

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



S MATEMATIKOU OKOLO SVETA

BAKALÁRSKA PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

S MATEMATIKOU OKOLO SVETA

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: doc. RNDr. Beáta Stehlíková, PhD.



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Anna Mária Miglierini
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: S matematikou okolo sveta
Around the world with mathematics

Cieľ: V jednej z kníh Julesa Verna musia hrdinovia nájsť súradnice stredu kružnice opísanej trojuholníku, ak sú dané geografické súradnice vrcholov (tam má byť ukrytý poklad). Vzhľadom na veľké vzdialenosti nie je Euklidovská geometria dobrou aproximáciou, treba pracovať so sférickou. V článku [2] sa uvádza postup, ako nájsť súradnice stredu analyticky (hrdinovia knihy ich hľadali rysovaním na glóbose).

Do bakalárskej práce sa vyberú tri sady úloh, ktoré sa dajú priradiť ku konkrétnym miestam. Jedným z nich bude Univerzita v Berkeley a vybrané príklady z knihy [1] a vzhľadom na geografické zameranie témy bude jedným z nich príklad 4.3.1. Zvyšné dve si vyberie študent tak, aby náročnosť príkladov zodpovedala bakalárskej práci (a aby boli niečím zaujímavé). V poslednej kapitole bakalárskej práce sa vysvetlí postup z [2] a použije sa na výpočet súradníc stredu kružnice opísanej trojuholníku, ktorého vrcholmi sú body zodpovedajúce jednotlivým sadám úloh a zistí sa, čo sa na tomto mieste nachádza. Tieto vrcholy a získaný stred kružnice sa vizuálne znázornia na mape pomocou vhodných knižníc softvéru R.

Literatúra: [1] P. N. de Souza, J.-N. Silva: Berkeley Problems in Mathematics. Springer, 2004.
[2] G. de Vries-Uiterweerd: Spherical Geometry in Mirifiques aventures de maître Antifer. Verniana - Jules Verne Studies/Etudes Jules Verne - Volume 2, 2009-2010, 1-10.

Vedúci: doc. RNDr. Beáta Stehlíková, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Dátum zadania: 25.10.2016

Dátum schválenia: 19.11.2016 doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Pod'akovanie Touto cestou sa chcem pod'akovať svojej školiteľke, doc. RNDr. Beáte Stehlíkovej, PhD., za konštruktívne pripomienky, poskytnutú literatúru a celkovo pomoc pri písaní tejto práce.

Abstrakt

MIGLIERINI, Anna Mária: S matematikou okolo sveta [Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: doc. RNDr. Beáta Stehlíková, PhD., Bratislava, 2017, 51 s.

Cieľom tejto bakalárskej práce je analytickým postupom nájsť súradnice stredu kružnice opísanej trojuholníku, ktorého vrcholmi sú miesta z jednotlivých kapitol. Tými sú Kalifornská univerzita v Berkeley, Petrohrad a Angelov vodopád vo Venezuele. Každá kapitola obsahuje niekoľko úloh, ktoré sa dajú k týmto miestam priradiť.

V prvej kapitole sú to príklady zo skúšok zadané na matematickej fakulte univerzity v Berkeley. V druhej kapitole je rozobraný príklad o siedmich königsbergských mostoch a tzv. „Art Gallery Problem“. Tretia kapitola obsahuje problém o usádzaní ľudí v lietadle, pokiaľ si prvý z nich vyberie sedadlo náhodne. V poslednej časti práce sú uvedené myšlienky analytického postupu aj s príslušným výpočtom a zobrazením hľadaného stredu na mape pomocou softvéru R. Súčasťou práce je aj kód na výpočet takéhoto stredu.

Kľúčové slová: stred kružnice opísanej trojuholníku, analytická geometria, Berkeley Problems in Mathematics, Königsberg Bridge Problem, Art Gallery Problem, Airplane Seating Problem

Abstract

MIGLIERINI, Anna Mária: Around the world with mathematics [Bachelor Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: doc. RNDr. Beáta Stehlíková, PhD., Bratislava, 2017, 51 p.

