

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



PREČO JE TO TAK?

BAKALÁRSKA PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

PREČO JE TO TAK?

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: RNDr. Beáta Stehlíková, PhD.



ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Jakub Raučina
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Prečo je to tak?
Why is it so?

Cieľ: V literatúre či na internete sa môžeme stretnúť s matematickými tvrdeniami, ktoré nie sú dokázané, inokedy nejakú hypotézu navrhujeme sami. Cieľom bakalárskej práce je niektoré z takýchto tvrdení dokázať:

(a) V knihe [1] sa píše o určitej postupnosti mnohouholníkov, ktoré sú opisované kružnicami: "Mohlo by sa zdať, že polomer kružníc rastie bez hraníc, no v skutočnosti sa limita postupnosti polomerov kružníc rovná asi 9-násobku polomeru pôvodnej kružnice." Prečo je postupnosť ohraničená a ako vieme vypočítať uvedenú limitu?

(b) Pri hraní istej hry s kockami zo súboru spoločenských hier majú možné výsledky rozdelenie "podozrivo" blízke normálnemu. Ide o súčet nezávislých náhodných premenných, ktoré však nie sú rovnako rozdelené, nedá sa teda použiť klasická (Lindenbergova-Levyho) centrálna limitná veta. Z čoho teda vyplýva pozorované rozdelenie?

(c) Pri riešení príkadu o lámaní tyče pomocou geometrickej pravdepodobnosti na internetovom fóre [2] dáva navrhované riešenie správny výsledok. Nie je však zrejmé, ako toto riešenie berie do úvahy spôsob delenia tyče, ktorý má samozrejme vplyv na výsledok.

(d) 2-3 podobné témy podľa vlastného výberu.

Spracovanie témy by nemalo mať podobu "zadanie - riešenie", výsledkom by mal byť príjemne čitateľný text na spôsob populárne písaných kníh o matematike, s rôznymi zaujímavosťami súvisiacimi s témou, historickými poznámkami a pod.

Literatúra: [1] T. Pappasová, Potešenie z matematiky. Nebojsa, Bratislava, 1997.
[2] Geometrická pravdepodobnosť - príklady s tyčí. <http://forum.matematika.cz/viewtopic.php?id=5351>

Vedúci: RNDr. Beáta Stehlíková, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Dátum zadania: 20.10.2015

Dátum schválenia: 19.11.2015

doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Pod'akovanie Chcel by som sa touto formou úprimne poďakovať vedúcej mojej bakalárskej práce RNDr. Beáte Stehlíkovej, PhD. za nadmernú ochotu, pomoc, vecné pripomienky a rady, ktoré mi vo veľkej miere pomohli s písaním tejto práce. Tiež ďakujem svojej rodine a blízkym za ich podporu a motiváciu.

Abstrakt v štátnom jazyku

Raučina, Jakub: Prečo je to tak? [Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: RNDr. Beáta Stehlíková, PhD., Bratislava, 2016, 55 s.

Naša práca sa zaoberá nevysvetlenými, alebo nedostatočne vysvetlenými tvrdeniami napríklad z matematickej literatúry, alebo internetu. Analyzujeme ich, prípadne vyslovíme vlastné hypotézy, ktoré následne skúmame a snažíme sa dokázať. Pri týchto dôkazoch často využívame limity, alebo vedomosti z oblasti pravdepodobnosť a štatistika ako geometrická pravdepodobnosť, alebo centrálna limitná veta. Taktiež využijeme aj programovanie v prostrediach MATLAB a R, ktoré využívame na numerické operácie.

Kapitoly sú písané z pohľadu riešiteľa problému, teda pri každej prekážke je treba sa vynájsť a pokračovať v dokazovaní hypotézy, alebo tvrdenia. Cieľom tejto práce je ukázať konkrétne zaujímavé príklady a pozrieť sa na ne bližšie, teda počas skúmania nám často vzniknú nové otázky, ktoré sa taktiež snažíme zodpovedať.

Kľúčové slová: Limita, Geometrická pravdepodobnosť, Numerické integrály, Dôkaz

Abstract

Raučina, Jakub: Why is it so? [Bachelor Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: RNDr. Beáta Stehlíková, PhD., Bratislava, 2016, 55p. This thesis is focused on unexplained, or insufficiently explained statements either from the internet or popular mathematics books. We analyse these statements or utter our own hypothesis, which we then examine and try to prove or disprove them. In this process we often use limits, or our knowledge of probability and statistics, specifically geometric probability or central limit theorem. We also make use of programming environments - MATLAB and R, which we use for numerical operations.

Chapters are written from the point of the reader, so we try to solve problems as we approach them with focus on proving inquired theorems or hypothesis. The main goal in this thesis is to show some interesting problems and take a closer look at them. Often we ask more questions as we get deeper, which we once again try to answer.

Keywords: Limit, Geometric probability, Numerical integration, Proof

Obsah

Úvod	9
1 Mnohouholníky	10
1.1 Výpočet limity	14
2 Lámanie tyče	18
2.1 Štandardný výpočet	18
2.2 Alternatívny model	20
2.3 Iný bod zlomu	24
2.4 Vo všeobecnosti	27
3 Kocky	36
3.1 Skúmanie zákonitostí	36
3.2 Alternatívna centrálna limitná veta	39
4 Úloha na viazaný extrém	42
4.1 Postup stredoškolača	42
4.2 Postup vysokoškolača	44
5 Deal or no deal	47
5.1 Pravidlá hry	47
5.2 Algoritmus ponuky	48
5.3 Rozhodovanie	50
Záver	53
Zoznam použitej literatúry	54

Úvod

Matematika je často považovaná za najabstraktnejšiu a najčistejšiu z vied. Práve jej abstraktnosť, ktorá mnohých ľudí odpudzuje, je dôvodom pre ktorý sa jej mnohí venujeme. Tak, ako na mnohých ľudí pôsobí umenie napriek tomu, že nemá na prvý pohľad praktické využitie, podobné estetické vlastnosti môže mať aj matematika, hoci ich často nevidno na prvý pohľad.

Pre mňa bola matematika vždy prostriedkom, ako vidieť súvislosti a preniknúť hlbšie ako len na povrch problému. Dnes sa nezriedka stretávame s tým, že je najdôležitejšie vyriešiť danú úlohu, alebo dostať správny výsledok príkladu bez hlbšieho zamyslenia. V tejto bakalárskej práci sa pokúsime ignorovať tento trend a pozrieť sa na niekoľké tvrdenia, hypotézy či situácie. Otázka, ktorú si pritom budeme klásť nebude iba ako, ale najmä prečo je výsledok taký, aký je.

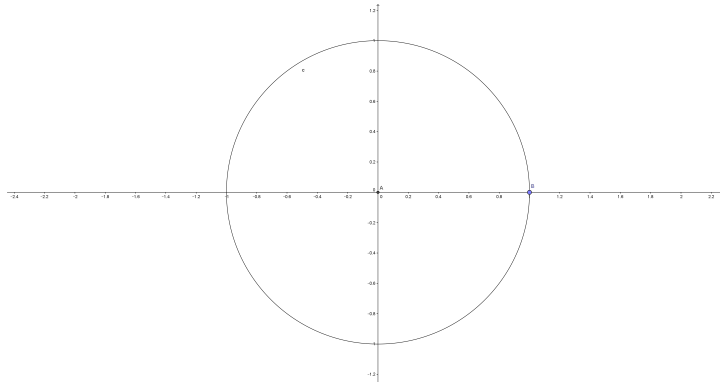
Napríklad na strane 180 v knihe [10] nájdeme tvrdenie, že polomer kružníc istej konštrukcie konverguje približne k číslu 9. Nám však takáto odpoveď nemôže stačiť. Ako môžeme autorke veriť, ak nevieme ako sa k tomu číslu dopracovala? Pomocou kostry dôkazu z [12], pričom využijeme Taylorove rady či integrálny počet ukážeme, odkiaľ pochádza tento odhad.

V inej kapitole sa pozrieme na známu televíznu súťaž, v ktorej sa súťažiaci musia často rozhodovať. Hádam každému sa aspoň raz stalo, že sledoval takýto program a hovoril si, že on by sa zachoval rozumnejšie ako uchádzač v televízii, alebo by vedel správne odpovedať na nejakú otázku. Pomocou funkcie užitočnosti hypotetického hráča Petra v hypotetickej situácii budeme sledovať, aké by bolo najracionálnejšie rozhodnutie (aj keď ľudia v tejto show sa často rozhodujú skôr na základe emócií).

Ďalej si priblížime istý postup z internetového fóra [6]. Ten, zdá sa, funguje na výpočet zadaného príkladu na geometrickú pravdepodobnosť, ale vôbec nie je zdôvodnené prečo, alebo či bude fungovať aj vo všeobecnosti. Preto sa budeme dôkladne týmto otázkam venovať, rovnako ako ako aj ďalším dvom problémom, na ktoré sme narazili. Naším cieľom bude klásť otázky a dávať odpovede takým spôsobom, aby boli oboje zrozumiteľné a zaujímavé aj pre čitateľa, ktorý sa s vysokoškolskou matematikou nestretáva každodenne. Hlavným cieľom však je, aby sa čitateľ pri týchto kapitolách zamyslel nad otázkou z názvu našej práce: Prečo je to tak?

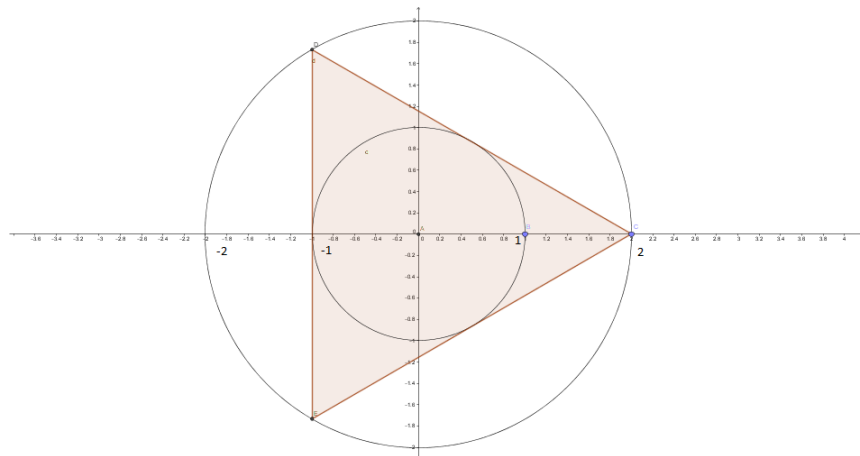
1 Mnohouholníky

V [10] sme narazili na istú geometrickú konštrukciu ¹, ktorú si priblížime v tejto kapitole. Jej náčrt bude prebiehať nasledovne. Začneme náčrtom kružnice s polomerom 1 cm.



Obr. 1: Kružnica

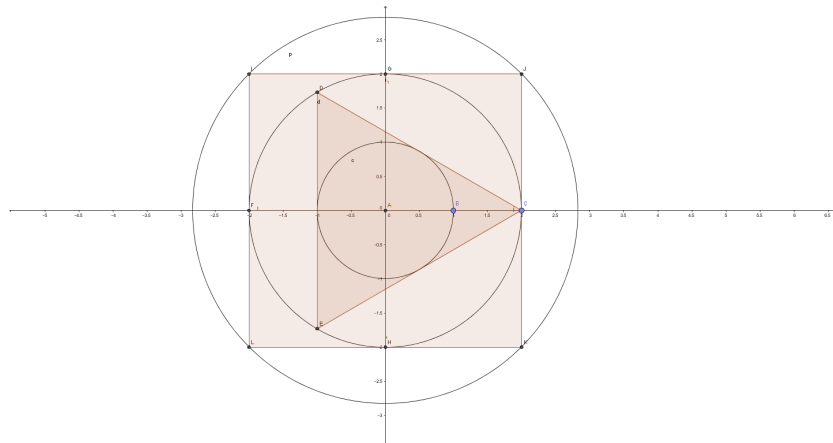
Ďalej tejto kružnici opíšeme rovnostranný trojuholník, ktorému opäť opíšeme kružnicu. Dostaneme teda útvar vyzerajúci takto:



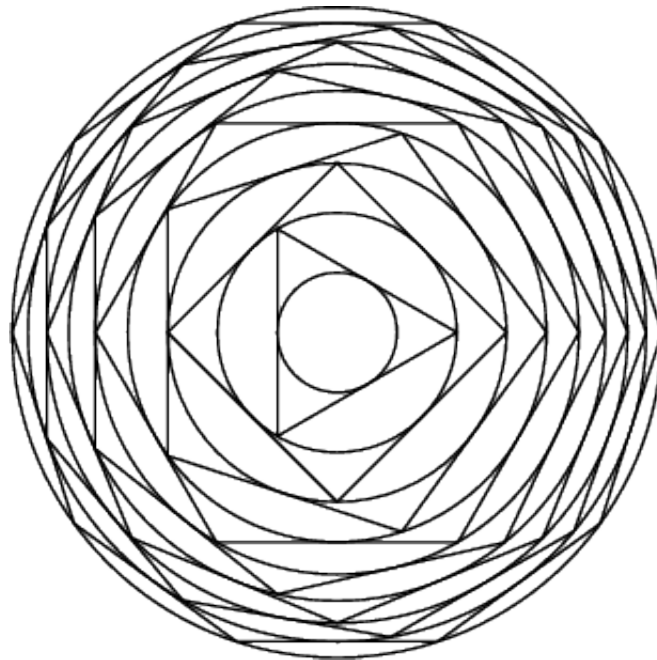
Obr. 2: $n = 3$

Nová kružnica má už polomer 2 centimetre. Teraz opíšeme našej novej kružnici štvorec, ktorému následne opíšeme kružnicu.

¹Konkrétne sa jedná o str. 180, kapitola Nekonečno a limity.

Obr. 3: pre $n = 4$

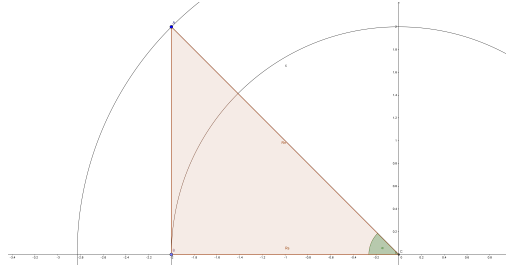
Zrejme už tušíte, čo bude nasledovať. Tejto kružnici opíšeme pravidelný päťuholník, tomu kružnicu, tej kružnici pravidelný šesťuholník atď. Naším cieľom bude sledovať ako sa vyvíjajú polomery jednotlivých kružníc. Je medzi nimi nejaký vzťah? Budú rásť neobmedzene, alebo ich dĺžka konverguje? K čomu? Nápovedou nám môže byť obrázok kde už sa týchto mnohoúhelníkov nachádza viac.

Obr. 4: Kružnice opisované n -uholníkom, tu pre $n = 10$, zdroj: [13]

O tomto útvare autorka [10] tvrdí, že postupnosť polomerov bude konvergovať k približne 9-násobku najmenšej kružnice, teda v našom prípade k 9 cm. Ďalej však neuvádza, prečo by malo toto tvrdenie byť pravdivé. Kostru odôvodnenia tohto tvrdenia

sme našli v [12].

Najprv si skúsme vyjadriť rekurzívny vzťah medzi polermi kružníc, teda ako nová opísaná kružnica závisí od starej. Na obrázku vidíme kružnice opísané trojuholníku a štvorcovi, avšak sme z nich vybrali iba body dôležité pre náš hľadaný vzťah.



