UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

DON'T JUST SOLVE IT; FIGHT IT!
PRÍKLADY Z PRAVDEPODOBNOSTI

BAKALÁRSKA PRÁCA

2017 Andrea JEČMENOVÁ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

DON'T JUST SOLVE IT; FIGHT IT!
PRÍKLADY Z PRAVDEPODOBNOSTI

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program:	Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor:	1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	doc. RNDr. Beáta Stehlíková, PhD.

Bratislava 2017 **Andrea JEČMENOVÁ**

31164673

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Andrea Ječmenová
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Don't just solve it; fight it! Príklady z pravdepodobnosti
Don't just solve it; fight it! Probability problems

Cieľ: Téma práce je malou obmenou citátu Paula Halmosa o dôkazoch: "Don't just read it; fight it! Ask your own questions, look for your own examples, ..." Jeho myšienka sa dá vzťahovať aj na riešenie príkladov. To sa nemusí skončiť vyriešením určitého príkladu, mnohé príklady dávajú možnosť zamýšľať sa nad nimi ďalej, klásť si otázky a hľadať na ne odpovede. Cieľom práce je venovať sa takýmto spôsobom niekoľkým úlohám z oblasti pravdepodobnosti:
(a) Príklad 293 zo zbierky [1] a súvislosť získaných pravdepodobností s pravdepodobnosťami získanými z ratingov typu [3]
(b) Známy Bertrandov paradox - porovnanie s experimentom popísaným v článku [4]
(c) Úloha o spojeniach kariet z [3] - výpočet pravdepodobnostného rozdelenia výhry (nielen strednej hodnoty), zisťovanie preferencií hráčov pri možnosti výberu hry
(d) 2-3 podobné príklady

Literatúra:
[1] R. Harman, E. Hönschová, J. Somorčík: Zbierka úloh zo základov teórie pravdepodobnosti. Paci, Bratislava, 2009.
[2] A. Plocki: Pravdepodobnosť okolo nás. Katolícka univerzita v Ružomberku, Ružomberok, 2007.
[3] Elo Rating System. http://www.eloratings.net/
[4] Edwin T. Jaynes: The Well-Posed Problem. Foundations of Physics 3 (1973) pp. 477-493
Ďalšia literatúra podľa vlastného výberu.

Vedúci: doc. RNDr. Beáta Stehlíková, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

Dátum zadania: 25.10.2016

Dátum schválenia: 19.11.2016 doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

....
študent vedúci práce

Poďakovanie Chcela by som sa poďakovať svojej školiteľke doc. RNDr. Beáte Stehlíkovej, PhD. za usmernenie a adresovanie podstatných pripomienok a rád. Rovnako by som chcela vyjadriť poďakovanie svojej rodine, priateľovi a kamarátom, ktorí boli ochotní podieľať sa na realizácii experimentov.

Abstrakt

JEČMENOVÁ, Andrea: Don't just solve it; fight it! Príklady z pravdepodobnosti [Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: doc. RNDr. Beáta Stehlíková, PhD., Bratislava, 2017, 66 s.

Táto práca sa zaoberá rôznymi príkladmi z pravdepodobnosti a štatistiky, nad ktorými sa okrem vyriešenia snaží aj ďalej zamýšľať. Rozoberá hazardné hry vrátane lotérie, kartovej hry o spojeniach a stávkovania pri futbale, v ktorom predstaví rozšírený spôsob bodovania tímov, tzv. Elo rating. Rovnako ilustruje prístup k riešeniu slávneho Bertrandovho paradoxu a ukazuje aplikáciu matematiky v medicíne pri testovaní chorôb. Snaží sa urobiť ich riešenie pre čitateľa zaujímavým a zrozumiteľným.

Kľúčové slová: lotéria, Powerball, spojenie kariet, Elo rating, nezáporný zisk stávkovej kancelárie, Bertrandov paradox, testovanie chorôb, opakovanie testov.

Abstract

JEČMENOVÁ, Andrea: Don't just solve it; fight it! Probability problems [Bachelor Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: doc. RNDr. Beáta Stehlíková, PhD., Bratislava, 2017, 66 p.

This thesis deals with various problems of the field probability and statistics and tries not only to solve them but also think about them further. We analyse gambling including lottery, matching card game and betting on football where is introduced worldwide system of awarding teams by points called Elo rating. We also illustrate an approach to solving famous Bertrand paradox and show an application of mathematics in medicine testing. Our intention is in addition to make these problems interesting and understandable for common people.

Key words: lottery, Powerball, matching cards, Elo rating, nonnegative profit of the betting company, Bertrand paradox, disease testing, repetitive testing.

Obsah

Úvod

Začiatky pravdepodobnosti siahajú až do obdobia pred naším letopočtom, keďže záujem o túto problematiku prišiel práve s hrami. Populárna bola najmä hra v kocky, pričom tá sa datuje až do starovekého Egypta (3500 p.n.l.). Ale nielen hry boli uplatnením náhodných javov. Aj veštenie či rôzne náboženstvá uplatňovali náhodu predstavujúcu vyjadrenie božej vôle pri riešení nejednoznačných situácií, napr. losovaním pri delení majetku či zvieracích obetách. Podľa rabínskej literatúry sa rovnako uplatňovalo losovanie aj pri povolení neuplatniť obriezku, keď predchádzajúci novorodení chlapci v dôsledku nej zomreli. Preto je zvláštnosťou, že teória pravdepodobnosti sa začala rozvíjať až od 17. storočia. Za jej počiatok sa považuje korešpondencia medzi matematikmi Pascalom a Fermatom, ktorí sa snažili o spravodlivé rozdelenie banku medzi hráčov hazardných hier.

Dnes sú už teória pravdepodobnosti a matematická štatistika využívané v množstve odvetví - v ekonómii, bankovníctve, medicíne, biológii či psychológii. Na ich základe tiež fungujú viaceré štatistické programové systémy ako napr. SPSS, Statistica, Statgraphics, S+, ktoré používajú nielen ľudia z uvedených odborov. Dokonca sa stali piliermi nových matematických disciplín - teórie hromadnej obsluhy, teórie hier a teórie informácie.

Taktiež lotérie a spomínané hazardné hry, ktoré patria k vzniku teórie pravdepodobnosti, neprestali ťažiť z obľúbenosti a štatistík naklonených vysokým ziskom. Najprv sa budeme zaoberať lotériou Powerball [1], pričom poukážeme na nevýhodnosť investovať peniaze do hier podobného typu. Rovnako cieľom stávkových kancelárií je mať nezáporný zisk a práve tejto problematike sa bude venovať 2. kapitola našej práce. V nej využijeme aj nový postup - Elo rating [5] na zistenie pravdepodobnosti možných výsledkov zápasu. V 3. kapitole sa budeme venovať rovnako hazardu. Rozoberieme si totiž hru o „spojení“ kariet z [10], v ktorej budeme riešiť otázku pravdepodobnostného rozdelenia danej hry a zároveň zanalyzujeme preferencie jej hráčov.

Ani teória pravdepodobnosti sa neubránila rôznym paradoxom a dilemám. Jedným z najznámejších je Bertrandov paradox. Súčasťou 4. kapitoly bude okrem ukázania viacerých náhľadov na riešenie tohto paradoxu aj experiment uvedený v [15] overujúci správnosť jedného z týchto postupov. Pri ďalšom - lekárskom paradoxe sa rieši otázka pravdepodobnosti, či test pozitívny na ojedinelú chorobu znamená, že ju naozaj máme. Odpoveď na ňu si priblížime v poslednej kapitole o diagnostike. Táto kapitola je zároveň doplnená o hru, v ktorej hráč môže na základe vygenerovaných testov hádať chorobu pacienta.

Cieľom našej práce teda bude ilustrovať viacero situácií z oblasti pravdepodobnosti a štatistiky. Pozrieme sa na hazardné hry z hľadiska stávkových kancelárií, hazardného hráča aj bankára. Tiež sa pokúsime čo najzrozumiteľnejšie vysvetliť a priblížiť odpoveď na známy matematický paradox, ktorého vyriešenie trvalo matematikom roky. A nakoniec si ukážeme aplikáciu matematiky v medicíne. Dané problémy sa pokúsime nielen vyriešiť, ale najmä podať tak, aby zaujali a poučili aj menej zainteresovaného čitateľa, čo bude v konečnom dôsledku náš hlavný cieľ.

1 Lotériová matematika

1.1 Pravdepodobnosti uhádnutia kombinácií

Hazardné hry sa viažu k začiatku záujmu o teóriu pravdepodobnosti do obdobia ešte pre naším letopočtom. S veľkým záujmom u ľudí sa stretávajú aj dnes a lotérie sú jednou z ich najpopulárnejších foriem. Analyzovaním lotérie sa zaoberá aj príklad z knihy [2], ktorého riešenie si teraz ukážeme:

Budeme sa zaoberať lotériou Powerball, v ktorej sa losuje z M bielych loptičiek n čísel a navyše z R červených loptičiek 1, nazývaná tiež powerball. Nás zaujíma stanovenie pravdepodobnosti situácií, ktoré môžu pri žrebovaní nastať.

Modelujeme teda situáciu trafenia práve k čísel z 5 vylosovaných bielych loptičiek a zároveň trafenia presne l loptičiek z 1 možnosti - powerballu, kde $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ a $l \in \{0, 1\}$. Máme tu do činenia s kombináciami - triafame určité množstvo loptičiek m z vopred známeho množstva n bez opakovania, pričom na poradí m trafených loptičiek nezáleží. Počet možností je v takom prípade podľa [3] kombinačné číslo:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!};$$

kde $m! = \prod_{i=1}^{k} i = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (m-1) \cdot m$, teda faktoriál m.

Žrebované čísla si môžeme rozdeliť do skupín podľa toho, či sú vylosované alebo nie. Pri každom žrebovaní máme situáciu, že $(M - n)$ bielych čísel nebude vylosovaných, pričom ostatných n bude a rovnako spomedzi R červených čísel bude $(R - 1)$ nevylosovaných a ostávajúce 1 vylosované (powerball). Takže pri trafení k loptičiek spomedzi n vylosovaných zároveň trafíme $n - k$ loptičiek z $(M - n)$ ostatných a uhádnutím l loptičiek z 1 tiež uhádneme $1 - l$ z $(R - 1)$ nevylosovaných loptičiek. Počet všetkých možností ako trafíme práve k a l loptičiek z bielych a červených teda reprezentuje číslo: $\binom{n}{k} \cdot \binom{M-n}{n-k} \cdot \binom{1}{l} \cdot \binom{R-1}{1-l}$.

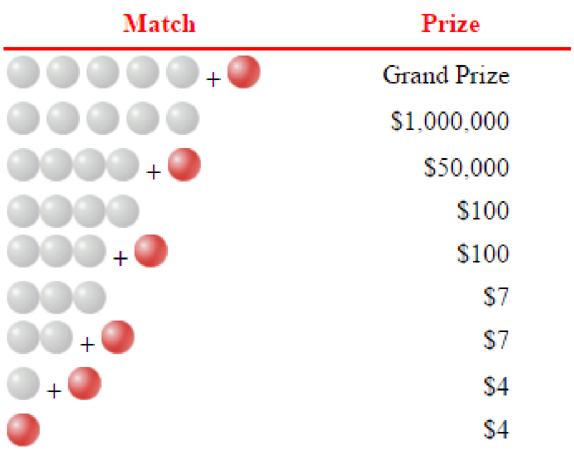
Keďže každá kombinácia čísel je vylosovaná s rovnakou pravdepodobnosťou a počet všetkých možných kombinácií je konečný, na výpočet pravdepodobnosti použijeme:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\omega|};$$

kde A je množina priaznivých javov a ω je množina všetkých javov, ktoré môžu nastať. V našom prípade je $P(A)$ pravdepodobnosť trafenia práve k a l loptičiek spomedzi vylosovaných. Počet priaznivých možností sme si už určili, takže tento počet stačí predeliť počtom všetkých možností, ako môžu byť čísla vyžrebované, t.j. číslom $\binom{M}{n} \cdot \binom{R}{1}$. Výsledná pravdepodobnosť je potom:

$$P = \frac{\binom{n}{k} \cdot \binom{M-n}{n-k} \cdot \binom{1}{l} \cdot \binom{R-1}{1-l}}{\binom{M}{n} \cdot \binom{R}{1}} = \frac{\binom{n}{k} \cdot \binom{M-n}{n-k} \cdot \binom{R-1}{1-l}}{\binom{M}{n} \cdot R}. \tag{1.1.1}$$

Teraz si ukážeme realizáciu výpočtu pravdepodbnosti pri konkrétnych počtoch bielych a červených loptičiek, ktoré lotéria Powerball používa (všobecná formulácia začiatočnej úlohy je zrejme kvôli viacerým zmenám v pravidlách tejto hry počas jej existencie). Jej súčasťou je 69 bielych a 26 červených očíslovaných loptičiek, z ktorých sa ťahá 5 bielych a 1 červená (powerball). Tipujúci sa snažia uhádnuť čo najväčší počet loptičiek, keďže výsledná výhra je tomu priamoúmerná. Výhry sú nasledovné:



Obr. 1.1.1: Výhry, ktoré možno získať uhádnutím kombinácie vyžrebovaných loptičiek. Obrázok prevzatý zo stránky [1].

Na hlavnej stránke Powerballu sú uvedené aj pravdepodobnosti, pri ktorých môžeme vyhrať jednotlivé ceny. Ich vypočítaním a vyčíslením teraz ukážeme, že napriek lákavým cenám sa táto hra veľmi neoplatí. Vzorec na výpočet jednotlivých pravdepodobností získame dosadením spomínaných počtov do vzorca (1.1.1). Jeho tvar je nasledovný:

$$P(VK) = \frac{\binom{5}{k} \cdot \binom{64}{5-k} \cdot \binom{25}{1-l}}{\binom{69}{5} \cdot 26};$$

pričom VK je jav natipovania konkrétnej víťaznej kombinácie, k reprezentuje počet správne tipnutých bielych loptičiek a l počet správne natipovaných červených loptičiek. Vyčíslenie konkrétnych pravdepodobností výhier sme realizovali v Tabuľke 1.1.1. Ako

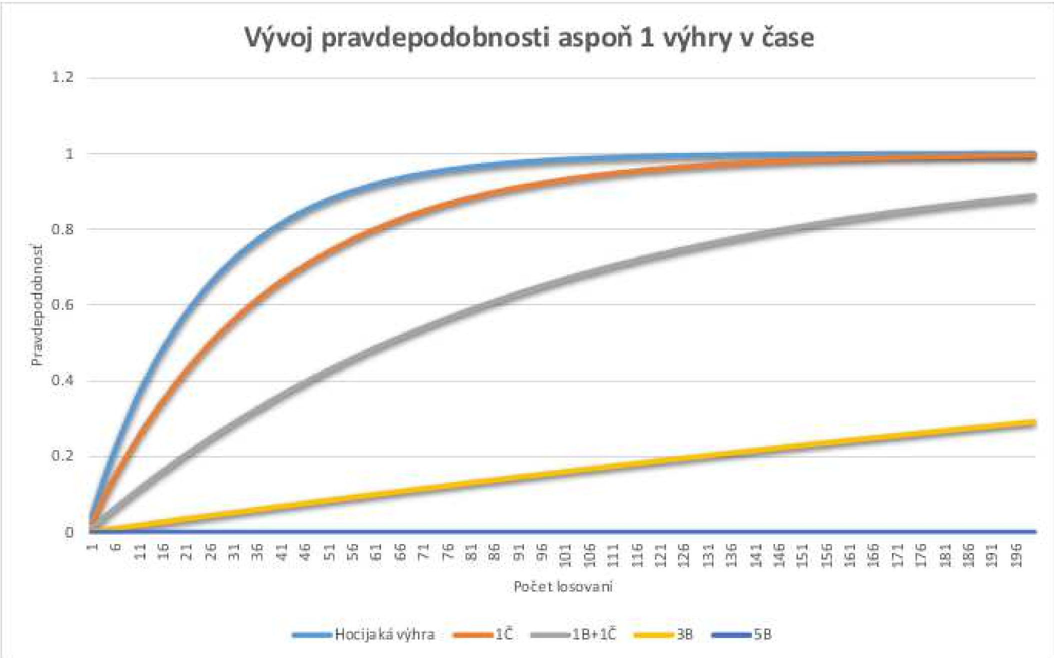
Kombinácia	**Červená**		**Biele**		**Pravdepodobnosť**	
1Č+5B	$\binom{1}{1}$	1	$\binom{5}{5}$	1	3.4223E-09	1:292201338
5B	$\binom{25}{1}$	25	$\binom{5}{5}$	1	8.55574E-08	1:11688053.52
1Č+4B	$\binom{1}{1}$	1	$\binom{5}{4} \cdot \binom{64}{1}$	320	1.09514E-06	1:913129.181
4B	$\binom{25}{1}$	25	$\binom{5}{4} \cdot \binom{64}{1}$	320	2.73784E-05	1:36525.1673
1Č+3B	$\binom{1}{1}$	1	$\binom{5}{3} \cdot \binom{64}{2}$	20160	6.89935E-05	1:14494.114
3B	$\binom{25}{1}$	25	$\binom{5}{3} \cdot \binom{64}{2}$	20160	0.001724838	1:579.7646
1Č+2B	$\binom{1}{1}$	1	$\binom{5}{2} \cdot \binom{64}{3}$	416640	0.001425866	1:701.3281
1Č+1B	$\binom{1}{1}$	1	$\binom{5}{1} \cdot \binom{64}{4}$	3176880	0.010872229	1:91.9775
1Č	$\binom{1}{1}$	1	$\binom{64}{5}$	7624512	0.026093351	1:38.3239

Tabuľka 1.1.1: Vypočítané pravdepodobnosti uhádnutia pre jednotlivé typy kombinácií loptičiek v Powerballe.

môžeme vidieť, pravdepodobnosť každej z týchto výhier je naozaj malé číslo. Podľa toho napríklad v priemere 1 z 39 rôznych žrebov má šancu na uhádnutie červenej loptičky s výhernou cenou 4$. Podanie 39 rôznych kombinácií čísel na jedno žrebovanie nám síce výhru nezaručí, ale rapídne sa zvýšia naše šance na výhru. Rovnako sa zvyšujú aj vtedy, keď tikety nepodávame naraz, ale postupne na rôzne losovania, čo budeme skúmať v nasledujúcej časti.

1.2 Modelovanie pravdepodobnosti výhry v čase

Okrem toho, že u ľudí je bežné spoliehať sa pri tipovaní na šťastie, je bežné aj podávať menšie množstvo tiketov lotérie pravidelne. Ľudia si myslia, že tým zvýšia šance na závratnú výhru, čo sa aj deje, ale je to pomerne malá zmena. Nás bude zaujímať, ako sa bude vyvíjať pravdepodobnosť, že aspoň raz tipujúci vyhrá konkrétnu respektíve hocijakú cenu. Pravdepodobnosť hocijakej výhry pritom predstavuje súčet pravdepodobností jednotlivých konkrétnych výhier.



Obr. 1.2.1: Vývoj pravdepodobnosti aspoň 1 výhry pri rôznych víťazných kombináciách počas 200 losovaní.