The purpose of this thesis is to calculate the circumcenter of three places by the means of analytic geometry. The three places are University of California in Berkeley, Saint Petersburg and Angel Falls in Venezuela. Each section of the thesis is devoted to one of them. There are some mathematical problems, which are somehow related to these places.

The part about Berkeley describes the problems, which a written examination by the Mathematics Department at the university consisted of. The second one contains the Königsberg Bridge Problem and the Art Gallery Problem. In the third part, a problem of finding your seat on a plane in case that the first person can choose a seat randomly is elaborated. The last part explains the analytic principles of finding the circumcenter as well as its calculation and portrayal on a map. The R software was used for calculation and plotting. The corresponding code is attached.

Keywords: circumcenter, analytic geometry, Berkeley Problems in Mathematics, Königsberg Bridge Problem, Art Gallery Problem, Airplane Seating Problem

Obsah

Úvod	8
1 Univerzita v Berkeley	10
2 Petrohrad	19
2.1 Euler a mosty Königsbergu	19
2.2 Ako ustrážiť galériu	23
3 Angelov vodopád	29
4 „Záhadný“ stred	34
Záver	45
Zoznam použitej literatúry	46
Príloha A	50

Úvod

Matematika má svoje čaro. Nie všetci si to myslia, čo je pravdepodobne spôsobené nevôľou pochopiť už prvé zložitejšie postupy. Takíto ľudia potom majú iba veľmi povrchové znalosti, ktoré zdanlivo s ničím nesúvisia, a teda im prídu zbytočné. Žiaci stredných škôl majú v obľube učiteľov zaťažovať otázkami typu: Načo nám to bude? Aké to má využitie v reálnom živote? Veľakrát učelia nevedia nájsť vhodnú odpoveď, a tak to často končí zdôvodnením, že učia, čo majú v osnovách. Problém je v tom, že žiaci sa väčšinou snažia sklbiť určité matematické výpočty s konkrétnym povoláním. Predstava, že by nejaký budúci právnik potreboval vedieť metódy riešenia sústavy rovníc o dvoch neznámych, pôsobí pre mnohých dostatočne nerealisticky. Neuvedomujú si však, že riešením zdanlivo nereálnych a v praxi nepoužiteľných úloh rozvíjajú istú časť svojho myslenia, ktorá sa im s veľkou pravdepodobnosťou môže v budúcnosti zísť pri riešení aj nematematických problémov.

Na druhej strane, v živote ľudia často narazia práve na veci, ktoré si mysleli, že nikdy nepoužijú. Taký spisovateľ by predsa vo svojom povolaní nemal potrebovať matematiku. Lenže čo ak vymyslí príbeh, v ktorom sa hrdinovia bez istých matematických zdatností nebudú schopní zachrániť? Komu by napadlo, že hlbšie matematické vedomosti sa raz môžu zísť pri hľadaní pokladu? Juhelovi, jednému z hrdinov Verneho knihy s pôvodným názvom *Mirifiques aventures de maître Antifer*, to možno napadlo. Avšak literárne postavy majú len toľko rozumu, koľko im autor nadelí, a to je, prirodzene, obmedzené schopnosťami samotného autora, prípadne jeho kontaktmi s múdrymi hlavami doby, v ktorej žil.

Vzhľadom na spôsob hľadania pokladu opísaný v spomínanej Verneho knihe sa predpokladá, že autor využíval čisto svoju fantáziu a vedomosti. Poklad sa totiž mal nachádzať v strede kružnice opísanej trojuholníku, ktorého vrcholmi boli tri ostrovy, ktoré hrdinovia postupne objavovali. A námorník Juhel nezvolil práve najrozumnejší postup. Hoci rysovanie na glóbose môže znieť ako prijateľná možnosť, keď sa človek trochu zamyslí, musí si uvedomiť obrovské riziko, ktoré spočíva v nepresnosti. Už pri rysovaní na papieri sa nedá vyhnúť drobným odchýlkam. O čo náročnejšie to musí byť na guľatom útvere? Ak nám stačí približná predstava, dostaneme týmto spôsobom vcelku dostatočný odhad. Ak však vezmeme do úvahy, že bezchybný výsledok pri takomto po-