Obr. 5: Rekurzívny vzťah

Tu vidíme, že $\alpha = \frac{\pi}{4}$ a vo všeobecnosti by $\alpha = \frac{\pi}{n}$, kde n je počet uhlov väčšieho mnohouholníka. teda ak R_{n-1} je starý polomer a R_n je nový polomer, zjavne platí, že $\cos(\alpha) = \frac{R_{n-1}}{R_n}$, teda po úprave dostaneme nasledovnú rovnosť:

$$R_n = \frac{R_{n-1}}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}. \quad (1)$$

pre $n \geq 3$, pričom $R_2 = 1$ (polomer kružnice vpísanej trojuholníku). Z tejto rovnice úpravou dostaneme

$$\ln(R_n) = \ln\left(\frac{R_{n-1}}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}\right)$$

z čoho vyplýva

$$\begin{aligned} \ln(R_n) &= \ln(R_{n-1}) - \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) \\ \ln(R_n) - \ln(R_{n-1}) &= -\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

Sčítame ľavú aj pravú stranu rovnice pre všetky $n \geq 3$. Vľavo teda máme

$$\ln(R_3) - \ln(R_2) + \ln(R_4) - \ln(R_3) + \ln(R_5) - \ln(R_4) + \dots + \ln(R_{n-1}) - \ln(R_{n-2}) + \ln(R_n) - \ln(R_{n-1}),$$

čo je rovné $\ln(R_n) - \ln(R_2)$, kde ale $\ln(R_2) = \ln(1) = 0$. Teda po dosadení do rovnice (1) vidíme, že

$$\ln(R_n) = \sum_{k=3}^{\infty} -\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{k}\right)\right)$$

Tu sa na chvíľu pozastavíme. Vidíme, že na ľavej strane nám úpravy splnili účel, R_n (hľadaná neznáma) je osamostatnená. Avšak na pravej strane je výraz, ktorý nedokážeme presne vypočítať. Zatiaľ ani nevieme, či tento nekonečný rad konverguje.

Najprv skúsime zodpovedať túto otázku. Pomôžeme si Taylorovým radom.² Ten vo všeobecnosti vyzerá nasledovne:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

Nás však zaujíma hodnota v k blížiacom sa do ∞ . Teda pri našej funkcii $f(x) = -\ln(\cos(\frac{\pi}{k}))$ je argumentom $\frac{\pi}{k}$, čo sa v limite rovná 0. Čiže nás zaujíma špeciálny druh Taylorovho radu, a to rad Maclaurinov, v ktorom platí, že hľadáme derivácie v bode 0. Maclaurinov rad má vo všeobecnosti predpis

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Pričom dosadíme $f(x) = -\ln(\cos(\frac{\pi}{k}))$ a $x = \frac{\pi}{k}$. Po vypočítaní prvých troch členov nám vyjde

$$-\ln(\cos(\frac{\pi}{k})) = -\ln(\cos(0)) + \tan(0)\frac{\pi}{k} + \frac{1}{2\cos^2(0)}\frac{\pi^2}{k^2} + o(\frac{\pi^3}{k^3})$$

Teda

$$-\ln(\cos(\frac{\pi}{k})) = (\frac{\pi^2}{2k^2}) + o(\frac{1}{k^3})$$

kde $k \rightarrow \infty$. Ďalej využijeme, že $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\pi^2}{2k^2}$ sa dá upraviť na $\frac{\pi^2}{2} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Jedná sa zjavne o súčet tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, ktorý konverguje pre $p > 1$, teda táto suma aj R_n budú konvergovať. Práve sme ukázali, že polomer kružníc opísaných pravidelným mnohoúhľom má nejaké horné ohraničenie. Teraz sa ho pokúsime pomocou programu R (prinajmenšom približne) nájsť.

```
n<-10000
R<-rep(0,n+1)
R[2]<-1
for (i in 3:(n+1)) {R[i]=R[i-1]/(cos(pi/(i)))}
```

Do rovnice (1) si dosadíme vysoké n a v tabuľke (2) môžeme vidieť, ako sa naše polomery vyvíjajú.

²[8], strana 56

n	R_n
1001	8.657273391
2001	8.6786126524
3001	8.6857445419
4001	8.6893140215
5001	8.6914568417
6001	8.6928858605
7001	8.6939068196
8001	8.6946726655
9001	8.6952683984
10001	8.6957450319

Tabuľka 1: Polomery pre n-uholníky

Našou snahou bude niečím dostatočne nízkym ohraničiť sumu $\sum_{k=n}^{\infty} -\ln(\cos(\frac{\pi}{k}))$. Najprv si určíme funkciu

1.1 Výpočet limity

$$y = -\ln(\cos(x)). \quad (2)$$

Potom $y' = \tan(x)$ a $y'' = \frac{1}{\cos^2(x)}$. Keďže $y'' \geq 0$ tak funkcia y je konvexná. Ďalej majme integrál

$$\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} f(x) dx,$$

pričom za $f(x)$ dosadíme prvé 3 členy taylorovho rozvoja v bode k , keďže v tomto bode zisťujeme hodnotu integrálu.

$$\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} f(x) dx = \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} f(k) + f'(k)(x-k) + \frac{f''(\phi)}{2(x-k)^2} dx$$

Čo sa po integrovaní rovná

$$\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} f(x) dx = \left[f(k)x + f'(k)\frac{(x-k)^2}{2} + f''(\phi)\frac{(x-k)^3}{6} \right]_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}$$

, kde ϕ je číslo z intervalu $\langle k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2} \rangle$, pomocou ktorého ohraničíme maximálnu chybu. Teda $\frac{\phi}{24}$ je najväčšia hodnota, o ktorú sa výpočet obdĺžnikovou metódou môže líšiť od skutočnej hodnoty integrálu na danom intervale.³

A teda

$$\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} f(x) dx = f(k) + \frac{f''(\phi)}{24}$$

pre $k - \frac{1}{2} < \phi < k + \frac{1}{2}$. Navyše tento výraz sa rovná využitiu obdĺžnikového pravidla integrálov s tzv. chybovým členom $\frac{f''(\phi)}{24}$. (Môžte si do obdĺžnikového pravidla $\int_a^b f(x) dx \approx (b-a)f(\frac{a+b}{2})$ skúsiť dosadiť $a = k - \frac{1}{2}$ a $b = k + \frac{1}{2}$).

Takže vidíme, že pre $f'' \geq 0$ je takýto integrál vyšší ako hľadaná hodnota funkcie v bode k : $f(k) \leq \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} f(x) dx$. Teda iste bude platiť

$$\sum_{k \geq n} f(k) \leq \int_{n-\frac{1}{2}}^{\infty} f(x) dx,$$

alebo konkrétne v našom prípade

$$\sum_{k \geq n} -\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{k}\right)\right) \leq \int_{n-\frac{1}{2}}^{\infty} -\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\right) dx.$$

Posledný integrál sa už dá vyčíslieť pomocou programu R na dostatočný počet desiatinných čísel. Pomôžeme si ešte substitúciou $\frac{\pi}{x} = t$, po ktorej dostaneme

$$\int_{\frac{\pi}{n-\frac{1}{2}}}^0 \ln(\cos(t)) \frac{\pi}{t^2} dt.$$

```
n<-10000
```

```
integrand<-function(t){log(cos(t))*(pi/t^2)}
```

```
integrate(integrand,lower=(pi/(n-(1/2))),upper=0)
```

Zvolíme si $n = 10000$ a dostaneme hodnotu 0.00049350494815, ktorú R vyrátalo s absolútnou hodnotou menšou ako $1.1e^{-10}$ (vidno na obrázku).

```
> integrate(integrand,lower=(pi/(n-(1/2))),upper=0)
0.00049350494815 with absolute error < 1.1e-10
```

Obr. 6: Výsledok z R, horné ohraničenie

³ $E_i \leq \frac{\Delta^3}{24} f''(\phi)$ je horné ohraničenie chyby na i -tom intervale s dĺžkou Δ , ktorá je v našom prípade $(k + \frac{1}{2}) - (k - \frac{1}{2}) = 1$

Platí pritom

$$\ln(R_n) = \sum_{k=n}^{\infty} -\ln(\cos(\frac{\pi}{k})) \leq 0.00049350494815 + 1.1e^10,$$

teda $\ln(R_\infty) < \ln(R_{10000}) \times 0.00054344487089$, z čoho už pomocou faktu, že $R_{10000} \doteq 8.695745$ (vidíme v tabuľke 1) ľahko dorátame horné ohraničenie konvergencie polomerov:

$$R_\infty < R_{10000} \times e^{0.00054344487089} = 8.7004719423.$$

Vieme teda akú hodnotu naše polomery iste neprekročia. Ak chceme však byť presní, skúsime si vyrátať aj dolné ohraničenie R_∞ , teda najskôr pre $\sum_{k=n}^{\infty} -\ln(\cos(\frac{\pi}{k}))$. K tomu si pomôžeme novým integrálovým pravidlom, a to lichobežníkovým (v prekl. trapezoidal rule). To hovorí, že

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Skúsime si dosadiť $a = k$ a $b = k + 1$. Dostaneme

$$\int_k^{k+1} f(x)dx \approx (k+1-k) \frac{f(k) + f(k+1)}{2},$$

k čomu ale nesmieme zabudnúť pričítať chybu, ktorá počítaním touto metódou vznikne. Táto chyba sa rovná $-\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$,⁴ kde $a < \xi < b$. V našom prípade sa bude tento chybový člen rovnáť $-\frac{1}{12} f''(\xi)$, čo nám po spojení s prvou časťou dáva

$$\int_k^{k+1} f(x)dx = \frac{f(k)}{2} + \frac{f(k+1)}{2} - \frac{1}{12} f''(\xi),$$

pre $a < \xi < b$. Pre $f'' \geq 0$ platí, že integrál je menší ako tie dva (nechybové) členy vpravo. Z toho nám vyplýva

$$\sum_{k \geq n} f(k) \geq \int_n^{\infty} f(x)dx + \frac{1}{2} f(n).$$

Opätovne dosadíme $f(x) = \sum_{k=n}^{\infty} -\ln(\cos(\frac{\pi}{k}))$ a pravú stranu nerovnosti (opäť pre $n=10000$) vyčíslime v Rku. Substitúcia $t = \frac{\pi}{x}$ nám dá tentoraz integrál

$$\int_{\frac{\pi}{n-\frac{1}{2}}}^0 \ln(\cos(t)) \frac{\pi}{t^2} + \frac{1}{2} \ln(\cos(\frac{\pi}{n})).$$

⁴blížšie popísané v [2, 1], strany 512 - 523


```
integrand2<-function(t){log(cos(t))*(pi/t^2)+1/2*log(cos(pi/n))}
integrate(integrand2,lower=(pi/(n)),upper=0)
```

```
> integrate(integrand2,lower=(pi/(n)),upper=0)
0.00049348039079 with absolute error < 3.5e-10
```

Obr. 7: Výsledok z R, dolné ohraničenie

Vznikne nám

$$\sum_{k=n}^{\infty} -\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{k}\right)\right) \geq 0.00049348039079 - 3.5e^{-10}.$$

Keďže sa jedná o spodné ohraničenie, tentokrát nám platí nerovnosť $\ln(R_{\infty}) > \ln(R_{10000}) + 0.00033458063653$

Po jednoduchej úprave dostaneme

$$R_{\infty} > R_{10000} e^{0.00033458063653} = 8.6986549147.$$

Po spleťtých výpočtoch sme sa teda dostali k dostatočne presnému výsledku, keďže spojením horného a dolného ohraničenia konvergence našich polomerov kružníc opísaných pravidelným mnohoúhľomníkom (alebo skrátene R_{∞}) dostaneme

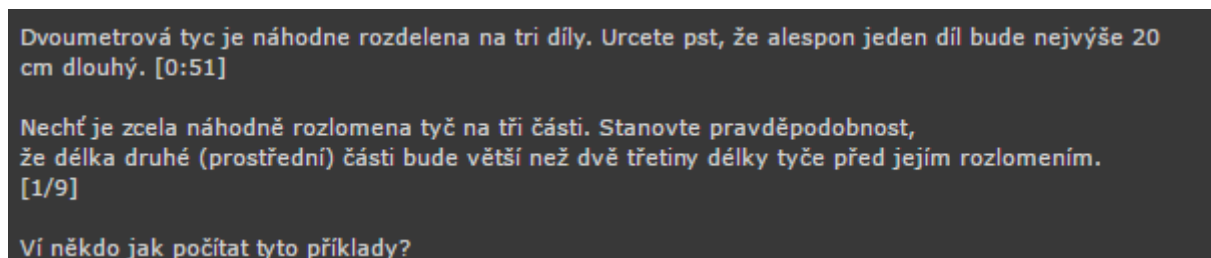
$$8.6986549147 \leq R_{\infty} \leq 8.7004719423.$$

Teda môžeme s určitou presnosťou povedať, že veľkosť týchto polomerov sa bude limitne blížiť k hodnote z intervalu $(8.6986549147, 8.7004719423)$.

2 Lámanie tyče

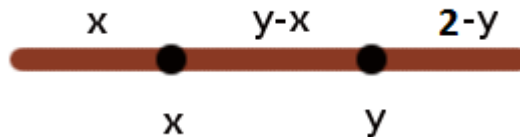
2.1 Štandardný výpočet

Na internete sa často stretne s klamlivými alebo zavádzajúcimi tvrdeniami. To, že by sme mali overovať informácie, ktoré sú nám podsúvané ako fakty, platí na internete dvojnásobne. Obzvlášť na fórach, kde sa môže vyjadriť každý anonymne, je dôležité kontrolovať, či to čo čítame je pravda, alebo sa jedná o mylné domnienky. Na jednom z takýchto fór [6] sme našli zadanie takýchto dvoch príkladov:



Obr. 8: Zadanie

Schematicky teda naše lámanie dvojmetrovej tyče vyzerá zhruba takto:



Obr. 9: Tyč

V prvom príklade teda hľadáme pravdepodobnosť, že jedna z troch dĺžok x , $y - x$, $2 - y$ bude menšia ako 0.2, pričom v riešenie by malo byť 0.51 (uvedené v hranatej zátvorke). V druhom príklade sa pozrieme na pravdepodobnosť toho, že prostredná časť ($y - x$) je väčšia ako $\frac{2}{3}$ dĺžky pôvodnej tyče (tu by mal byť výsledok $\frac{1}{9}$). Najskôr sa na oba tieto príklady pozrieme cez klasický model geometrickej pravdepodobnosti s rovnomerným rozdelením bodov, aby sme overili výsledky zo zátvoriek. Je zjavné, že x, y , ako aj ich súčet musia byť väčšie ako 0 (záporná dĺžka neexistuje) a menšie ako 2 (dĺžka pôvodnej tyče). Podľa prvého zadania a nášho obrázku hneď vidíme nerovnice, ktoré budeme skúmať. Je zrejmé, že hľadáme pravdepodobnosť toho, že aspoň jedna z troch častí je menšia ako 0.2. Nerovnice vyzerajú nasledovne:

$$\mathbf{A: } 0.2 \geq x$$

$$\mathbf{B: } 0.2 \geq y - x \implies y \leq x + 0.2$$

$$\mathbf{C: } 0.2 \leq 2 - y \implies y \geq 1.8$$

Ďalej budeme postupovať zakreslením si tejto situácie a riešením pomocou geometrickej pravdepodobnosti. Keďže si chceme uľahčiť výpočty a nákres, použijeme doplnkový jav k týmto nerovniciam. Vieme, že $P(A) = 1 - P(A^c)$ a teda

