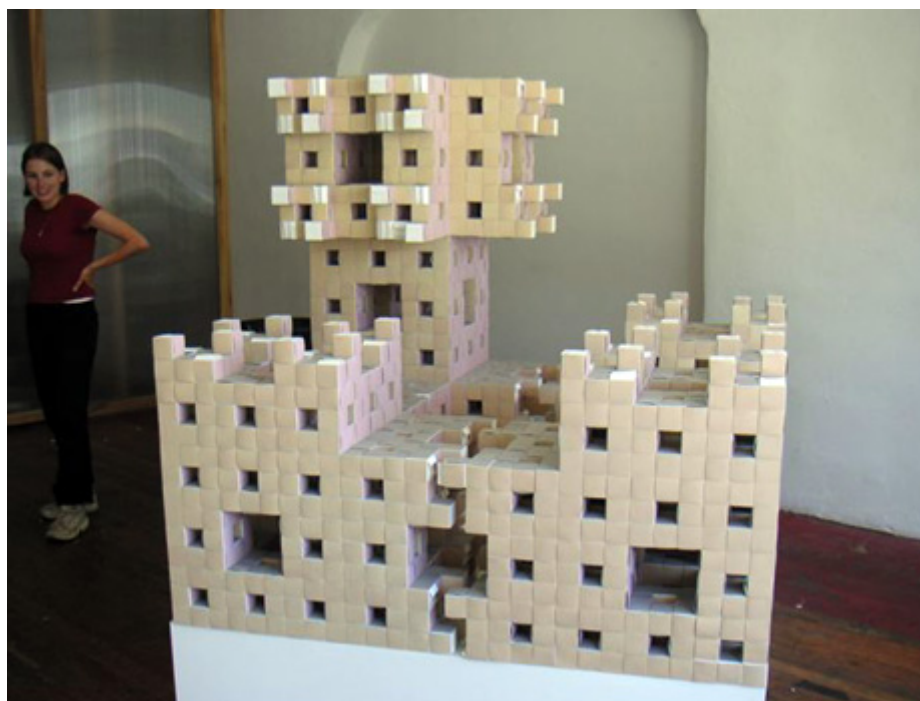
**Obr. 2.20:** Jedna trojnožka [25]

Tieto trojnožky sú najvhodnejšími stavebnými časťami, pretože hocijaká iterácia sa dá rozložiť (a teda aj spätne zložiť) na časti pozostávajúce z jednej, dvoch, troch, štyroch, šiestich alebo ôsmych trojnožiek (obrázok 2.21).



**Obr. 2.21:** Kombinácie trojnožiek, ktoré Jeannine používala [25]

Strana výsledného modelu, ktorý Jeannine postavila meria 1,37 metra a celý model váži 68 kg.



**Obr. 2.22:** Model tretej iterácie Mengerovej špongie [25]

## Kapitola 3

# Matematická formulácia japonských hlavolamov

Hlavolam je problém, hádanka, záhada, ktorá skúša vynaliezavosť jej riešiteľa. Všeobecne najznámejšou formou hlavolamov sú mechanické hlavolamy, ale môžu za ne byť považované aj iné úlohy. Napríklad krížovky, sudoku, rôzne formy dopĺňovačiek, osemsmeroviek a podobne. Rovnako tak môže byť za hlavolam považovaná šifra, hádanka či matematická slovná úloha. Určitou formou hlavolamu môžu byť tiež úlohy niektorých logických hier, ako sú napríklad šachy či GO.

Mechanický hlavolam je objekt, ktorý svojho riešiteľa vyzýva k objaveniu skrytého aspektu predmetu, a to za použitia logiky, zručnosti, skúseností, priestorovej predstavivosti, fantázie či šťastia.

Hlavolamy sú zväčša vytvárané ako forma zábavy, často však vychádzajú z vážnych matematických či logických problémov. V takých prípadoch môže byť ich úspešné riešenie významným príspevkom k matematickému výskumu.

História hlavolamov siaha až do Starého Egypta, Číny, Japonska či na Arabský polostrov. Najrôznejšie hlavolamy sa objavovali nielen medzi vládnuou vrstvou, ale v jednoduchých formách aj medzi obyčajnými ľuďmi. V roku 1893 vydal profesor Hoffman v Londýne knihu "Hlavolamy staré a nové" (Puzzles old and new), v ktorej sa okrem popisu viac než 40 hlavolamov tiež po prvýkrát pokúsil ustanoviť základnú kategorizáciu hlavolamov. Ako hlavný problém tejto úlohy popisuje fakt, že nie je možné prakticky určiť jednoznačné kategórie tak, aby niektoré hlavolamy nepatrili do viacerých kategórií

[8].

Podľa [28] uvádzame najprv delenie na krížovky, osemsmerovky, hádanky, logické úlohy a sudoku, pričom v každej z kategórií by sme vedeli klasifikovať rôzne kategórie. Najbližšie našej práci sú z týchto piatich práve logické úlohy. Vďaka ich stále pribúdajúcemu počtu a rôznorodým nápadom je ich delenie zložitejšie ako by sa mohlo zdať. Dajú sa deliť podľa formy podania (na obrazové, textové, obrazcové, výrazové, znakové, priestorové...), podľa typu operácie, ktorá sa v nich robí (vyhľadávacie, substitučné, eliminačné, skladacie, doplňovacie...) alebo podľa princípu riešenia (úlohy založené na reorganizácii - zápalkové úlohy, lokalizačné úlohy - mrakodrapy, úlohy založené na hľadaní dráhy - zrkadlá, substitučné úlohy -algebrogramy, ...)