stupe je vlastne nemožný a prerátaním na skutočné rozmery Zeme sa nepresnosti ešte zväčšia, môže to byť strata času a vytúžený poklad môžeme minúť aj o niekoľko desiatok kilometrov. Matematický postup, ktorý je uvedený v článku [31], síce z časového hľadiska rysovane veľmi nepredčuje, vyniká však v jednoznačnom určení polohy pokladu. Na tomto príklade veľmi dobre vidieť, že keby sa človek trochu viac zaujímal o matematiku, mohol by si uľahčiť niektoré situácie. Namiesto bezduchého blúdenia po okolí vyznačenej bodky na glóbose stačilo chvíľu posedieť nad výpočtami, a potom sa už len dopraviť na určené miesto a poklad vykopať.

Do našej práce sme pomerne náhodne vybrali tri zaujímavé miesta na Zemi. Ku každému sme vybrali niekoľko rôzne náročných úloh, historických súvislostí či geografických zaujímavostí. V prvej kapitole sú pritom vybrané matematické úlohy z knihy [27]. V poslednej kapitole sa, rovnako ako hľadači pokladov, pokúsime určiť polohu posledného miesta, ale pomocou analytického postupu z článku [31]. Vzhľadom na tému a jej skôr motivačný charakter, je táto práca miestami písaná menej formálne, ako je pri bakalárskych prácach obvykle zaužívané.

1 Univerzita v Berkeley

Kalifornská univerzita v Berkeley bola založená v roku 1868. Patrí k najlepším univerzitám na svete, jej absolventi a pracovníci uskutočnili veľa objavov a získali mnoho ocenení [3].

V roku 1977 na Katedre matematiky zaviedli písomnú skúšku pre prvákov doktorského štúdia. Nahradila starší systém kvalifikačných skúšok a jej účelom bolo zistiť, či študenti dostatočne ovládajú základy matematiky, a sú tak schopní úspešne pokračovať v štúdiu. V súčasnosti je táto skúška hlavným merítkom minimálnych požadovaných vedomostí na úspešné získanie titulu. Zadanie pozostáva z deviatich úloh, z ktorých si študent vyberie šesť. Od zavedenia tohto spôsobu testovania spôsobilosti študentov bolo zadaných už vyše 1250 takýchto úloh. Páni Paulo Ney de Souza a Jorge Nuno Silva ich zozbierali a spolu s riešeniami publikovali v knihe *Berkeley Problems in Mathematics* [27]. Vybrali sme z nich zopár, ktoré uvádzame aj s podrobnejšími vysvetleniami k riešeniu, prípadne ilustračnými obrázkami.

Na úvod sa budeme zaoberať úlohou, v ktorej treba určiť, ktoré z čísel π^3 a 3^π je väčšie [27, Problem 1.1.20]. Dané výrazy môžeme zlogaritmováť, pretože sú kladné. Logaritmickejšia funkcia je rastúca, takže táto úprava zachová pôvodnú nerovnosť. Stačí teda porovnávať $\ln\pi^3$ a $\ln3^\pi$. Tieto ešte vieme upraviť na $3\ln\pi$ a $\pi\ln3$ využitím vlastnosti logaritmu, ktorá je uvedená aj s dôkazom v [17, str. 180, Proposition 5.4.1. (v)]. Po predelení pôvodnými exponentmi dostávame výrazy $\frac{\ln\pi}{\pi}$ a $\frac{\ln3}{3}$. Teda porovnáваме funkčné hodnoty funkcie $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ v bodoch π a 3 . Aby sme zistili, ako sa táto funkcia správa, vyrátame jej prvú deriváciu, z ktorej vieme určiť monotónnosť funkcie podľa [25, str. 93, 5.11 Theorem] nasledovne:

- ak $f'(x) \geq 0$ pre všetky $x \in (a, b)$, potom f je na danom intervale rastúca
- ak $f'(x) \leq 0$ pre všetky $x \in (a, b)$, potom f je na danom intervale klesajúca.