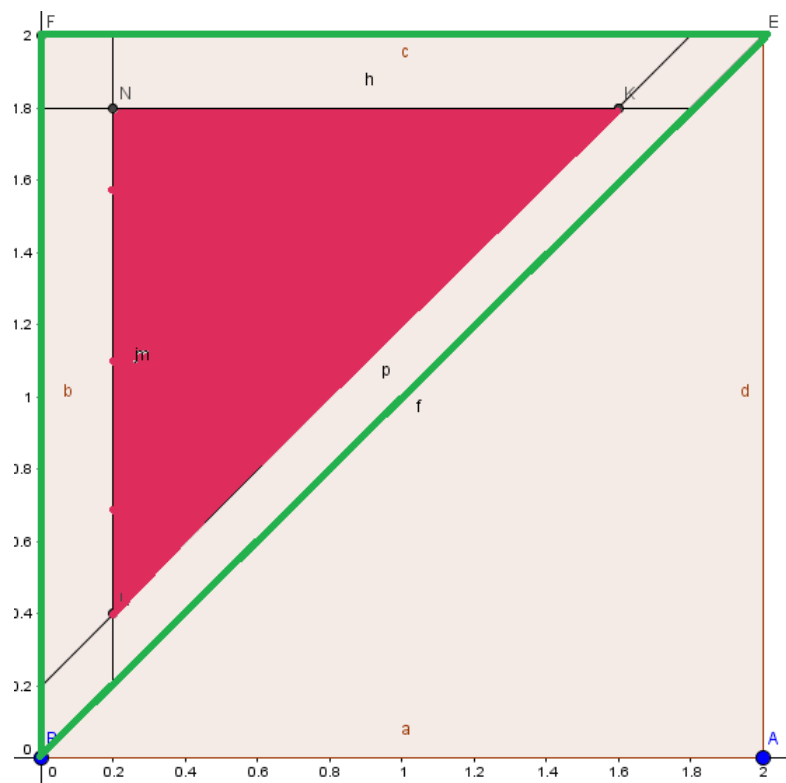
$$P(A \cup B \cup C) = 1 - P(A^c \cap B^c \cap C^c),$$

pričom naše doplnkové nerovnice sú:

$$A^c: 0.2 < x$$

$$B^c: x + 0.2 < y$$

$$C^c: 1.8 < y$$

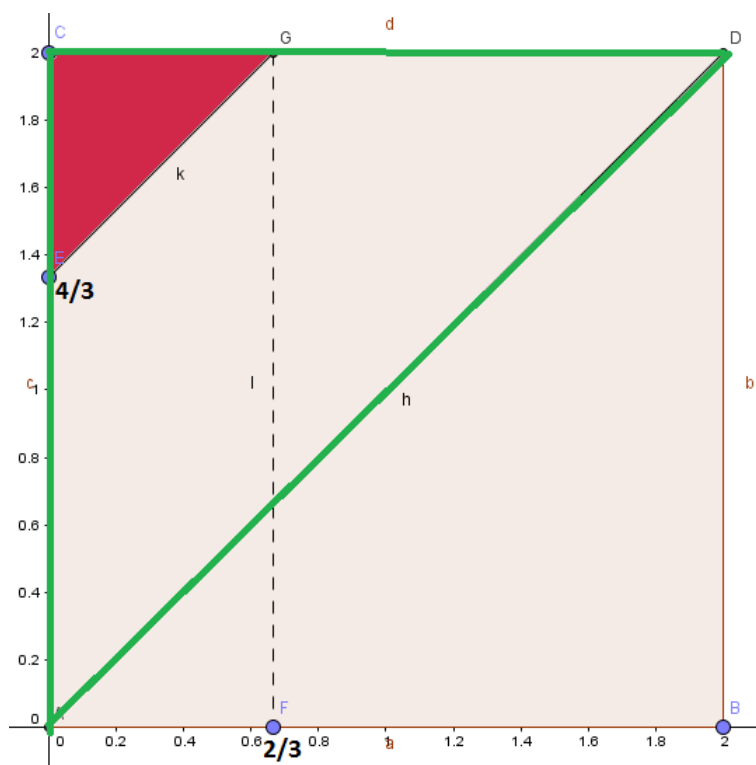


Obr. 10: Nákres prvej úlohy

V obrázku je riešením vnútorný vyfarbený trojuholník, ktorý je prienikom troch podrovín, respektíve nerovniíc vyššie (množina vyhovujúcich riešení), deleno veľký zelený trojuholník (množina všetkých riešení). Z grafu vidíme, že pôjde o jednoduchý výpočet $\frac{(1.6-0.2) \times (1.8-0.4)/2}{4/2}$, teda $\frac{1.4^2}{4} = 0.49$. Toto je pravdepodobnosť doplnkového javu, čiže riešením pôvodného zadania bude

$$1 - P(A^c \cap B^c \cap C^c) = 1 - 0.49 = 0.51.$$

V druhom príklade máme rovnakú množinu všetkých riešení, ale tentokrát nám na vhodné riešenia bude stačiť jediná nerovnica, a to $y - x > 2 \times \frac{2}{3}$, teda $y > x + \frac{4}{3}$. Teda po nákrese budeme mať:



Obr. 11: Nákras druhej úlohy

Opäť červeno vyfarbenú plochu delíme zelenou, teda $\frac{(2/3) \times (2/3)/2}{4/2} = \frac{1}{9}$, čiže môžeme skonštatovať, že oba výsledky nám vyšli tak, ako to uviedol zadávateľ.

2.2 Alternatívny model

Ak sa však začneme pozerať na riešenia, ktoré poskytovali ostatní návštevníci tohto fóra [6], všimneme si jedno od používateľa s prezývkou „Kondr“, ktorý navrhuje iné

riešenie:

Kondr ♂

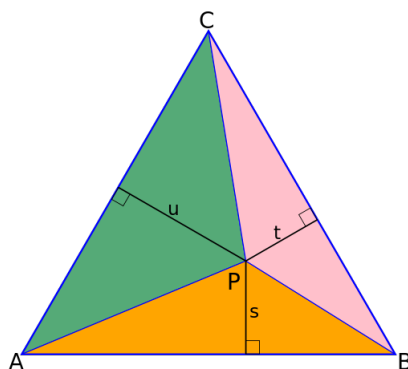
Nabídnul bych jiný geometrický model: je známo (čti nechce se mi dokazovat), že když zvolím bod uvnitř rovnostranného trojúhelníku, součet jeho vzdáleností od stran je roven jeho výšce. Každé rozlámání odpovídá jednomu bodu v trojúhelníku. Hledaná pravděpodobnost je tedy (vyhovující plocha)/(plocha trojúhelníka).

1) sestrojíme rs trojúhelník o výšce 2m, uděláme rovnoběžky se stranami ve vzdálenosti 20cm. Ty nám trojúhelník rozdělí na menší trojúhelník a pás okolo. Vyhovující plocha je ten pás okolo

2) Zde stačí rovnoběžka se základnou ve $2/3$ výšky, vyhovující plocha je ten trojúhelník, který uřízne.

Obr. 12: Alternatívne riešenie

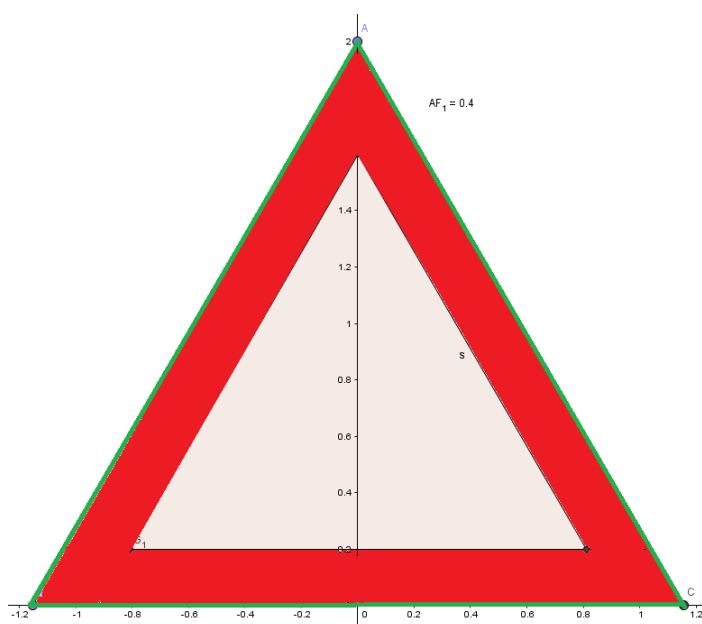
Bližšie sa pozrieme na tento model, či dáva správne riešenie a či je korektný, teda ako pozerá na delenie tyče. Najskôr však začneme s tvrdením, ktoré sa Kondr-ovi nechcelo dokazovať, teda že súčet vzdialeností každého bodu v rovnostrannom trojuholníku je rovný jeho výške. Toto tvrdenie sa nazýva Vivianiho veta (viac nájdeme na [5]) a najlepšie sa dokáže pomocou tohto obrázku:



Obr. 13: Vivianiho veta, zdroj: [5]

Vidíme, že súčet malých trojuholníkov so vzdialenosťami od strán (resp. výškami) u, s, t sa rovná obsahu rovnostranného trojuholníka ABC s dĺžkou strany a . Teda $\frac{u \times a}{2} + \frac{s \times a}{2} + \frac{t \times a}{2} = \frac{a \times v_a}{2}$, čo nám po jednoduchom vyňatí pred zátvorku skutočne dá $u + s + t = v_a$. Vivianiho veta je dôležitá najmä preto, že je na nej založený celý tento geometrický model. Totiž keď si nakreslíme rovnostranný trojuholník s výškou dĺžky 2 metre, každý bod vnútri neho bude mať tri vzdialenosti od troch rôznych strán, ktorých súčet je 2 m. Tieto vzdialenosti reprezentujú 3 časti tyče po rozdelení, teda každý bod tohto trojuholníka je jedinečné rozdelenie tyče. Skúsme sa teraz pozrieť ako v tomto

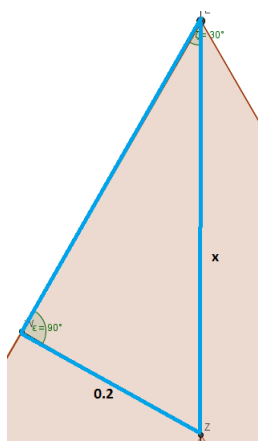
modeli budú vyzeráť navrhnuté riešenia. V prvom príklade je navrhnuté riešiť tento problém pomocou narysovania rovnobežiek vo vzdialenosti 20 cm, čím nám vznikne menší rovnostranný trojuholník a pás okolo. Každý z bodov vnútri tohto trojuholníka bude mať všetky 3 vzdialenosti (tyče po delení) väčšie ako 0.2 metra, čiže riešením úlohy bude (Obsah pásu okolo/Obsah pôvodného trojuholníku). Pre väčšiu prehľadnosť sa pozrieme na náčrt:



Obr. 14: Prvá úloha, alternatívny model

V ňom máme opäť zvýraznenú množinu všetkých riešení zelenou farbou a množina vhodných riešení je vyplnená červenou. Znovu využijeme vlastnosť doplnkových javov, a teda pre hľadajú pravdepodobnosť bude platiť $P = 1 - \frac{S_{\Delta m}}{S_{\Delta v}}$, pričom $S_{\Delta m}$ je obsah vnútorného (menšieho) trojuholníka a $S_{\Delta v}$ obsah vonkajšieho (väčšieho). Zároveň, keďže sa jedná o podobné trojuholníky tak platí, že pomer ich obsahov sa rovná pomeru ich výšok umocnenému na druhú⁵. Aby sme vedeli určiť výšku vnútorného trojuholníka, potrebujeme zistiť vzájomnú vzdialenosť vrcholov väčšieho a menšieho trojuholníka. Pri jej výpočte si pomôžeme obrázkom a sínusovou vetou.

⁵V podobných trojuholníkoch ABC a A'B'C' sú príslušné pomery dĺžok vždy rovnaké. Teda existuje koeficient k, pre ktorý platí: $k = \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{v_a}{v_{a'}}$. Potom bude platiť $\frac{S(A'B'C')}{S(ABC)} = \frac{a' * k * v_{a'} * k}{a * v_a} * \frac{2}{2} = k^2 = \left(\frac{v_{a'}}{v_a}\right)^2$.



Obr. 15: Výpočet vzdialenosti horných vrcholov

Tu vidíme, že hľadáme hodnotu prepony x , pričom oproti strane dĺžky 0.2 je uhol 30° (výška v pravouhlom trojuholníku delí uhol pri vrchole na polovicu), čiže

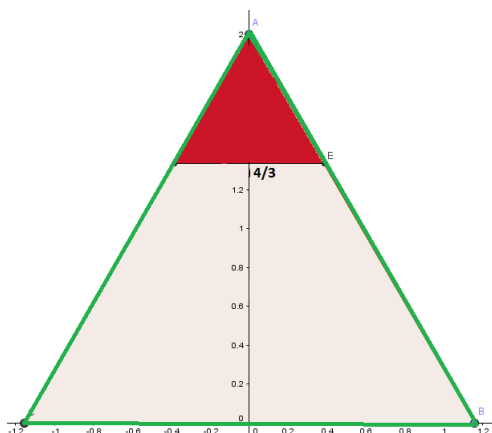
$$\frac{x}{\sin(90^\circ)} = \frac{0.2}{\sin(30^\circ)} \Rightarrow x = 0.4.$$

Potom výška vnútorného trojuholníka bude $v_m = 2 - 0.2 - 0.4 = 1.4$, teda

$$P = 1 - \frac{S_{\Delta m}}{S_{\Delta v}} = 1 - \frac{1.4^2}{2^2} = 1 - \frac{1.96}{4} = 1 - 0.49 = 0.51,$$

čo je rovnaký výsledok k akému sme sa dopracovali použitím prvého modelu.

K druhému príkladu si pomôžeme opäť rovnobežkou, tentokrát však ohraničujeme iba dĺžku prostrednej časti tyče. Pretože chceme zistiť pravdepodobnosť toho, že je väčšia ako $\frac{2}{3}$ dĺžky pôvodnej tyče (teda $\frac{4}{3}$ m v našom prípade), máme takúto situáciu:



Obr. 16: Druhá úloha, alternatívny model

Aj tentokrát využijeme podobnosť trojuholníkov a ľahko zrátame, že

$$P = \frac{S_{\Delta m}}{S_{\Delta v}} = \frac{v_m^2}{v_v^2} = \frac{(2/3)^2}{2^2} = \frac{4}{9} * \frac{1}{4} = \frac{1}{9}.$$

Teda môžeme skonštatovať, že aj druhý výsledok nám vyšiel touto metódou správne. Tento neštandardný geometrický model, založený na funkčnosti Vivianiho vety, sa doteraz ukázal ako funkčný. Ak sa však pozorne pozrieme na zadanie úlohy, všimneme si, že v ňom nemáme špecifikované **ako** túto tyč delíme. Zatiaľ sme uvažovali iba najjednoduchší spôsob lámania tyče, a síce že dva body zlomu volíme nezávisle.

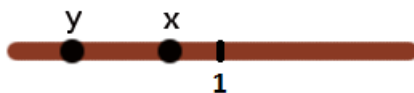
2.3 Iný bod zlomu

Čo ak by sme však mali iný model? Povedzme, že by sme najprv zlomili tyč v náhodne zvolenom bode a potom by sme vzali **kratšiu** časť a zlomili ju, opäť v náhodnom bode. Teda tyč o dĺžke 2m zlomíme v náhodnom bode x . Dostaneme 2 tyče:



Obr. 17: Postupné lámanie tyčí

V tomto kroku sa musíme pozrieť na dva rôzne prípady. Ak bude pre bod zlomu platiť $x < 2 - x$, resp. $x < 1$, tak budeme lámať tyč o dĺžke x . V opačnom prípade, ak $x > 2 - x$, resp. $x > 1$, zlomíme tyč s dĺžkou $2 - x$. Na tento príklad použijeme klasický model geometrickej pravdepodobnosti zo začiatku tejto kapitoly. Najprv teda začnime s prvým príkladom, čiže $x < 1$.