V tejto kapitole sa budeme zaoberať dvoma japonskými hlavolamami - Futošiki a Mrakodrapy. Zameriame sa na ich matematickú formuláciu a riešenie v programe MiniZinc.

### 3.1 O programe MiniZinc

MiniZinc je programovací jazyk zameraný na riešenie optimalizačných úloh zadaných pomocou logických podmienok a ohraničení.

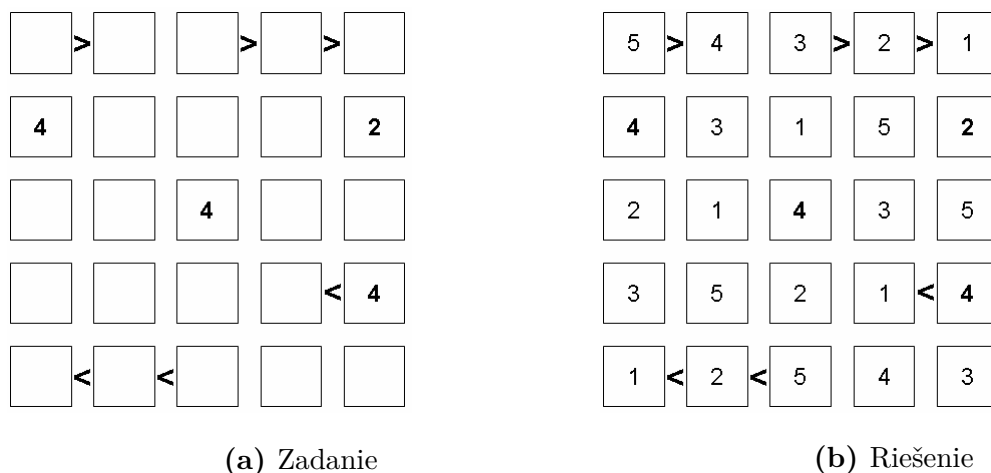
Práve touto kombináciou je vhodný nie len na programovanie optimalizačných úloh, ale dajú sa v ňom dobre naformulovať aj rôzne logické hlavolamy. Využitie už naprogramovanej funkcie `alldifferent` výrazne zjednodušuje formuláciu hlavolamov, ako napríklad sudoku [1].

Naše hlavolamy - Futošiki a Mrakodrapy - majú tiež podmienku rôznych čísel v riadkoch a stĺpcoch. Formuláciu tejto podmienky, ako aj formát a zapisovanie vstupu uvádzame rovnako ako v [1] a pridávame dodatočné podmienky na vyriešenie konkrétnych úloh.

### 3.2 Futošiki

Na obrázku (3.1a) môžeme vidieť zadanie hlavolamu Futošiki (v preklade Nerovnosti). Rieši sa v mriežke  $n \times n$  a cieľom je doplniť do každého riadku a stĺpca čísla od 1 po  $n$  tak, aby sa v každom riadku a stĺpci vyskytovalo každé číslo práve raz a aby

boli zároveň splnené podmienky nerovností. Zadanie a vyriešený hlavolam vidíme na obrázku (3.1b) [7].



Ak by sme chceli program využiť iba na riešenie jedného konkrétneho zadania, mohli by sme vstupné údaje zahrnúť priamo do kódu. Naším cieľom ale je, aby bol program využiteľný aj pre iné zadania, prípadne aj iné parametre (napríklad iný rozmer mriežky, iný počet nerovností...). Preto budeme vstupné údaje pre konkrétne zadania načítavať z externého súboru. Príklad vstupu pre zadanie z obrázku (3.1a) je uvedený nižšie (kód 3.1)

```

1 N=5;
2 PocOhr=6;
3 start = [
4 0, 0, 0, 0, 0
5 4, 0, 0, 0, 2
6 0, 0, 4, 0, 0
7 0, 0, 0, 0, 4
8 0, 0, 0, 0, 0];
9 MRiadok = [1, 1, 1, 5, 4, 5];
10 MStlpec = [2, 4, 5, 1, 4, 2];
11 VRiadok = [1, 1, 1, 5, 4, 5];
12 VStlpec = [1, 3, 4, 2, 5, 3];

```

Listing 3.1: vstup pre Futošiki

V MiniZincu je potrebné rozlišovať premenné a parametre. Zatiaľ čo premenná iba vstupuje do optimalizácie a pomocou nej hľadáme hodnoty, ktoré vedú k riešeniu, parametru môžeme hodnotu priradiť iba raz a túto hodnotu bude mať v celom programe rovnakú. V našom prípade to sú:

- Parameter N - určuje, aká veľká je jedna strana mriežky hlavolamu (v našom zadaní je tomuto parametru priradená hodnota 5)

- Parameter `PocOhr` - hovorí o počte ohraňení, ktorý daná úloha používa
- Parameter `start` - pole, ktoré udáva počiatkové informácie o číslach v mriežke. Ak je nejaké políčko v mriežke na začiatku prázdne, v poli `start` vidíme na jeho pozícií hodnotu 0.
- Vektory `MRIadok`, `MStlpec`, `VRIadok`, `VStlpec` - určujú, kde sa v mriežke nachádzajú znamienka nerovností, pričom každá zložka definuje jednu nerovnosť. Konkrétne, číslo vo vektore `MRIadok` udáva x-ovú súradnicu políčka, ktoré je podľa znamienka menšie z dvojice. Podobne `MStlpec` určuje y-ovú súradnicu menšieho políčka. Súradnice väčšieho políčka máme dané prvkami vektorov `VRIadok` a `VStlpec`. Podľa aktuálneho vstupu (obr 3.1) má byť napríklad políčko so súradnicami [1,2] menšie ako políčko so súradnicami [1,1].