Dostávame $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$, ktorá je kladná pre $x < e$ (tam je $f(x)$ rastúca) a záporná pre $x > e$ (tu funkcia klesá). Keďže oba body, v ktorých porovnáваме funkčné hodnoty, sú väčšie ako Eulerova konštanta, zaoberáme sa iba vetvou, kde je $f(x)$ klesajúca. Z

klesajúcej vyplýva, že väčšia funkčná hodnota sa dosahuje v menšom z argumentov. Teda $f(3) = \frac{\ln 3}{3} > f(\pi) = \frac{\ln \pi}{\pi}$. Z odvedenia na začiatku teda rovnaký vzťah platí aj pre $3^\pi > \pi^3$.

Ďalší príklad je prototypom na využitie tzv. „sendvičovej“ vety. Jej názov je celkom adekvátny, keďže zmyslom je ohraničiť nejaký výraz zdola aj zhora, čiže akoby vložiť medzi dva sendviče. Takýto postup je vhodné použiť, napríklad, pri riešení úlohy, ktorej zadanie znie: Ak $A_1 \geq A_2 \geq \dots \geq A_k \geq 0$, vypočítajte, čomu bude rovná $\lim_{n \rightarrow \infty} (A_1^n + A_2^n + \dots + A_k^n)^{\frac{1}{n}}$ [27, Problem 1.3.1]. Budeme budovať intuitívne úvahy, z ktorých bude zrejmé, ako sa dá dospieť k riešeniu takejto úlohy. Vieme, že postupnosť $\{p_n\}$ má limitu p , ak pre každé $\epsilon > 0$ existuje celé číslo N také, že pre $n \geq N$ platí $d(p_n, p) < \epsilon$, kde d predstavuje vzdialenosť [25, str. 41, 3.1 Definition]. Čiže limitou je číslo, ku ktorému sú, od niektorého člena postupnosti, všetky ostatné členy ľubovoľne blízko. Najprv postupne rozoberieme jednotlivé členy limitovaného výrazu a z toho usúdime, aký postup bude najvhodnejší. Výraz $\frac{1}{n}$ sa pre $n \rightarrow \infty$ limitne blíži k nule. Môžeme to vidieť aj na grafe funkcie $\frac{1}{x}$. Jednotlivé čísla A_i^n umocňovaním na stále väčšie n môžu ísť k nule, pokiaľ $0 \leq A_i < 1$, alebo do nekonečna, ak $A_i > 1$. Tieto informácie ohľadom jednotlivých A_i však nemáme a dá sa očakávať, že takýmto spôsobom by sme dospeli k nedefinovanému výrazu ∞^0 . S výrazom $(A_1^n + A_2^n + \dots + A_k^n)^{\frac{1}{n}}$ teda musíme narábať ako s celkom. Ak by boli niektoré A_i záporné, mohol by tento výraz pre nepárne n nadobúdať podstatne odlišné hodnoty ako pre párne n , a teda by sa v nekonečne neblížil iba k jednej konkrétnej hodnote, čím by jeho limita nemohla existovať. Vzhľadom na nezápornosť jednotlivých A_i a ich nerastúcosť však môžeme očakávať, že pokiaľ sa tento výraz limitne k niečomu blíži, bude to nejaké jedno nezáporné číslo. Daný výraz tak vieme z oboch strán ohraničiť jednoduchšími výrazmi. Pokiaľ tieto budú mať konečné limity, ktoré budú zhodné, použitím „sendvičového“ pravidla [17, str. 53, Lemma 2.2.1] bude existovať aj limita nášho výrazu a bude rovná práve hodnote limít ohraničujúcich výrazov. Prejdeme teda už k samotnému riešeniu úlohy. Jednotlivé ohraničenia dostaneme nasledovne: keďže číslo A_1 je (zo zadania) najväčšie a nezáporné, súčet $A_1^n + A_2^n + \dots + A_k^n$ bude určite menší ako súčet $A_1^n + A_1^n + \dots + A_1^n$. Na druhej strane, ak k A_1^n pripočítame ľubovoľné nezáporné číslo, nemôžeme dostať