Obr. 18: Postupné lámanie tyčí: prvý prípad

Naše 3 tyče po rozdelení teda budú mať dĺžky y , $x - y$ a $2 - x$. Opäť budeme hľadať pravdepodobnosť P , že aspoň jedna z nich je kratšia ako 20 cm. Teda

$$P[(y < 0.2) \vee (x - y < 0.2) \vee (2 - x < 0.2)] = 1 - P[(y \geq 0.2) \wedge (x - y \geq 0.2) \wedge (2 - x \geq 0.2)],$$

čo je doplnkový jav, ktorým si pomôžeme pri výpočte. Naše nerovnice po úpravách teda vyzerajú nasledovne:

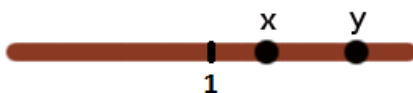
$$y \geq 0.2,$$

$$y \geq x - 0.2,$$

$$x \leq 1.8.$$

Tieto nerovnice platia len za predpokladu $x < 1$ a $y \leq x$ (keďže zo zadania vyplýva, že bod y je vľavo od x) keďže to je podmienka celej vetvy.

Rozdelenie tyče pre druhú vetvu, v ktorej platí $x > 1$, bude vyzerat' nasledovne:



Obr. 19: Postupné lámanie tyčí: druhý prípad

V tomto prípade máme strany dĺžok x , $y - x$ a $2 - y$, pričom pravdepodobnosť rátame analogicky

$$P[(x < 0.2) \vee (y - x < 0.2) \vee (2 - y < 0.2)] = 1 - P[(x \geq 0.2) \wedge (y - x \geq 0.2) \wedge (2 - y \geq 0.2)].$$

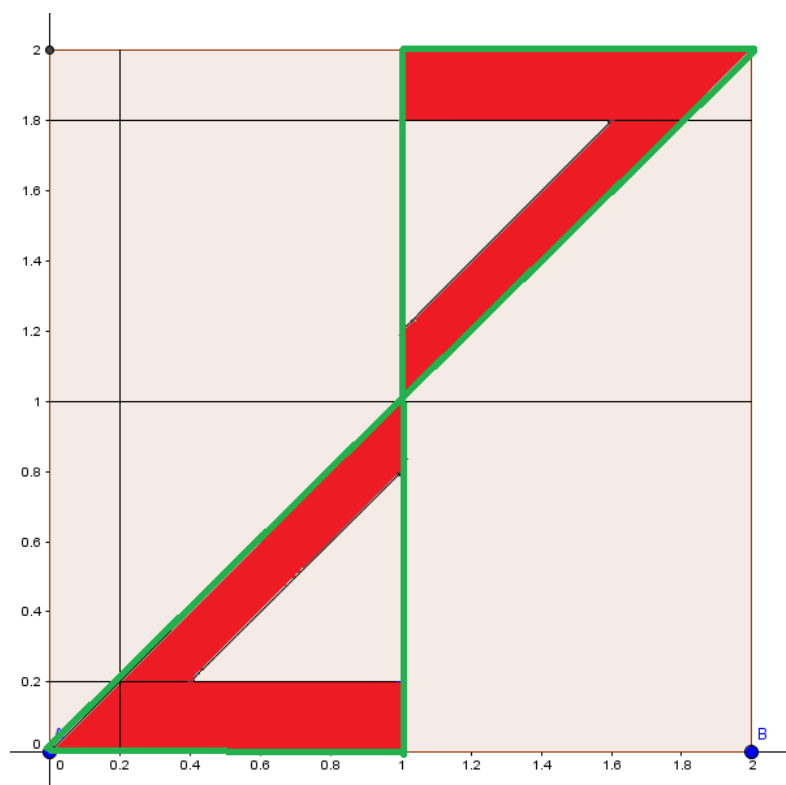
Príslušné nerovnice za podmienky $x > 1$ a $y \geq x$ majú po úprave tvar

$$y \leq 1.8,$$

$$y \geq x + 0.2,$$

$$x \geq 1.8.$$

Ak si obe tieto vetvy zakreslíme do obrázku vznikne nám:



Obr. 20: Postupné lámanie tyčí - nákres

Hľadanou pravdepodobnosťou P teda bude pomer obsahu vhodných riešení vyplnených červenou farbou a obsahu všetkých možných riešení označených zelenou farbou vyplývajúcich z podmienok pre naše dve vetvy. Obsah hľadaného červeného pásu najjednoduchšie dostaneme ako $S_{ps} = S_V - S_m$, kde S_V je obsah vonkajšieho trojuholníka a S_m obsah malého vnútorného trojuholníka.

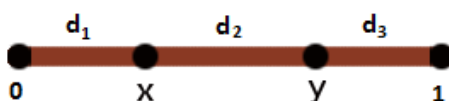
$$P = 1 - \frac{2}{2} * \frac{S_m}{S_V} = 1 - \frac{0.6^2/2}{1^2/2} = 1 - \frac{0.18}{1/2} = 1 - 0.36 = 0.64,$$

čiže oproti pôvodnému modelu sa nám šanca na také rozlomenie tyče, aby aspoň 1 z úlomkov bol kratší ako 20 cm, zvýšila.

Ak by sme sa však na tento model chceli pozrieť druhým modelom, ktorý navrhol KONDR, narazili by sme na problém. Keďže ten model je založený na rovnostrannom trojuholníku, nie je jasné, či by sa dal adaptovať na takéto zadanie. Zdá sa ale, že dáva správne výsledky pri delení tyče dvoma nezávislými bodmi, ktoré sú na nej rovnomerne zvolené. Poďme sa pozrieť, či sa toto tvrdenie dá dokázať vo všeobecnosti.

2.4 Vo všeobecnosti

Z toho, že výsledky v časti [2.1] vyšli rovnako oboma postupmi sa zdá, že by tieto dva modely mohli dať rovnaké výsledky pre akúkoľvek pravdepodobnosť, v ktorej sú body delenia tyče vyberané rovnomerne. Pre jednoduchosť si určíme novú tyč s dĺžkou 1, ktorú v bodoch x, y rozdelíme na 3 časti podobne ako predtým. Vzniknuté dĺžky tyčí si označíme d_1 , d_2 a d_3 . Táto situácia bude teda vyzeráť takto:



Obr. 21: Všeobecný výpočet pre $y > x$

Resp. takto:



Obr. 22: Všeobecný výpočet pre $y < x$

Môžeme si všimnúť, že pre určené x, y zistíme d_1 a d_2 , pričom d_3 už bude len premená závislá na prvých dvoch, keďže $d_3 = 1 - d_1 - d_2$. Teda na určenie konkrétneho rozdelenia nám stačia d_1 a d_2 . Zároveň chceme tieto dĺžky popísať tak, aby d_1 a d_2 mali rovnaký predpis pre oba prípady v obrázkoch vyššie. Zjavne teda budú platiť vzťahy

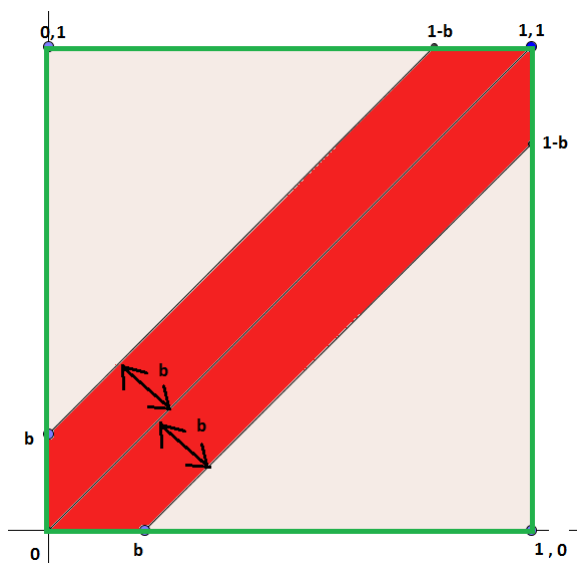
$$d_1 = \min(x, y),$$

$$d_2 = |x - y|.$$

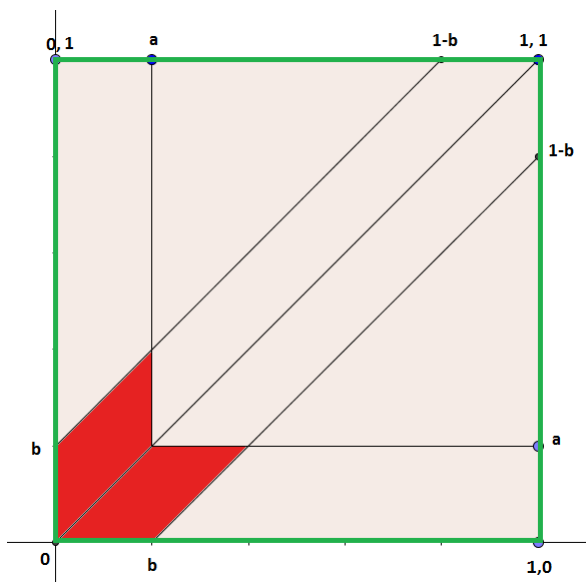
Pravdepodobnosť konkrétnych zadaní bude závisieť od distribučnej funkcie týchto dĺžok, resp. vektora (d_1, d_2) . Teda budeme skúmať, ako sa distribučná funkcia

$$F(a, b) = P(d_1 < a, d_2 < b)$$

vyvíja pre rôzne a, b . Ako prvý budeme riešiť prípad, $a, b \in (0, 1)$. Najprv si nakreslíme oblasť podmienky $d_2 < b$, teda $|x - y| < b$ v štandardnom modeli geometrickej pravdepodobnosti:

Obr. 23: Podmienka $d_2 < b$

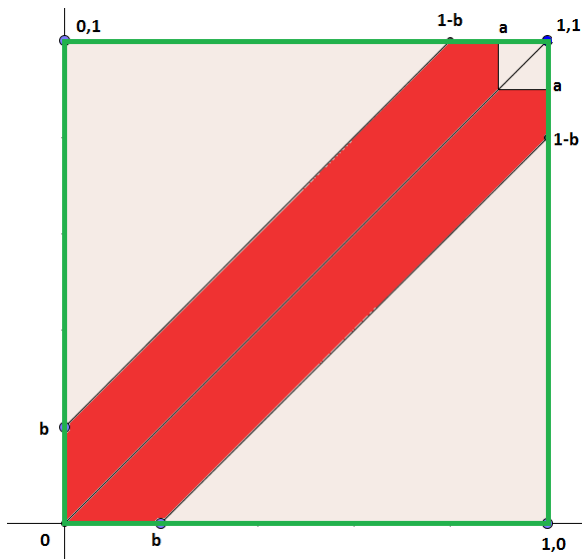
Potom k tomuto obrázku pridáme aj podmienku pre d_1 , teda $d_1 = \min(x, y) < a$, keďže tieto podmienky majú platiť súčasne. Pri nákrese druhého obmedzenia si všimneme, že existujú dva útvary, ktoré nám môžu vzniknúť.

Obr. 24: Podmienky $d_2 < b$ a $d_1 < a$, prípad A

Zjavne tvar zvýrazneného útvaru závisí od vzájomného vzťahu a, b . Konkrétnejšie o vzťah medzi a a $1-b$. Pre jednoduchosť nám stačí rátať obsah hornej časti, keďže útvary sú symetrické (podľa priamky $y = x$). V prípade A ($a < 1-b$) to bude rovnobežník s dĺžkou základne b a výškou a , čiže s obsahom ab . Pravdepodobnosť tohto rozdelenia

bude

$$P = \frac{ab}{1/2} = 2ab$$



Obr. 25: Podmienky $d_2 < b$ a $d_1 < a$, prípad B

V prípade B ($a > 1 - b$) sa obsah ráta trochu zložitejšie. Konkrétne od veľkého trojuholníka s obsahom $\frac{1}{2}$ odrátame dva menšie trojuholníky s obsahmi $\frac{(1-b)^2}{2}$ a $\frac{(1-a)^2}{2}$. Dostávame teda

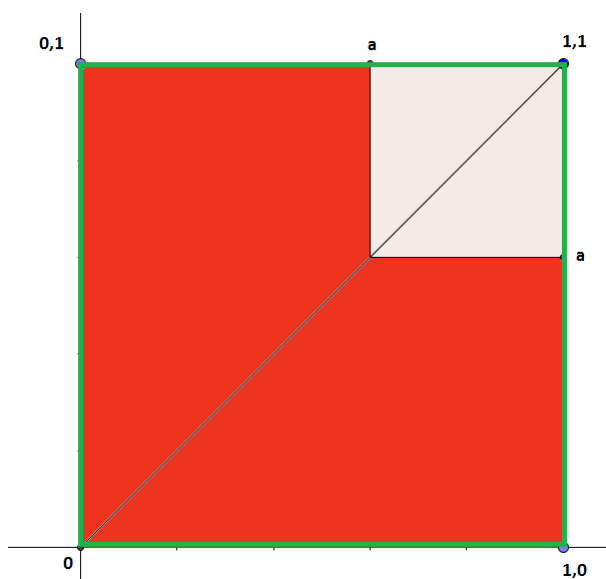
$$S = \frac{1}{2} - \frac{1 - 2b + b^2}{2} - \frac{1 - 2a + a^2}{2} = \frac{2a + 2b - a^2 - b^2 - 1}{2},$$

potom pravdepodobnosť skúmanej udalosti bude⁶

$$P = \frac{2a + 2b - a^2 - b^2 - 1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2a + 2b - a^2 - b^2 - 1.$$

Ďalej sa pozrieme na prípad, keď $a \in (0, 1)$, ale $b > 1$. Je zjavné, že v takomto prípade bude pás určujúci podmienku pre d_2 hrubý, a teda naše riešenia vôbec neobmedzí.

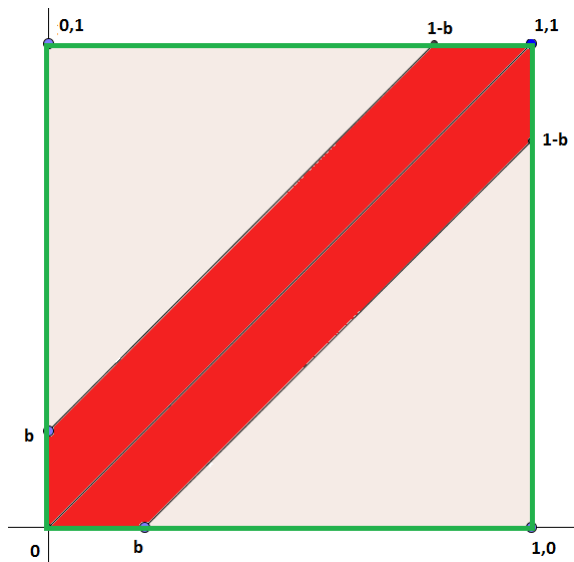
⁶Tiež sa dá ukázať, že pre $a = 1 - b$ sa pravdepodobnosti vypočítané v oboch prípadoch rovnajú.



Obr. 26: Podmienky $d_2 < b$ a $d_1 < a$ pre $a \in (0, 1)$, $b > 1$

Zjavne distribučná funkcia, teda pomer obsahov bude $F(a, b) = P(d_1 < a) = \frac{1-(1-a)^2}{1} = 2a - a^2$.

V opačnom prípade, teda ak $b \in (0, 1)$ a $a > 1$ budeme počítať iba obsah pásu.