Jav predstavujúci zisk konkrétnej/hocijakej výhry v i-tom časovom okamihu sme označili ako A_i a $notA_i$ predstavovalo situáciu, že vtedy nevyhráme nič. Zároveň v každom časovom okamihu je pravdepodobnosť nevyhrania rovnaká a javy $notA_i$ a $notA_j$ sú nezávislé pre všetky $i \neq j$ ($P(notA_i \cap notA_j) = P(notA_i) \cdot P(notA_j)$). Pravdepodobnosť aspoň 1 výhry za n losovaní potom získame odpočítaním pravdepodobnosti, že nevyhrám za ten čas ani raz od celkovej pravdepodobnosti, teda:

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = 1 - P(\bigcap_{j=1}^{n} notA_j) = 1 - P(notA_1)^n. \tag{1.2.1}$$

Využitím tohto vzorca sme zobrazili vývoj počítanej pravdepodobnosti v závislosti

Komb.\ n	**20**	**50**	**100**	**150**	**200**
5B+1Č	6.84E-08	1.71E-07	3.42E-07	5.13E-07	6.84E-07
5B	1.71E-06	4.28E-06	8.56E-06	1.28E-05	1.71E-05
4B+1Č	2.19E-05	5.48E-05	1.10E-04	1.64E-04	2.19E-04
4B	5.47E-04	0.0014	0.0027	0.0041	0.0055
3B+1Č	0.0014	0.0034	0.0069	0.0103	0.0137
3B	0.0339	0.0827	0.1586	0.2281	0.292
2B+1Č	0.0281	0.0689	0.133	0.1927	0.2483
1B+1Č	0.1964	0.4211	0.6648	0.806	0.8877
1Č	0.4107	0.7334	0.9289	0.9811	0.9949
Ľub. výherná	0.56	0.8716	0.9835	0.9979	0.9997

Tabuľka 1.2.1: Pravdepodobnosti aspoň 1 výhry uhádnutím určitej kombinácie za jednotlivé počty losovaní.

od počtu losovaní pri niektorých výherných možnostiach počas 200 časových okamihov (viď Obrázok 1.2.1). Zároveň sme zaznačili do Tabuľky 1.2.1 hodnoty pravdepodobností aspoň 1 danej výhry za 20, 50, 100, 150 a 200 losovaní pre všetky výherné kombinácie. Ukázalo sa, že i pri vysokom počte losovaní sú naše šance na vyššiu výhru stále veľmi nízke, zatiaľ čo investície, ktoré by sme do toho vložili sa pohybujú v tabuľke medzi 40\$-400\$.

Taktiež sme porovnávali počet časových okamihov, za ktoré majú konkrétne výherné a ľubovoľná výherná kombinácia pravdepodobnosť aspoň 1 uhádnutia v niektorom čase väčšiu ako 90%. Chceme teda zistiť, kedy bude platiť:

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \geq 0.9.$$

Využitím vzorca (1.2.1), kde $P(notA_1)$ sme nahradili q a následným upravením sme získali vzťah pre potrebný počet losovaní n:

$$1 - q^n \geq 0.9 \Longleftrightarrow q^n \leq 0.1 \Longleftrightarrow n \geq log_q(0.1).$$

Za q sme potom dosadili jednotlivé pravdepodobnosti nevyhrania (teda je to 1 -

pravdepodobnosť konkrétnej výhry) a výsledný počet losovaní sme zaznamenali do Tabuľky 1.2.2. Powerball sa navyše losuje 2x do týždňa, takže sme tieto hodnoty prepočítali na počet týždňov a rokov (pri konverzii 1 rok = 52 týždňov) potrebných na zabezpečenie aspoň 90%-nej šance získania aspoň 1 konkrétnej výhry.

	Čas zabezpečujúci pravd. aspoň 90% na výhru		
Kombinácia	**Počet losovaní**	**Počet týždňov**	**Počet rokov**
5B+1Č	767528000	383764000	7380077
5B	26774200	13387100	257445
4B+1Č	2102820	1051410	20220
4B	84103	42052	809
3B+1Č	33373	16687	321
3B	1334	667	13
2B+1Č	1614	807	16
1B+1Č	211	106	3
1Č	88	44	1
Ľub. výherná	57	29	1

Tabuľka 1.2.2: Počet časových okamihov potrebných na pravdepodobnosť aspoň 1 uhádnutia vyššiu než 90% pri jednotlivých výherných kombináciách.

Zistili sme, že pravdepodobnosti nad 90% pri kontinuálnom tipovaní by sme sa dožili pri najvyššej výhre 100$ (výhry 3B a 2B+1Č). Zároveň by šanca na výhru vysokých čiastok pri neprestajnom tipovaní počas celého života bola aj tak mizivá, keďže počty rokov uvedené v tabuľke sú obrovské čísla. Vypovedá to o veľkej nevýhodnosti investovania do lotérií, ktorú sme však očakávali.

2 Stávkovanie a Elo-rating

2.1 Nezáporný zisk stávkovej kancelárie

Bežným stanoviskom pri stávkovaní a hazarde je skúmať stratégiu hráča k čo najvyššej výhre. My sa v tejto kapitole naopak budeme zaoberať tým, akú stratégiu má zvoliť stávková kancelária, aby dosiahla nezáporný zisk. Touto problematikou sa zaoberá nasledovný príklad zo zbierky [3].

Uvažujme, že stávková kancelária určila na remízu/výhru/prehru domáceho družstva kurzy $c_0/c_1/c_2$, ktorým zodpovedajú pravdepodobnosti $p_0/p_1/p_2$. Otázne je, pre aké pravdepodobnosti bude očakávaný zisk stávkovej kancelárie nezáporný pri ľubovoľných stávkach.

Ukážeme si riešenie uvedené v [3]. Sumy, ktoré tipujúci stavia na jednotlivé výsledky sú $S_0/S_1/S_2$, takže zisk stávkovej kancelárie pri jednotlivých udalostiach bude:

$$Z_i = S - c_i \cdot S_i \; pre \; i = 0, 1, 2.$$

S tu predstavuje celkovú stavenú sumu, teda $S = \sum_{i=0}^{2} S_i$ a celkový očakávaný zisk Z je potom:

$$Z = \sum_{i=0}^{2} p_i \cdot Z_i = (p_0 + p_1 + p_2) \cdot S - p_0 \cdot c_0 \cdot S_0 - p_1 \cdot c_1 \cdot S_1 - p_2 \cdot c_2 \cdot S_2 = S - \sum_{i=0}^{2} p_i \cdot c_i \cdot S_i.$$

Zároveň chceme, aby $Z \geq 0$, čo má platiť pri hocijakej stávke. Položením $S_i = S$ (maximálna hodnota) dostávame horné ohraničenia pre p_i a celkovú množinu pravdepodobností M pre predpokladaný nezáporný zisk stávkovej kancelárie:

$$M = \{p_i \in R : \; p_i \leq \frac{1}{c_i}; \; p_i \geq 0; \; \sum_{i=0}^{2} p_i = 1 \;\; i = 0, 1, 2\}. \tag{2.1.1}$$

Okrem toho dostávame tiež nasledovný vzťah pre súčet kurzov:

$$p_0 + p_1 + p_2 = 1 \leq \frac{1}{c_0} + \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}; \tag{2.1.2}$$

ktorý nám hovorí, že stávkové kancelárie by mali určovať kurzy tak, aby toto bolo splnené, pričom v realite sa to naozaj deje. Dokazuje to aj Tabuľka 2.1.1, v ktorej sú dáta ohľadom posledných štyroch zápasov slovenskej futbalovej reprezentácie. Kurzy pre jednotlivé zápasy sú zo stránky [6], pričom každý zápas obsahuje kurzy určené 2 rôznymi stávkovými spoločnosťami. Vidíme, že požadovaný súčet (2.1.2) je vo všetkých prípadoch väčší ako 1, teda náš výpočet sa potvrdil aj v realite.

Zápas	Malta-Slovensko		Rakúsko-Slovensko		Slovensko-Litva		Slovensko-Škótsko	
Stávk. Kanc.	10Bet	18Bet	1xBet	5Dimes	bet-at-home	bet365	BetOlimp	Betrally
$\mathbf{c}_1$	32.5	16.25	1.82	1.77	1.37	1.4	2.24	2.2
$\mathbf{c}_0$	8.25	9.5	3.68	3.71	4.25	4.75	3.08	3.1
$\mathbf{c}_2$	1.11	1.1	5	5.3	8.69	10	3.59	3.4
$\mathbf{sum(1/c}_i)$	1.0529	1.0759	1.0212	1.0232	1.0803	1.0248	1.0497	1.0712

Tabuľka 2.1.1: Overenie odvodenej podmienky (2.1.2) pre stanovené kurzy.

2.2 Elo-rating

Z predchádzajúceho postupu je jasné, že ak chcú mať stávkové kancelárie nezáporný očakávaný zisk, mali by vedieť dostatočne dobre určiť jednotlivé pravdepodobnosti, na základe ktorých potom stanovia kurzy.

Jedným zo sofistikovaných spôsobov je Elo-rating System [5], ktorý navrhol Dr. Arpad Elo. Pôvodne to bola metóda na ocenenie schopností šachových hráčov, pričom ich výkon predstavoval náhodnú premennú z normálneho rozdelenia. Neskôr sa zistilo, že výkony nemajú normálne rozdelenie. Tento predpoklad bol teda nahradený premennou $P_{i,j}$ - logistickou funkciou závislou od rozdielu bodov protihráčov.

Podľa [4] sa dnes Elo-rating používa vďaka Bobovi Runyanovi aj pri futbale. Jeho veľkou výhodou je, že zohľadňuje pôsobenie hráča/tímu v minulých kolách. Pri výpočte však berie do úvahy iba medzinárodné zápasy kategórie A. Na základe aktuálnych ratingov sa dá s veľkou presnosťou určiť šanca na výhru u oboch súperiacich tímov:

$$P_{i,j} = \frac{1}{1 + 10^{\frac{-d_{i,j}}{400}}}; \tag{2.2.1}$$

pričom $P_{i,j}$ je pravdepodobnosť výhry tímu i nad j a $d_{i,j}$ je rozdiel medzi skóre i-teho a j-teho tímu. Niekedy sa k $d_{i,j}$ domáceho tímu prirátava navyše 100 bodov, aby sa zohľadnila v zápase výhoda domácich.

Výpočet nového elo-ratingu sa ďalej realizuje podľa vzorca:

$$R_i(novy) = R_i(stary) + K \cdot (W_i - P_{i,j}); \tag{2.2.2}$$

kde K je konštanta určujúca dôležitosť podujatia (čím vyššie K tým vyššia súťaž) a

W_i je výsledok zápasu pre i-te družstvo, pričom:

$$W_i = \begin{cases} 1, & \text{ak } i\text{-ty tím vyhrá nad } j\text{-tym tímom} \\ 1/2, & \text{ak } i\text{-ty tím remízuje s } j\text{-tym tímom} \\ 0, & \text{ak } i\text{-ty tím prehrá s } j\text{-tym tímom.} \end{cases} \tag{2.2.3}$$

Konkrétne hodnoty K sú nasledovné:

- 60 pre finále majstrovstiev sveta;
- 50 pre finále majstrovstiev kontinentov a významnejšie vnútrokontinentálne turnaje;
- 40 pre kvalifikačné zápasy na majstrovstvá sveta alebo na majstrovstvá kontinentu a pre významnejšie turnaje;
- 30 pre všetky ostatné turnaje;
- 20 pre priateľské zápasy.

Hodnotu K potom ešte ovplyvňuje počet gólov. Ak sa hra skončí výhrou o 2 góly, zvýši sa K o polovicu, pri výhre o 3 góly o 3/4 a pri výhre s rozdielom 4 a viac gólov o 3/4 + (N-3)/8, kde N predstavuje rozdiel gólov.

Elo-rating sa určuje po každom zápase, takže predstavuje vždy pomerne aktuálnu informáciu. Menšou nevýhodou je, že nevie vždy zarátať všetky vplyvy ako napríklad zranenia alebo absencie hráčov. Na druhej strane sme už spomínali, že dokáže zohľadniť okrem výhry a prehry aj počet gólov alebo výhodu domáceho prostredia.

Jeho špeciálnou vlastnosťou je tiež súčet $P_{i,j}$ a $P_{j,i}$ rovný 1:

$$P_{i,j} + P_{j,i} = \frac{1}{1 + 10^{\frac{-d_{i,j}}{400}}} + \frac{1}{1 + 10^{\frac{-d_{j,i}}{400}}} = \frac{1 + 10^{\frac{-d_{i,j}}{400}} + 1 + 10^{\frac{d_{i,j}}{400}}}{(1 + 10^{\frac{-d_{i,j}}{400}}) \cdot (1 + 10^{\frac{d_{i,j}}{400}})} = 1.$$

To znamená, že pravdepodobnosť remízy je súčasťou $P_{i,j}$ aj $P_{j,i}$. Zaujímavosťou je, že hodnota $P_{i,j}$ pri výpočte elo-ratingu predstavuje očakávanú hodnotu bodov, ktoré získa tím i od j. To by podľa (2.2.3) malo znamenať, že v elo-pravdepodobnosti výhry i je zarátaná práve polovica pravdepodobnosti remízy i a rovnako v j. Záleží teda od toho, akú váhu bodov priradíme výsledku remízy pri výpočte nového elo-ratingu.

Nemusíme však vždy uvažovať práve priradenie (2.2.3). Vyskytuje sa ale najčastejšie, pričom predstavuje rozrátanie pravdepodobnosti remízy pomerom 1 : 1 medzi $P_{i,j}$ a $P_{j,i}$. Alebo sa možnosť remízy zanedbáva a uvažuje sa len pravdepodobnosť výhry či prehry.

Zároveň si tímy body vymieňajú, teda súčet ratingov pred a po zápase je konštantný (súčet zmien skóre u súperov je nulový). Výhodu má pritom slabší tím, ktorý v prípade výhry môže získať viac bodov ako preferované družstvo. Systém teda zvýhodňuje porazenie silnejšieho súpera oproti porazeniu slabšieho. Rovnako pri prehre stratí viac bodov silnejší tím v porovnaní s tým, koľko by stratil slabší.

Teraz si ukážeme výpočet nového elo-ratingu zo získaných dát, konkrétne aktuálny rating Slovenska. Potrebné údaje týkajúce sa nášho posledného zápasu sú zaznamenané v Tabuľke 2.2.1. Konštanta K bola pritom určená podľa významnosti hraného

Domáci	Hostia	Dom. elo	Hosť. elo	K	$d_{D,H}$	W_D	W_H	Výsledok
Malta	Slovensko	1193	1733	60	-440	0	1	1:3

Tabuľka 2.2.1: Informácie ohľadom posledného zápasu Slovenska využité na výpočet nového elo-ratingu.

podujatia, a to kvalifikačného zápasu na majstrovstvá sveta, ktorému je prisudzovaná hodnota 40. Navyše však hra skončila s rozdielom 2 gólov, čo znamená zvýšenie K o polovicu pôvodnej hodnoty (o 20 bodov). Konečná hodnota K je preto 60. Ďalej treba vypočítať hodnotu $P_{H,D}$ predstavujúcu výhernú pravdepodobnosť hostí, čiže Slovenska. Na to treba poznať hodnotu $d_{H,D}$, ktorá je opačnou hodnotou k $d_{D,H}$, teda 440. Tú sme získali odčítaním rozdielu starých ratingov a započítaním výhody domácich pri zápase (+100 bodov): $d_{D,H} = 1193 - 1733 + 100 = -440$. Môžeme teda dosadiť do vzorca (2.2.1):

$$P_{H,D} = \frac{1}{1 + 10^{\frac{-440}{400}}} = 0.926412444.$$

Dostaneme tak hodnotu $P_{H,D} \doteq 0.9264$. Teraz už poznáme všetky potrebné hodnoty na výpočet nového elo-ratingu, ktorý dostaneme zo vzorca (2.2.2):

$$R_H(novy) = 1733 + 60 \cdot (1 - 0.9264) = 1737.4153.$$

Poslednou úpravou je zaokrúhlenie výsledku, keďže elo-rating sa udáva v celých číslach. Vypočítali sme tak, že aktuálny elo-rating Slovenska má hodnotu 1737 bodov. Táto hodnota súhlasí aj s hodnotou uvedenou na stránke [5], kde sa zaznamenávajú elo-ratingy všetkých krajín.

Ďalej si ilustrujeme výpočet pravdepodobností pomocou Elo-ratingu na skutočných dátach získaných zo stránok [5] a [6]. V Tabuľke 2.2.2 máme k dispozícii historické Elo-ratingy slovenskej reprezentácie za posledných 10 odohratých zápasov. Predpokladáme, že pravdepodobnosť remízy (p_0) je nulová, teda ju zanedbáme a uvažujeme iba pravdepodobnosť výhry 1. tímu ($P_{1,2}$) respektíve 2. tímu ($P_{2,1}$). Z 8 zápasov, kedy nastala

Zápas	**1. Elo**	**2. Elo**	**$d_{1,2}$**	**$P_{1,2}$**	**$P_{2,1}$**	**Výsledok**
Wales-Slovensko	1633	1747	-114	0.3416	0.6584	1
Slovensko-Rusko	1714	1753	-39	0.4441	0.5559	1
Anglicko-Slovensko	1946	1742	204	0.7639	0.2361	0
Nemecko-Slovensko	2023	1755	268	0.8239	0.1761	1
Slovensko-Anglicko	1740	1893	-53	0.4243	0.5757	2
Slovinsko-Slovensko	1588	1723	-35	0.4498	0.5502	1
Slovensko-Škótsko	1701	1681	120	0.6661	0.3339	1
Slovensko-Litva	1724	1450	374	0.8959	0.1041	1
Rakúsko-Slovensko	1666	1732	34	0.5488	0.4512	0
Malta-Slovensko	1193	1733	-440	0.0736	0.9264	2

Tabuľka 2.2.2: Výpočet pravdepodobností výhry a prehry Slovenska v posledných 10 medzinárodných zápasoch. Výsledok 1 pritom znamená výhru 1. tímu v poradí, 2 znamená výhru 2. tímu v poradí a 0 predstavuje remízu.

buď výhra alebo prehra niektorého z tímov (1 alebo 2), určil Elov výpočet pravdepodobnosti 5 správne (zeleno vyznačené). Takže v 5 prípadoch vyhral tím, ktorému bola vypočítaná vyššia pravdepodobnosť. Jeho celková úspešnosť aj so zápasmi, kedy nastala remíza je však iba 50%.

Rozhodli sme sa preto znovu zobrať pravdepodobnosť remízy do úvahy a stanoviť intervaly, v ktorých by sa mali nachádzať pravdepodobnosti výhry, remízy a prehry, aby bol predpoklad očakávaného nezáporného zisku stávkovej spoločnosti splnený. Snažili sme sa teda splniť ohraničenia (2.1.1) z 1. časti tejto kapitoly na predchádzajúce dáta. Najprv sme chceli určiť pravdepodobnosť remízy tak, aby bola rovnomerne rozrátaná medzi Elove pravdepodobnosti. Nedalo sa to však splniť pri každom zápase (viď. nižšie), takže sme sa rozhodli určiť celú množinu, v ktorej by sa mala nachádzať pravdepodobnosť remízy za daného predpokladu.