menší výsledok. Teda náš súčet vieme ohraničiť nasledovne:

$$A_1^n \leq A_1^n + A_2^n + \dots + A_k^n \leq kA_1^n.$$

Nerovnosti ostanú zachované aj po umocnení na $\frac{1}{n}$, pretože $n > 0$:

$$A_1 = (A_1^n)^{\frac{1}{n}} \leq (A_1^n + A_2^n + \dots + A_k^n)^{\frac{1}{n}} \leq (kA_1^n)^{\frac{1}{n}} = k^{\frac{1}{n}} A_1.$$

Exponenty n a $\frac{1}{n}$ sa vykrátia, čím v prípade dolného ohraničenia limitujeme už iba konštantu A_1 nezávislú od n . Pri hornom ohraničení síce exponent $\frac{1}{n}$ ostane pri čísle k , limitovaním však prejde do nuly, čím sa z výrazu $k^{\frac{1}{n}}$ stane 1. Obe ohraničenia teda majú konečné limity rovné A_1 . Z toho dostávame, že aj limita pôvodného výrazu existuje a je rovná A_1 :

$$A_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} (A_1^n)^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (A_1^n + A_2^n + \dots + A_k^n)^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (kA_1^n)^{\frac{1}{n}} = A_1.$$

Notoricky známym pojmom, s ktorým sa stretne každý človek, ktorý sa čo len trochu viac venuje matematike, sú integrály. Pochopiteľne, táto matematická trieda má svoje zastúpenie aj na skúškach v Berkeley. V jednom takom príklade mali študenti vypočítať $\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+a^2} dx$, pričom $a > 0$ mali považovať za konštantu [27, str. 21, Problem 1.5.23].

Zhodou okolností, presne tento príklad bol minulý rok daný na riešenie v talianskom časopise Archimede, ale pre bližšie nešpecifikované a . Viacerí riešitelia pri jeho výpočte použili komplexnú analýzu [24]. Riešenie v komplexnom tvare nám ponúkne napríklad aj Wolfram Alpha. Komplexným číslam sa však pri riešení tohto integrálu pre $a > 0$ vieme úplne vyhnúť.

Šikovným postupom, v tomto prípade, je zavedenie substitúcie premenných $x = \frac{a}{t}$,

ktorou dostaneme nasledovné:

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \frac{\log x}{x^2 + a^2} dx &= \int_0^\infty \frac{\log \frac{a}{t}}{\left(\frac{a}{t}\right)^2 + a^2} \cdot \frac{a}{t^2} dt = \frac{1}{a} \int_0^\infty \frac{\log \frac{a}{t}}{1 + t^2} dt \\
 &= \frac{\log a}{a} \int_0^\infty \frac{dt}{1 + t^2} - \frac{1}{a} \int_0^\infty \frac{\log t}{1 + t^2} dt \\
 &= \frac{\log a}{a} [\arctan t]_0^\infty - J \\
 &= \frac{\pi \log a}{2a} - J.
 \end{aligned}$$

Na integrál $\frac{1}{a} \int_0^\infty \frac{\log t}{1+t^2}$, ktorý sme označili ako J , použijeme podobnú substitúciu $t = \frac{1}{s}$:

$$\begin{aligned}
 J &= \frac{1}{a} \int_0^\infty \frac{\log t}{1 + t^2} dt = \frac{1}{a} \int_0^\infty \frac{\log \frac{1}{s}}{1 + \frac{1}{s^2}} \cdot \frac{1}{s^2} ds = \frac{1}{a} \int_0^\infty \frac{\log \frac{1}{s}}{1 + s^2} ds \\
 &= \frac{1}{a} \int_0^\infty \frac{\log 1}{1 + s^2} ds - \frac{1}{a} \int_0^\infty \frac{\log s}{1 + s^2} ds = 0 - J.
 \end{aligned}$$

Dostali sme $J = -J$, takže $J = 0$ a daný integrál sa rovná

$$\frac{\pi \log a}{2a}.$$

Na rozdiel od integrálov, už nie tak známym pojmom sú kongruencie. Tých sa týkala, napríklad, takáto úloha: Urč poslednú cifru čísla $23^{23^{23}}$ v desiatkovej sústave [27, str. 120, Problem 6.13.18].