Obr. 27: Podmienky $d_2 < b$ a $d_1 < a$ pre $b \in (0, 1)$, $a > 1$

Distribučná funkcia $F(a, b) = P(d_2 < b) = \frac{1-(1-b)^2}{2} * \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2b - b^2$. Posledné prípady, na ktoré sme sa nepozreli sú $a < 0 \vee b < 0$, kde platí $F(a, b) = 0$, a $a > 1 \wedge b > 1$, pri ktorom platí $F(a, b) = 1$. V prvom z týchto prípadov neexistuje d_1 , alebo d_2 , ktoré by spĺňali obmedzenia $d_1 < a$, resp. $d_2 < b$. V druhom je zrejmé, že riešením bude celý

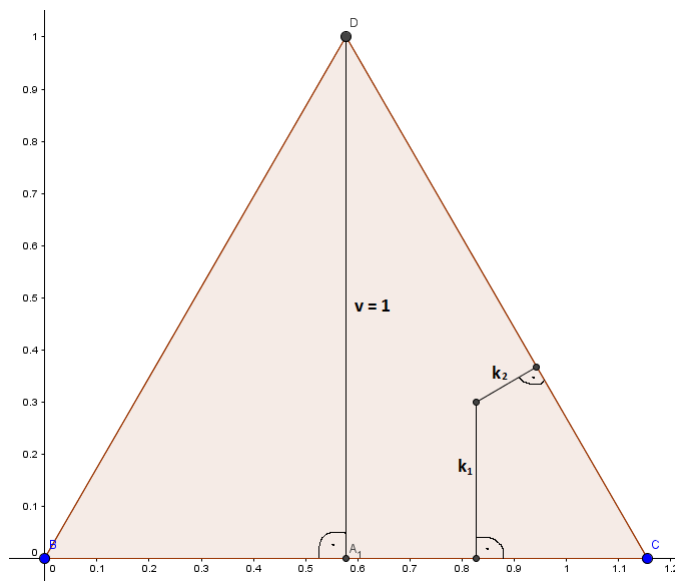
štvorec. Distribučná funkcia vektora (d_1, d_2) v bodoch a, b teda bude mať predpis:

$$F(a, b) = \begin{cases} 0, & \text{pre } a \leq 0 \vee b \leq 0, \\ 2ab, & \text{pre } a \in (0, 1) \wedge b \in (0, 1), \text{ pričom } a < 1 - b, \\ 2a + 2b - a^2 - b^2 - 1, & \text{pre } a \in (0, 1) \wedge b \in (0, 1), \text{ pričom } a \geq 1 - b, \\ 2a - a^2, & \text{pre } a \in (0, 1) \wedge b \geq 1, \\ 2b - b^2, & \text{pre } a \geq 1 \wedge b \in (0, 1), \\ 1, & \text{pre } a \geq 1 \wedge b \geq 1. \end{cases}$$

Teraz sa pozrieme na Kondrov model tiež vo všeobecnosti. Ak je naša hypotéza správna, a teda tieto dva postupy dávajú rovnaký výsledok, tak by mala existovať distribučná funkcia $G(a, b)$ pre k_1 a k_2 , čo sú dĺžky tyčí v Kondrovom modeli, pre ktorú bude musieť platiť

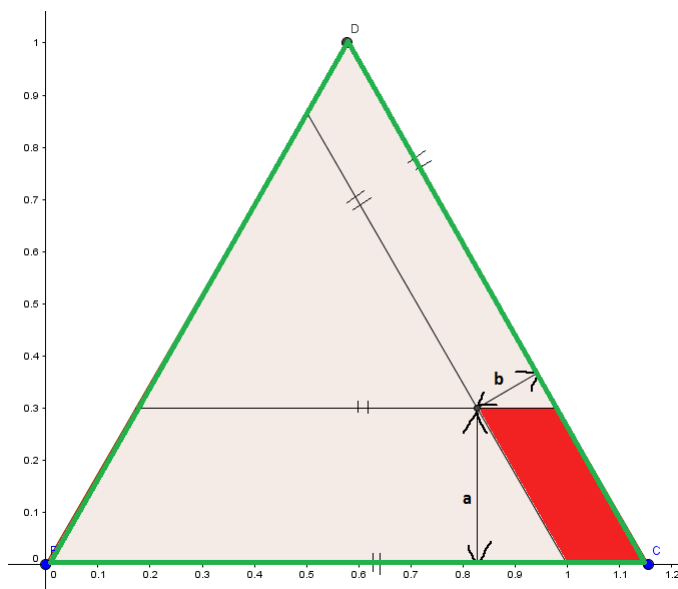
$$G(a, b) = P(k_1 < a, k_2 < b) = P(d_1 < a, d_2 < b) = F(a, b). \quad (3)$$

Spomenieme si, že v tomto modeli sú dĺžky tyčí reprezentované vzdialenosťami od strán rovnostranného trojuholníka, teda k_1 bude vzdialenosť od jednej strany, k_2 od druhej a k_3 od tretej. Opäť si však vystačíme s dvoma údajmi, keďže tretí bude už jednoznačne určený a teda nepotrebný. Bod zakreslený do tohto modelu bude vyzeráť takto:



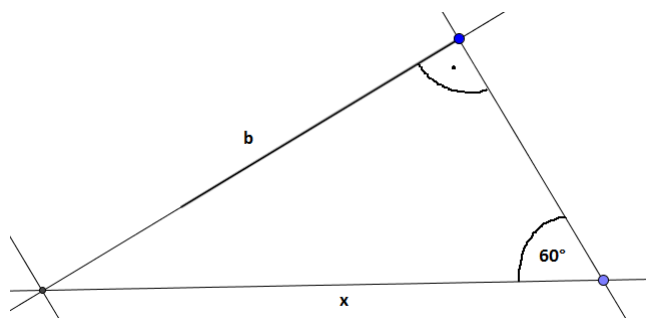
Obr. 28: Jedno rozdelenie tyče s dĺžkou 1 meter

Opäť skúmame pravdepodobnosť $P(k_1 < a, k_2 < b)$ pre $a, b \in (0, 1)$, pri čom si pomôžeme obsahmi. Opäť nám v tejto vetve môžu vyjsť dva rôzne útvary v závislosti od toho, kde sa rovnobežky určujúce množinu vyhovujúcich riešení pretnú. Tieto rovnobežky určujú maximálnu vzdialenosť od jednotlivých strán.



Obr. 29: Prípado A - Rovnobežky sa pretnú vnútri trojuholníka

V tomto prípade vidíme, že vyhovujúca oblasť bude rovnobežník. Jeho výška bude a , ale jeho stranu musíme vyjadriť v závislosti od b . V tom nám pomôže nasledovné priblíženie.

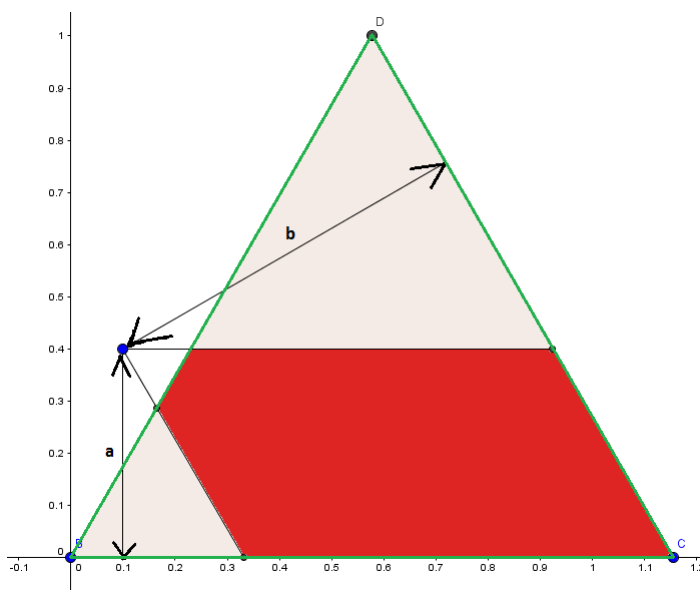


Obr. 30: Prípado A - Výpočet základne rovnobežníka

Uhol je súhlasný s uhlom v rovnostrannom trojuholníku, takže vieme, že je 60° . Hľadáme základňu x , jej dĺžku určíme pomocou sínusu, keďže $\sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{b}{x}$, čiže $x = \frac{2}{\sqrt{3}}b$. Obsah rovnobežníka sa teda rovná $S_A = \frac{2}{\sqrt{3}}ab$. Aby sme mohli vypočítať

príslušnú pravdepodobnosť, potrebujeme ešte obsah celého trojuholníka, na čo potrebujeme jeho stranu t . Tu si opäť pomôžeme sínusom a výškou trojuholníka, keďže obe poznáme. $\sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{v_\Delta}{t}$, pričom $v_\Delta = 1$, teda $t = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Z toho ľahko dorátame obsah $S_\Delta = \frac{1 \times \frac{2}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Pravdepodobnosť v tomto prípade A teda bude

$$P_A = \frac{S_A}{S_\Delta} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}ab}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 2ab.$$



Obr. 31: Prípade B - Rovnobežky sa pretnú mimo trojuholníka

V tomto prípade si miesto počítania červenej plochy pomôžeme doplnkovými javmi, čiže obsahmi menších trojuholníkov. Vďaka rovnobežnosti a súhlasným uhlom vidíme, že sú rovnostranné, resp. podobné s veľkým trojuholníkom. V prvej časti sme si ukázali, že na výpočet obsahu podobného trojuholníku nám stačí vedieť obsah pôvodného a pomer ich výšok, ktorý umocníme na druhú. Keďže výška veľkého trojuholníka je 1, výšky malých zjavne budú $v_1 = 1 - a$ a $v_2 = 1 - b$. Potom ich obsahy sú $S_1 = \frac{(1-a)^2}{1} \frac{1}{\sqrt{3}}$ a $S_2 = \frac{(1-b)^2}{1} \frac{1}{\sqrt{3}}$. Z toho vypočítame obsah červenej plochy ako

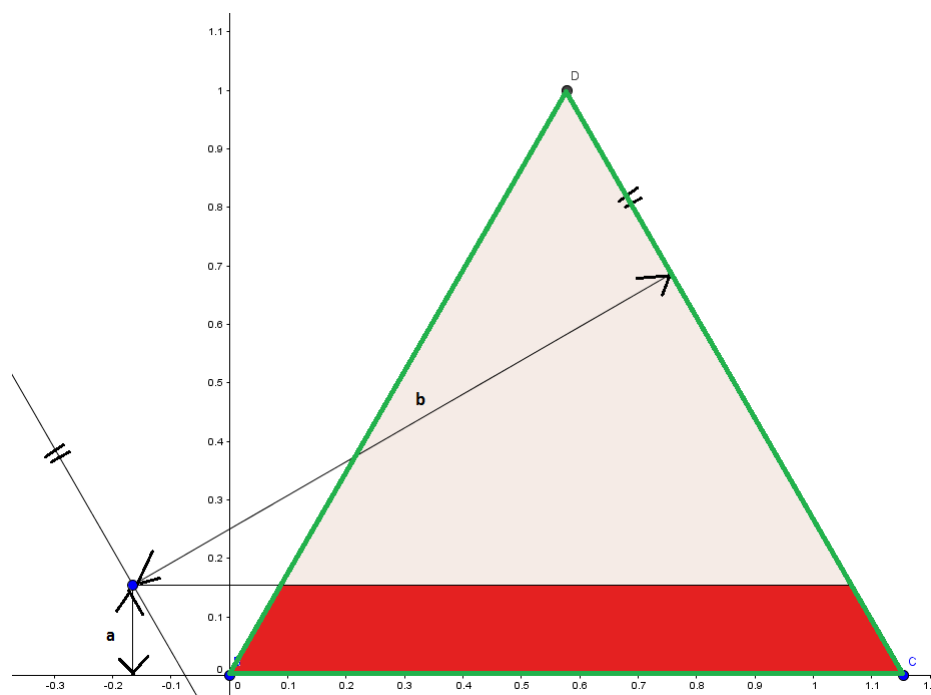
$$S_B = \frac{1}{\sqrt{3}}(1 - (1 - a)^2 - (1 - b)^2) = \frac{1}{\sqrt{3}}(2a + 2b - a^2 - b^2 - 1).$$

Vieme teda vyrátať pravdepodobnosť v prípade B, ktorá bude

$$P_B = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}(2a + 2b - a^2 - b^2 - 1)}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 2a + 2b - a^2 - b^2 - 1.$$

Posledné, čo potrebujeme kvantifikovať pre vetvu $a, b \in (0, 1)$, je vzťah, od ktorého závisí, či je bod so vzdialenosťami od strán a a b v trojuholníku, alebo mimo neho. Opäť si požičiame niečo z prvej časti kapitoly, a síce Vivianiho vetu. Tá nám hovorí, že pre body vnútri trojuholníku by malo platiť $k_1 + k_2 + k_3 = 1$. Vidíme však, že v prípade B by musela byť pre isté body k_3 záporná, keďže je od nej bod položený smerom von z trojuholníka. Z toho nám vyplýva, že v prípade B platí $a + b > 1$, resp. $a > 1 - b$, čo je rovnaká podmienka, na akú sme narazili pri štandardnom modeli (v prípade A platí opak, teda $a \leq 1 - b$).

Ďalším krokom bude prípad, ak $a \in (0, 1) \wedge b \geq 1$. Tu podmienka pre b nevyklučuje žiadne prípady, čiže $G(a, b) = P(k_1 < a)$ a príslušný obrázok bude vyzerat nasledovne:



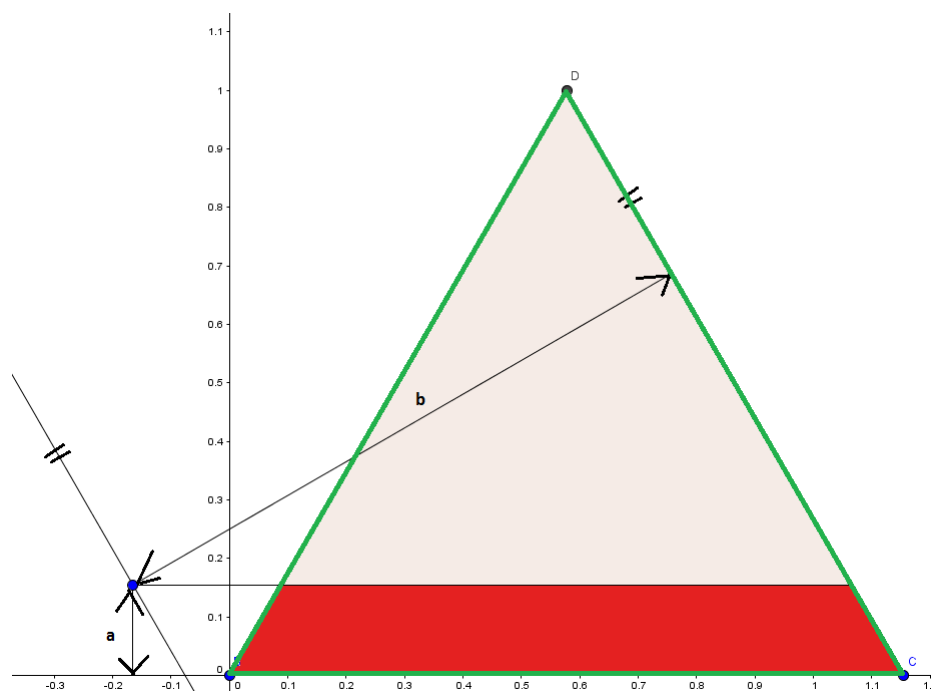
Obr. 32: Kondrov model pre podmienku $a \in (0, 1) \wedge b \geq 1$.

Tu obsah vyrátame analogicky ako v predošlom prípade.

$$S = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{(1-a)^2}{2} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1 - (1-a)^2) = \frac{1}{\sqrt{3}}(2a - a^2)$$

Potom pre pravdepodobnosť platí $P(k_1 < a) = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}(2a - a^2)}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 2a - a^2$.

Posledná možnosť vyžadujúca náčrt bude $a \geq 1 \wedge b \in (0, 1)$.



Obr. 33: Kondrov model pre podmienku $a \geq 1 \wedge b \in (0, 1)$.