V prvej časti kódu (kód 3.2) deklarujeme vyššie spomínané parametre `N`, `PocOhr`, `startMRIadok`, `MStlpec`, `VRIadok`, `VStlpec`, ktoré načítavame zo vstupného súboru (kód 3.1). Navyše dekarujeme množiny `PuzzleRange` a `Ohranicenia`, ktoré nám umožňujú pracovať s rôznymi modelmi vstupov (pre rôzne veľkosti mriežky, a rôzny počet nerovností). Na uľahčenie formulácie podmienky o rôznych číslach v rámci riadkov a stĺpcov používame podmienku `alldifferent`. Nakoniec, premenná `puzzle`, v ktorej bude nakonci uložené riešenie hlavolamu.

```

1 include "alldifferent.mzn";
2
3 int: N;
4 int: PocOhr;
5 int: digs = ceil(log(10.0, int2float(N))); % cifry na zapis vystupu
6 set of int: PuzzleRange = 1..N;
7 set of int: Ohranicenia = 1..PocOhr;
8
9 array [1..N, 1..N] of 0..N: start; % zaciatochn stav hracej plochy
10 array [1..N, 1..N] of var PuzzleRange: puzzle;
11
12 array [1..PocOhr] of int: MRIadok; %riadok kam smeruje zobacik mensie
13 array [1..PocOhr] of int: MStlpec; %stlpec kam smeruje zobacik mensie
14 array [1..PocOhr] of int: VRIadok; %riadok kam smeruje zobacik mensie
15 array [1..PocOhr] of int: VStlpec; %stlpec kam smeruje zobacik mensie

```

Listing 3.2: Deklarácia premenných a parametrov pre Futošiki

Po deklarácií premenných nasleduje časť s podmienkami (kód 3.3).

Prvá z nich prenesie údaje z poľa `start` do poľa `puzzle` tak, že príslušným prvkom priradíme nenulové prvky poľa `start`.

Ďalšie dve podmienky používajú príkaz `alldifferent` a zabezpečia, aby čísla v riadkoch a stĺpcoch pola `puzzle` boli rôzne.

Ako poslednú uvedieme podmienku o nerovnostiach podľa vyššie uvedeného vstupu.

Po naformulovaní podmienok treba povedať, čo s nimi konkrétne chceme spraviť. Pre náš prípad posluží ideálne príkaz `solve satisfy`, keďže naše riešenie okrem splnenia podmienok nič iné nepožaduje. MiniZinc okrem príkazu `solve satisfy` pozná aj `solve maximize` a `solve minimize`. Tieto príkazy maximalizujú prípadne minimalizujú premennú alebo aritmetický výraz za daných podmienok a dajú sa dobre použiť pri optimalizačných úlohách.

Na záver budeme chcieť vypísať pole `puzzle` pomocou príkazu `output`. Pre správne formátovanie používame rovnaký formát ako pri sudoku [1]. Výstup potom môžeme vidieť na obrázku 3.4.

```

1 % nactanie vstupu do pola Puzzle
2 constraint forall(i,j in PuzzleRange)(
3     if start[i,j] > 0 then puzzle[i,j] = start[i,j] else true endif);
4
5 % podmienka pre rozne cisla v riadkoch
6 constraint forall (i in PuzzleRange) (
7     alldifferent ([ puzzle[i,j] | j in PuzzleRange ]));
8
9 % podmienka pre rozne cisla v stlpcoch
10 constraint forall (j in PuzzleRange) (
11     alldifferent ([ puzzle[i,j] | i in PuzzleRange ]));
12
13 % podmienka pre splnenie nerovnosti
14 constraint forall(i in Ohranicenia) (
15     puzzle[Mriadok[i],MStlpec[i]] < puzzle[Vriadok[i],VStlpec[i]]);
16
17 solve satisfy;
18
19 output [ show_int(digs, puzzle[i,j]) ++ " " ++
20         if j == N /\ i != N then "\n" else "" endif
21         | i,j in PuzzleRange ] ++ ["\n"];

```

Listing 3.3: Podmienky a formulácia výstupu v programe Futošiki

```

1 5 4 3 2 1
2 4 3 1 5 2
3 2 1 4 3 5
4 3 5 2 1 4
5 1 2 5 4 3

```

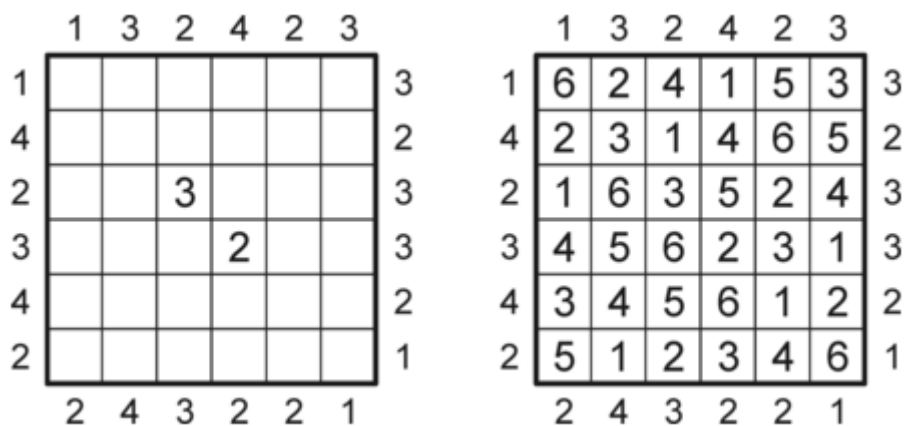
Listing 3.4: Výstup pre zadaný vstup Futošiki

### 3.3 Mrakodrapy

Na hlavolame Futošiki sme ukázali základné prvky formulácie v MiniZinc-u. Tie použijeme aj pri riešení nasledujúceho hlavolamu.