Poslednú cifru ľubovoľného čísla vieme dostať ako zvyšok po delení desiatimi, pretože možné zvyšky zahŕňajú všetky číslice od 0 po 9. Vzťah medzi číslami a ich zvyškami po delení nejakým číslom zachytáva relácia kongruencie. Celé čísla a a b sú kongruentné modulo m , píšeme $a \equiv b \pmod{m}$, pokiaľ $a - b$ je bezo zvyšku deliteľné číslom m [11, str. 71, Definition]. Inak povedané, dve čísla sú kongruentné modulo m , ak po delení ním dávajú rovnaký zvyšok. Je teda zrejmé, že $23 \equiv 3 \pmod{10}$.

Kongruencia modulo m je reláciou ekvivalencie, čiže pre všetky $a, b, c, m \in \mathbb{Z}$, podľa

[11, str. 74, Proposition 3], platí:

- reflexívnosť: $a \equiv a \pmod{m}$
- symetria: $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow b \equiv a \pmod{m}$
- tranzitívnosť: $a \equiv b \pmod{m} \wedge b \equiv c \pmod{m} \Rightarrow a \equiv c \pmod{m}$.

Ďalšie vlastnosti kongruencií z [11, str. 74, Proposition 4], ktoré využijeme, platia pre každé $a, b, c, d, k, m \in \mathbb{Z}$:

1. Ak $a \equiv b \pmod{m}$, potom $ka \equiv kb \pmod{m}$.
2. Ak $a \equiv b \pmod{m}$ a $c \equiv d \pmod{m}$, potom $a + c \equiv b + d \pmod{m}$ a $ac \equiv bd \pmod{m}$.

Z druhej vlastnosti dostávame $23^{23^{23^{23}}} \equiv 3^{23^{23^{23}}} \pmod{10}$. Podľa definície teda postačí nájsť zvyšok $3^{23^{23^{23}}} \pmod{10}$.

V ďalšom kroku využijeme Eulerovu vetu, ktorá hovorí, že ak m je kladné celé číslo a a je nesúdeliteľné s m , potom $a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ [11, str. 179, Theorem 6]. Funkcia $\phi(m)$ je pritom Eulerova ϕ -funkcia, určujúca pre všetky celé čísla $m \geq 2$ počet kladných celých čísel menších ako m a nesúdeliteľných s m [11, str. 111, Definition]. V našom prípade $\phi(10) = 4$ a podľa Eulerovej vety:

$$3^r \equiv 3^s \pmod{10}, \tag{1}$$

respektíve

$$3^{r-s} \equiv 1 \pmod{10},$$

ak $r - s = \phi(10) = 4$, teda:

$$r - s \equiv 0 \pmod{4},$$

čiže

$$r \equiv s \pmod{4}. \tag{2}$$

Od $3^{23^{23^{23}}} \pmod{10}$ tak prejdeme k $23^{23^{23}} \pmod{4}$. Vieme, že $23 \equiv 3 \pmod{4}$, z čoho taktiež $23^{23^{23}} \equiv 3^{23^{23}} \pmod{4}$. Hľadáme teda zvyšok $3^{23^{23}} \pmod{4}$, pričom $3 \equiv$