Tu obsah vyrátame rovnako ako predchádzajúcej možnosti a vyjde nám $S = \frac{1}{\sqrt{3}}(2b - b^2)$ a pravdepodobnosť $P(k_2 < b) = 2b - b^2$. Posledné dve možnosti opäť zostali $a < 0 \vee b < 0$, a $a > 1 \wedge b > 1$. Rovnako ako pri štandardnom modeli je zrejmé, že prvý z týchto prípadov vylúči všetky body trojuholníka a druhý žiadne. Ak si zapíšeme všetky možnosti Kondrovho modelu pre distribučnú funkciu vektora dĺžok tyčí (k_1, k_2) v bodoch a, b bude mať všeobecný predpis:

$$G(a, b) = \begin{cases} 0, & \text{pre } a \leq 0 \vee b \leq 0, \\ 2ab, & \text{pre } a \in (0, 1) \wedge b \in (0, 1), \text{ pričom } a < 1 - b, \\ 2a + 2b - a^2 - b^2 - 1, & \text{pre } a \in (0, 1) \wedge b \in (0, 1), \text{ pričom } a \geq 1 - b, \\ 2a - a^2, & \text{pre } a \in (0, 1) \wedge b \geq 1, \\ 2b - b^2, & \text{pre } a \geq 1 \wedge b \in (0, 1), \\ 1, & \text{pre } a \geq 1 \wedge b \geq 1. \end{cases}$$

Pozorný čitateľ si zrejme všimol už počas výpočtov, že distribučné funkcie oboch modelov sú v jednotlivých vetvách totožné, čiže môžeme vyhlásiť naše tvrdenie [3] za dokázané. Teda skutočne tieto modely pre rovnomerne zvolené body lámania tyče fungujú a majú ekvivalentné rozdelenia.

3 Kocky

Stalo sa vám niekedy, že ste hrali hru s kockami, alebo kartami, založenú na pravdepodobnosti, a po chvíli vás začali zaujímať zákonitosti tejto hry viac, ako jej výsledok? Ja som sa s tým stretol neraz, či už pri rulete, blackjacku, alebo aj tejto hre, na ktorú som natrafil v jednej zbierke spoločenských hier s kockou:



Obr. 34: Zbierka hier, v ktorej sme našu hru s kockami našli

Násobilka

Hráči si pod seba napíšu čísla od 1 po 10 v poradí, v akom chcú. Hádzu po jednej kocke striedavo. Aké číslo hodia, vynásobia ho číslom, aké je v poradí. Všetko potom zrátajú a hráč s najvyšším výsledkom vyhráva.

Obr. 35: Pôvodná hra

Takáto hra má zjavne vyvážené šance na výhru pre oboch hráčov, a keďže to, čo padne na kocke je náhodné a nevieme to nijak ovplyvniť, aj každá stratégia rozostavenia čísel 1 – 10 bude v konečnom dôsledku rovnako úspešná.

3.1 Skúmanie zákonitostí

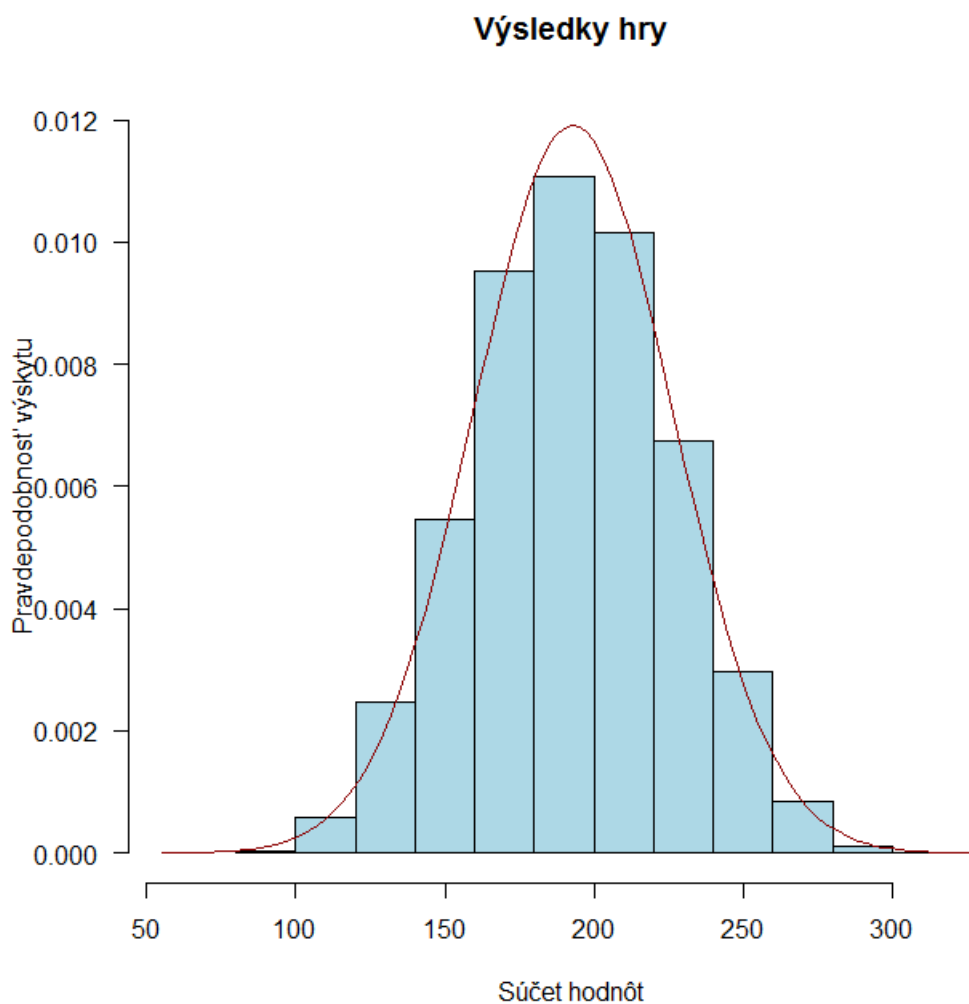
Otázkou je, aké budú konečné hodnoty súčtov jednotlivých hráčov? Ak by sme hrali tisícky hier, ako by boli rozdelené tieto hodnoty? Pre jednoduchosť si môžeme určiť, že prvý hod kockou násobíme jednotkou, druhý hod dvojkou, atď. až po desiaty hod desiatkou. Zjavne minimum tohto súčtu by bolo $1 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times 3 + \dots + 1 \times 10 = 55$, ak by sme 10-krát hodili na kocke 1. Naopak maximum by sme dostali pre samé 6tky,

$6 \times 1 + 6 \times 2 + \dots + 6 \times 10 = 55 \times 6 = 330$. S akou frekvenciou budú hodnoty rozdelené medzi nimi?

Aby sme si ušetrili čas, ktorý by sme trávili hádzaním kocky a zapisovaním výsledkov, naprogramovali sme v eRku kód, ktorý to spraví za nás a následné to aj nakreslí.

```
i=10
z<-replicate(10000,(1:i)%*%sample(1:6,i,replace=T))
hist(z)
```

Tento kód 10000-krát vykoná skalárny súčin $(1, 2, \dots, 10)^T \times (a_1, a_2, \dots, a_{10})$, kde hodnoty $a_1 - a_{10}$ sú náhodne vylosované hody kockou - teda hodnoty 1, 2, 3, 4, 5, 6. Po 10000 opakovaniach si necháme vykresliť výsledky pomocou histogramu, aby sme videli s akou frekvenciou (resp. pravdepodobnosťou) sa vyskytujú jednotlivé výsledky.



Obr. 36: Histogram výsledkov

Vidíme, že najviac hodnoty pohybujú okolo v strede, okolo priemeru minima a maxima, ktorý je rovný $\frac{55+330}{2} = 192.5$, a čo viac, vidíme, že histogram našich výsledkov je takmer dokonale kopírovaný krivkou normálneho rozdelenia. Najjednoduchším nástrojom, pomocou ktorého ukážeme, že naše súčty sa naozaj blížia k normálnemu rozdeleniu, je centrálna limitná veta, ktorej presné znenie sa nachádza v [7].

Najprv si zhrňme, čo vlastne chceme dokázať. Máme n náhodných premenných X_1, X_2, \dots, X_n . Pritom X_1 dosahuje s pravdepodobnosťou $\frac{1}{6}$ hodnotu 1, 2, 3, 4, 5, alebo 6. Ostatné rozdelenia budú na tom analogicky, ale prenášobené svojim poradím. Teda vo všeobecnosti pre X_i sa dosahujú s rovnakou pravdepodobnosťou hodnoty $i, 2i, 3i, 4i, 5i$, alebo $6i$. Stredná hodnota bude rovná priemeru týchto hodnôt, $E(X_i) = \mu_i = \frac{i}{6} \times (1+2+3+4+5+6) = \frac{7}{2}i$. Varianciu potom vyrátame ako $Var(X_i) = \sigma_i^2 = E(X_i - \mu_i)^2$

X_i	μ_i	$X_i - \mu_i$	$(X_i - \mu_i)^2$
1i	3.5i	-2.5i	6.25i ²
2i	3.5i	-1.5i	2.25i ²
3i	3.5i	-0.5i	0.25i ²
4i	3.5i	0.5i	0.25i ²
5i	3.5i	1.5i	2.25i ²
6i	3.5i	2.5i	6.25i ²

Tabuľka 2: Výpočet variancie

Variancia bude teda strednou hodnotou tretieho stĺpca tabuľky (2),

$$\sigma^2 = \frac{i^2}{6} \times (2 \times 6.25 + 2 \times 2.25 + 2 \times 0.25) = \frac{i^2}{6} \times 17.5 = \frac{35}{12}i^2.$$

Snažíme sa teda dokázať, že súčet našich n nezávislých premenných so strednými hodnotami $E(X_i) = \mu_i = \frac{7}{2}i$ a štandardnými odchýlkami $\sigma_i = \sqrt{\frac{35}{12}i^2}$ konverguje k normálnemu rozdeleniu.

Pozrime sa teda na predpoklady klasickej (Lindenberg-Lévyho) centrálnej limitnej vety, pri ktorých sa súčet $X_1 + \dots + X_n$ dá aproximovať normálnym rozdelením, ktoré máme z [7].

Nech X_1, X_2, \dots, X_n sú nezávislé a rovnomerne rozložené náhodné premenné

so strednou hodnotou μ a štandardnou odchýlkou σ .

3.2 Alternatívna centrálna limitná veta

Naše premenné sú síce nezávislé (ide o nezávislé hody kockou), ale nie sú rovnomerne rozdelené, keďže stredná hodnota aj štandardná odchýlka sú pre každú premennú iné. Našťastie to nie je jediná centrálna limitná veta, a po chvíli pátrania sme našli tzv. Ljapunovu centrálnu limitnú vetu, v ktorej nerovnomerné rozdelenie premenných nie je problémom. Tej definícia z [7] hovorí:

Nech $\{X_1, X_2, \dots\}$ je postupnosť nezávislých náhodných premenných, pričom každá má konečnú $E(X_i) = \mu_i$ a varianciu σ_i^2 . Definujme $s_n^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$. Potom, ak existuje $\delta > 0$ také, že platí tzv. Ljapunova podmienka,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s_n^{2+\delta}} \sum_{i=1}^n E[|X_i - \mu_i|^{2+\delta}] = 0, \quad (4)$$

tak rozdelenie súčtu $\sum_{i=1}^n X_i$ konverguje k normálnemu pre n idúce do nekonečna, respektíve:

$$\frac{1}{s_n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_i) \sim N(0, 1).$$

Stredné hodnoty a variancie už máme vyrátané, náš cieľ je teda vcelku zrejmý: dokázať Ljapunovu podmienku pre nejaké (ideálne čo najjednoduchšie) $\delta > 0$. Najprv si však definujeme $s_n^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{35}{12} i^2 = \frac{35}{12} \sum_{i=1}^n i^2$, čo z [9] vieme, že sa rovná $\frac{35}{12} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, čiže $s_n^2 = \frac{35}{72} n(n+1)(2n+1)$. Teraz si skúsime zvoliť $\delta = 1$ a zistiť či platí rovnosť (4). Najprv si vyjadríme vnútro sumy, teda výraz $E[|X_i - \mu_i|^3]$. Pomôžeme si podobnou tabuľkou ako pri výpočte variancie:

X_i	μ_i	$ X_i - \mu_i $	$(X_i - \mu_i)^3$
i	3.5i	2.5i	15.625i ³
2i	3.5i	1.5i	3.375i ³
3i	3.5i	0.5i	0.125i ³
4i	3.5i	0.5i	0.125i ³
5i	3.5i	1.5i	3.375i ³
6i	3.5i	2.5i	15.625i ³

Tabuľka 3: Určenie $E[|X_i - \mu_i|^3]$

Stredná hodnota pravého stĺpca tabuľky (3) bude $E[|X_i - \mu_i|^3] = \frac{i^3}{6}(2 \times 15.625 + 2 \times 3.375 + 2 \times 0.125) = \frac{51}{8}i^3$. Teda po dosadení do rovnice (4) chceme ukázať, že platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{72}{35n(n+1)(2n+1)} \right)^{3/2} \sum_{i=1}^n \frac{51}{8} i^3 = 0$$

Teda upravujeme výraz

$$\left(\frac{72}{35} \right)^{3/2} \frac{51}{8} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n(n+1)(2n+1)} \right)^{3/2} \sum_{i=1}^n i^3$$

Pre jednoduchosť si definujeme konštantu $c = \left(\frac{72}{35} \right)^{3/2} \frac{51}{8}$ a za rad opäť dosadíme hodnotu známou z [9]. Potom

$$c \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n(n+1)(2n+1))^{3/2}} \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4}$$

V tomto kroku sa pozrieme na najvyšší možný exponent v menovateli. Zjavne to bude $(n \times n \times 2n)^{3/2}$. Ostatné členy budú kladné a budú mať nižšie mocniny, zapíšeme ich len schematicky:

$$\frac{c}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{(2n^3)^{3/2} + o(n^{9/2})}$$

Predelíme čitateľ i menovateľ $n^{9/2}$:

$$\frac{c}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^4}{n^{9/2}} + \frac{2n^3}{n^{9/2}} + \frac{n^2}{n^{9/2}}}{\sqrt{8} + \frac{o(n^{9/2})}{n^{9/2}}}$$

Pre n idúce do nekonečna, zlomky v tvare $\frac{1}{n^p}$, kde $p > 0$, pôjdu do nuly, z čoho dostaneme, že

$$\frac{c}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^{1/2}} + \frac{2}{n^{3/2}} + \frac{1}{n^{5/2}}}{\sqrt{8} + \frac{o(n^{9/2})}{n^{9/2}}} = \frac{c}{4} \times \frac{0 + 0 + 0}{\sqrt{8} + 0} = 0.$$

Tým sme dokázali platnosť Ljapunovej podmienky, a teda rozdelenie $\frac{1}{s_n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_i)$ konverguje k normálnemu rozdeleniu $N(0, 1)$ pre $n \rightarrow \infty$.

4 Úloha na viazaný extrém

Jednou z najzaujímavejších vecí na štúdiu matematiky je postupné odkrývanie spojitostí v nej. Vedomosti sa tu takpovediac „nabaľujú“, teda viackrát sa stalo, že som si uvedomil, že postup, ktorý som sa naučil na vysokej škole sa dá použiť na riešenie napríklad stredoškolských problémov. A to, čo som musel kedysi riešiť na 2-3 strany a lámať si hlavu nad tým, ktorý trik využijem, viem teraz vyriešiť na 3 riadky pomocou jednotného postupu. Na jeden takýto stredoškolský príklad sme narazili, aj keď je ešte z roku 1998:

11.