Zadanie a riešenie mrakodrapov [16] môžeme vidieť na obrázku 3.2. Cieľom je do každého riadku a stĺpca mriežky  $n \times n$  doplniť čísla od 1 po  $n$  tak aby sa v rámci jedného riadku a stĺpca neopakovali.



Obr. 3.2: Mrakodrapy

Ďalšou podmienkou v dopĺňaní čísel sú čísla pozdĺž strán mriežky. Ak pod jednotlivými číslami v mriežke budeme chápať výšky mrakodrapov, čísla po stranách hovoria, koľko mrakodrapov uvidíme ak sa pozrieme z danej strany.

Teda ak je napríklad pri prvom riadku vľavo číslo 1 a vpravo číslo 3, znamená to, že pokiaľ sa pozrieme zľava, uvidíme iba jeden mrakodrap (všetky ostatné nebudú viditeľné, lebo budú za ním a budú nižšie). Vieme teda presne určiť, že v prvom riadku na prvom políčku zľava bude mrakodrap výšky 6. Keď sa pozrieme na tento riadok sprava, uvidíme 3 mrakodrapy - podľa riešenia na obrázku 3.2 to budú mrakodrapy s výškami 3, 5 a 6.

Rovnako ako pri Futoshiki, aj teraz uvedieme najprv, ako vyzerá vstup pre program Minizinc (obrázok 3.5) pre zadanie z obrázku 3.2.

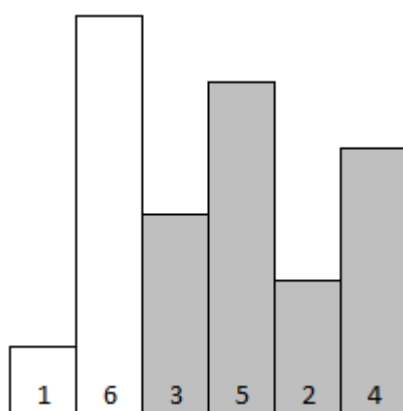
```

1 N=6;
2 start = [
3 0, 0, 0, 0, 0, 0
4 0, 0, 0, 0, 0, 0
5 0, 0, 0, 0, 0, 0
6 0, 0, 0, 0, 0, 0
7 0, 0, 0, 0, 0, 0
8 0, 0, 0, 0, 0, 0];
9 hore = [2, 1, 2, 4, 2, 3];
10 dole = [1, 4, 2, 3, 3, 2];
11 vpravo = [2, 2, 3, 3, 1, 4];
12 vľavo = [2, 3, 3, 4, 3, 1];

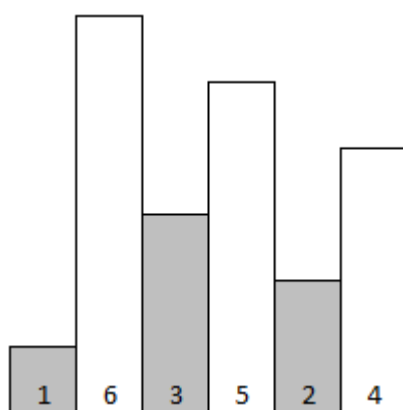
```

Listing 3.5: vstup pre Mrakodrapy

Rovnako ako v hlavolame Futošiki, parameter  $N$  a pole **start** udávajú veľkosť mriežky a počiatočné čísla v tabuľke. Vektory **hore**, **dole**, **vpravo**, **vľavo** hovoria, koľko mrakodrapov z danej strany vidíme. Napríklad ak tretím prvkom poľa **vľavo** číslo 2, znamená to, že ak sa pozrieme z hora na tretí riadok tabuľky, uvidíme dva mrakodrapy. Pre detailnejšiu ilustráciu, na obrázku 3.3 sú mrakodrapy, ktoré vidíme biele (mrakodrapy s výškou 1 a s výškou 6) a tie, ktoré nevidíme šedé (s výškami 3,5,2 a 4). Situáciu v tom istom riadku ale sprava máme zaznamenanú v treťom prvku poľa **vpravo**. Ako vidíme na obrázku 3.4, sprava sú viditeľné 3 mrakodrapy.



Obr. 3.3: Mrakodrapy - Viditeľnosť Zľava



Obr. 3.4: Mrakodrapy - Viditeľnosť Sprava

Parameter  $N$  udáva rozmery mriežky, pole **start** začiatkové čísla v tabuľke, a vektory **hore**, **dole**, **vpravo**, **vľavo** hovoria o podmienkach výšok mrakodrapov.

To, že nejaký mrakodrap vidíme zľava pre nás znamená, že každý mrakodrap od neho vpravo je menší ako on sám. Rovnako to platí pre ostatné strany.