$-1 \pmod{4}$, takže $3^{23^{23}} \equiv (-1)^{23^{23}} \pmod{4}$. Výraz $(-1)^{23^{23}}$ je však bez ohľadu na modulo rovný -1 , lebo 23^{23} je nepárne. Zo symetrie aplikovanej na $3 \equiv -1 \pmod{4}$ je však $-1 \equiv 3 \pmod{4}$, takže využitím tranzitívnosti dostaneme $3^{23^{23}} \equiv -1 \equiv 3 \pmod{4}$. Teda $23^{23^{23}} \equiv 3 \pmod{4}$ a spätným prechodom od vzťahu (2) k (1) dostaneme $3^{23^{23^{23}}} \equiv 3^3 \pmod{10}$. Keďže $3^3 = 27$, máme $3^3 \equiv 7 \pmod{10}$ a opäť z tranzitívnosti potom $3^{23^{23^{23}}} \equiv 7 \pmod{10}$, a teda poslednou cifrou je číslica 7.

Zopár úloh sa zadávateľa skúšok pokúsili tematicky previazať s univerzitnou budovou Evans Hall, v ktorej je sústredená výučba matematiky a ekonómie. Študenti píšuci skúšku si mali predstaviť, že keď v Evans Hall rozložia na stole mapu Kalifornie, tak práve jeden bod na nej sa bude nachádzať presne nad miestom, ktoré označuje. A tento fakt mali za úlohu dokázať [27, str. 61, Problem 4.3.1]. Zadanie je veľmi dobre predstaviteľnou aplikáciou vety o pevnom bode [1, str. 178, Theorem 4.1.5]. Tá tvrdí, že, za určitých podmienok, pre nejaké zobrazenie φ existuje práve jeden bod, pre ktorý $\varphi(x) = x$. Teda x je tzv. pevný bod tohto zobrazenia, pretože je ním zobrazený sám na seba. Predpokladom pre existenciu tohto bodu je kontraktívnosť daného zobrazenia $\varphi : X \rightarrow X$, pričom X je úplný normovaný priestor. Normovaným priestorom podľa [1, str. 10, Definition 1.2.3] nazveme vektorový priestor X , ak každému vektoru $x \in X$ vieme priradiť reálne číslo $\|x\|$, nazývané norma, predstavujúce dĺžku vektora x , také, že:

- $\|x\| \geq 0$, pričom $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$, $\alpha \in \mathbb{R}$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, pre ľubovoľné $x, y \in X$.

V našej úlohe sa bod zobrazený sám na seba bude určite nachádzať na povrchu stola, na ktorom je mapa položená. Teda pre naše zobrazenie za priestor X zvolíme plochu stola, ktorá je určite podmnožinou \mathbb{R}^2 . Z [1, str. 12, Examples 1.2.8] vieme, že každý priestor \mathbb{R}^k je normovaným priestorom. Potrebujeme ukázať aj že daný priestor je úplný, čiže taký, v ktorom každá Cauchyho postupnosť konverguje [1, str. 18]. Podľa [1, str. 17, Observation] však v \mathbb{R}^k konvergujú iba Cauchyho postupnosti. Takže \mathbb{R}^k je

úplným normovaným priestorom, a rovnako tak každý jeho uzavretý podpriestor [1, str. 18, Theorem 1.2.39]. Uzavretosť plochy stola vzhľadom na \mathbb{R}^2 je zrejmá, teda je úplným normovaným priestorom. Ešte si potrebujeme rozmyslieť, že zadané zobrazenie je naozaj z $X \rightarrow X$. Stačí si však uvedomiť, že tu ide o zobrazenie plochy stola do nej samej a nie do mapy, ako by sa mohlo zdať. Obrazy bodov z celého povrchu stola sa síce budú všetky nachádzať iba na malej ploche (pri danom zmenšení to bude iba jedna bodka na mape), pre nás je však podstatné, nad akým konkrétnym miestom z plochy celého stola to bude. Čiže zobrazenie priradí každému bodu z plochy stola iba nejaké iné miesto na stole, a teda tento predpoklad môžeme považovať za splnený.