Ako prvé sme si preto potrebovali určiť maximálne hodnoty jednotlivých pravdepodobností, ktoré spĺňajú (2.1.1). Možné výsledky sme pritom uvažovali z pohľadu tímu napísaného ako prvého v poradí. Takže výhra znamenala výhru 1. tímu a prehra znamenala prehru 1. tímu (výhru 2. tímu), čomu zodpovedali pravdepodobnosti p_1 respektíve p_2. Najprv sme potrebovali hodnoty reálnych kurzov pre tieto zápasy. Získali sme ich zo stránky [6], kde sú k dispozícii kurzy rôznych stávkových spoločností. Želané hodnoty kurzov sme dostali ako geometrický priemer všetkých dostupných kurzov jednotlivých možných výsledkov. Zároveň sme pomocou ich prevrátenej hodnoty dostali horné ohraničenia v podobe $1/c_i$ pre p_i. Minimálna hodnota pravdepodobnosti, ktorú si pravdepodobnosť remízy musela zobrať z $P_{1,2}$ respektíve $P_{2,1}$ je preto $P_{1,2} - 1/c_1$ respektíve $P_{2,1} - 1/c_2$ (alebo v prípade zápornosti 0). Zarátaním vplyvu horného ohraničenia navyše musí platiť:

$$min\{p_0\} = max\{P_{1,2} - \frac{1}{c_1}; 0\} + max\{P_{2,1} - \frac{1}{c_2}; 0\} \leq 1/c_0. \tag{2.2.4}$$

Pre získanie minimálnej pravdepodobnosti výhry stačí uvažovať situáciu, kedy pravdepodobnosti remízy a prehry budú maximálne. V prípade, že hodnota $P_{2,1}$ je väčšia ako hodnota $1/c_2$, tak maximálnou hodnotou pravdepodobnosti prehry bude $1/c_2$. Ak však bude táto hodnota menšia ako $1/c_2$, maximálnu hodnotu pravdepodobnosť prehry nadobudne v $P_{2,1}$. Rovnako dostaneme aj maximálnu hodnotu výhry. Teda platí:

$$max\{p_2\} = min\{P_{2,1}; 1/c_2\}; \tag{2.2.5}$$

respektíve

$$max\{p_1\} = min\{P_{1,2}; 1/c_1\}. \tag{2.2.6}$$

Keď ale uvažujeme maximálnu hodnotu pravdepodobnosti remízy, musí byť splnené, že $P_{1,2}$ aj bez časti pravdepodobnosti remízy v nej je nezáporná a rovnako aj $P_{2,1}$

bez časti remízy v nej. Jednotlivé časti remízy teda musia byť menšie alebo rovné príslušným elo-pravdepodobnostiam. Taktiež musí byť pravdepodobnosť remízy menšia ako horné ohraničenie $1/c_0$:

$$max\{p_0\} = min\{P_{1,2} + P_{2,1}; 1/c_0\} = min\{1; 1/c_0\}. \tag{2.2.7}$$

Už teda poznáme hodnoty maximálnych prevdepodobností jednotlivých výsledkov, ktoré potrebujeme na vyjadrenie minimálnej hodnoty pravdepodobnosti výhry. Pokiaľ je súčet maximálnych pravdepodobností prehry a remízy menší ako 1, tak požadovanú pravdepodobnosť získame odčítaním týchto maximálnych hodnôt od 1. V prípade ich súčtu väčšieho alebo rovného 1 dosadíme za výslednú pravdepodobnosť nulu:

$$min\{p_1\} = max\{1 - max\{p_0\} - max\{p_2\}; 0\}. \tag{2.2.8}$$

Tento postup sa dá aplikovať aj na minimálnu pravdepodobnosť prehry, čím získame:

$$min\{p_2\} = max\{1 - max\{p_0\} - max\{p_1\}; 0\}. \tag{2.2.9}$$

Povedzme, že teraz chceme určiť pravdepodobnosť remízy rovnomerným rozrátaním medzi elo-pravdepodobnosti. Potom remíza zoberie rovnakú časť z elo-výhry a elo-prehry, ktorú si označíme ako X. Na základe vyššie popísaných postupov pre X teda musí platiť:

$$X \geq max\{P_{1,2} - \frac{1}{c_1}; 0\} \text{ a } X \geq max\{P_{2,1} - \frac{1}{c_2}; 0\};$$

a zároveň

$$X \leq min\{P_{1,2}; 1/2c_0\} \text{ a } X \leq min\{P_{2,1}; 1/2c_0\}.$$

Keďže máme pre X pomerne veľa ohraničení, v niektorých prípadoch môže byť ich prienik nulový a tým pádom by sa nedala pravdepodobnosť remízy rozdeliť rovnomerne medzi $P_{1,2}$ a $P_{2,1}$. S týmto problémom sa stretávame hneď pri 1. uvažovanom zápase (Wales-Slovensko). Hodnota $P_{2,1} - \frac{1}{c_2}$ (0.6584 - 0.3682 = 0.2902) je totiž väčšia ako $1/2c_0$ (1/5.8901 = 0.1698). Preto sa uvažovanie ľubovoľného rozrátania pravdepodobnosti remízy ukazuje ako lepšia voľba.

Z rovníc (2.2.4)-(2.2.9) by sme mali dostať minimálne aj maximálne hodnoty pre jednotlivé pravdepodobnosti, teda pre každú p_i by sme mali mať interval hodnôt $I_i = \langle min\{p_i\}; max\{p_i\}\rangle$. V tomto intervale by sa mala nachádzať hodnota pravdepodobnosti výsledku i. Aplikáciou na 10 posledných zápasov slovenskej futbalovej reprezentácie sme pre každý z nich dokázali určiť tento interval. Nenastala teda situácia, kedy by sme nedokázali identifikovať pravdepodobnosť remízy za predpokladu splnenia nezápornosti očakávaného zisku stávkovej kancelárie. Tieto intervaly sme zaznamenali do Tabuľky 2.2.3.

Zápas	$\mathbf{c}_1$	$\mathbf{c}_0$	$\mathbf{c}_2$	$\mathbf{P}_{1,2}$	$\mathbf{P}_{2,1}$	$\mathbf{I}_1$	$\mathbf{I}_0$	$\mathbf{I}_2$
Wales-Slovensko	3.084	2.946	2.717	0.342	0.658	$\langle 0.292; 0.324\rangle$	$\langle 0.308; 0.339\rangle$	$\langle 0.336; 0.368\rangle$
Slovensko-Rusko	3.336	3.126	2.415	0.444	0.556	$\langle 0.266; 0.3\rangle$	$\langle 0.286; 0.32\rangle$	$\langle 0.380; 0.414\rangle$
Anglicko-Slovensko	1.847	3.187	5.695	0.764	0.236	$\langle 0.511; 0.541\rangle$	$\langle 0.283; 0.314\rangle$	$\langle 0.145; 0.176\rangle$
Nemecko-Slovensko	1.426	4.257	10.696	0.824	0.176	$\langle 0.672; 0.701\rangle$	$\langle 0.205; 0.235\rangle$	$\langle 0.064; 0.093\rangle$
Slovensko-Anglicko	5.152	3.474	1.768	0.424	0.576	$\langle 0.147; 0.194\rangle$	$\langle 0.24; 0.288\rangle$	$\langle 0.518; 0.566\rangle$
Slovinsko-Slovensko	2.517	3.026	3.142	0.450	0.550	$\langle 0.351; 0.397\rangle$	$\langle 0.284; 0.33\rangle$	$\langle 0.272; 0.318\rangle$
Slovensko-Škótsko	2.265	3.111	3.537	0.666	0.334	$\langle 0.396; 0.442\rangle$	$\langle 0.276; 0.321\rangle$	$\langle 0.237; 0.283\rangle$
Slovensko-Litva	1.392	4.551	9.763	0.896	0.104	$\langle 0.678; 0.718\rangle$	$\langle 0.179; 0.22\rangle$	$\langle 0.062; 0.102\rangle$
Rakúsko-Slovensko	1.747	3.562	4.940	0.549	0.451	$\langle 0.517; 0.549\rangle$	$\langle 0.249; 0.281\rangle$	$\langle 0.17; 0.202\rangle$
Malta-Slovensko	32.817	8.575	1.114	0.074	0.926	$\langle 0; 0.03\rangle$	$\langle 0.072; 0.117\rangle$	$\langle 0.853; 0.898\rangle$

Tabuľka 2.2.3: Výpočet intervalov pre pravdepodobnosti jednotlivých výsledkov získaný na základe elo-pravdepodobností a (2.1.1).

Samozrejme tieto intervaly nemôžeme chápať tak, že si vyberieme ľubovoľné hodnoty z nich spĺňajúce súčet 1. Potrebujeme také, ktoré budú okrem toho spĺňať:

$$P_{1,2} = p_1 + q \cdot p_0 \ a \ P_{2,1} = p_2 + (1 - q) \cdot p_0;$$

kde p_i sú vybrané hodnoty z intervalov I_i a q je nezáporný koeficient rozrátania pravdepodobnosti remízy p_0 menší ako 1.

3 Spojenie kariet

3.1 Montmortova úloha a jej riešenie

Medzi jedny z rýchlych kartových hier patrí hra o „spojení" kariet. Predstavuje upravenú verziu Montmortovho problému, ktorý uverejnil spomínaný matematik aj s riešením ešte v roku 1708 v knihe [7]. V štatistike je známejšie ako Príklad párovania klobúkov spomínaný v [8] alebo Problém s listami a obálkami spomínaný v [9]. V prvom prípade ide o párovanie n klobúkov so skutočnými majiteľmi a v druhom o triafanie n listov do obálok so správnymi adresami. Príklad je prebratý zo zbierky [10].

Súčasťou tejto hry je 13 srdcových (hráčove) a 13 pikových kariet (bankárove). Po zamiešaní rozloží všetky svoje karty najprv bankár a následne hráč. Spojenie nastane, ak sú oproti sebe karty s rovnakou hodnotou. Pred začiatkom hry musí hráč zaplatiť bankárovi vstupné 2 eurá, pričom potom za každé spojenie získa po 1 eure. Otázne je, či sa bankárovi táto hra oplatí alebo nie.

V prvej časti úlohy sme sa zamerali na vypočítanie očakávaného bankárovho zisku. Súčasťou toho bolo zavedenie čiastkových náhodných premenných X_i, ktoré nadobúdali hodnoty 1 alebo 0 podľa toho či nastalo alebo nenastalo spojenie na i-tom mieste. Spojenie na hociktorom mieste pritom mohlo nastať s pravdepodobnosťou $1/n$, teda s rovnakou pravdepodobnosťou ako na ostatných:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{ak je spojenie na } i\text{-tom mieste s pp. } 1/n \\ 0, & \text{inak s pp. } 1-1/n \quad \text{pre } i=1,...,n. \end{cases} \tag{3.1.1}$$

Z toho vyplýva, že stredná hodnota počtu spojení je:

$$E(X) = E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p(X_i) \cdot X_i = n \cdot \frac{1}{n} \cdot 1 = 1; \tag{3.1.2}$$

pričom naše n predstavovalo 13 maximálnych možných spojení. Vypočítaná hodnota však ešte nepredstavuje očakávaný zisk bankára. Ten je : $E(2-X) = 2 - E(X) = 2 - 1 = 1$. Bankárovi sa teda oplatí táto hra, keďže môže očakávať kladný zisk.

Teraz sa zameriame na rozdelenie náhodnej premennej X určujúcej počet spojení, ktoré dokážeme zapísať aj inak ako (3.1.1). Konkrétne chceme nájsť pravdepodobnosti pre jednotlivé počty spojení. Najprv ale potrebujeme zistiť koľko rôznych rozmiestnení kariet prinesie presne k spojení. To predstavuje jav, kedy k kariet bude oproti sebe s rovnakou hodnotou a $(n-k)$ s rôznou. Počet takýchto rozmiestnení ovplyvňujú permutácie medzi kartami, ktoré sa „nespoja". Ich počet dostaneme ako rozdiel počtu ich všetkých permutácií $(n-k)!$ a počtu permutácií p, ktoré by priniesli medzi nimi aspoň 1 spojenie:

$$p = |Y_1 \cup Y_2 \cup ... \cup Y_{n-k}|; \tag{3.1.3}$$

pričom Y_i predstavuje situáciu, že u i-tej z týchto kariet nastalo spojenie. Vieme, že aspoň i spojení nastane vtedy, ak vyberieme i kariet, u ktorých nastane spojenie a ostatné $(n-k-i)$ karty náhodne doplníme $= \binom{n-k}{i} \cdot (n-k-i)!$ možností.

Ďalej na základe [11] využijeme princíp inklúzie a exklúzie pre javy A_i, $i = 1, ..., m$:

$$|\bigcup_{i=1}^{m} A_i| = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} (\sum_{1 \leq i_1 \leq ... \leq i_k \leq m} |A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k}|). \tag{3.1.4}$$

Aplikovaním (3.1.4) na (3.1.3) tak dostávame:

$$p = \sum_{i=1}^{n-k} (-1)^{i+1} \cdot \binom{n-k}{i} \cdot (n-k-i)! = \sum_{i=1}^{n-k} (-1)^{i+1} \cdot \frac{(n-k)!}{i!}. \tag{3.1.5}$$

Teraz už poznáme celkový počet permutácií, určujúci možnosti rozmiestnenia $(n-k)$ kariet bez spojenia $= (n-k)! - p$. My ale potrebujeme poznať počet rozmiestnení všetkých n kariet, preto z n potrebujeme navyše vybrať $(n-k)$ pozícií, na ktorých budú tieto karty bez spojenia (respektíve k pozícií pre karty so spojením). Dostávame tak finálny počet $R_{n,k}$ rôznych rozmiestnení n kariet s k spojeniami:

$$R_{n,k} = \binom{n}{k} \cdot ((n-k)! - p) = \binom{n}{k} \cdot \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \cdot \frac{(n-k)!}{i!} = \frac{n!}{k!} \cdot \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}. \tag{3.1.6}$$

Pravdepodobnosť práve k spojení tak predstavuje podiel počtu permutácií s k spojeniami a celkového počtu permutácií:

$$P(X=k) = \frac{R_{n,k}}{n!} = \frac{\frac{n!}{k!} \cdot \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}}{n!} = \frac{1}{k!} \cdot \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}. \tag{3.1.7}$$

V našom prípade je pritom $n = 13$. Aplikovaním vzorca (3.1.7) dostávame pravdepodobnosti pre počty spojení zapísané v Tabuľke 3.1.1. Ak by išlo $n \to \infty$, potom z

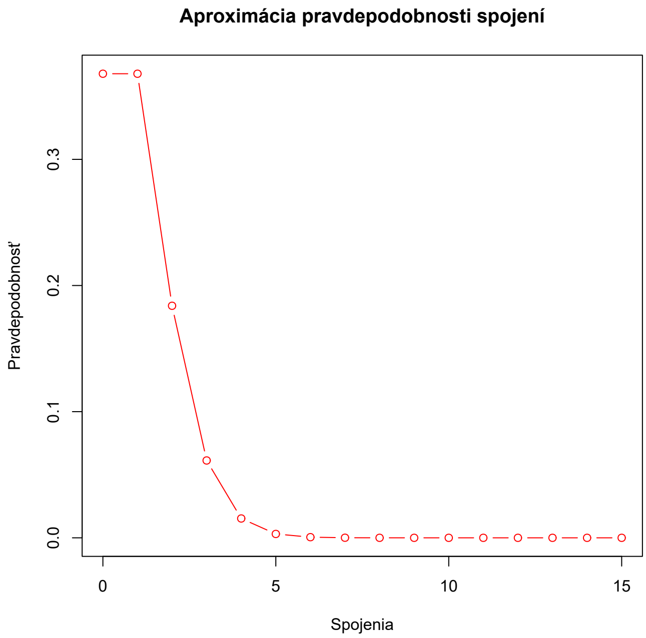
Počet spojení													
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**
0.368	0.368	0.184	0.061	0.015	0.003	5.1e-04	7.3e-05	9.1e-06	1e-06	9.2-08	1.3-08	0	1.6e-10

Tabuľka 3.1.1: Pravdepodobnosti pre konkrétne počty spojení.

Taylorovho rozvoja:

$$P(X = k) = \frac{1}{k!} \cdot e^{-1}. \tag{3.1.8}$$

Taktiež ešte môžeme porovnať aproximáciu a skutočnú pravdepodobnosť pri rôznych



Obr. 3.1.1: Funkcia aproximujúca pravdepodobnosti jednotlivých počtov spojení tvaru $f(x) = \frac{1}{x!} \cdot e^{-1}$.

hodnotách n. Konkrétne sme si zvolili $n = 10$ a $n = 15$. Porovnávanie sa uskutočňovalo na základe relatívnych chýb aproximácie:

$$\text{Rel.chyba}_k = \left| \frac{P(X = k) - P(X = k)_{aprox.}}{\mathrm{P(X = k)}} \right| = \left| \frac{\frac{1}{k!} \cdot (\sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}) - \frac{1}{k!} \cdot e^{-1}}{\frac{1}{k!} \cdot \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}} \right|.$$

Jedinou nevýhodou bolo, že počet spojení $k = n - 1$ je nulový a vtedy relatívna chyba aproximácie nie je definovaná (0 v menovateli). Ostatné chyby sme si však vyjadrili do Tabuľky a následne vykreslili graf modelujúci relatívne chyby pre pravdepodobnosti možných počtov spojení . Najväčšie hodnoty relatívnych chýb boli zaznamenané pri hodnote $k = n$ a relatívna chyba rástla s počtom spojení pre konkrétne počty kariet (s výnimkou $k = n - 1$). To znamená, že pravdepodobnosti menších počtov spojení dokáže aproximácia odhadnúť pomerne dobre, ale čím viac sa približuje počet spojení k n, tým je aproximácia menej presná.

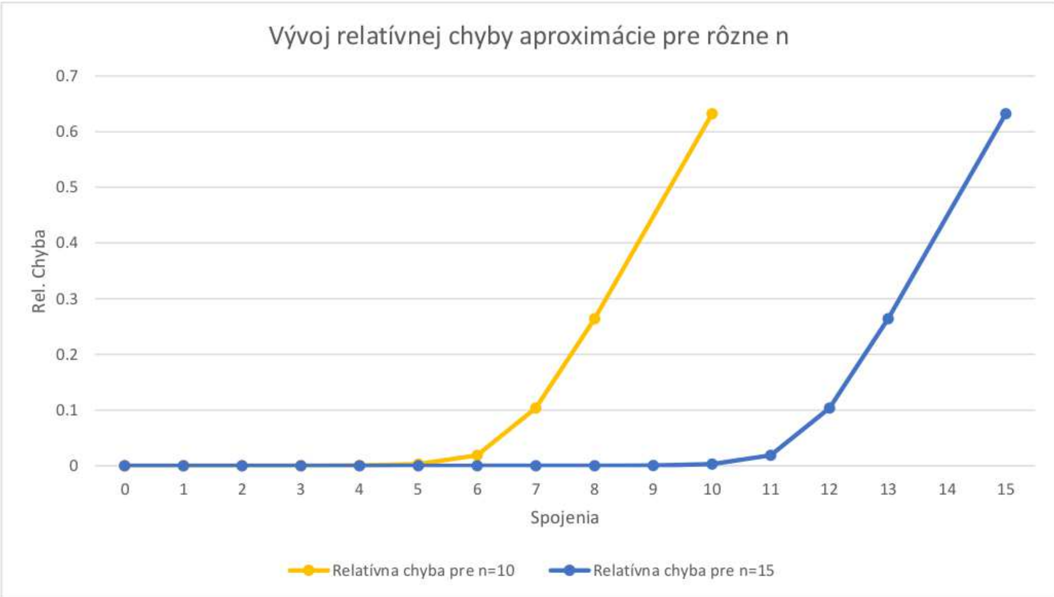
Spojenia	**10 kariet**	**15 kariet**	**Aproximácia**	**Rel. chyba10**	**Rel. chyba15**
0	0.3679	0.3679	0.3679	1.6E-07	1.12E-07
1	0.3679	0.3679	0.3679	6.56E-07	1.12E-07
2	0.1839	0.1839	0.18391	6.96E-06	1.12E-07
3	0.0613	0.0613	0.0613	6.07E-05	3.18E-09
4	0.0153	0.0153	0.0153	0.0005	3.18E-09
5	0.0031	0.0031	0.0031	0.0033	3.18E-09
6	0.0005	0.0005	0.0005	0.019	7.21E-07
7	6.61E-05	7.3E-05	7.3E-05	0.1036	6.81E-06
8	1.24E-05	9.12E-06	9.12E-06	0.2642	6.06E-05
9	0	1.01E-06	1.01E-06	NA	0.0005
10	2.76E-07	1.01E-07	1.01E-07	0.6321	0.0033
11		9.39E-09	9.22E-09		0.019
12		6.96E-10	7.68E-10		0.1036
13		8.03E-11	5.91E-11		0.2642
14		0	4.22E-12		NA
15		7.65E-13	2.81E-13		0.6321

Tabuľka 3.1.2: Pravdepodobnosti jednotlivých počtov spojení a vyčíslenie ich relatívnych chýb v porovnaní s pravdepodobnosťou aproximácie.

3.2 Analýza preferencií hráčov

V predchádzajúcej časti sme sa pozreli na hru o spojení kariet z teoretického hľadiska. Teraz si zase predstavíme túto hru z pohľadu hráčov a ich herných stratégií.

Na cvičeniach z pravdepodobnosti a štatistiky bola zadaná nasledovná úloha z [12]:



Obr. 3.1.2: Relatívne chyby aproximácie pre pravdepodobnosti spojení, kde $n = 10$ a $n = 15$. Relatívne chyby pre pravdepodobnosť počtu spojení $k = n-1$ sú nedefinované (chýba gulička na grafe).