V programe (kód 3.6) teda zadeklarujeme štyri polia (zhora, zdole, zprava, zlava). Pre každú stranu (hore, dole, vpravo, vľavo) budeme potom v poli uvádzať, či políčko z danej strany vidíme (hodnota 1), alebo nevidíme (hodnota 0). Keď potom po riadkoch (stĺpcoch) sčítame prvky polí, každý riadok (stĺpec) budeme vedieť povedať, koľko políčok z ktorej strany vidíme. Tieto hodnoty budeme dávať do rovnosti s hodnotami zo zadania (vstupné vektory *hore*, *dole*, *vpravo*, *vľavo*).

```

1 include "alldifferent.mzn";
2
3 int: N;
4 int: digs = ceil(log(10.0, int2float(N)));
5
6 set of int: PuzzleRange = 1..N;
7
8 array[1..N,1..N] of 0..N: start;
9
10 array[1..N,1..N] of var bool: zlava;
11 array[1..N] of var int: poczl;
12
13 array[1..N,1..N] of var bool: zhora;
14 array[1..N] of var int: poczh;
15
16 array[1..N,1..N] of var bool: zprava;
17 array[1..N] of var int: poczp;
18
19 array[1..N,1..N] of var bool: zdola;
20 array[1..N] of var int: poczd;
21
22 array[1..N,1..N] of var PuzzleRange: puzzle;
23
24 % povodne ohranicenia – nacistavaju sa z inputu
25 array[1..N] of 0..N: hore;
26 array[1..N] of 0..N: dole;
27 array[1..N] of 0..N: vpravo;
28 array[1..N] of 0..N: vľavo;

```

Listing 3.6: Deklarácia pre Mrakodrapy

Podmienky môžeme potom formulovať nasledovne (kód 3.7).

Prvá podmienka zabezpečuje prenos vstupných dát do poľa *puzzle*, druhá a tretia rôznosť čísel v riadkoch a stĺpcoch pomocou *alldifferent*. Nasledujú štyri dvojice podmienok, kde každá dvojica zabezpečuje najprv správne naplnenie polí *zlava*, *zhora*, *zprava*, *zdola*, v ktorých máme informáciu o viditeľnosti každého políčka z danej strany. Následne sčítavame riadky alebo stĺpce (v poliach *zlava*, *sprava* riadky, v poliach *zhora*, *zdola* stĺpce) aby sme zistili počet mrakodrapov, ktoré z danej strany vidíme.

Posledná štvorica podmienok je zabezpečiť rovnosť medzi požadovanými počtami viditeľných mrakodrapov (zo zadania) a počtami viditeľností, ktoré sme dostali z podmienok vyššie.

```

1 % Vyplni plochu podľa inputu
2 constraint forall(i,j in PuzzleRange)(
3     if start[i,j] > 0 then puzzle[i,j] = start[i,j] else true endif);
4
5
6 % All different in rows
7 constraint forall (i in PuzzleRange) (
8     alldifferent ([ puzzle[i,j] | j in PuzzleRange ]));
9
10 % All different in columns.
11 constraint forall (j in PuzzleRange) (
12     alldifferent ([ puzzle[i,j] | i in PuzzleRange ]));
13
14 % Pozrie sa na viditeľnosť jednotlivých políček zľava
15 constraint forall(r in 1..N) (forall(s in 1..N)
16     (if ((forall (i in 1..s-1) (puzzle[r,s]>puzzle[r,i])))
17         then zlava[r,s]=true else zlava[r,s]=false endif));
18
19 constraint forall(i in 1..N) (poczl[i]=sum(j in 1..N)(zlava[i,j]));
20
21 % Viditeľnosť zhora
22 constraint forall(r in 1..N) (forall(s in 1..N)
23     (if ((forall (i in 1..s-1) (puzzle[s,r]>puzzle[i,r])))
24         then zhora[r,s]=true else zhora[r,s]=false endif));
25
26 constraint forall(i in 1..N) (pocz h[i]=sum(j in 1..N)(zhora[i,j]));
27
28 % Viditeľnosť zprava
29 constraint forall(r in 1..N)(forall(s in 1..N)
30     (if ((forall (i in s+1..N) (puzzle[r,s]>puzzle[r,i])))
31         then zprava[r,s]=true else zprava[r,s]=false endif));
32
33 constraint forall(i in 1..N) (pocz p[i]=sum(j in 1..N)(zprava[i,j]));
34
35 % Viditeľnosť zdola
36 constraint forall(r in 1..N)(forall(s in 1..N)
37     (if ((forall (i in s+1..N) (puzzle[s,r]>puzzle[i,r])))
38         then zdola[r,s]=true else zdola[r,s]=false endif));
39
40 constraint forall(i in 1..N) (pocz d[i]=sum(j in 1..N)(zdola[i,j]));
41
42 % Aby sedeli sučty
43 constraint forall(i in 1..N) (vlavo[i] - poczl[i] == 0);
44 constraint forall(i in 1..N) (hore[i] - poczh[i] == 0);
45 constraint forall(i in 1..N) (vpravo[i] - poczp[i] == 0);
46 constraint forall(i in 1..N) (dole[i] - poczd[i] == 0);
47
48 solve satisfy;
49
50 output [ show_int(digs , puzzle[i,j]) ++ "□" ++
51     if j == N /\ i != N then "\n" else " " endif
52     | i,j in PuzzleRange ] ++ ["\n"];

```

Listing 3.7: Podmienky pre Mrakodrapy

Výstupom nášho programu pre vstup (kód 3.5) môžeme vidieť na obrázku (3.8).

```

1 5 6 3 1 2 4
2 3 4 1 2 6 5
3 2 5 6 4 1 3
4 1 3 4 6 5 2
5 4 1 2 5 3 6
6 6 2 5 3 4 1

```

Listing 3.8: Výstup pre Mrakodrapy



# Záver

V prvej kapitole sme sa venovali riešeniu Sangaku. Najskôr sme uviedli dva jednoduchšie príklady spolu s ich riešením. Pri poslednom, zložitejšom, sme najprv uviedli tradičné riešenie, ktoré bolo pomerne rozsiahle a využívalo menej typické postupy. Následne sme uviedli moderné riešenie, založené na analytickej geometrii, ktoré zo zadania vynechalo predpoklad kolmosti. Vďaka tomu sa nedostalo ku konkrétnemu riešeniu, ale popísalo vzťah medzi jednotlivými dĺžkami zo zadania. Vzťah bol odvodený pomocou rezultantu polynómov vyjadrujúcich vzťah medzi jednotlivými premennými zo zadania a z jeho formulácie nebolo jasné, aký výsledok sa dostane pridaním podmienky kolmosti.