Určte reálne čísla x, y, z tak, aby platila rovnosť $2x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 6xy - 2zx = 0$ a hodnota výrazu $P = (x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2$ bola čo najmenšia.

Obr. 37: Príklad z korešpondenčnej súťaže MATMIX, zdroj: [4]

Keďže na hodinách matematickej analýzy a nelineárneho programovania sme sa im venovali veľmi dôkladne, je zrejmé, že sa jedná o minimalizačnú úlohu o troch premenných na viazaný extrém. Minimalizujeme výraz P , za podmienky, že platí väzba (rovnosť), ktorú si môžeme označiť písmenom g . Formálny zápis teda bude

$$\min\{(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 \mid 2x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 6xy - 2zx = 0\}. \quad (5)$$

V tejto kapitole sa pozrieme na dva rôzne prístupy k tejto úlohe, jeden za použitia stredoškolských vedomostí, v druhom využijeme znalosti z matematickej analýzy. Na konci výsledky porovnáme, pričom pri korektných postupoch by mali oba vyjsť rovnako.

4.1 Postup stredoškoláka

Začneme postupom , ktorý je prebratý zo vzorových riešení v časopise MATMIX [4] (strana 12-13). Najprv sa teda pozrieme, aké hodnoty vôbec spĺňajú rovnicu väzby g . Vidíme, že sa táto rovnica dá napísať ako kvadratická funkcia premennej x :

$$2x^2 + (6y - 2z)x + 5(y^2 + z^2) = 0.$$

Keďže táto rovnica musí platiť aspoň v jednom bode, jej diskriminant musí byť nezáporný.

$$(6y - 2z)^2 - 4 \times 2 \times 5(y^2 + z^2) \geq 0 \Rightarrow 36y^2 - 24yz + 4z^2 - 40y^2 - 40z^2 \geq 0,$$

z toho

$$-4y^2 - 24yz - 36z^2 \geq 0 \Rightarrow -y^2 - 6yz - 9z^2 \geq 0 \Rightarrow -(y + 3z)^2 \geq 0.$$

V tejto úlohe môže byť dosiahnutá maximálne rovnosť, keďže výraz na ľavej strane je nekladný. Potom

$$y + 3z = 0 \Rightarrow y = -3z.$$

Tento poznatok využijeme a dosadíme do pôvodnej väzby g :

$$2x^2 + 5(-3z)^2 + 5z^2 + 6x(-3z) - 2zx = 0 \Rightarrow 2x^2 + 45z^2 + 5z^2 - 18xz - 2xz = 0.$$

Pomocou úpravy na štvorec dostávame tvar

$$2x^2 - 20xz + 50z^2 = 2(x - 5z)^2 = 0,$$

pričom opäť vidíme, že musí platiť

$$x - 5z = 0 \Rightarrow x = 5z.$$

Keďže vieme vyjadriť x aj y pomocou z ($x = 5z$ a $y = -3z$), tak si vyjadríme našu funkciu P pomocou nich a budeme ju vzhľadom na z minimalizovať.⁷ Z

$$\min\{(5z + 1)^2 + (-3z + 1)^2 + (z + 1)^2\},$$

teda dostaneme

$$25z^2 + 10z + 1 + 9z^2 - 6z + 1 + z^2 + 2z + 1 = 35z^2 + 6z + 3.$$

Toto minimalizujeme klasicky, teda zderivujeme a položíme rovné 0,

$$\frac{dP(z)}{dz} = 70z + 6 = 0 \Rightarrow z = -\frac{6}{70} = -\frac{3}{35}.$$

Druhá derivácia je pre všetky z zjavne rovná 70, čiže v nájdenom bode bude určite globálne minimum. Zvyšné premenné budú $x = -\frac{3}{7}$ a $y = \frac{9}{35}$. Výsledok úlohy (5) bude $P([\frac{-3}{7}, \frac{9}{35}, -\frac{3}{35}]) = \frac{96}{35}$.

⁷Dá sa vidieť, že sme využitím väzby upravili pôvodnú úlohu (5) na úlohu voľného extrému.

4.2 Postup vysokoškolačka

Teraz sa pozrieme na zadanie tejto úlohy očami matematickej analýzy. Keďže minimalizujeme výraz (resp. funkciu) P , pričom musí platiť rovnica g , vieme jednoducho využiť Lagrangeovu funkciu z [8]. Tá má vo všeobecnosti tvar

$$L(x, \lambda) = f(x) - \lambda g(x),$$

čiže v našom prípade

$$L = (x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 - \lambda(2x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 6xy - 2zx).$$

Bod \hat{x} bude extrémom, ak $\forall i : \frac{\partial L}{\partial x_i}(\hat{x}) = 0$ a zároveň $g(\hat{x}) = 0$. Dostaneme rovnice

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2(x + 1) - \lambda(4x + 6y - 2z) = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2(y + 1) - \lambda(10y + 6x) = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 2(z + 1) - \lambda(10z - 2x) = 0.$$

Vyriešením tohto systému rovníc vzhľadom na parameter λ (Lagrangeov multiplikátor) získame kandidátov na extrém. Pôjdeme na to pomocou programu v MATLABe, aby sme si ušetrili čas a vyhli sa prípadným numerickým chybám. Konkrétny zdrojový kód bude vyzeráť takto:

```

eqs = { '2*(x+1)-lam*(4*x+6*y-2*z)=0' , ...
        '2*(y+1)-lam*(10*y+6*x)=0' , ...
        '2*(z+1)-lam*(10*z-2*x)=0' };
vars = { 'x' , 'y' , 'z' };
[x, y, z] = solve(eqs{:}, vars{:})

```

Riešenie systému potom bude

$$x = -\frac{3\lambda - 1}{7\lambda - 1}, y = \frac{9\lambda^2 + 4\lambda - 1}{35\lambda^2 - 12\lambda + 1}, z = -\frac{3\lambda^2 - 8\lambda + 1}{35\lambda^2 - 12\lambda + 1}.$$

Prípadom, keď je menovateľ niektorého zo zlomkov rovný nule (teda $\lambda = \frac{1}{7}$, alebo $\lambda = \frac{1}{5}$) sa budeme zaoberať samostatne. Teraz predpokladajme, že $\lambda \neq \frac{1}{7} \wedge \lambda \neq \frac{1}{5}$. Toto riešenie dosadíme do väzby g , ktorá má byť rovná 0. Pomocou funkcie

```
simplify (2*x^2+5*y^2+5*z^2+6*x*y-2*x*z)
```

dostávame rovnicu

$$8\left(\frac{1}{(5\lambda - 1)^2} + \frac{1}{(7\lambda - 1)^2}\right) = 0.$$

Tú ľahko upravíme na

$$8\frac{(7\lambda - 1)^2 + (5\lambda - 1)^2}{(5\lambda - 1)^2(7\lambda - 1)^2} = 0,$$

teda po úprave musí platiť

$$\frac{74\lambda^2 - 24\lambda + 2}{(5\lambda - 1)^2(7\lambda - 1)^2} = 0.$$

Menovateľ je nenulový, takže ním môžeme „beztrestne“ rovnicu prenásobiť. Dostávame teda

$$74\lambda^2 - 24\lambda + 2 = 0,$$

z čoho diskriminant bude rovný

$$D = 24^2 - 4 \times 2 \times 74 = 576 - 592 = -16.$$

Teda λ v tomto prípade nemá reálne riešenie. Vrátime sa ešte k prípadom, že $\lambda = \frac{1}{5}$, resp. $\lambda = \frac{1}{7}$. Ak si však tieto čísla dosadíme do rovností pre x, y a z , všimneme si, že sa menovatele premenných y a z (pre $\lambda = \frac{1}{7}$ aj x) rovnajú 0. Teda tieto vzťahy sa pre ne nedajú vôbec použiť a musíme ich testovať zvlášť. Pomôže nám znovu MATLAB, až na to, že tentokrát dostaneme riešenia konkrétne, keďže λ bude pevne daná.

```
eqs = { '2*(x+1)-1/5*(4*x+6*y-2*z)=0' , ...
        '2*(y+1)-1/5*(10*y+6*x)=0' , ...
        '2*(z+1)-1/5*(10*z-2*x)=0' };
vars = { 'x' , 'y' , 'z' };
[x, y, z] = solve (eqs {:} , vars {:})
```

```
eqs = { '2*(x+1)-1/7*(4*x+6*y-2*z)=0' , ...
        '2*(y+1)-1/7*(10*y+6*x)=0' , ...
        '2*(z+1)-1/7*(10*z-2*x)=0' };
vars = { 'x' , 'y' , 'z' };
[x, y, z] = solve (eqs {:} , vars {:})
```

Pre oba tieto vstupy dostávame ako výstup len prázdne zátvorky. To v reči výpočtovej techniky znamená, že žiadne premenné x, y, z týmto rovniciam nevyhovujú. Z toho plynie, že nemáme kandidáta na extrém, teda minimalizačná úloha (5) nemá riešenie.

Ale počkať! V prvej časti tejto kapitoly nám predsa vyšlo riešenie. A to sme celú úlohu riešili len pomocou úpravy na štvorec a jednoduchej derivácie. Teraz sme museli programovať, využívať Lagrangeovu funkciu a aj tak sme sa nedostali ani tak ďaleko ako pomocou stredoškolských vedomostí? Ako to? Aby sme zistili kde sa vyskytla chyba, musíme sa pozrieť do [8] na stranu 84. Tu nájdeme nutnú podmienku viazaného extrému, resp. nutnú podmienku existencie Lagrangeovho multiplikátora λ . Okrem prvej podmienky, ktorá hovorí, že funkcia P aj väzba g majú spojité derivácie (čo zjavne majú), vidíme ešte tzv. podmienku nedegenerovanosti. Tá hovorí, že $\nabla g(x, y, z) \neq 0$ pre $\forall x, y, z$ také, že platí $g(x, y, z) = 0$. Pozrime sa na túto podmienku bližšie. Gradient $\nabla g(x, y, z)$ je vlastne v našom prípade vektor parciálnych derivácii väzby g . Teda aby bola táto nutná podmienka splnená, musí platiť

$$\nabla g(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x + 6y - 2z \\ 10y + 6x \\ 10z - 2x \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

pre všetky x, y, z spĺňajúce väzbu. Skúsme dosadiť riešenie, ktoré nám vyšlo v prvej časti kapitoly, keďže to určite väzbe vyhovuje. Dostaneme tak

$$\nabla g(x) = \begin{bmatrix} 4\frac{-3}{7} + 6\frac{9}{35} - 2\frac{-3}{35} \\ 10\frac{9}{35} + 6\frac{-3}{7} \\ 10\frac{-3}{35} - 2\frac{-3}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{60}{35} + \frac{54}{35} + \frac{6}{35} \\ \frac{90}{35} - \frac{90}{35} \\ -\frac{30}{35} + \frac{30}{35} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

čiže sme našli jednu kombináciu premenných $[x, y, z]$, pre ktoré $\nabla g(x, y, z) \neq 0$ aj keď $g(x, y, z) = 0$, čím sme ukázali, že pre náš príklad predpoklad nutný pre použitie Lagrangeovej funkcie neplatí⁸.

Teda sa ukázalo, že sofistikovanejšia metóda nemusí byť nutne skratkou k výsledku. V tomto prípade sme sa presvedčili o opaku: vysokoškolská metóda bola zložitejšia a nakoniec sme sa ňou nedopracovali k výsledku, kvôli „preskočeniu“ podmienok za ktorých ju vôbec môžeme využiť.

⁸Ekvivalentnou nutnou podmienkou by bolo, že ∇g musí mať lineárne nezávislé riadky. To tiež neplatí, dá sa všimnúť, že $\frac{5}{3}I + \frac{1}{3}III = II$, kde I, II a III sú v poradí prvý, druhý a tretí riadok ∇g .

5 Deal or no deal

5.1 Pravidlá hry

Existuje množstvo televíznych relácií, v ktorých sa uchádzači snažia získať peňažnú sumu. Niektoré sú založené na vedomostiach (Milionár), iné na pohotovosti a schopnosti rýchlo sa vynájsť (5 proti 5). Aby ste uspeli v show, na ktorú sa bližšie pozrieme v tejto kapitole, potrebujete 2 veci: šťastie a schopnosť urobiť dobré rozhodnutie.

Deal or no deal je televízna súťaž preslávená hlavne v anglicky hovoriacich krajinách ako USA, Veľká Británia či Nový Zéland. Jej hlavná myšlienka je nasledovná. Je 26 kufríkov, v ktorých sú ukryté sumy od 1 centu po 1 000 000 dolárov (v americkej verzii). Uchádzač si vyberie 1 z týchto kufríkov a odteraz „vlastní“ hodnotu, ktorá je v ňom (ani tú však nepozná). Teraz si zo zvyšných 25 kufríkov vyberie 6, ktoré sú následne otvorené, ich hodnota ukázaná a sú z hry takpovediac vyhodené, teda sú to sumy, ktoré sa **nenachádzajú** v jeho vlastnom.

\$.01	\$ 1,000
\$ 1	\$ 5,000
\$ 5	\$ 10,000
\$ 10	\$ 25,000
\$ 25	\$ 50,000
\$ 50	\$ 75,000
\$ 75	\$ 100,000
\$ 100	\$ 200,000
\$ 200	\$ 300,000
\$ 300	\$ 400,000
\$ 400	\$ 500,000
\$ 500	\$ 750,000
\$ 750	\$ 1,000,000

Obr. 38: Sumy v kufríkoch - USA, zdroj: [11]

Potom uchádzač dostane telefonát od „bankára“, ktorý mu ponúkne istú sumu peňazí. Tu má na výber dve možnosti: povedať „DEAL“, teda vziať garantované peniaze, alebo „NO DEAL“ a pokračovať v hre. Ak sa rozhodne pokračovať, v ďalších kolách

pokračuje v eliminácii kufríkov, v druhom kole vyberie 5, v treťom 4 atď⁹. Na konci každého kola dostáva rovnakú novú ponuku od bankára. Takto hra pokračuje až kým uchádzač buď neprijme jednu z ponúk, alebo kým všetky neodmietne, pričom si odnesie sumu, ktorá sa ukrývala v jeho vlastnom kufríku. Ponuky od bankára závisia od už odhalených súm (ak sú otvorené kufríky s veľkými sumami, ponuka ide dole), teda dalo by sa povedať, že bankár „kupuje“ uchádzačov kufrík. Ak napríklad ostanú v hre sumy 10 000, 25 000 a 50 000, bankárova ponuka sa bude pohybovať v rozmedzí 10 000 a 50 000. Kompletný prehľad pravidiel nájdeme v publikácii [3] (str. 25-27).

Dôvod, prečo je táto hra zaujímavá z pohľadu matematiky, je to, že sú jej pravidlá jasne dané a výhra závisí z veľkej časti od pravdepodobnosti. Dôležitý je tiež vzťah súťažiacieho k riziku: uprednostní istotu peňazí od bankára a rozhodne sa pre DEAL, alebo zariskuje, zvolí NO DEAL, a bude dúfať v lepšiu ponuku neskôr?

5.2 Algoritmus ponuky

Aby sme sa mohli pozrieť na rozhodovanie súťažiacich, najprv musíme zistiť, na základe čoho rozhoduje bankár. Rozhoduje sa náhodne, alebo sa za jeho ponukami ukrýva nejaký záhadný výpočet? Je vcelku zjavné, že férovou ponukou v závislosti od neodkrytých súm, by bola ich očakávaná hodnota (Expected value). A keďže všetky kufríky sú navonok identické, táto očakávaná hodnota vyplýva zo základnej pravdepodobnostnej teórie. A to

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

kde x_i je suma v kufríku a p_i je pravdepodobnosť jeho vytiahnutia. Tá je pre všetky kufríky rovnaká a rovná $\frac{1}{n}$, pričom n je počet neotvorených kufríkov. Vidíme, že táto hodnota nie je nič iné, ako aritmetický priemer zostávajúcich súm. Na začiatku každej hry, ešte pred akýmkoľvek otváraním, bude rovný

$$E(X) = \bar{X} = \frac{1}{26}(0.01 + 1 + 5 + 10 + 25 + \dots + 750,000 + 1,000,000) = 131,477.54.$$

Aritmetický priemer by teda bol tzv. férový výpočet bankárovej ponuky. Skúsme sa však pozrieť, či skutočne sedí s ponukami v súťaži. Údaje v tabuľke (2) sú priemery z

⁹V kolách 6,7 a 8 už dostáva ponuku po každom odhalení.