Majme číslo N medzi 1 a 24, ktoré si môžeme ľubovoľne zvoliť. Úlohou bolo napísať permutáciu čísel 1 až N tak, aby s náhodne zostaveným poradím kartičiek s rovnakými N hodnotami nastalo čo najviac spojení. Okrem zvolenia optimálneho N a výberu permutácie bolo treba aj zdôvodniť svoje voľby - intuitívne alebo matematicky.

Úloha znovu predstavuje obmenu Montmortovho problému. Preto na ňu môžeme použiť odvodené postupy z 1. časti. Modelovaním tejto úlohy získame viac informácie o tom, akú stratégiu sa oplatí aplikovať.

Pre $N < 10$ sme zobrazili hodnoty pravdepodobnosti pre možné počty spojení podľa vzorca (3.1.7). Ako vidíme v Tabuľke 3.2.1, čím je väčší počet kariet, tým sa zmenšuje pravdepodobnosť nenulových počtov spojení. Najistejšia možnosť je pri $N = 1$, kedy je isté 1 spojenie. Pri $N = 2$ zase máme 50%-nú šancu na 2 spojenia, ktorá je rovnaká aj pre žiadne spojenie. A pri $N = 3$ ešte máme 50%-nú šancu na 1 spojenie. Ostatné pravdepodobnosti sú už pod 50% a s narastajúcim počtom spojení rýchlo klesajú k nule. Keď sa ale pozrieme na pravdepodobnosť aspoň jedného spojenia, vychádzajú nám pomerne vysoké šance.

Na druhej strane 1 spojenie môžeme mať isté pri $N = 1$, teda by sme sa mali po-

	Počet kariet N								
Spojenia	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	0	0.5	0.3333	0.375	0.3667	0.3681	0.3679	0.3679	0.3679
1	1	0	0.5	0.3333	0.375	0.3667	0.3681	0.3679	0.3679
2		0.5	0	0.25	0.1667	0.1875	0.1833	0.184	0.1839
3			0.1667	0	0.0833	0.0556	0.0625	0.0611	0.0613
4				0.0417	0	0.0208	0.0139	0.0156	0.0153
5					0.0083	0	0.0042	0.0028	0.0031
6						0.0014	0	0.0007	0.0005
7							0.0002	0	9.92E-05
8								2.48E-05	0
9									2.76E-06
aspoň 1	1	0.5	0.6667	0.6249	0.6333	0.6319	0.6321	0.6321	0.6321
aspoň 2	0	0.5	0.1667	0.2917	0.2583	0.2653	0.2641	0.2643	0.2642

Tabuľka 3.2.1: Pravdepodobnosti pri jednotlivých počtoch kariet a spojení.

zerať na pravdepodobnosť aspoň 2 spojení a podľa nej sa rozhodovať pre vyššie N alebo radšej ostať pri istote $N = 1$. Najvyššia šanca je v tomto prípade pre $N = 2$ (50%), potom je už všade nižšia ako 1/3. Pre $N \geq 10$ je pritom hodnota aspoň 1 a aspoň 2 spojení už približne rovnaká ako pre $N = 9$, pretože hodnota 0 a 1 spojení so zvyšujúcim sa N rýchlo konverguje k hodnote 0.3679. Teda voľba N záleží od toho, nakoľko hráči obľubujú riziko/náhodu.

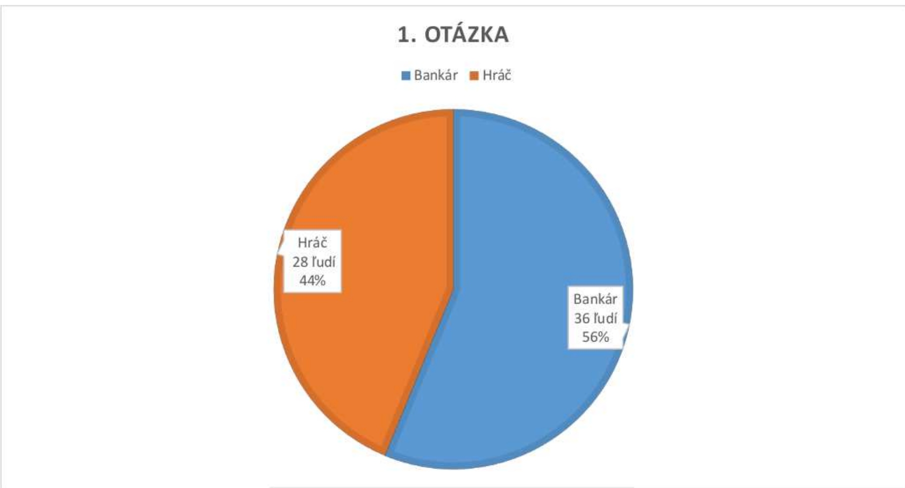
Na základe [13] sme zistili výsledky. Túto úlohu riešili 3 študenti. Prvý z nich si vybral istý 1 bod pri $N = 1$ a ostatní 2 si vybrali $N = 24$. Jeden sa odvolával na možnosť vyšších bodových ziskov a druhý na vysokú pravdepodobnosť aspoň 1 spojenia (približne 0.6321) a rovnako možnosť zisku viac bodov. Ako však vidíme, pri niektorých možnostiach menšieho N je vyššia šanca získať aspoň 1 spojenie a rovnako sú tam vyššie šance na konkrétne počty spojení väčšie ako 1 (napr. $N = 3$).

Podobne sme sa rozhodli analyzovať príklad o spojeniach kariet zo začiatku tejto kapitoly. Z Tabuľky 3.1.1 môžeme vidieť, že pravdepodobnosti žiadneho a jedného spojenia sú rovnaké. V skutočnosti sa síce líšia ale iba o malú konštantu $\frac{1}{13!}$, čo sa ukáže po postupnom dosadení 0 a 1 namiesto k v použitom vzorci (3.1.7). Toto číslo je ale také maličké, že v konečnom dôsledku výsledky takmer neovplyvní.

Taktiež už z predchádzajúceho postupu vieme, že bankárov očakávaný zisk je 1 euro. Rozhodli sme sa preto otestovať, ako sa ľudia budú rozhodovať pri postupnom pridávaní takýchto informácií. Zostavili sme sériu 3 otázok, konkrétne:

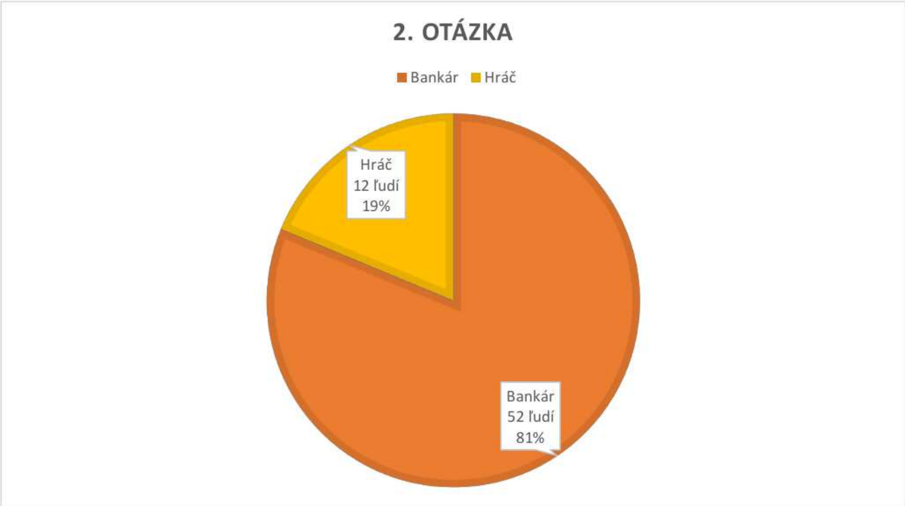
1. Ktorú úlohu by si si vybral - byť hráčom alebo bankárom?
2. Ktorú z možností by si si vybral, ak navyše vieš, že stredná hodnota počtu spojení je 1?
3. Aká by bola tvoja odpoveď, keď vieš, že pravdepodobnosť žiadneho a 1 spojenia je takmer rovnaká a rovná približne 37% pri každom z nich samostatne?

Do tohto prieskumu bolo zapojených 64 ľudí. Výsledky sú zobrazené na Obr. 3.2.1-3.2.3. Z grafov to vyzerá tak, že čím viac mali ľudia informácií o hre, tým menej boli

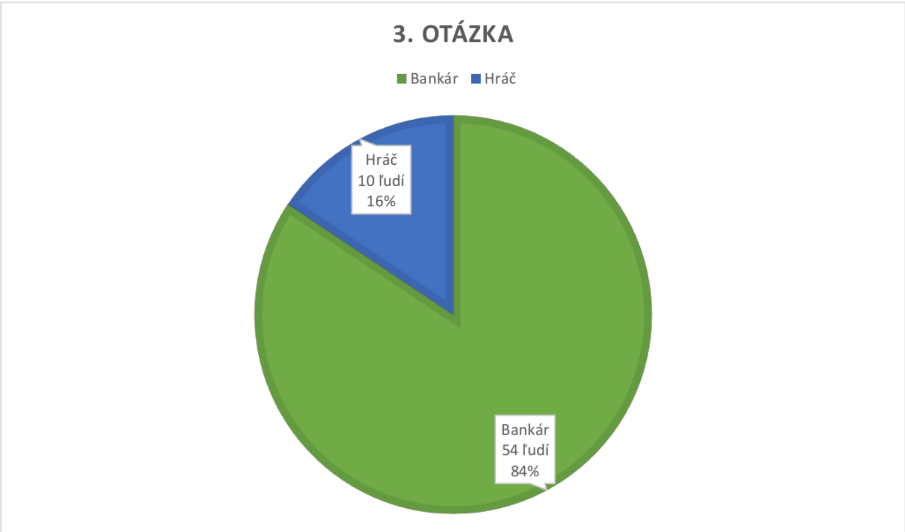


Obr. 3.2.1: Výsledky preferencií po 1. otázke.

náchylnejší voliť si úlohu hráča. Napriek tomu bolo pomerne veľa z nich ochotných voliť si hráča aj po poslednej otázke - až 16% (10 ľudí zo 64). Z poslednej otázky totiž vyplýva, že pravdepodobnosť výhry hráča je menej ako 26%, konkrétne len 8%. Hovorí to o tom, že títo účastníci prieskumu zrejme obľubujú vyššiu mieru rizika.



Obr. 3.2.2: Výsledky preferencií po 2. otázke.



Obr. 3.2.3: Výsledky preferencií po 3. otázke.

Taktiež sme do Tabuľky 3.2.2 zaznačili úspešnosť jednotlivých kombinácií odpovedí u ľudí, ktorí sa zapojili do tohto prieskumu. Rozdelili sme jednotlivé kombinácie aj podľa preferencií u žien a u mužov. Najčastejšou kombináciou odpovedí bol 3x bankár, čo si zvolilo až 31 ľudí, druhou najčastejšou kombináciou bola po prvej otázke odpoveď hráč (málo informácie) a potom bankár (viac informácie), čo napísalo 19 ľudí. To predstavuje 2 najistejšie možnosti z hľadiska pravdepodobnosti a informovanosti. U mužov rovnako vyhrala kombinácia BBB, narozdiel u žien, kde vyhrala 2. najčastejšia kombinácia HBB. Žien sa pritom zúčastnilo v prieskume 30 a mužov 34. Ostatné kombinácie už boli menej populárne. Z hľadiska informovanosti boli zaujímavou voľbou

Kombinácia	Počet žien	Počet mužov	Celk. počet	Celk. výskyt
BBB	9	22	31	48.44%
HBB	13	6	19	29.69%
HHH	3	2	5	7.81%
HHB	3	1	4	6.25%
BHH	0	3	3	4.69%
BBH	2	0	2	3.13%
BHB	0	0	0	0%
HBH	0	0	0	0%

Tabuľka 3.2.2: Popularnosť jednotlivých kombinácií odpovedí v prieskume, kde B predstavuje možnosť bankár a H hráč.

kombinácie HHH, BHH a BBH, ktoré si volili zrejme riziko obľubujúci respondenti. Tieto kombinácie boli možno aj preto menej časté. Posledné 2 kombinácie - BHB a HBH si zase nezvolil žiadny z respondentov. Väčšina účastníkov sa však nakoniec priklonila k úlohe bankára, ktorá by im teoreticky mala priniesť zisk.

Ďalej sme sa rozhodli otestovať, či sa líšia preferencie žien a mužov v tomto dotazníku. Testujeme teda hypotézu H_0: Počet respondentov hlasujúcich za konkrétnu kombináciu u mužov je vždy rovnaký ako u žien. Keďže naše dáta sú kategorické a počet respondentov je pomerne vysoký, použili sme test chí-kvadrát na testovanie ich homogenity. Testovacia štatistika (TS), ktorá je súčasťou tohto testu má tvar:

$$TS = \sum_{i=1}^{\#kateg.} \sum_{j=1}^{\#komb.} \frac{(O_{i,j} - E_{i,j})^2}{E_{i,j}};$$

kde $E_{i,j} = \frac{(\#\text{dát v i}-\text{tej kategórii})\cdot(\#\text{dát pri j}-\text{tej kombinácii})}{\#\text{dát}}$ alebo očakávaný počet pre konkrétne políčko v našej tabuľke a O_i je nameraná početnosť v tomto políčku. Tabuľku 3.2.2 sme pritom pretransformovali na Tabuľku 3.2.3. Transformácia bola potrebná kvôli malým očakávaným hodnotám pri niektorých kombináciách. Keďže test chí-kvadrát požaduje aspoň 80% očakávaných početností $E_{i,j}$ nad 5, museli sme kombinácie s malým početnosťami spojiť do 1 možnosti. Na základe Tabuľky 3.2.3 sme potom vypočítali celkovú testovú štatistiku, ktorá mala hodnotu 8.098. Porovnali sme ju

	Kategórie		
Kombinácia	**Ženy**	**Muži**	**Spolu**
BBB	9	22	31
HBB	13	6	19
Ostatné	8	6	14
Spolu	30	34	64

Tabuľka 3.2.3: Pretransformovaná tabuľka, podľa ktorej sme testovali homogenitu dát.

s kritickou hodnotou chí-kvadrát rozdelenia s 2 stupňami voľnosti (počet stupňov voľnosti= (2 kat. $-$ 1) $\cdot$ (3 komb. $-$ 1) $=$ 2) na hladine významnosti 5% = 5.991. Keďže nám vyšla väčšia hodnota ako tabuľková hodnota chí-kvadrátu χ^2_2, hypotézu H_0 zamietame a teda rozdiel preferencií u mužov a žien v spomínanom dotazníku považujeme za štatisticky významný.

Poslednou vecou bolo roztriediť respondentov podľa toho ako a kedy menili svoj názor, ak ho menili. Teda ktorá informácia ich presvedčila zmeniť názor, ktorý zastávali po predošlej otázke a aká bola ich zmenená odpoveď. Napríklad ak svoju odpoveď zmenili na 2. otázke z možnosti hráč na bankár, zmenená odpoveď by bola bankár a presvedčila by ich 1. informácia (v 1. otázke totiž nemali žiadnu informáciu o hre navyše). Z Tabuľky 3.2.4 môžeme vidieť, že ženy boli náchylnejšie na zmenu odpovedí,

	Zmena po 1. informácii			Zmena po 2. informácii		
Zmenená odpoveď	**Ženy**	**Muži**	**Celkovo**	**Ženy**	**Muži**	**Celkovo**
Hráč	0	3	3	2	0	2
Bankár	13	6	19	3	1	4
Ľubovoľná	13	9	22	5	1	6

Tabuľka 3.2.4: Zmena preferencií respondentov počas dotazníka.

keďže zmenili svoje odpovede až 18-krát, zatiaľ čo u mužov nastala zmena preferencií iba 10-krát.

4 Bertrandov paradox

4.1 Bertrandova úloha a jej riešenie

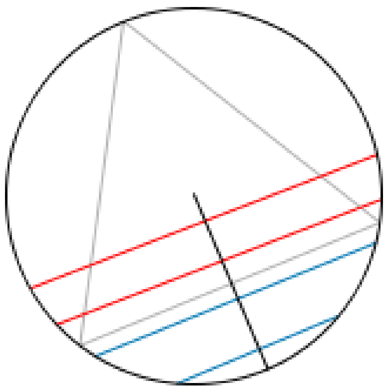
V histórii matematiky sa objavilo množstvo problémov a paradoxov, ktoré nevedeli vyriešiť dlhé roky ani najlepší matematici. Jedným z nich je Bertrandov paradox. Znenie tejto úlohy vydal J. Bertrand spolu s ďalšími problémami v roku 1889. Jeho znenie bolo nasledovné:

Majme kruh, v ktorom náhodne zvolíme tetivu. Aká je pravdepodobnosť, že zvolená tetiva bude dlhšia ako strana rovnostranného trojuholníka vpísaného do daného kruhu?

Paradoxom tejto úlohy je to, že rôznymi postupmi dokážeme získať rôzne výsledné pravdepodobnosti, čo by malo znamenať, že úloha je zle definovaná alebo niektoré postupy nie sú správne. Najprv si ilustrujme možné prístupy k riešeniu, uvedené v [14], v ktorých využijeme geometrickú pravdepodobnosť, teda:

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\omega)},$$

kde A je merateľná oblasť, v ktorej nastáva úspech, ω je merateľná oblasť všetkých možných udalostí a $m(A)$ a $m(\omega)$ predstavujú miery týchto oblastí.

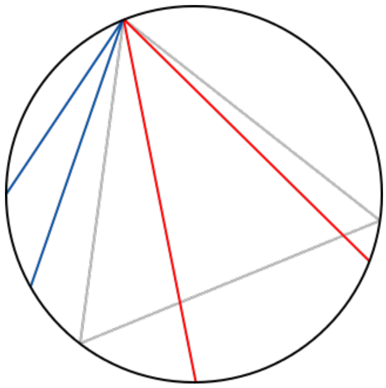


Obr. 4.1.1: Prvý spôsob riešenia Bertrandovho paradoxu (červené tetivy sú dlhšie ako strana rovnostranného trojuholníka, modré kratšie).

1. V prvom prípade si zvolíme polomer kruhu r a náhodný bod na ňom, cez ktorý vedieme kolmo na polomer tetivu. Čiže pokiaľ zvolený bod bude dostatočne blízko stredu kruhu, skonštruovaná tetiva bude väčšia ako strana vpísaného trojuholníka. Dostatočne blízko v tomto prípade znamená menšia vzdialenosť od

stredu ako je polovica polomeru kruhu. Keď totiž vpíšeme do rovnostranného trojuholníka kružnicu, bude mať polomer práve $r/2$. Celkovú pravdepodobnosť teda vyčíslime ako $\frac{r/2}{r} = 1/2$.

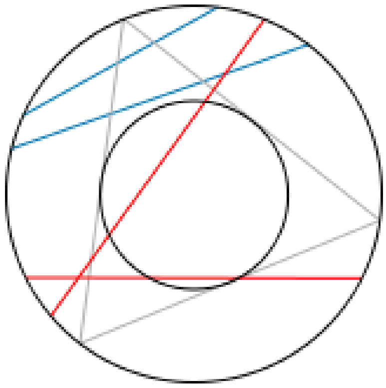
2. V ďalšom prípade vedieme náhodnú tetivu z jedného z vrcholov rovnostranného trojuholníka. Vieme, že pokiaľ sa bude nachádzať medzi ramenami trojuholníka vychádzajúcimi z vybraného vrcholu, tak bude väčšia ako strana tohto trojuholníka. Keďže ramená rovnostranného trojuholníka zvierajú uhol $60° = \pi/3$ a tetiva sa v danom vrchole pohybuje v uhle π, celková pravdepodobnosť je určená podielom $\frac{\pi/3}{\pi} = 1/3$.