V našom riešení sme sa rozhodli inšpirovať sa prvotnými analytickými vyjadreniami moderného riešenia. Ďalej sme ale použili na vyjadrenie inú podmienku, vďaka ktorým sme dostali závislosť hľadanej dĺžky iba od jednej premennej. Tú sme zobrazili v grafe. Po dodaní podmienok kolmosti sme numericky dopočítali hľadané dĺžky, ktoré sa zhodovali s výsledkami tradičného riešenia.

V druhej kapitole sme sa venovali najskôr optimálnemu rozmeru papiera na skladanie Origami modelu Päť pretínajúcich sa štvorstenov. Zistili sme, že optimálne rozmery papiera sú veľmi blízko tým, z ktorých sme model skladali pôvodne. Odvodili sme vzorec pre počet papierových vizitiek potrebných na poskladanie  $n$ -tej iterácie Mengerovej špongie. Zaoberali sme sa dvoma verziami - jednou, v ktorej z modelu trčia malé časti vizitiek a druhou, kde pre estetickosť modelu tieto časti prekryjeme ďalšími vizitkami. Vzorec sme vypočítali pre oba modely a zhotovili prvú iteráciu jednej z verzií.

V poslednej kapitole sme najskôr naprogramovali riešenie jednoduchého japonského hlavolamu Futošiki. Rozmer samotného hlavolamu sme ponechali ako parameter pre riešenie aj náročnejších úrovní tohto hlavolamu. Druhý program riešil hlavolam Mrakodrapy. Spoločnou črtou programov je používanie funkcie `alldifferent`

Kvôli náročnejšej formulácii aj samotný program oproti Futošiki obsahoval viacero dodatočných podmienok.

Za prínos práce považujeme odvodenie vzťahu pre zadané dĺžky  $z$  prvej kapitoly, ktoré bolo rozšírením pôvodného zadania. Taktiež vzorce na výpočet potrebného počtu vizitiiek na poskladanie  $n$ -tej iterácie Mengerovej špongie pre obe verzie modelu v druhej kapitole, pri ktorých je uvedené aj detailné odvodenie.

Prínosom pre autorku bolo rozšírenie znalostí v oblasti programovania ako aj oboznámenie sa s novým programovacím jazykom MiniZinc. Rovnako aj samotná aplikácia matematiky v Origami bola veľmi príjemným spestrením bežného matematického sveta.

# Literatúra

- [1] A MiniZinc Tutorial, dostupné na internete (10.5.2016):  
<http://www.minizinc.org/downloads/doc-latest/minizinc-tute.pdf>
  
- [2] An ancient Japanese geometry problem, dostupné na internete (13.5.2016):  
<http://math.stackexchange.com/questions/1234981/an-ancient-japanese-geometry-problem>
  
- [3] British Origami Society, dostupné na internete (14.5.2016):  
[http://www.britishorigami.info/academic/lister/ori\\_vs\\_paperfolding.php](http://www.britishorigami.info/academic/lister/ori_vs_paperfolding.php)
  
- [4] Corazon de Washi, dostupné na internete (14.5.2016):  
<https://corazondewashi.wordpress.com/origami/>
  
- [5] Donauerová M., *Zlatý rez*, Bakalárska práca, FMFI UK, Bratislava, 2012, dostupné na internete (15.5.2016):  
<http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/stehlikova/BC/2012-donauerova.pdf>
  
- [6] Exterior angles of a concave polygon, dostupné na internete (13.5.2016):  
<https://www.sophia.org/tutorials/exterior-angles-of-a-concave-polygon>
  
- [7] Futošiki, dostupné na internete (13.5.2016):  
<http://www.futoshiki.org/>
  
- [8] Genius Logicus, dostupné na internete (10.5.2016):  
<http://www.geniuslogicus.eu/sutaze-pre-skoly/1620/>
  
- [9] Geometric Series, dostupné na internete (14.5.2016):  
<http://mathworld.wolfram.com/GeometricSeries.html>



- 
- [10] Herman J., Kucera R., Simsa J.: *Counting and Configurations: Problems in Combinatorics, Arithmetic, and Geometry*, Canadian Mathematical Society, 2003
- [11] Hidetoshi F., Rothman T.: *Sacred Mathematics: Japanese Temple Geometry*, Princeton University Press, 2008
- [12] Hull T., *Project origami: activities for exploring mathematics*, CRC Press, 2012
- [13] Kubala, B.: *Symetrické polynómy a rozklad polynómu na ireducibilné činitele*, Bakalárska práca, FMFI UK, Bratislava, 2014, dostupné na internete (15.5.2016): <http://www.iam.fmph.uniba.sk/efm/bakalarky/2014/kubala/bakalarka.pdf>
- [14] K's Origami, dostupné na internete (20.4.2016): <http://origami.ousaan.com/library/historye.html>
- [15] Menger Sponge, dostupné na internete (15.5.2016): <http://mathworld.wolfram.com/MengerSponge.html>
- [16] Mrakodrapy, dostupné na internete (13.5.2016): <http://sudokualogika.cz/node/226>
- [17] Peacock Tail Sangaku, Cut the Knot, dostupné na internete (20.4.2016): <http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/FanSangaku.shtml>
- [18] Peacock Tail Sangaku, Cut the Knot, dostupné na internete (13.5.2016): <http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/FanSangaku.shtmlsolution>
- [19] Pravidelý dvanásťsten, dostupné na internete (14.5.2016): [https://en.wikipedia.org/wiki/Regular\\_dodecahedron](https://en.wikipedia.org/wiki/Regular_dodecahedron)
- [20] Reischauer Edwin O., Craig Albert M.: *Dějiny Japonska*, Nakladatelství Lidové Noviny, 1987
- [21] Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana Matemática, dostupné na internete (13.5.2016): <http://www.oei.es/oim/revistaoim/>