Deal or no deal v Austrálii, kde mali iný rebríček súm ako v USA¹⁰. Tieto údaje máme z [3] a budú slúžiť hlavne na pozorovanie vývoja ponúk v závislosti od poradia daného kola. Počet súťažiacich je v podstate počet meraní, z ktorých sú priemery počítané.

Kolo	Počet súťažiacich	Ponuka banky b	Očakávaná hodnota E(X)	Pomer b/E(X)
1	398	3334.67	19008.1	17.54%
2	398	5546.12	18956.3	29.26%
3	399	6857.52	19080.5	35.94%
4	399	9250.95	19024.7	48.63%
5	389	11213	19039.5	58.89%
6	351	12920.6	18416.3	70.16%
7	297	14786.3	18642.4	79.32%
8	224	20146.7	23185.2	86.89%
9	149	31518.1	31764.5	99.22%

Tabuľka 4: Ponuky bankára v porovnaní s očakávanou hodnotou

Vidíme, že v priemere na začiatku bankár ponúka výrazne nižšiu sumu ako očakávaná hodnota, čo je vcelku logické. Ak by hneď na začiatku ponúkali vysoké sumy, množstvo súťažiacich by ich vzalo a odišlo po prvom kole, čo by však nebolo zaujímavé pre diváka. Čím dlhšie ale hra trvá, tým viac sa ponuka banky približuje strednej hodnote. V prvom kole je to 17%, v druhom 29%, a postupne to rastie až do deviateho kola, v ktorom banka ponúka v priemere 99% očakávanej hodnoty. V niektorých prípadoch sa stalo, že banka ponúkla viac ako priemer zostávajúcich súm. To by malo pre racionálneho, rizikovo neutrálneho hráča znamenať, že ponuku prijme. Vráťme sa však ešte k algoritmu ponúk. Na internete koluje množstvo teórií o tom, aký presne je. Rôznia sa zložitou, ako aj presnosťou. Naše pozorovanie niekoľkých epizód sa približne zhoduje s percentami, ktoré sme vypočítali z Austrálskej verzie show, avšak naša hypotéza je, že ide skôr o výber z intervalu. Teda povedzme, že v prvom kole počítač vygeneruje náhodne číslo z intervalu 10-20% zo strednej hodnoty, čo môže byť ešte dodatočne zaokrúhlené, alebo inak upravené bankárom¹¹.

¹⁰Tvorcovia tejto súťaže však priznali, že algoritmus bankára je vo všetkých formátoch rovnaký.

¹¹Napríklad ak hráč vyhlási, že nevezme menej ako \$10,000, môže dostať ponuku na \$9,999 pre

5.3 Rozhodovanie

Teraz sa pozrieme na to, ako prebieha rozhodovací proces súťažiaciho vo chvíli, kedy dostane možnosť DEAL alebo NO DEAL. Inšpirujeme sa pritom publikáciou [3] (str. 6-8). Budeme uvažovať, že súťažiaci je racionálny hráč, ktorý sa rozhoduje tak, aby maximalizoval svoju funkciu užitočnosti $u(x, \theta)$, pričom x je množstvo peňazí a θ je parameter určujúci stupeň averzie voči riziku (teda do akej miery súťažiaci preferuje garantované peniaze). Zároveň využijeme očakávanú užitočnosť (z angl. Expected Utility) $EU(S, \theta)$, ktorá je rovná priemeru užitočností S , čo je množina súm v zatiaľ neotvorených kufríkoch. Teda $EU(S, \theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u(S_i, \theta)$. Zdá sa, že bude platiť takýto vzťah:

$$u(x, \theta) = \max(u(b, \theta); EU(S, \theta)), \quad (6)$$

kde b je ponuka od bankára. Teda ak $u(b, \theta) > EU(S, \theta)$, rozhodol by sa pre DEAL, keďže ponuka banky je dostatočne vysoká. V opačnom prípade $u(b, \theta) < EU(S, \theta)$, by sa rozhodol pre NO DEAL a v hre by pokračoval. Rovnica (6) však platí len pre „krátkozrakého“ hráča! Teda takého, ktorý nepozera na situáciu v ďalších kolách. Tá je však dôležitá, keďže aby sme vedeli spoľahlivo rozhodnúť, musíme zrátať aj aké ponuky nám banka dá v budúcnosti.

Teda budeme musieť uvažovať iný, dynamický model pre výpočet rozhodovania, a ten bude vyzeráť takto:

$$u(x, \theta) = \max(u(b, \theta); W(S, r)), \quad (7)$$

kde r je kolo 1,2,3,...,9 a $n(r)$ počet súm, ktoré sú v hre po danom kole. Ďalej si určíme $N(r)$, čo je počet všetkých *možných podmnožín* $S_{n(r)}$ (teda jedna z možností zostávajúcich kufríkov bude $S_{n(r)}^i$). Zadefinujeme si aj $b(S_{n(r)}^i, r)$, čo je ponuka banky v danom kole r so zostávajúcimi kufríkmi $S_{n(r)}$. $W(S_{n(r)}, r)$ má potom tvar

$$W(S, r) = \begin{cases} \frac{1}{N(r)} \max(\sum_{i=1}^{N(r)} b(S_{n(r)}^i, r); \sum_{i=1}^{N(r)} W(S_{n(r+1)}^i, r+1)) & \text{ak } r = 1, 2, \dots, 8, \\ EU(S, \theta) & \text{ak } r = 9. \end{cases}$$

Tento zložitý zápis nám hovorí, že pri dynamickom modeli musíme pozerať na to, ako sa nám postupne strom možných výplat rozvetvuje. Už z toho, že musíme niekoľkokrát

pobavenie divákov.

rátať priemer zo všetkých možností, ktoré teoreticky môžu nastať, je zjavné, že tento postup je takmer nemožné využiť v začiatočných kolách, keďže nám zostáva priveľa neodhalených súm. Skúsme si ho teda priblížiť na konkrétnom príklade rozhodovania súťažiacého, ktorého volajme napríklad Peter.

Peter je racionálne uvažujúci hráč, ktorý je rizikovo averzný. Vie, že je lepší vrabec v hrsti ako holub na streche. Vie o sebe, že jeho funkcia užitočnosti má tvar $u(x, \theta) = \frac{x^{1-\theta}}{1-\theta}$, a že jeho miera averzie voči riziku $\theta \doteq 0.2$. Dostal sa až do 8. kola a uvedomil si, že v tejto situácii si už dokáže spočítať, ktoré rozhodnutie je preňho najvýhodnejšie. V hre zostávajú tri kufríky. Vieme, že sa v nich ukrývajú hodnoty \$25, \$1,000 a \$75,000. Ešte predtým, ako ohlásia bankárovu ponuku je vyhlásená prestávka. Peter si rýchlo sadne a začne robiť výpočty.

Ako prvú potrebuje odhadnúť, aká asi bankárova ponuka v tomto momente bude.

$$E(X) = \bar{X} = \frac{1}{3} * (25 + 1,000 + 75,000) = \frac{76025}{3} \doteq 25,341.7$$

je stredná hodnota našich možností, a keďže sledoval austrálsku verziu tejto show vie, že v 8. kole sa bankárova ponuka bude rovnať približne 86.89% očakávanej hodnoty (z tabuľky 2), teda $b = 0.8689 * 25,341.7 \doteq 22,019.3$, pričom očakáva, že ju bankár zaokrúhli na 22,000.

Teraz, keď vie, akú ponuku dostane v tomto kole, pozrime sa, čo môže nastať v ďalšom kole, teda deviatom. Z austrálskej televízie Peter vie, že v poslednom kole býva ponuka takmer identická priemeru posledných dvoch kufríkov. Keďže je rizikovo averzný, tak už teraz vie, že v poslednom kole by sa rozhodol pre DEAL v každom prípade. Teda stačí zrátať priemery užitočností pre všetky udalosti, ktoré môžu nastať počas 8. kola:

$$u(x, \theta) = \begin{cases} u\left(\frac{25+1000}{2}\right) & \text{ak odhalíme } \$75,000, \\ u\left(\frac{25+75000}{2}\right) & \text{ak odhalíme } \$1,000, \\ u\left(\frac{1000+75000}{2}\right) & \text{ak odhalíme } \$25. \end{cases}$$

Tieto možnosti majú z Petrovho pohľadu rovnakú pravdepodobnosť, pretože pochopiteľne nikto nevie, v ktorom kufríku sa čo nachádza. Takže táto očakávaná užitočnosť všetkých možností v 8. kole bude

$$EU(S_8) = \frac{1}{3} \left(u\left(\frac{25+1000}{2}\right) + u\left(\frac{25+75000}{2}\right) + u\left(\frac{1000+75000}{2}\right) \right),$$

$$EU(S_8) = \frac{1}{3}(u(512.5) + u(37512.5) + u(38000)),$$

čo nám po dosadení Petrovej funkcie užitočnosti s $\theta = 0.2$ dá

$$EU(S_8) = \frac{1}{3} * \left(\frac{512.5^{0.8}}{0.8} + \frac{37512.5^{0.8}}{0.8} + \frac{38000.5^{0.8}}{0.8} \right),$$

čo je rovné

$$EU(S_8) = \frac{1}{2.4} * (512.5^{0.8} + 37512.5^{0.8} + 38000^{0.8}) \doteq 3884.35.$$

To je Petrova očakávaná užitočnosť, ak sa rozhodne nevziať \$22,000, ktoré mu každú chvíľu bankár ponúkne. Ešte teda musí zrátať

$$u(22000) = \frac{22000^{0.8}}{0.8} \doteq 3722.62.$$

Peter porovnáva výsledky. Zjavne je preňho výhodnejšie neprijať bankárovu ponuku. Čo ak mu však náhodou bankár ponúkne viac? Predsalen, v štatistikách z tabuľky (4) boli priemery, nie konkrétne hodnoty. Podľa čoho sa bude rozhodovať? Pri natáčaní si predsa nemôže vybrať kalkulačku a začať počítať. Pozrie sa na hodinky. Našťastie má ešte čas. Stačí mu vyrátať, aká by musela byť ponúkaná suma od bankára b , aby mal pri nej väčšiu užitočnosť ako $EU(S_8)$. Čiže

$$u(b) \geq 3884.35,$$

$$\frac{b^{0.8}}{0.8} \geq 3884.35,$$

$$b^{0.8} \geq 3107.48 \Rightarrow b \geq 3107.48^{\frac{1}{0.8}} \doteq 23201$$

Práve včas. Moderátor ho volá späť pred kameru. Vie teda, ako sa rozhodne. Ak dostane ponuku vyššiu ako \$23201, tak ponuku prijme, v opačnom prípade bude v hre pokračovať ďalej a dúfať, že z troch zostávajúcich kufríkov eliminuje ten s najmenšou sumou vo vnútri. Show sa opäť začína a bankár volá, aby prezradil sumu, ktorú ponúka. Peter už však má stratégiu rozmyslenú. „Dobre, že som si nezabudol vziať tú kalkulačku,” pomyslel si.

Záver

V tejto práci bolo našim úsilím sklbiť dva bijúce sa protipóly matematickej literatúry. Odbornosť a populárnosť. V prvej časti sme vzali výrok autorky, ktorý do svojej populárnym štýlom písanej knihy [10] uviedla len tak, pre zaujímavosť. Následne sme využili omnoho odbornejší článok [12] a s jeho pomocou sme s dostatočnou presnosťou ukázali, k akému polomeru konštrukcia z obr. 4 konverguje.

V ďalšej kapitole sme ukázali, že model popísaný v obr. 12 skutočne funguje v prípadoch, kedy sú body rozdelenia tyče nezávislé, a že je už značne ťažšie ho ak najprv zlomíme tyč v jednom bode a následne podľa prvého bodu zlomu upravíme ten druhý. Taktiež sme sa pozreli na porovnanie dvoch postupov problému na viazaný extrém. Ako sa ukázalo, viac vedomostí nemusí nutne znamenať správny výsledok ani rýchlejší postup, keď stredoškôlak porazil vysokoškôlaka.

Nezabudnime ani na Petra, ktorý sa v posledných minútach reklamnej prestávky snažil vyrátať, ako má odpovedať v ďalších kolách Deal or no Deal pomocou svojej funkcie užitočnosti a kalkulačky. A aj potom ako pomocou dynamického modelu vypočítal, že by nemal vziať bankárovu ponuku, zarazil sa. Neprestal kriticky myslieť a pýtať sa tie správne otázky. A či už je to pri sledovaní televíznej súťaže, listovaní knihou o matematike, alebo pri hraní sa s kockami, otázka "Prečo je to tak?", bude vždy správna.

Zoznam použitej literatúry

- [1] ATKINSON, K.: *Trapezoidal method, Error formula*, 2003, Dostupné na internete (28.4.2016):
http://homepage.math.uiowa.edu/~atkinson/ftp/ENA_Materials/Overheads/sec_5-2.pdf.
- [2] ATKINSON, K., HAN, W.: *Theoretical numerical Analysis*, Springer, New York, 2009.
- [3] DE ROOS, N., SARAFIDIS, Y.: *Decision Making under Risk in Deal or No Deal*, University of Sydney, Sydney, 2006, Dostupné na internete (27.7.2016):
http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=881129.
- [4] HRIŇÁK, M.: *Časopis MATMIX*, APROMOD, s.r.o., Most pri Bratislave, šk. rok 1997/98, číslo 4.
- [5] Internetová encyklopédia, *Wikipedia - Viviani's theorem* 2016, Dostupné na internete (5.7.2016):
https://en.wikipedia.org/wiki/Viviani%27s_theorem.
- [6] Internetové fórum, *Geometrická pravdepodobnosť - príklady s tyčiči* 2008, dostupné na internete (28.4.2016)
<http://forum.matematika.cz/viewtopic.php?id=5351>.
- [7] JANKOVÁ, K., PÁZMAN, A.: *Pravdepodobnosť a štatistika*, Univerzita Komenského, Bratislava, 2011.
- [8] KOLLÁR, M., KOSSACZKÁ, Ľ., ŠEVČOVIČ, D.: *Diferenciálny a integrálny počet funkcií viac premenných v príkladoch*, Univerzita Komenského, Bratislava, 2012.
- [9] KUBÁČEK, Z., VALÁŠEK, J.: *Cvičenia z matematickej analýzy II*, Univerzita Komenského, Bratislava, 1991.
- [10] PAPPASOVÁ, T.: *Potešenie z matematiky*, Nebojsa, Bratislava, 1997.
- [11] PEARSON, CH.: *Deal or No Deal: A Statistical Deal*, Internetový článok, 2006, Dostupné na internete (27.7.2016):

http://www.pearsonified.com/2006/03/deal_or_no_deal_the_real_deal.php.

- [12] PINKHAM, R.: *Mathematics and Modern Technology*, The American Mathematical Monthly, 1996, dostupné na internete (28.4.2016)

<http://www.jstor.org/stable/2974664>.

- [13] WEISSTEIN, E. W.: *Concise Encyclopedia of Mathematics*, CRC Press, 1999, Dostupné na internete (27.7.2016):

<https://archive.lib.msu.edu/crcmath/math/math/p/p456.htm>.