Obr. 4.1.2: Druhý spôsob riešenia Bertrandovho paradoxu (červené tetivy sú dlhšie ako strana rovnostranného trojuholníka, modré kratšie).

3. Nakoniec náhodne volíme na ploche kruhu body, ktoré predstavujú stredy tetív, pričom každý z nich okrem stredu kruhu určuje stred práve jednej konkrétnej tetivy. Pokiaľ padnú tieto body na plochu kruhu vpísaného rovnoramennému trojuholníku, prislúchajúce tetivy budú väčšie ako strany tohto trojuholníka a plocha kde môžu padnúť je plocha celého opísaného kruhu. Výsledná pravdepodobnosť je teda $\frac{\pi \cdot (r/2)^2}{\pi \cdot r^2} = 1/4$.

Problémom popísaných metód je, že každá z nich predpokladá iné pravdepodobnostné rozdelenie náhodnej tetivy. Táto nejasnosť je spôsobená tým, že v zadaní problému nie je dané, čo znamená náhodný výber tetivy, a tak si každá z metód určila vlastný spôsob náhodného výberu. To potom vedie k rôznym výsledkom, ktoré sú dobré, pokiaľ rozšírime zadanie o predpoklady, ktoré viedli k výberu tetivy pri jednotlivých postupoch. Nie je to však odpoveď na pôvodnú Bertrandovu otázku.



Obr. 4.1.3: Tretí spôsob riešenia Bertrandovho paradoxu (červené tetivy sú dlhšie ako strana rovnostranného trojuholníka, modré kratšie).

Tú sa pokúsil zodpovedať T. Jaynes v článku [15] v roku 1973. Na základe pôvodného zadania usúdil, že pravdepodobnostné rozdelenie náhodnej tetivy má byť invariantné na zmenu veľkosti a polohy kruhu. To znamená, že kruhy s veľkým a malým polomerom by mali mať rovnaké pravdepodobnostné rozdelenie tetív, ktoré by sa ani po ich posune umiestnenia nemalo zmeniť. Okrem toho by toto rozdelenie malo byť invariantné aj vzhľadom na rotáciu. Zarátaním všetkých týchto vplyvov dokázal, že funkcia, ktorá spomínané invariantnosti pri integrácii spĺňa má tvar:

$$f(r,\ \theta) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot r}, \tag{4.1.1}$$

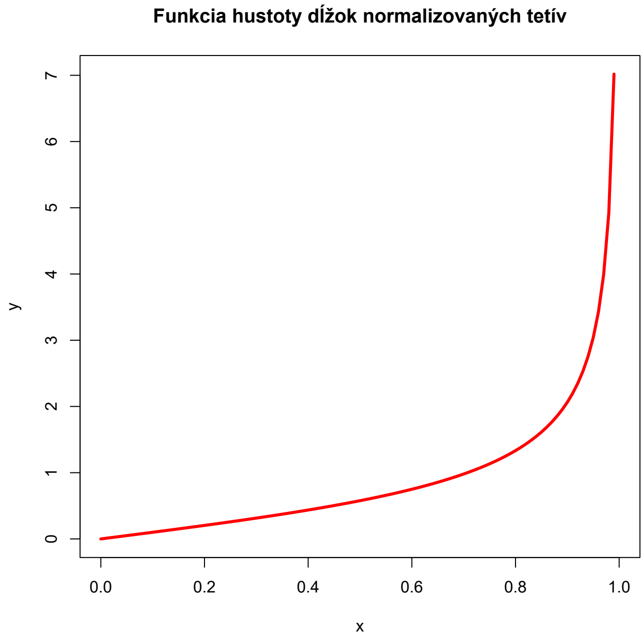
kde r a θ sú polárne súradnice stredu tetivy a R je jeho polomer. Z tejto funkcie bol potom vyvodený vzorec pre hustotu (viď Obrázok 4.1.4):

$$p(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, \tag{4.1.2}$$

pričom x predstavuje dĺžku normalizovanej tetivy, teda $x = \dfrac{L}{2 \cdot R}$(L je dĺžka tetivy, R je polomer kruhu a $0 \leq x \leq 1$).

My si teraz ukážeme, že (4.1.4) je naozaj vzorec hustoty riešiacej pôvodnú Bertrandovu úlohu.

Dôkaz. Snažíme sa vlastne dokázať, že zintegrovaním funkcie f dostaneme rovnakú hodnotu (pravdepodobnosť) ako zintegrovaním funkcie p. Uhol pri zisťovaní pravdepodobnosti pre intervaly dĺžok jednotlivých tetív nie je podstatný nech integrujeme cez akúkoľvek oblasť. Stredy tetív s rovnakou dĺžkou sa totiž nachádzajú na



Obr. 4.1.4: Priebeh odvodenej funkcie hustoty tvaru $p(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ v R-ku.

celom obvode kružnice s určitým polomerom, takže uhol sa pohybuje v plnom rozmedzí 0 až 2π. (4.1.1) teda predstavuje funkciu, ktorú stačí integrovať cez parameter r. Dostávame tak, že funkcia, ktorej zintegrovaním vyjde rovnaká pravdepodobnosť má tvar $\dfrac{1}{R}$ (keďže boli použité polárne súradnice, vypadol aj parameter r, ktorý bol determinantom tejto transformácie). Táto funkcia zároveň predstavuje hustotu, lebo jej zintegrovaním dostávame pravdepodobnosť a integráciou po najväčšej možnej oblasti $r \in (0, R)$ dostávame hodnotu 1 (100%-nú pravdepodobnosť).

Stačí nám teda už len dokázať, že transformáciou tejto hustoty dostaneme hustotu (4.1.4). To docielime použitím substitúcie $|subst.\ r = R \cdot \sqrt{1-x^2}|$ vychádzajúcej zo vzťahov medzi stredom tetivy r a normalizovanou tetivou x, pričom $dr = \frac{R \cdot x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$.

$$\int \frac{1}{R}\, dr = \int \frac{1}{R} \cdot R \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

$\square$

Pre zjednodušenie ďalších výpočtov uvádzame ešte konečnú hodnotu tohto integrálu na intervale (a, b) vypočítanú na základe hustoty odvodenej z (4.1.1):

$$P(r \in (a, b)) = \int_a^b \frac{1}{R} dr = \frac{b-a}{R}. \tag{4.1.3}$$

Môžeme pomocou nej teraz overiť, aká je odpoveď na Bertrandovu úlohu podľa Jaynesa. Keďže chceme aby tetivy boli dlhšie ako strany rovnostranného trojuholníka vpísaného do danej kružnice, stredy týchto tetív musia byť podľa 1. v intervale $< 0, R/2 >$ od stredu kruhu. Dosadením do vzťahu (4.1.3), kde $a = 0$ a $b = R/2$ dostávame:

$$P(Bertrand.\ \acute{u}loha) = P(0 \leq r \leq R/2) = \frac{R/2 - 0}{R} = 1/2.$$

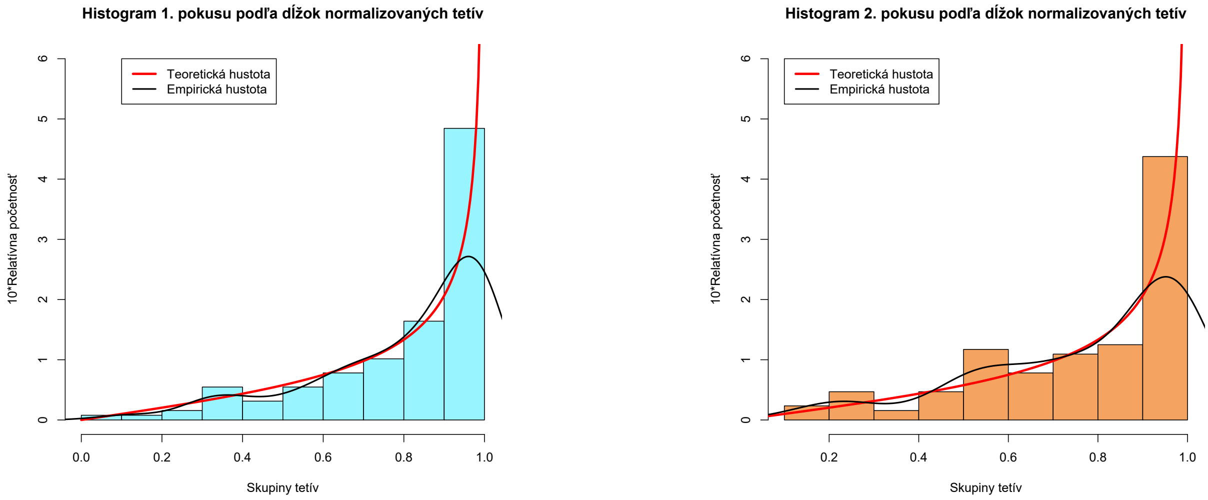
Tento výsledok zodpovedá výsledku získanému postupom 1., ktorý naozaj spĺňa dané invariantnosti. My sme sa rozhodli overiť tento výsledok a Jaynesovu hustotu rozdelenia dĺžky tetív (4.1.4) experimentom.

4.2 Experiment

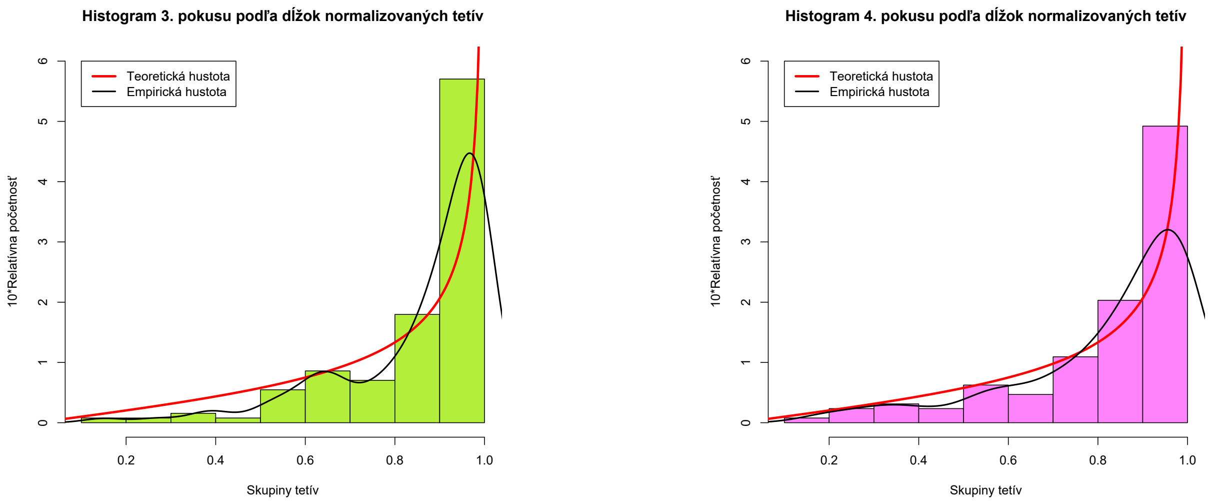
Niekedy výpočty aj keď sú správne, nemusia v realite vyhovovať modelu, ktorý sme zostavili. Preto sa častokrát robí experiment, ktorý buď vyvráti alebo potvrdí tento model. My sme sa rozhodli realizovať experiment popísaný v [15], teda hádzať slamku (v našom prípade špajdl'u) na kruh s priemerom 5 palcov = 12.7 cm. Výsledky podľa informácií z článku potvrdili nízkymi testovými štatistikami (v tomto prípade s veľkou jednoznačnosťou) rozdelenie tetív podľa T. Jaynesa, čo si teraz overíme realizáciou rovnakého experimentu. Tohto experimentu sa zúčastnili 3 ľudia, ktorí hádzali slamku zostoja na kruh nakreslený na papieri a položený na zemi. Výsledkom boli 4 pokusy so 128 meraniami. Získané merania sme následne normalizovali, teda predelili ich priemerom kruhu a rozdelili sme ich do 10 skupín.

Tieto skupiny sme zvolili najprv tak, aby spadali do rovnomerne rozdelených intervalov dĺžky 0,1 jednotky. Následne sme podľa početností jednotlivých skupín vykreslili histogramy z našich meraní spolu s teoretickou a empirickou hustotou. Zároveň sme histogram naškálovali tak, aby jeho plocha na jednotlivých intervaloch predstavovala relatívnu početnosť danej skupiny (10*relatívna početnosť na osi y a 0,1 jednotky na osi x), aby sme namerané hodnoty mohli porovnať s vykreslenými hustotami. Teoretická hustota predstavovala hustotu dĺžky tetivy 4.1.4 odvodenú v 1. časti tejto kapitoly, zatiaľ čo empirická predstavovala odhadovanú hustotu, ktorú program vypočítal z dát.

Ako vidieť z grafov, hustoty teoretická a empirická sú dosť podobné. Empirická hus-



Obr. 4.2.1: Histogramy vykreslené z dát spolu s funkciou očakávanej (teoretickej) a vypočítanej (empirickej) hustoty. Na osi x sú rovnomerne rozdelené skupiny tetív a na osi y početnosť.



Obr. 4.2.2: Histogramy vykreslené z dát spolu s funkciou očakávanej (teoretickej) a vypočítanej (empirickej) hustoty. Na osi x sú rovnomerne rozdelené skupiny tetív a na osi y početnosť.

tota síce viac osciluje oproti teoretickej, ale napriek tomu môžeme očakávať, že naše experimenty potvrdia teoretické rozdelenie dĺžok tetív.

Keďže chceme testovať pravdepodobnostné rozdelenie, najvhodnejším testom je chí-kvadrát dobrej zhody. Testuje hypotézu H_0 : *tetivy majú dané rozdelenie* vs. H_1 : *tetivy nemajú dané rozdelenie*. Realizuje sa porovnávaním početností podľa daného rozdelenia a nameraných početností (získaných exprimentom). Kvôli presnosti vyžaduje, aby očakávaná početnosť každej zo skupín bola podľa testovaného rozdelenia aspoň 5. Preto bolo treba tetivy druhýkrát rozdeliť tak, aby spĺňali tento predpoklad a zároveň tieto skupiny museli byť disjunktné. Ďalej sme do tabuľky dali aj početnosti

Číslo skupiny	**Skupina tetív**	**Očak. počet**
1	$(L/2R \leq 0.5)$	17.1487
2	$(0.5 < L/2R \leq 0.6)$	8.45125
3	$(0.6 < L/2R \leq 0.7)$	10.9897
4	$(0.7 < L/2R \leq 0.8)$	14.6103
5	$(0.8 < L/2R \leq 0.85)$	9.37182
6	$(0.85 < L/2R \leq 0.9)$	11.6343
7	$(0.9 < L/2R \leq 0.925)$	7.15812
8	$(0.925 < L/2R \leq 0.95)$	8.6678
9	$(0.95 < L/2R \leq 0.975)$	11.5258
10	$(0.975 < L/2R \leq 1)$	28.4422

Tabuľka 4.2.1: Druhé rozdelenie normalizovaných tetív do skupín na testovanie s ich očakávanými početnosťami (červenou) podľa hustoty 4.1.4.

tetív pokusov, ktoré padli do jednotlivých skupín (viď Tabuľka 4.2.1).

V ďalšej tabuľke sme vypočítali jednotlivé testové štatistiky pre pokusy, ktoré majú tvar:

$$TS_i = \frac{(x_i - e_i)^2}{e_i},$$

pričom TS_i je testová štatistika pre i-tu skupinu tetív, x_i je početnosť tejto skupiny podľa experimentu a e_i je empirická alebo očakávaná početnosť. Sčítaním týchto jednotlivých štatistík získame konečnú testovú štatistiku pre daný pokus, ktorú porovnávame s tabuľkovou kritickou hodnotou χ^2_{n-1} na určitej hladine významnosti. Platí, že ak je konečná testová štatistika menšia alebo rovná ako kritická hodnota, je to štatisticky nevýznamné a hypotézu H_0 nezamietame. Naopak ak je väčšia, hypotézu H_0 zamietame.

My sme si zvolili hladinu významnosti 5% a 1%, na ktorých vyšli kritické hod-

	Pokus č.1		Pokus č.2		Pokus č.3		Pokus č.4	
Skupiny	**Početnosť**	**TS**	**Početnosť**	**TS**	**Početnosť**	**TS**	**Početnosť**	**TS**
1	15	0.2692	17	0.0012	5	8.6065	11	2.2046
2	7	0.2492	15	5.0745	7	0.2492	8	0.0240
3	10	0.0891	10	0.0891	11	9.7E-06	6	2.2654
4	13	0.1774	14	0.0254	9	2.1543	14	0.0254
5	10	0.0421	5	2.0393	6	1.2131	11	0.2828
6	11	0.0345	11	0.0345	17	2.4746	15	0.9736
7	6	0.1873	7	0.0034	8	0.0990	10	1.1282
8	6	0.8211	9	0.0127	11	0.6275	5	1.5520
9	10	0.2019	10	0.2019	15	1.0472	10	0.2019
10	40	4.6966	30	0.0853	39	3.9190	38	3.2118
Súčet	128	**6.7688**	128	**7.5679**	128	**20.3906**	128	**11.8703**

Tabuľka 4.2.2: Početnosť a testová štatistika pre skupiny tetív a pokusy.

noty 16.919 a 21.666. Porovnaním s testovou štatistikou jednotlivých pokusov v Tabuľke 4.2.2 (červeno vyznačené) zisťujeme, že 1.,2. a 4. pokus nezamietli hypotézu H_0 na hladine významnosti 5% a všetky pokusy nezamietli túto hypotézu na hladine významnosti 1%. Hladina významnosti predstavuje pravdepodobnosť chyby 1. druhu, teda pravdepodobnosť, že test zamietne hypotézu H_0, pričom táto hypotéza platí. Takže pri chybe 1. druhu 5% je spoľahlivosť testu 95% a pri chybe 1% je 99%. Výsledky nášho experimentu teda môžeme interpretovať tak, že 3 zo 4 realizovaných pokusov potvrdili s 95%-nou spoľahlivosťou, že tetivy majú rozdelenie 4.1.4 a s 99%-nou spoľahlivosťou to potvrdili všetky 4 pokusy.

Okrem toho sme zisťovali v našom experimente akú odpoveď by dávali jednotlivé pokusy na Bertrandovu úlohu. Dĺžka rovnostranného trojuholníka vpísaného do kruhu o priemere 12,7 cm je použitím Pytagorovej vety a vlastností tohto trojuholníka $\sqrt{3} \cdot \frac{12.7}{2} = 10,9985$. Stačí teda spočítať tetivy, ktorých dĺžka je väčšia ako táto hodnota. Pre jednotlivé pokusy nám vyšli hodnoty, ktoré predelením 128 dávajú hodnotu pravdepodobnosti pre Bertrandovu otázku (viď. Tabuľka 4.2.3). Ako vidíme, aj v jednotlivých pokusoch sa pravdepodobnosť pre Bertrandovu otázku pohybuje okolo 1/2, čo naznačovala už skutočnosť, že tetivy sú z daného rozdelenia.

Samozrejme výsledky pokusov mohlo ovplyvniť aj to, kto hádzal. Napríklad keď

Pokus č.	Počet vyhovujúcich tetív	Pravdepodobnosť
1	68	0.53125
2	63	0.4921875
3	86	0.671875
4	76	0.59375
Súčet	**293**	**0.572265625**

Tabuľka 4.2.3: Počet tetív dlhších ako strana rovnostranného trojuholníka pre jednotlivé pokusy a pravdepodobnosť pre Bertrandovu úlohu.

sa pozrieme na 1. a 2. pokus, merania sú pomerne podobné a taktiež konečné testové štatistiky. Dôvodom je pravdepodobne práve to, že tieto pokusy boli realizované tým istým človekom. Zároveň pri 1. a 3. meraní dostávame pomerne vysoké rozdiely medzi odchýlkami spôsobené zrejme rôznymi účastníkmi, ktorí dané pokusy realizovali.