- 
- [22] Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana Matemática, Numero 35, Problem 165, dostupné na internete (10.5.2016):  
<http://www.oei.es/oim/revistaoim/numero35/165.pdf>
- [23] Rothman helps reveal intricacies of ancient math phenomenon, Princeton University, dostupné na internete (20.4.2016):  
<http://www.princeton.edu/main/news/archive/S15/04/04O77/index.xml>
- [24] Sierpinski Carpet, dostupné na internete (14.5.2016):  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Sierpinski\\_carpet](https://en.wikipedia.org/wiki/Sierpinski_carpet)
- [25] The Institute For Figuring, dostupné na internete (20.4.2016):  
<http://theiff.org/oexhibits/menger02.html>
- [26] The Origami Paper Shop, dostupné na internete (14.5.2016):  
<http://www.theorigamipapershop.com/p-4634-6-inch-assorted-lokta-paper-origami-pack.aspx>
- [27] The Origami Resource Center, dostupné na internete (14.5.2016):  
<http://www.origami-resource-center.com/history-of-origami.html>
- [28] Zváz českých hádankárov a krížovkárov, dostupné na internete (14.5.2016):  
<http://www.schak.cz/node/33>



# Príloha A

Numerický výpočet koreňov v programe R:

```
1 f <- function(a, t) (((-2*a*t^3+(10*a^2-2)*t^2+(6*a-12*a^3)*t+2*a^2-
2 2)*sqrt(t^4-2*t^2+1)*sqrt(t^4+2*t^2+1)+t^8+sqrt((t^4-8*a*t^3+
3 (24*a^2+2)*t^2+(-32*a^3-8*a)*t+16*a^4+8*a^2+1)/(t^4-8*a*t^3+
4 (24*a^2-2)*t^2+(8*a-32*a^3)*t+16*a^4-8*a^2+1))* (2*a*t^7-
5 8*a^2*t^6+(8*a^3-6*a)*t^5+sqrt(t^4-2*t^2+1)*sqrt(t^4+2*t^2+1)*(t^4-
6 4*a*t^3+(4*a^2-2)*t^2+4*a*t-4*a^2+1)+16*a^2*t^4+(6*a-16*a^3)*t^3-
7 8*a^2*t^2+(8*a^3-2*a)*t)-4*a*t^7-4*a^2*t^6+(24*a^3+4*a)*t^5+
8 (-16*a^4+4*a^2-2)*t^4+(4*a-32*a^3)*t^3+(16*a^4+4*a^2)*t^2+
9 (8*a^3-4*a)*t-4*a^2+1)/(((2*a^2-2)*t^6+(4*a-4*a^3)*t^5+
10 (2-2*a^2)*t^4+(8*a^3-8*a)*t^3+(2-2*a^2)*t^2+(4*a-4*a^3)*t+2*a^2-
11 2)*sqrt(((8*a^3+8*a)*t*sqrt(t^4-2*t^2+1)*sqrt(t^4+2*t^2+1)+
12 (a^4+2*a^2+1)*t^6+(a^4+18*a^2+1)*t^4+(-a^4-18*a^2-1)*t^2-
13 a^4-2*a^2-1)/(a^4-2*a^2+1)*t^6+(-3*a^4+6*a^2-3)*t^4+(3*a^4-
14 6*a^2+3)*t^2-a^4+2*a^2-1))))-1
15 as.numeric(uniroot(f, c(1.01, 3.99), a=2.5)[1])
16 ## t = 2.000001
17 t<-seq(from=1, to = 4, by=0.01)
18 plot(t, f(2.5, t), type="l")
19 abline(h=0)
20
21
22 aa<-seq(from=2, to=3, by=0.005)
23 CH<-NA
24 for(i in 1:length(aa)) {
25   a0<-aa[i]
26   t<-as.numeric((uniroot(f, c(1.0001, (2*a0-1.0001)), a=a0))[1])
27   a0<-aa[i]
28   m<-(2*t)/(t^2-1)
29   ml<-(2*(2*a0-t))/((2*a0-t)^2-1)
30   CH[i]<-2*a0*m*sqrt(1+m1^2)/(m+m1)
31 }
32 plot(aa, CH, type="l", xlab="a", ylab="|CH|")
33 abline(h=4, col="grey")
34 abline(v=2.5, col="grey")
35
36
37 aa<-seq(from=1.05, to=15, by=0.05)
38 CH<-NA
39 for(i in 1:length(aa)) {
40   a0<-aa[i]
41   t<-as.numeric((uniroot(f, c(1.0001, (2*a0-1.0001)), a=a0))[1])
42   m<-(2*t)/(t^2-1)
43   ml<-(2*(2*a0-t))/((2*a0-t)^2-1)
44   CH[i]<-2*a0*m*sqrt(1+m1^2)/(m+m1)
45 }
46 plot(aa, CH, type="l", xlab="a", ylab="|CH|")
```