To nás viedlo k tomu, aby sme otestovali ekvivalentnosť distribučných funkcií jednotlivých pokusov, na čo je vhodný Kolmogorov-Smirnovov test, testujúci rovnakosť resp. rozdielnosť rozdelení medzi 2 náhodnými spojitými premennými. Testuje hypotézu, že dvojice súborov dát sú rovnako rozdelené. Pri jeho realizácii sa využíva maximálny rozdiel medzi distribučnými funkciami daných súborov, ktorý sa využije ďalej pri výpočte testovej štatistiky.

My sme výpočet realizovali v R-ku prostredníctvom funkcie $ks.test()$. Odtiaľ sme dostali p-hodnoty, ktoré sú uvedené v Tabuľke . P-hodnoty predstavujú pravdepodobnosti, že testová štatistika bude rovná vypočítanej alebo bude ešte extrémnejšia, pričom sa predpokladá platnosť nulovej hypotézy. To znamená, že čím sú tieto pravdepodobnosti menšie, tým sme náchylnejší zamietnuť danú hypotézu. Bežne sú p-hodnoty porovnávané s hodnotou 5%, keďže testy sa zvyknú robiť na takejto hladine významnosti (ak p-hodnota< 5%, nulovú hypotézu zamietame).

Ako vidíme v Tabuľke 4.2.4, kde sú vypočítané jednotlivé p-hodnoty porovnávaných dvojíc pokusov, väčšina z nich sa priklonila ku platnosti nulovej hypotézy. Našla sa však jedna dvojica, ktorá rovnakosť rozdelení na hladine 5% zamietla (červeno vyznačená). Bola to práve dvojica pokusov realizovaná rôznymi ľuďmi. P-hodnota porovnávaných

p-hodnota	Pokus č.1	Pokus č.2	Pokus č.3	Pokus č.4
Pokus č.1	1	0.7319	0.1191	0.9097
Pokus č.2	0.7319	1	0.02222	0.159
Pokus č.3	0.1191	0.02222	1	0.6272
Pokus č.4	0.9097	0.159	0.6272	1

Tabuľka 4.2.4: Výpočet p-hodnôt pre jednotlivé dvojice pokusov z testovania homogenity rozdelení dĺžok tetív.

pokusov 1 a 2, ktoré boli realizované rovnakým človekom zase vysokým percentom podporovala nulovú hypotézu. Na druhej strane najvyššia p-hodnota bola medzi pokusmi 1 a 4 (ak nerátame p-hodnoty medzi rovnakými pokusmi), ktorých sa zúčastnili rôzne osoby. Na základe týchto výsledkov sme zhodnotili, že výsledok experimnetu zrejme nebude ovplyvnený človekom, ktorý ho realizuje. Napriek tomu toto tvrdenie nie je úplne jednoznačné a na jeho väčšiu dôveryhodnosť by sme potrebovali viac pokusov.

Na výsledky pokusov mohli ďalej pôsobiť rozdielne podmienky, v ktorých sa realizovali. Napríklad rôzne povrchy podlahy, na ktorej sa experimenty konali mohli ovplyvňovať odrážanie špajdle a následnú zmenu miesta jej dopadu. A aj samotná špajdľa, ktorá je ťažšia a hrubšia ako slamka alebo meranie obyčajným pravítkom iba na presnoť milimetrov mohli spôsobiť menšie odchýlky. Ale napriek tomu potvrdili vo väčšine hypotézu, ktorej pravdivosť sme predpokladali. Ukázali sme teda súlad medzi matematickým a experimentálnym riešením Bertrandovej úlohy, na základe vyvodenej hustoty. Aplikácii rozdelenia 4.1.4 tak vyhovuje pravdepodobnosť 1/2.

5 Detekcia chorôb

Veľmi dôležitú úlohu zohráva štatistika v oblasti testovania chorôb, kde môže rozhodovať aj o živote a smrti človeka v blízkej budúcnosti. Preto je otázne, či môžeme veriť výsledkom nášho testu a nakoľko.

Uvažujme príklad zo zbierky pre SŠ o teste na HIV. Pacient podstúpil tento test, s tým že test odhalí vírus u nakazeného človeka s 99,9% spoľahlivosťou a zamietne ho u zdravého človeka s 99,99% spoľahlivosťou. Výsledok bol pozitívny a je otázne, aká je pravdepodobnosť, že pacient je skutočne nakazený. Zároveň sa v tejto populácii predpokladá infikovanosť vo výške 0,01%.

Pre lepšiu ilustráciu je dobré robiť s konkrétnymi počtami ľudí. Zoberme do úvahy napríklad 1 000 000 potenciálnych pacientov. Z nich by malo byť skutočne nakazených $0,0001 \cdot 1\,000\,000 = 100$ a zdravých $1\,000\,000 - 100 = 999\,900$. Ďalej pozitívnych nakazených ľudí by malo byť $100 \cdot 0.999 \doteq 100$, zatiaľ čo negatívnych zdravých $999\,900 \cdot 0.9999 \doteq 999\,800$. Takže dokopy máme 200 pozitívnych pacientov, z ktorých iba 100 je skutočne nakazených, pričom 100 je falošne pozitívnych (999 900-999 800 = 100). Preto pravdepodbonosť toho, že pacient má skutočne HIV je rovnaká ako to, že ho nemá $= \frac{100}{200} = 50\%$.

Zaujímavosťou použitého testu je, že má veľmi dobrú spoľahlivosť v identifikovaní pozitívnych nakazených pacientov - odhalil všetkých, takže žiaden z ľudí nebol falošne negatívny. Na druhej strane falošná pozitivita testu sa vyskytla až v 100 prípadoch z 999 900. To je napriek tomu tiež pomerne malé číslo vzhľadom na celkový počet uvažovaných pacientov. Zároveň výskyt ochorenia bol naozaj ojedinelý - iba 0,01% v celej populácii. Tieto skutočnosti spôsobili, že pravdepodobnosť skutočného nakazenia pri pozitívnom teste je len 50% pre uvažovanú populáciu.

Keď však zoberieme do úvahy ľubovoľnú populáciu zloženú z N pacientov, dostávame aplikovaním predchádzajúceho postupu nasledovné počty:

$$\text{Pozitívni chorí} = 0,999 \cdot 0,0001 \cdot N;$$

a

$$\text{Pozitívni zdraví} = (1 - 0,9999) \cdot (1 - 0,0001) \cdot N = 0,0001 \cdot 0,9999 \cdot N.$$

Pravdepodobnosť naozajstnej nákazy je potom: $\dfrac{\text{Pozitívni chorí}}{\text{Pozitívni chorí} + \text{Pozitívni zdraví}} = 0,4998 = 49,98\%$, čo je menej ako v predchádzajúcom prípade (50%). Pre väčšie pochopenie tejto problematiky si v nasledujúcej podsekcii objasníme niektoré zo základných pojmov súvisiacich s testovaním.

5.1 Testové charakteristiky

Chrakteristiky testu predstavujú určité miery spoľahlivosti tohto testu. Ich súčasťou je určovanie pomerov medzi zdravými, chorými, pozitívnymi, negatívnymi a všetkými jedincami, ktorí podstúpili testovanie. S tým súvisia pojmy senzitivita, špecificita a diagnostická presnosť, ktoré si na základe [16] a [17] teraz objasníme.

Senzitivita testu predstavuje pomer medzi chorými, ktorých test určil ako pozitívnych (nakazených) a všetkými chorými jedincami, čo môžeme zapísať ako

$$\text{Senzitivita} = \frac{\text{Pozitívni chorí}}{\text{Chorí}}. \tag{5.1.1}$$

Inak povedané, je to pravdepodobnosť, že test bude pozitívny za predpokladu, že pacient je chorý. Čím máme vyššiu senzitivitu testu, tým je daný test presnejší pri určení choroby u chorých ľudí. Úzko súvisí s chybou 1. druhu, ktorá sa používa v štatistike a označuje pravdepodobnosť, kedy zamietneme hypotézu H_0, pričom táto hypotéza platí. V našom prípade je hypotéza H_0, že pacient je chorý, takže pravdepodobnosť 1. druhu je pomer ľudí, ktorí sú podľa testu negatívni, pričom sú chorí a chorých ľudí (**falošná negativita**), čo je opačný jav k senzitivite testu.

Špecificita testu je pomerom medzi negatívne diagnostikovanými ľuďmi, ktorí sú zároveň zdraví a všetkými zdravými ľuďmi, teda

$$\text{Špecificita} = \frac{\text{Negatívni zdraví}}{\text{Zdraví}}. \tag{5.1.2}$$

V štatistike je tiež známa ako sila testu, teda opak k chybe 2. druhu (**falošná pozitivita**), kedy nezamietame H_0, ktorá však neplatí. Predstavuje úspešnosť testu identifikovať zdravého človeka spomedzi všetkých zdravých ľudí.

Diagnostická presnosť ukazuje závislosť medzi testom dobre vyhodnotenými a všetkými ľuďmi. Zapisujeme ako

$$\text{Diagnostická presnosť} = \frac{\text{Pozitívni chorí} + \text{Negatívni zdraví}}{\text{Všetci}}. \tag{5.1.3}$$

Predstavuje úspešnosť testu pri určení pozitívnych ľudí, ktorí sú chorí a negatívnych ľudí, ktorí sú chorí spomedzi všetkých pacientov.

Tieto charakteristiky pomáhajú posúdiť spoľahlivosť daného testu pri vyhodnocovaní hypotéz. Okrem nich však poznáme aj ďalšie charakteristiky, napr. pozitívnu/negatívnu predikčnú hodnotu alebo prevalenciu, o ktorých sa viac dozvieme v 3. podkapitole.

Teraz spomínané charakteristiky využijeme na otestovanie metódy F-FDG PET/CT, ktorá sa používa pri diagnostike rakoviny pankreasu v článku [18]. Z dostupných informácií vieme, že prvým testovaním sa zisťovala prítomnosť karcinómu v pankrease, druhým v lymfatických uzlinách a tretím vo vzdialených ložiskách. Využitím vstupných údajov sme pomocou vzorcov (5.1.1),(5.1.2),(5.1.3) vyčíslili presnú hodnotu popísaných charakteristík, ktoré sa po zaokrúhlení zhodovali s tými, ktoré boli uvedené v texte. Tieto údaje sme zapísali do Tabuľky 5.1.1.

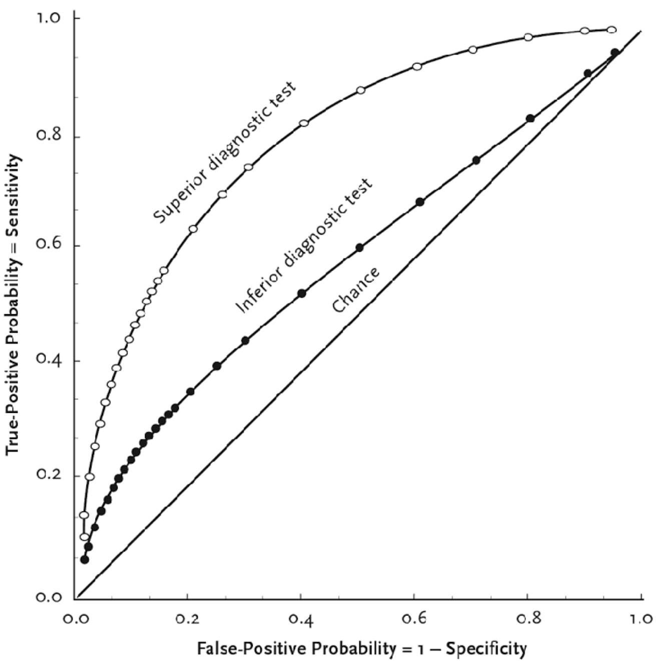
	Chorí		**Zdraví**			**Výsledky**		
	Pozitívni	**Negatívni**	**Pozitívni**	**Negatívni**	**Spolu**	**Senzitivita**	**Špecificita**	**Diag. presnosť**
1. test	61	11	5	29	106	84.7%	85.3%	84.9%
2. test	8	8	4	47	67	50.0%	92.2%	82.1%
3. test	12	10	1	44	67	54.5%	97.8%	83.6%

Tabuľka 5.1.1: Vstupné údaje o počte ľudí zaradených do skupín podľa pozitivity/negativity testu a prítomnosti ochorenia uvedených v článku [18] s presne vypočítanými hodnotami charakteritík testu F-FDG PET/CT.

Pomocou vypočítaných údajov bol test vyhodnotený ako vhodná diagnostická metóda. Jedinou nevýhodou bola vyššia hodnota špecificity oproti senzitivite. Preferujeme totiž, keď falošná negativita - teda vyhodnotenie chorého človeka ako zdravého (horšia alternatíva oproti prehláseniu zdravého človeka za chorého - falošná pozitivita) je čo najnižšia.

Dôležitosť senzitivity sa ukazuje aj v prípade testu FIT spomínanom v [19]. Tento test sa používa na určenie psychicky chorého jedinca. Testovanie prebieha pomocou 15 písmen, čísel a geometrických tvarov, ktoré si treba zapamätať a na základe rôznych skóre je určená diagnóza. Problémom tohto testu bola nízka hodnota senzitivity, konkrétne 43%, zatiaľ čo špecificita bola na úrovni 92%. V snahe zvýšiť hodnotu senzitivity boli zmenené niektoré parametre testu vrátane zmenšenia rozsahu na zapamätanie a zavedenia kvalitatívneho skórovania. Senzitivita tak stúpla na 71% a špecificita poklesla na 75%, čo sa ukázalo ako prijateľné. Vzťahu medzi senzitivitou a špecificitou sa budeme ďalej venovať v nasledujúcej podsekcii.

Krivka ROC (reciever operating characteristic) predstavuje jeden zo spôsobov ako porovnať viacero testov a zároveň ukazuje prepojenosť senzitivity a špecificity testu. Zoberme do úvahy testy, ktoré vyhodnocujú ľudí ako buď pozitívnych alebo ne-



Obr. 5.1.1: Porovnanie 2 testov pomocou ich ROC kriviek zobrazujúcich vzťah senzitivity na y-ovej osi a falošnej pozitivity na x-ovej osi pri rôznych separačných kritériách testov, obrázok prevzatý z [17]

gatívnych, na základe čoho získavame charakteristiky testu ukázané v predošlej časti. Ako uvádzajú Campbell, Machin a Walters v [16], realizuje sa to podľa hodnoty, ktorú si určíme ako separačné kritérium. Zmenou tohto separačného kritéria sa zmení pomer pozitívnych a negatívnych pacientov aj vypočítané charakteristiky testu. A práve na tom funguje ROC krivka, ktorej y-ovú os predstavuje pravdepodobnosť, že pozitívny pacient bude naozaj chorý (senzitivita) a x-ovú os tvorí pravdepodobnosť, že pozitívny pacient bude v skutočnosti zdravý (falošná pozitivita alebo 1-špecificita).

Ako môžeme vidieť na Obr. 5.1.1, vyznačené body na krivkách predstavujú rôzne separačné kritéria a k nim vyčíslené požadované charakteristiky. Spoľahlivosť testu je porovnávaná podľa plochy, ktorá je pod krivkou (area under the curve/AUC). Čím väčšia je AUC, tým lepší je aj test, keďže chceme čo najvyššiu senzitivitu aj špecificitu. Dokonalý test má teda AUC hodnotu rovnú 1. ROC vtedy prechádza y-ovou osou do bodu [0,1], kedy sú senzitivita aj špecificita 100% a odtiaľ kolmo na y-ovú os do bodu [1,1]. Vo všeobecnosti sú testy dobré, pokiaľ sa nachádzajú naľavo od krivky Chance, ktorá zviera 45 stupňov s osou x a vyjadruje rovnakú pravdepodobnosť falošne pozitívneho a správne pozitívneho testu. Krivka ROC sa dá použiť na vyhodnotenie najvhodnejšieho testu, ale zároveň môže pomôcť určiť aj správne separačné kritérium pre daný test.

5.2 Dôveryhodnosť výsledkov testov

Zatiaľ sme sa na testy pozerali z hľadiska celkovej spoľahlivosti a použiteľnosti. Ako sme však videli v príklade na začiatku tejto kapitoly, pre pacienta je dôležitá otázka - som naozaj chorý ak je môj test pozitívny? Jej zodpovedanie vyriešili autori [16] prostredníctvom Bayesovej vety:

$$P(A\,if\,B) = \frac{P(A)\cdot P(B\,if\,A)}{P(B)} = \frac{P(A)\cdot P(B\,if\,A)}{P(A)\cdot P(B\,if\,A) + P(notA)\cdot P(B\,if\,notA)}; \tag{5.2.1}$$

kde A predstavuje jav, že pacient je skutočne chorý, $notA$ zdravý a B je situácia, kedy je test pozitívny. Treba si ale uvedomiť, že potom $P(B\,if\,A)$ (pravdepodobnosť javu B za podmienky nastania javu A) je senzitivita a $P(B\,if\,notA)$ je 1-špecificita. Ďalej hodnotu P(A) označujeme prevalencia a počítanú pravdepodobnosť P(A if B) pozitívna predikčná hodnota, ktoré už boli spomínané na začiatku tejto kapitoly.

Prevalencia nazývaná tiež predtestová pravdepodobnosť choroby predstavuje pravdepodobnosť, že náhodne vybraný pacient bude mať danú chorobu ešte pred začiatkom testovania, resp. predtým ako zistí výsledok svojho testu. Môžeme to zapísať ako:

$$Prevalencia = \frac{Chorí}{Všetci}.$$

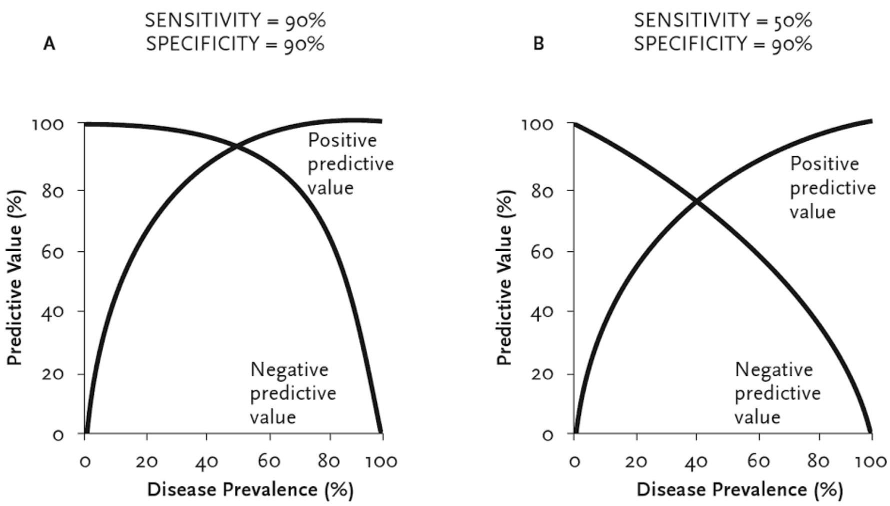
Pozitívna predikčná hodnota (PPV) je pravdepodobnosť, že pacient je naozaj chorý, pričom má pozitívny výsledok, takže platí nasledovný vzorec pre výpočet:

$$PPV = \frac{Pozitívni\ chorí}{Pozitívni}$$

alebo podľa Bayesa

$$PPV = \frac{Prevalencia \cdot Senzitivita}{Prevalencia \cdot Senzitivita + (1 - Prevalencia) \cdot (1 - Špecificita)}. \quad (5.2.2)$$

Treba ešte dodať, že prevalencia je so špecificitou a senzitivitou nezávislá narozdiel od pozitívnej predikčnej hodnoty. Vo vzorcoch, podľa ktorých počítame senzitivitu a špecificitu sa totiž pri zmene prevalencie zmena odzrkadlí v čitateli aj menovateli rovnakým násobkom, ktorý sa vykráti a hodnoty tak zostávajú v teórii rovnaké. Špeciálnym prípadom sú ochorenia s ojedinelým výskytom, pri ktorých je presnosť



Obr. 5.2.1: Porovnanie závislosti prevalencie a PPV pri rôznych hodnotách senzitivity testu, obrázok prevzaný z [17]

odhadu senzitivity testu limitovaná. Ako však vidíme z Bayesovho vzorca pre PPV, zmena prevalencie spôsobí aj zmenu hodnoty PPV, takže táto hodnota je od prevalencie naozaj závislá.

Túto závislosť možno interpretovať pomocou grafu pri rôznych hodnotách senzitivity a špecificity, pričom **negatívna predikčná hodnota (NPV)** je pravdpodobnosť, že pacient je zdravý ak má negatívny test:

$$NPV = P(notA\, if\, notB) = \frac{P(notA)\cdot P(notB\, if\, notA)}{P(notA)\cdot P(notB\, if\, notA) + P(A)\cdot P(notB\, if\, A)} \tag{5.2.3}$$

alebo

$$NPV = \frac{(1-Prevalencia)\cdot \check{S}pecificita}{(1-Prevalencia)\cdot \check{S}pecificita + Prevalencia\cdot Senzitivita}. \tag{5.2.4}$$

Ako vidíme na Obr. 5.2.1, nižšia hodnota senzitivity znížila PPV aj NPV (zmena tvaru grafu). To predstavuje zníženie dôveryhodnosti diagnózy, ktorú test pacientovi vygeneroval. Možným východiskom pri nižšej senzitivite alebo pri potrebe vysokej dôveryhodnosti testovania je podstúpiť test viackrát.

Opakovanie testov umožňuje overenie diagnózy s väčšou presnosťou a v medicíne sa často používa na stanovenie konečnej diagnózy pacienta. Pred testovaním sa zvyčajne uvádzajú charakteristiky testov, konkrétne senzitivita, špecificita a k nim opačné hodnoty - falošná negativita a falošná pozitivita, ktoré sú stanovené na základe historických dát. Pri predpoklade, že sa opakuje niekoľkokrát 1 test ostávajú tieto hodnoty nemenné, zatiaľ čo pri použití rôznych testov sú pre každý test rôzne.

Dobrou ukážkou pre opakovanie testu je príklad, ktorý sme uviedli na začiatku tejto kapitoly, keďže výsledok bol pomerne nejednoznačný (50%-ná pravdepodobnosť nákazy HIV). Tento výsledok po prvom testovaní by sme dostali rovnako dosadením do Bayesovho vzorca (5.2.1), respektíve jeho obmeny (5.2.2). Senzitivita by pritom predstavovala hodnotu 99,9%, 1-špecificita $100\% - 99,99\% = 0,01\%$ a rovnako aj prevalencia 0,01%. Výsledkom tejto metódy je približne 49.9775% pravdepodobnosť, teda hodnota ktorú sme na začiatku dostali pre ľubovoľne veľkú testovaciu vzorku. Mierna odchýlka oproti predošlému výsledku spočíva v zaokrúhľovaní na celé počty pacientov v jednotlivých kategóriách pri minulom postupe.

Pre opakovanie testu s predpokladom, že aj druhý test vyjde pozitívny použijeme rovnaký vzorec (5.2.2), akurát prevalenciu nahradí vypočítaná pravdepodobnosť. Opakovaním tohto postupu dostávame približne hodnotu 99,99%, ktorá už dáva pacientovi pomerne veľkú istotu, že je skutočne nakazený. Predstavuje pravdepodbnosť, že pacient mal daný test 2x pozitívny. Samozrejme čím viackrát je pozitívny výsledok, tým vyššia je šanca, že pacient má tento vírus naozaj.

Ak by mu naopak vyšiel 2. výsledok negatívny, jeho šanca, že je zdravý je podľa (5.2.4) (pričom namiesto prevalencie máme vypočítanú hodnotu) približne 99,9% a tým pádom 0,1%, že je chorý. Dôležitou súčasťou využívania Bayesa pri opakovaní testov je však predpoklad nezávislosti jednotlivých testov, čo nie je veľmi realistické.

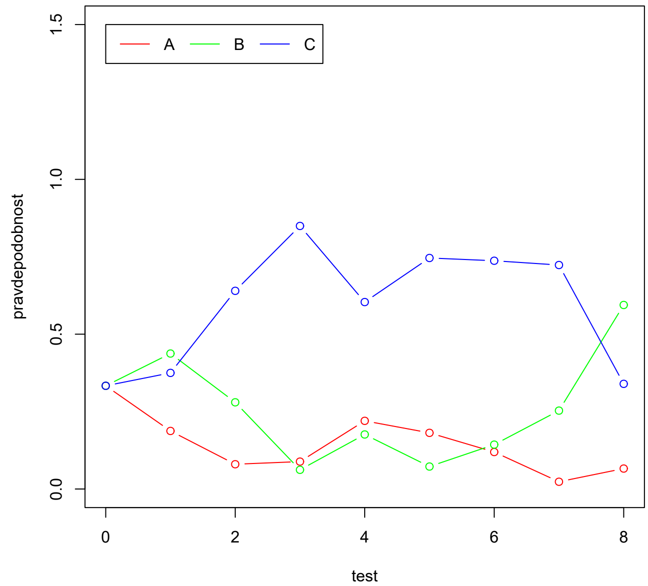
5.3 Hádanie choroby v R-ku

Kvôli podrobnejšiemu analyzovaniu opakovaného testovania sme sa rozhodli upraviť program diagnostikujúci 3 typy chorôb na hru Uhádni chorobu (Príloha 2). Pôvodný program (Príloha 1) sa zaoberal určovaním konkrétnej formy netoxickej strumy (ochorenie štítnej žľazy) u pacientov podľa výsledkov testovania a výpočtu pravdepodobnosti. Toto testovanie prebiehalo pomocou 8 testov so známymi pravdepodobnosťami pozitívneho testu za podmienky nakazenia jednotlivými chorobami, ktoré sú uvedené v tabuľke. Predpokladala sa rovnaká prevalencia všetkých 3 foriem, teda pravdepodobnosť

	test 1	**test 2**	**test 3**	**test 4**	**test 5**	**test 6**	**test 7**	**test 8**
Typ A	30%	20%	50%	70%	40%	80%	10%	60%
Typ B	70%	30%	90%	80%	20%	40%	90%	50%
Typ C	60%	80%	40%	20%	60%	70%	50%	10%

Tabuľka 5.3.1: Postupné pravdepodobnosti pozitivity testov pri predpoklade postihnutia danou chorobou v modelovanom príklade.

každej formy pred začiatkom testovania bola 1/3. Program náhodne vybral skutočný typ choroby, na základe ktorého vygeneroval výsledky testov. Využitím výsledkov a Bayesovej vety sa potom postupne vyrátali podmienené pravdepodobnosti chorôb v jednotlivých krokoch testovania (za podmienky konrétneho výsledku testu). Podľa nich sa vykreslil graf, ktorý modeloval vývoj pravdepodobnosti počas testovania (viď Obr. 5.3.1). Pomocou týchto údajov sme mohli určiť diagnózu, o ktorej predpokladáme, že je skutočná a porovnať ju so skutočnou diagnózou, ktorú program vypísal na záver.



Obr. 5.3.1: Graf modelujúci vývoj pravdepodobností chorôb u pacienta v jednotlivých krokoch testovania v pôvodnom R-kovom programe.

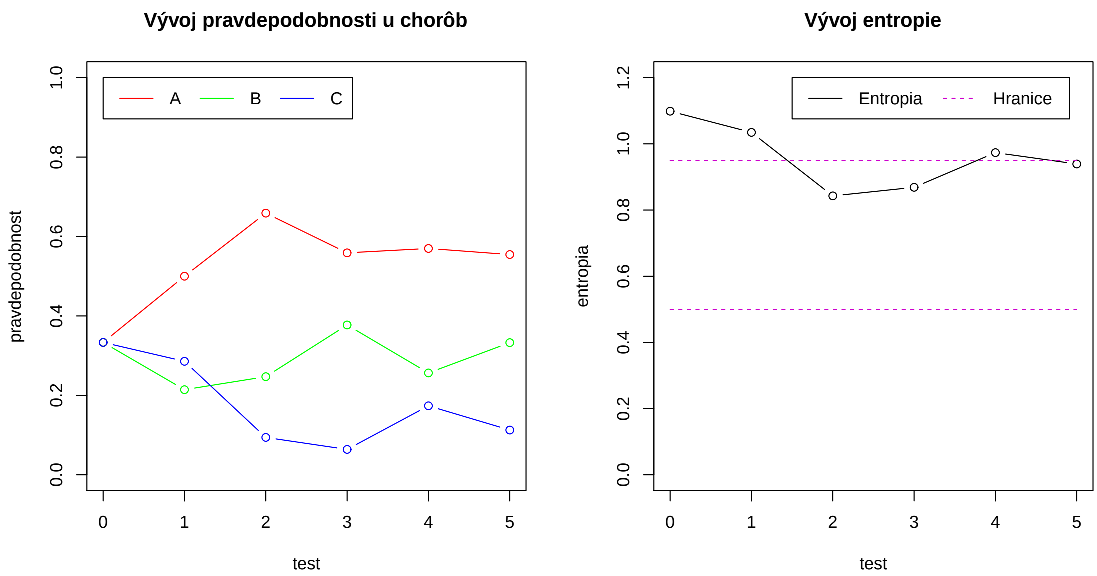
Nevýhodou tohto programu bola neprehľadnosť a malá výpovedná hodnota, keďže vypisoval iba vypočítané pravdepodobnosti s výsledkami, graf a skutočnú hodnotu. Preto sme sa rozhodli dať mu jasnejšiu formu a cieľ prostredníctvom zmeny na hru, v ktorej sa ľudia snažia hádať diagnózy na základe výsledku testov alebo ich ďalším generovaním.

Hra má simulovať skutočné typy ochorenia pacienta, ktoré sa hráč predstavujúci lekára snaží uhádnuť pomocou výsledkov, ich čiastočnej analýzy a znalosti pravdepodobností pozitivity jednotlivých testov pri danej chorobe. Súčasťou hry je 10 kôl, kde si hráč overí svoje schopnosti. Za uhádnutie skutočnej choroby hráč získava body podľa entropie.

Entropia predstavuje mieru neistoty určitej udalosti X - teda čím je väčšia, tým viac náhodnoti je v udalosti X. Počíta sa podľa vzorca:

$$Entropia = -\sum_{i=1}^{n} p(X_i) \cdot ln\, p(X_i);$$

kde X_i sú všetky možnosti, ktoré môžu nastať pri náhodnom jave X a $p(X_i)$ sú ich pravdepodobnosti, takže zároveň platí: $\sum_{i=1}^{n} p(X_i) = 1$. My si chceme byť pri určovaní skutočnej choroby čo najviac istí našimi tušeniami, keďže v stávke je smrť potenciálneho pacienta, čo sa odrazí v bodovej strate. Istota pri určovaní znamená schopnosť jedno-



Obr. 5.3.2: Grafy modelujúce pravdepodobnosti jednotlivých chorôb a entropiu s bodovými hranicami.

značne odlíšiť 1 typ choroby od ostatných. Ideálne je keď vypočítaná pravdepodobnosť 1 z chorôb je rovná 1 a ostatné dve sú 0. Vtedy je entropia nulová. Naopak pri rovnakej vypočítanej pravdepodobnosti všetkých typov choroby ($p(X_i) = 1/3$) je odlíšiteľnosť najnižšia a tým pádom entropia najvyššia. Bodovanie sme teda určili tak, že pokiaľ hráč háda správne pri hodnote entropie pod 0.5, získava 3 body, pokiaľ je entropia v rozmedzí 0.5-0.95, tak 2 body a nad 0.95 1 bod. Tieto bodovacie hranice sú zobrazené aj na grafe s vývojom entropie (viď Obr. 5.3.2).

Strata bodov je ovplyvnená počtom realizácií testov. Po začiatku hry sa totiž vygeneruje prvých 5 z 8 možných testov aj s výsledkami, pravdepodobnosťami jednotlivých chorôb a grafom. Ďalšie testovanie už zobrazí iba výsledky bez ďalšej analýzy. Realizácia nových testov by však mala hráčovi pomôcť ľahšie identifikovať skutočnú chorobu. Pri vhodne zvolených testoch hráč znižuje hodnotu entropie, takže pri odhalení skutočnej choroby je za to adekvátne odmenený. Ak si ale zvolí zlé testy a neuhádne chorobu, stratí 3 body a navyše 1 bod za každú ďalšiu realizáciu testovania. Tiež môže byť niekedy nevýhodné realizovať zbytočne veľa testovaní naviac, ak už sme dostatočne presvedčený o skutočnosti niektorého z ochorení. Vtedy totiž pri správnom tušení hrozí, že sa prejaví chybovosť testu, čo zvýši hodnotu entropie a môže viesť k nižšiemu zisku bodov. Cieľom tejto hry je teda vedieť určiť, kedy je potrebná ďalšia realizácia testu

```
> Start()
TEST Č. 1                      Skóre: 0

PRAVDEPODOBNOSTNÁ TABULKA ÚSPEŠNOSTI TESTOV PRI DANEJ CHOROBE:
  test 1 test 2 test 3 test 4 test 5 test 6 test 7 test 8
A    0.3    0.2    0.5    0.7    0.4    0.8    0.1    0.6
B    0.7    0.3    0.9    0.8    0.2    0.4    0.9    0.5
C    0.6    0.8    0.4    0.2    0.6    0.7    0.5    0.1

VÝSLEDKY TESTOVANÍ:
 Testovanie Použitý test Výsledok Pravd. A Pravd. B Pravd. C
                                    0.33     0.33     0.33
          1       test 1        1   0.19     0.44     0.38
          2       test 2        1   0.08     0.28     0.64
          3       test 3        1   0.07     0.46     0.47
          4       test 4        1   0.10     0.72     0.18
          5       test 5        0   0.08     0.81     0.10

Hádaj s Hadam("typ choroby")alebo generuj nový test pomocou funkcie Dalsi(č. testu)!
> Dalsi(7)
PRAVDEPODOBNOSTNÁ TABULKA ÚSPEŠNOSTI TESTOV PRI DANEJ CHOROBE:
  test 1 test 2 test 3 test 4 test 5 test 6 test 7 test 8
A    0.3    0.2    0.5    0.7    0.4    0.8    0.1    0.6
B    0.7    0.3    0.9    0.8    0.2    0.4    0.9    0.5
C    0.6    0.8    0.4    0.2    0.6    0.7    0.5    0.1

VÝSLEDKY TESTOVANÍ:
 Testovanie Použitý test Výsledok Pravd. A Pravd. B Pravd. C
                                    0.33     0.33     0.33
          1       test 1        1   0.19     0.44     0.38
          2       test 2        1   0.08     0.28     0.64
          3       test 3        1   0.07     0.46     0.47
          4       test 4        1    0.1     0.72     0.18
          5       test 5        0   0.08     0.81      0.1
          6       test 7        1
```

Obr. 5.3.3: Funkcie *Start*() a *Dalsi*(.) v novej verzii programu.

pri určovaní choroby a kedy sme si už naopak dostatočne istí niektorou z chorôb. To odráža skóre, ktoré chcú hráči dosiahnuť čo najvyššie.

Okrem nových premenných bolo potrebné do programu pridať aj nové funkcie, najmä funkciu *Start*(), *Hadam*(".") a *Dalsi*(.). Funkcia *Start*() nastavuje počiatočné hodnoty globálnym premenným a spúšťa celú hru vrátane prvých vygenerovaných testov, grafov a tabuľky . Zároveň upozorňuje hráča na použitie funkcií *Hadam*(".") a *Dalsi*(.). Použitím funkcie *Dalsi*(*č. testu*) sa totiž realizuje generovanie nového testu

```
Hádaj s Hadam("typ choroby")alebo generuj nový test pomocou funkcie Dalsi(č. testu)!
> Hadam("B")
VÝSLEDKY TESTOVANÍ:
 Testovanie Použitý test Výsledok Pravd. A Pravd. B Pravd. C
                                  0.33     0.33     0.33
          1       test 1       1     0.19     0.44     0.38
          2       test 2       0     0.28     0.58     0.14
          3       test 3       1     0.20     0.72     0.08
          4       test 4       1     0.19     0.79     0.02
          5       test 5       0     0.15     0.84     0.01
          6       test 7       1     0.02     0.97     0.01
Skutočná choroba:  A
------------------------------------------------------------------
TEST Č. 2                        Skóre: -4
```

Obr. 5.3.4: Spustenie funkcie *Hadam*(”.”) v upravenej verzii pôvodného R-kového programu.

v prípade neistoty a s *Hadam*(”*typ choroby*”) hádanie typu choroby. Jej súčasťou je aj postupné vyhodnocovanie priebehu hry. Po skončení 10. kola vygeneruje štatistiku, podľa ktorej sa vyhodnotí celkové pôsobenie hráča počas celej hry. Poslednou pre hráča dôležitou funkciou je *.intro*(), ktorá oboznamuje so základnými pravidlami a použitím funkcií hry.

```
> .intro()

------------------------------------------------------------------------------------------
Hádanie choroby v R
------------------------------------------------------------------------------------------
Autor : Andrea Ječmenová (Ekonomická a finančná matematika, Univerzita Komenského)
Dátum : 27. Február 2017
------------------------------------------------------------------------------------------
Pravidlá:  Cieľom tejto hry je hádať choroby A, B alebo C na základe vygenerovaných
           testov. Pre každý z testov je určená pravdepodobnosť úspešnosti daného
           testu, pokiaľ má človek jednotlivé choroby. Najprv sa generuje 5 testov
           a entropia s pravdepodobnosťami vypočítanými pomocou Bayesovho vzorca
           + graf modelujúci túto situáciu. Potom si hráč môže vybrať ďalšie 1-3
           testy, ale už vidí iba ich výsledky bez ďalšej analýzy. Chorobu pritom môže
           hádať v ktoromkoľvek okamihu po vygenerovaní prvých 5 testov. Body získava
           na základe entropie - miery určujúcej odlíšiteľnosť jednotlivých ochorení
           Čím je choroba lepšie identifikovateľná (malá entropia), tým viac bodov hráč
           získa pri jej uhádnutí. Môže získať 1-3 body a pri neuhádnutí stratiť 3-6
           bodov. Čím viac testov realizuje, tým viac bodov môže stratiť. Hrá sa 10 hier,
           v ktorých cieľom je uhádnuť čo najviac chorôb a dosiahnuť čo najvyššie skóre.
------------------------------------------------------------------------------------------
Start()      začne novú hru vygenerovaním prvej série testov.
Hadam("x")   háda chorobu 'x' z možných ochorení A, B alebo C, napr.: Hadam("B")
Dalsi(n)     generuje nový test z možností 1-8 (zobrazené v tabuľke), napr.: Dalsi(5)
------------------------------------------------------------------------------------------

> |
```

Obr. 5.3.5: Spustenie funkcie *.intro*() v upravenej verzii pôvodného R-kového programu.

Záver

V našej práci sme sa venovali rôznym príkladom z oblasti pravdepodobnosti a štatistiky. Snažili sme sa ich nielen vyriešiť a zrozumiteľne popísať, ale aj rozviesť ich problematiku ďalej. Pokúsili sme sa teda klásť si nové otázky, na ktoré sme hľadali odpovede.

V 1. kapitole sme sa zaoberali lotériovou problematikou - konkrétne lotériou Powerball [1], v ktorej sme najprv určili jednotlivé výherné pravdepodobnosti (Tabuľka 1.1.1). Okrem toho sme sa snažili výhru modelovať v čase (Tabuľka 1.2.1 a Obr. 1.2.1). Snažili sme sa teda zistiť, ako sa mení pravdepodobnosť aspoň jednej výhry s počtom losovaní, ak sa tipujúci pravidelne zapájajú do hry. Rovnako sme zisťovali, kedy táto pravdepodobnosť nadobudne aspoň hodnotu 90% (Tabuľka 1.2.2).