Listing 9: Vzťahy pre dĺžku  $CH$  a parametra  $a$

Dopočítanie hodnôt parametra  $t$  v prípade kolmosti:

```

1  pf<-function(t) ((t*((8*(t^2+1)^3)/(2*t-2)^3-(2*(t^2+1))/(2*t-2))+
2  t^5*((8*(t^2+1)^3)/(2*t-2)^3-(6*(t^2+1))/(2*t-2))+t^3*((6*(t^2+
3  1))/(2*t-2)-(16*(t^2+1)^3)/(2*t-2)^3)+sqrt(t^4-2*t^2+1)*sqrt(t^4+
4  2*t^2+1)*(t^2*((4*(t^2+1)^2)/(2*t-2)^2-2)-(4*(t^2+1)^2)/(2*t-
5  2)^2+t^4-(4*t^3*(t^2+1))/(2*t-2)+(4*t*(t^2+1))/(2*t-2)+1)-
6  (8*t^6*(t^2+1)^2)/(2*t-2)^2+(16*t^4*(t^2+1)^2)/(2*t-2)^2-
7  (8*t^2*(t^2+1)^2)/(2*t-2)^2+(2*t^7*(t^2+1))/(2*t-
8  2))*sqrt(((16*(t^2+1)^4)/(2*t-2)^4+t*(-32*(t^2+1)^3)/(2*t-
9  2)^3-(8*(t^2+1))/(2*t-2))+t^2*((24*(t^2+1)^2)/(2*t-2)^2+2)+
10 (8*(t^2+1)^2)/(2*t-2)^2+t^4-(8*t^3*(t^2+1))/(2*t-2)+1)/((16*(t^2+
11  1)^4)/(2*t-2)^4+t*((8*(t^2+1))/(2*t-2)-(32*(t^2+1)^3)/(2*t-2)^3)+
12 t^2*((24*(t^2+1)^2)/(2*t-2)^2-2)-(8*(t^2+1)^2)/(2*t-2)^2+t^4-
13 (8*t^3*(t^2+1))/(2*t-2)+1))+t^2*((16*(t^2+1)^4)/(2*t-2)^4+
14 (4*(t^2+1)^2)/(2*t-2)^2)+t^4*(-(16*(t^2+1)^4)/(2*t-2)^4+(4*(t^2+
15  1)^2)/(2*t-2)^2-2)+sqrt(t^4-2*t^2+1)*sqrt(t^4+2*t^2+
16  1)*(t*((6*(t^2+1))/(2*t-2)-(12*(t^2+1)^3)/(2*t-2)^3)+
17 t^2*((10*(t^2+1)^2)/(2*t-2)^2-2)+(2*(t^2+1)^2)/(2*t-2)^2-
18 (2*t^3*(t^2+1))/(2*t-2)-2)+t^5*((24*(t^2+1)^3)/(2*t-
19  2)^3+(4*(t^2+1))/(2*t-2))+t*((8*(t^2+1)^3)/(2*t-2)^3-(4*(t^2+
20  1))/(2*t-2))+t^3*((4*(t^2+1))/(2*t-2)-(32*(t^2+1)^3)/(2*t-
21  2)^3)-(4*t^6*(t^2+1)^2)/(2*t-2)^2-(4*(t^2+1)^2)/(2*t-2)^2+
22 t^8-(4*t^7*(t^2+1))/(2*t-2)+1)/((t^3*((8*(t^2+1)^3)/(2*t-2)^3-
23 (8*(t^2+1))/(2*t-2))+t^5*((4*(t^2+1))/(2*t-2)-(4*(t^2+1)^3)/(2*t-
24  2)^3)+t*((4*(t^2+1))/(2*t-2)-(4*(t^2+1)^3)/(2*t-2)^3)+t^6*((2*(t^2+
25  1)^2)/(2*t-2)^2-2)+t^4*(2-(2*(t^2+1)^2)/(2*t-2)^2)+t^2*(2-(2*(t^2+
26  1)^2)/(2*t-2)^2)+(2*(t^2+1)^2)/(2*t-2)^2-2)*sqrt((t^4*((t^2+
27  1)^4)/(2*t-2)^4+(18*(t^2+1)^2)/(2*t-2)^2+1)+t^6*((t^2+1)^4)/(2*t-2)^4+
28 (2*(t^2+1)^2)/(2*t-2)^2+1)+t^2*(-(t^2+1)^4/(2*t-2)^4-(18*(t^2+
29  1)^2)/(2*t-2)^2-1)-(t^2+1)^4/(2*t-2)^4+t*sqrt(t^4-2*t^2+1)*sqrt(t^4+
30  2*t^2+1)*((8*(t^2+1)^3)/(2*t-2)^3+(8*(t^2+1))/(2*t-2)-(2*(t^2+
31  1)^2)/(2*t-2)^2-1)/(t^2*((3*(t^2+1)^4)/(2*t-2)^4-(6*(t^2+1)^2)/(2*t-
32  2)^2+3)+t^6*((t^2+1)^4/(2*t-2)^4-(2*(t^2+1)^2)/(2*t-2)^2+1)+t^4*(-
33  (3*(t^2+1)^4)/(2*t-2)^4+(6*(t^2+1)^2)/(2*t-2)^2-3)-(t^2+1)^4/(2*t-
34  2)^4+(2*(t^2+1)^2)/(2*t-2)^2-1))-1
35
36  t<-seq(from=1, to = 4, by=0.01)
37  plot(t, pf(t), type='l')
38  abline(h=0)
39  abline(v=2)
40
41  uniroot(pf, c(1.5, 3.2)) #t=2.000016

```

Listing 10: Hodnota  $t$  v prípade kolmosti