V 2. kapitole sme rozoberali nezápornosť zisku stávkovej kancelárie. Taktiež sme predstavili používaný spôsob bodovania pri futbale, takzvaný Elo-rating [5]. Jeho výpočet pravdepodobnosti očakávaného bodového zisku sme aplikovali na historické zápasy slovenskej reprezentácie (Tabuľka 2.2.2). Preukázal však priemernú spoľahlivosť, čo mohol byť následok zanedbania pravdepodobnosti remízy v spomínanom výpočte. V ďalších výpočtoch sme preto pravdepodobnosť remízy znovu zobrali do úvahy. Pokúsili sme sa pritom určiť také intervaly možných výsledkov, ktoré by vychádzali z elo-pravdepodobností a zároveň spĺňali kritéria nezáporného zisku stanovené na začiatku (Tabuľka 2.2.3).

V 3. kapitole sme sa venovali kartovej hre o spojeniach, ktorá predstavovala obmenu Montmortovho problému [7]. Ukázali sme tu výhodnosť bankárovej pozície oproti hráčovej na základe očakávaného počtu spojení (3.1.2) a pravdepodobnostného rozdelenia náhodnej premennej určujúcej počet spojení (3.1.7). Okrem toho sme vytvorili dotazník, pomocou ktorého sme otestovali preferencie respondentov podľa postupného pridávania faktov o tejto hre. Výsledky tohto prieskumu (Tabuľka 3.2.2) vytvorili domnienku, že ženy a muži sa rozhodovali inak. Túto hypotézu sme preto otestovali (Tabuľka 3.2.3) a potvrdilo sa naše tušenie, že preferencie mužov a žien sú signifikantne odlišné.

Nasledujúca časť sa zaoberala známym Bertrandovým paradoxom. Jej súčasťou bolo predstaviť si možné prístupy k riešeniu tohto problému a ukázať správnosť jedného z nich. Zároveň sme teoretické výstupy otestovali realizáciou pokusu spomínaného v [15]. Na základe jeho výsledku (Tabuľky 4.2.1 a 4.2.2) sa potvrdilo rozdelenie dĺžky tetív (4.1.4), ktoré sa považuje za odpoveď na Bertrandovu otázku.

Posledná kapitola riešila uplatnenie pravdepodobnosti pri testovaní chorôb. Jej súčasťou bolo objasnenie základných pojmov súvisiacich s testovaním. Zaoberali sme sa taktiež problémom falošnej pozitivity a opakovaním testov. Navyše sme upravili program určujúci skutočnú chorobu na hru, kde sa hráč snaží uhádnuť ozajstné ochorenie na základe výsledkov testov (Príloha 2). Hráč okrem toho mohol generovať nové testy na overenie svojej domnienky. Cieľom bolo voliť rôzne druhy testov tak, aby sa čo najviac ukázala prevalencia naozajstnej choroby.

Veľkým prínosom tejto práce bolo, že poskytla viacero zaujímavých tém aj pre menej zainteresované publikum. Okrem predstavenia starších matematických problémov (Bertrandov paradox, Montmortov problém) poukázala aj na novšie využitia matematiky a pravdepodobnosti v oblasti stávkovania (Elo-rating system) či medicíny (testovanie chorôb). Taktiež sa venovala nevýhodnosti investovania do lotérie, čo je pomerne častá aplikácia pravdepodobnosti. Cieľom našej práce teda bolo použitie matematických postupov v bežnom živote, ale aj na vyriešenie klasických problémov pravdepodobnosti spôsobom, ktorý zatraktívni matematiku pre bežného človeka.

Pre autora bola vďačná svojou rôznorodosťou a tým, že rozšírila jeho poznatky v daných oblastiach. Taktiež priniesla nové skúsenosti so spracovávaním a testovaním dát. Priučili sme sa novým postupom pri programovaní hry o hádaní choroby, ale aj pri aplikácii Elo-ratingového systému. Z Elo-pravdepodobností (2.2.1) sme navyše odvodili vzorce použiteľné pre získanie pravdepodobnosti jednotlivých výsledkov zápasu za predpokladu nezápornosti zisku stávkovej kancelárie (2.2.4-2.2.9).

Možným rozšírením práce by bolo napr. zistiť najmenší možný počet lístkov zabezpečujúci výhru v Powerballe. Taktiež by sa mohol porovnať Elo-rating aj s inými ratingami a mohli by sa aplikovať na väčšiu sadu dát. Ďalšou vecou navyše by mohla byť analýza preferencií na základe zmien v pravidlách hry o spojeniach.

Zoznam použitej literatúry

[1] *Powerball - Prizes and Odds*, dostupné na internete (13.4.2017): http://www.powerball.com/powerball/pb_ prizes.asp

[2] Loehr, N.: *Bijective combinatorics*, CRC Press, 2011.

[3] Harman R., Hönschová E., Somorčík J.: *Zbierka úloh zo základov teórie pravdepodobnosti*, PACI 2009, Bratislava

[4] Langville, A. N., Meyer, C. D.: *Who's# 1?: the science of rating and ranking.* Princeton University Press, 2012.

[5] *Elo-rating system*, dostupné na internete (20.4.2017): http://www.eloratings.net/

[6] *Odds Portal - Betting Odds Monitoring Service*, dostupné na internete (20.4.2017): http://www.oddsportal.com/

[7] de Montmort, P.R.: *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*,chez Jacque Quillau, imprimeur-juré-libraire de l'Université, rue Galande, 1713.

[8] Grinstead, C.M., Snell, J.L.: *Introduction to probability*,American Mathematical Soc., 2012.

[9] Shiryaev, A.N.: *Problems in probability*, Springer Science & Business Media, 2012.

[10] Plocki, A.: *Pravdepodobnosť okolo nás*, Stochastika v úlohách a problémoch, Katolícka univerzita, Ružomberok, 2004.

[11] Wittenberg, R. W.: *Encyclopaedia of Mathematics. Supplement III.*, 2012: 199-200.

[12] *Zadanie domácej úlohy na cvičeniach z pravdepodobnosti*, dostupné na internete (10.4.2017): http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/stehlikova/prst17/bonus.pdf

[13] Stehlíková, B.: osobná komunikácia, FMFI UK, Bratislava, 2017

[14] Clark, M.: *Paradoxes from A to Z*, Routledge, 2012.

[15] Jaynes, E. T.: *The Well-Posed Problem*, Foundation of Physics, 3 (1973), 477–493, dostupné na internete (6.3.2017): http://bayes.wustl.edu/etj/articles/well.pdf

[16] Campbell, M. J., Machin, D., Walters, S. J.: *Medical statistics: a textbook for the health sciences*, John Wiley & Sons, 2010

[17] Lang, T. A., Secic, M.: *How to report statistics in medicine: annotated guidelines for authors, editors, and reviewers*, ACP Press, 2006

[18] Koranda, P. a kol.: *F-FDG PET/CT v diagnostice a stážování karcinomů pankreatu*, CesRadiol (2010), 185–191, dostupné na internete (1.3.2017): http://www.cesradiol.cz/dwnld/CesRad_1003_185_191.pdf

[19] Scott, Ch.: *Forensic Psychiatry, An Issue of Psychiatric Clinics.*, Vol. 35., No. 4., Elsevier Health Sciences, 2012

Príloha A

```
pr<-c(30,70,60,20,30,80,50,90,40,70,80,20,40,20,60,80,40,70,10,90,50,60,50,10)/100;
pr<-matrix(data=pr, nrow=3, byrow=FALSE)
choroby.abc<-c("A","B","C")

choroba<-NA; pr.chorob<-NA; testy<-c(""); vysledky<-c("");

#generovanie noveho pacienta a jeho choroby
NovyPacient <- function(){
  choroba <<- sample(x = c(1,2,3), 1, prob = c(1/3,1/3,1/3))
  pr.chorob <<- matrix(data=c(1/3,1/3,1/3), nrow=1)
  testy<<-c(""); vysledky<<-c("")
}

#vygeneruje vysledky testov a pravdepodobnosti pre choroby
Test <- function(n){
  vysledok <- rbinom(1, size=1, prob=pr[choroba,n])
  testy<<-c(testy,n); vysledky<<-c(vysledky,vysledok)
  pr.teraz <- pr.chorob[nrow(pr.chorob),]
  if (vysledok==0) pr.vysledok <- (1-pr[,n]) else pr.vysledok <- pr[,n]
  pr.aktualizovane <- pr.vysledok*pr.teraz/sum(pr.vysledok*pr.teraz)
  pr.chorob <<- rbind(pr.chorob, pr.aktualizovane)
  print(vysledok);
}

#vykresli graf vyvoja pravdepodobnosti prevalencie chorob
Graf <- function(){
  test<-0:(nrow(pr.chorob)-1)
  plot(test,pr.chorob[,1], ylim=c(0,1.5), type="b", col="red", ylab="pravdepodobnost")
  lines(test,pr.chorob[,2],type="b", col="green")
  lines(test,pr.chorob[,3],type="b", col="blue")
  legend(0,1.5, legend=c("A","B", "C"),
        lty=c(1,1,1), col=c("red","green","blue"), horiz=TRUE)
}

#vypise vysledky a pravdepodobnosti
Tabulka <- function() {
  tab<-data.frame(testy,vysledky,pr.chorob[,1],pr.chorob[,2],pr.chorob[,3])
  names(tab)<-c("test","vysledok","pravd.A","pravd.B","pravd.C")
  rownames(tab) <- NULL
  print(tab,row.names = FALSE)
}

#vypise skutocnu chorobu pacienta
SkutocnaChoroba <- function(){
  print(choroby.abc[choroba])
```

```
}

 set.seed(4)
 NovyPacient()
 for (i in 1:8) Test(i)
 Tabulka()
 Graf()
```

Listing 1: Pôvodný kód v R-ku

```
pr<-c(30,70,60,20,30,80,50,90,40,70,80,20,40,20,60,80,40,70,10,90,50,60,50,10)/100;
pr<-matrix(data=pr, nrow=3, byrow=FALSE)
choroby.abc<-c("A","B","C")

pocet<-NA;skore<-NA;match<-NA;mismatch<-NA;dalsi<-NA;

#vygeneruje prveho pacianta s vysledkami a grafom, nastavuje premenne
Start<-function(){
  pocet<<-10
  skore<<-0
  match<<-0
  mismatch<<-0
  ent<<-c("")
  dalsi<<-0
  Priebeh()
}

#funkcia realizujuca hadanie choroby
Hadam<-function(ochorenie){
  if((ochorenie=="A") | (ochorenie=="B") | (ochorenie=="C")){
  pocet<<-pocet-1
  ent<<-0
  for (j in 1:3){
      ent<<-ent-pr.chorob[length(testy),j]*log(pr.chorob[length(testy),j])
  }
  Skore(ochorenie,ent)
  dalsi<<-0
  Vysledky()
  SkutocnaChoroba()
  if(pocet>0){
    Priebeh()
  }
  else{
    Statistika()
  }
  }
  else{cat("Hádaj iba choroby A,B alebo C.")}
}
```

```

testrange<-c(1:8);

#realizacia testovani navyse
Dalsi<-function(n){
  if(dalsi<3 & (n %in% testrange==TRUE)){
  dalsi<<-dalsi+1
  Test(n)
  p1<<-c(p1,"")
  p2<<-c(p2,"")
  p3<<-c(p3,"")
  test<<-c(test,paste("test",n))
  Tabulka()
  Vysledky()
  cat("", "\n")
    if(dalsi==3){
    cat("Teraz už musíš hádat!","\n")
    }
    else{
    cat("Hádaj s Hadam(\"typ choroby\")alebo generuj nový test pomocou funkcie Dalsi(č
      . testu)!","\n")
    }
  }
  else{cat("Hádaj iba testy 1 až 8.")}
}

testy<-c("");

#generuje noveho pacienta a prve vysledky
Priebeh<-function(){
  test<<-c("","test 1","test 2","test 3","test 4","test 5")
  NovyPacient()
  for (i in 1:5) Test(i)
  cat("TEST Č.", 11-pocet, "                      Skóre:",skore, "\n", "\n")
  Tabulka()
  Graf()
  Vysledky()
  p1<<-round(pr.chorob[c(1:6),1],digits=2)
  p2<<-round(pr.chorob[c(1:6),2],digits=2)
  p3<<-round(pr.chorob[c(1:6),3],digits=2)
  cat("", "\n")
  cat("Hádaj s Hadam(\"typ choroby\")alebo generuj nový test pomocou funkcie Dalsi(č.
      testu)!","\n")
}

choroba<-NA; pr.chorob<-NA; testy<-c(""); vysledky<-c("");

#vytvori noveho pacienta a vygeneruje jeho chorobu
```

```
NovyPacient <- function(){
  choroba <<- sample(x = c(1,2,3), 1, prob = c(1/3,1/3,1/3))
  pr.chorob <<- matrix(data=c(1/3,1/3,1/3), nrow=1)
  testy<<-c(""); vysledky<<-c("")
}

#generuje vysledky testov a prisluchajuce pravdepodobnosti chorob
Test <- function(n){
  vysledok <- rbinom(1, size=1, prob=pr[choroba,n])
  testy<<-c(testy,n); vysledky<<-c(vysledky,vysledok)
  pr.teraz <- pr.chorob[nrow(pr.chorob),]
  if (vysledok==0) pr.vysledok <- (1-pr[,n]) else pr.vysledok <- pr[,n]
  pr.aktualizovane <- pr.vysledok*pr.teraz/sum(pr.vysledok*pr.teraz)
  pr.chorob <<- rbind(pr.chorob, pr.aktualizovane)
}

#generuje tabulku s charakteristikami jednotlivych testov
Tabulka<-function(){
  tab<-data.frame(pr[,1],pr[,2],pr[,3],pr[,4],pr[,5],pr[,6],pr[,7],pr[,8])
  names(tab)<-c("test 1","test 2","test 3","test 4","test 5","test 6","test 7","test 8
     ")
  rownames(tab)<- c("A","B","C")
  cat("PRAVDEPODOBNOSTNÁ TABULKA ÚSPEŠNOSTI TESTOV PRI DANEJ CHOROBE:", "\n")
  print(tab)
  cat("", "\n")
}

#vykresluje graf s vyvojom pravdepodobnosti a entropie pre prve testy
Graf <- function(){
  en<<-c("")
  for (i in 1:length(testy)){
  suma<<-0
  for (j in 1:3){suma<<-suma-pr.chorob[i,j]*log(pr.chorob[i,j])}
  en<<-c(en,suma)}
  en<<-en[-1]
  t<-0:(nrow(pr.chorob)-1)
  constant<-function(x) rep(x,length(t))
  par(mfrow=c(1,2))
  plot(t,pr.chorob[,1], ylim=c(0,1), type="b", col="red",
  ylab="pravdepodobnost", xlab="test", main=paste("Vývoj pravdepodobnosti u chorôb"))
  lines(t,pr.chorob[,2],type="b", col="green")
  lines(t,pr.chorob[,3],type="b", col="blue")
  legend(0,1, legend=c("A","B", "C"),
  lty=c(1,1,1), col=c("red","green","blue"), horiz=TRUE)
  plot(t,en,type="b",ylim=c(0,1.2), col="black", lty=1,
  ylab="entropia", xlab="test",  main=paste("Vývoj entropie"))
  lines(t,constant(0.95),col="magenta3", lty=2)
  lines(t,constant(0.5),col="magenta3", lty=2)
```

```
  legend(length(t)/4,1.2, legend=c("Entropia","Hranice"),
  lty=c(1,2), col=c("black","magenta3"), horiz=TRUE)
}

p1<-NA;p2<-NA;p3<-NA;

#generuje tabulku s vysledkami testov a pravdepodobnostami
Vysledky<-function(){
  if(dalsi==0){c1<<-round(pr.chorob[,1],digits=2);c2<<-round(pr.chorob[,2],digits=2);c3<<-round(pr.chorob[,3],digits=2)}
  else{c1<<-p1;c2<<-p2;c3<<-p3}
  cisl<<-c("",1:(length(testy)-1))
  vys<-data.frame(cisl,test,vysledky,c1,c2,c3)
  names(vys)<- c("Testovanie","Použitý test","Výsledok","Pravd. A","Pravd. B","Pravd. C")
  cat("VÝSLEDKY TESTOVANÍ:", "\n")
  rownames(vys) <- NULL
  print(vys,row.names = FALSE)
}

#vypise skutocnu chorobu
SkutocnaChoroba <- function(){
  cat("Skutočná choroba: ", choroby.abc[choroba], "\n")
  cat("----------------------------------------------------------------", "\n")
}

#aktualizuje bodove skore
Skore<-function(ochorenie,ent){
  if(ochorenie==choroby.abc[choroba] & ent<0.5){skore<<-skore+3; match<<-match+1}
  else if(ochorenie==choroby.abc[choroba] & ent>=0.5 & ent<0.95){skore<<-skore+2; match<<-match+1}
  else if(ochorenie==choroby.abc[choroba] & ent>=0.95){skore<<-skore+1; match<<-match+1}
  else{skore<<-skore-3-dalsi; mismatch<<-mismatch+1}
}

#vypisuje celkovu statistiku na konci hry
Statistika<-function(){
  cat("Skóre : ", skore, "\n")
  cat("Úspešnost : ", (match/10)*100,"%", "\n")
  if(skore>=10 & skore<20){cat("V testoch si obstál. Bol by z teba dobrý doktor. Pre novú hru spusti Start().", "\n")}
  else if(skore>=20){cat("Bol by z teba výborný doktor. Pre novú hru spusti Start().", "\n")}
  else if(match/10>=0.6 & skore<10){cat("Nebol to zlý výkon, ale život by som ti do rúk nevložila. Pre novú hru spusti Start().", "\n")}
  else if(match/10<0.6){cat("Dúfam, že nie si doktor. Zabil by si vela svojich pacientov!!! Pre novú hru spusti Start().", "\n")}
```

```
}

#vypise pravidla hry a pouzitie funkcii
.intro <- function() {
  cat("", "\n")
  cat("--------------------------------------------------------------------------------------------", "\n")
  cat("Hádanie choroby v R", "\n")
  cat("--------------------------------------------------------------------------------------------", "\n")
  cat("Autor : Andrea Ječmenová (Ekonomická a finančná matematika, Univerzita Komenského)", "\n")
  cat("Dátum : 27. Február 2016", "\n")
  cat("--------------------------------------------------------------------------------------------", "\n")
  cat("Pravidlá:  Cielom tejto hry je hádat choroby A, B alebo C na základe vygenerovaných", "\n")
  cat("           testov. Pre každý z testov je určená pravdepodobnost úspešnosti daného", "\n")
  cat("           testu, pokial má človek jednotlivé choroby. Najprv sa generuje 5 testov", "\n")
  cat("           a entropia s pravdepodobnostami vypočítanými pomocou Bayesovho vzorca", "\n")
  cat("           + graf modelujúci túto situáciu. Potom si hráč môže vybrat dalšie 1-3", "\n")
  cat("           testy, ale už vidí iba ich výsledky bez dalšej analýzy. Chorobu pritom môže", "\n")
  cat("           hádat v ktoromkolvek okamihu po vygenerovaní prvých 5 testov. Body získava", "\n")
  cat("           na základe entropie - miery určujúcej odlíšitelnost jednotlivých ochorení","\n")
      cat("           Čím je choroba lepšie identifikovatelná (malá entropia), tým viac bodov hráč","\n")
  cat("           získa pri jej uhádnutí. Môže získat 1-3 body a pri neuhádnutí stratit 3-6", "\n")
  cat("           bodov. Čím viac testov realizuje, tým viac bodov môže stratit. Hrá sa 10 hier,", "\n")
  cat("           v ktorých cielom je uhádnut čo najviac chorôb a dosiahnut čo najvyššie skóre.", "\n")
  cat("--------------------------------------------------------------------------------------------", "\n")
  cat("Start()        začne novú hru vygenerovaním prvej série testov.", "\n")
  cat("Hadam(\"x\")     háda chorobu 'x' z možných ochorení A, B alebo C, napr.: Hadam(\"B\")", "\n")
  cat("Dalsi(n)       generuje nový test z možností 1-8 (zobrazené v tabulke), napr.: Dalsi(5)", "\n")
  cat("--------------------------------------------------------------------------------------------", "\n")
```

```
  cat("", "\n")
}

.intro()
Start()
```

Listing 2: Upravený kód v R-ku