Ďalej potrebujeme overiť kontraktívnosť. Podľa [1, str. 176], zobrazenie $\varphi : X \rightarrow X$ na normovanom priestore X s normou $\|\cdot\|$ je kontraktívne, ak existuje reálne číslo $0 < c < 1$ také, že pre všetky $x, y \in X$ platí:

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq c \cdot \|x - y\|. \quad (3)$$

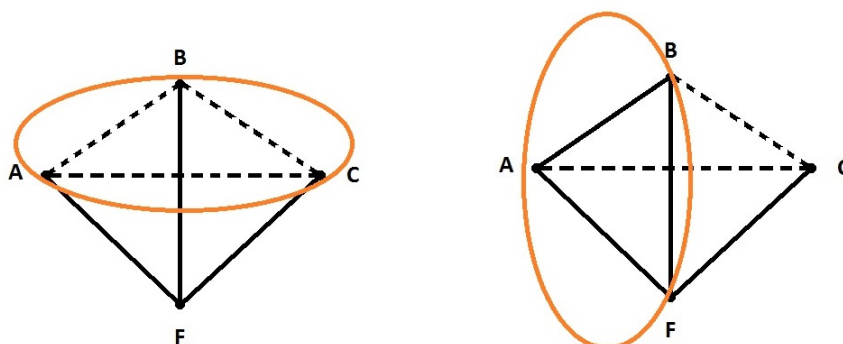
Samotná vzdialenosť bodov na mape je, prirodzene, menšia ako ich vzdialenosť v skutočnosti. Táto nerovnosť ostane zachovaná pre c väčšie ako prevrátená hodnota mierky mapy.

Predpoklady tvrdenia splňame, pevný bod teda existuje, a to práve jeden.

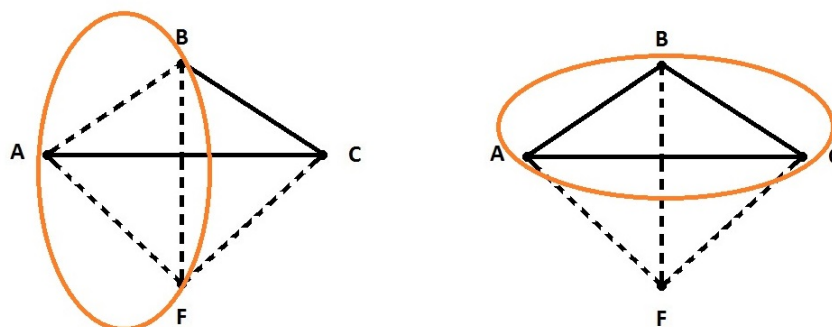
Napriek zakomponovávaniu do príkladov sa Evans Hall neteší veľkej obľube. Z praktického hľadiska za to čiastočne môže nízky počet okien v mnohých učebniach. Nedostatok slnečného svetla vyvoláva ponurú atmosféru. Z čisto estetického hľadiska študenti pokladajú budovu dokonca za jednu z najškarredších. Popri mnohých historických skvostoch kampusu univerzity môže Evans Hall naozaj pôsobiť nevkusne. Avšak, na rozdiel od väčšiny týchto historických budov, má jednu praktickú výhodu - výťah. I keď aj voči nemu majú študenti výhrady. Na blogu študentského časopisu The Daily Californian bol zverejnený článok s názvom *5 vecí, ktoré môžeš robiť, kým čakáš na výťah v Evans Hall* [4]. Pri toľkej popularite tohto výťahu je pochopiteľné, že zadávatelia skúšok sa rozhodli venovať mu jednu z úloh. Študenti tak mali dokázať, že ak sa vo výťahu v Evans Hall spolu vezie šesť osôb, potom buď aspoň traja z týchto ľudí sa navzájom poznajú, alebo sú medzi nimi aspoň traja ľudia, ktorí sa medzi sebou ne-

poznajú [27, str. 118, Problem 6.13.1]. Povedzme, že tí šiesti ľudia vo výťahu sú Anna, Berta, Cecília, Dana, Ema a Fero. Vyberieme z nich jedného, napríklad Fera. Dievčatá tak môžeme rozdeliť do dvoch skupín: X (Ferove známe) a Y (ostatné). Existuje tzv. Dirichletov princíp, nazývaný aj zásuvkový, ktorý hovorí, že ak je viac ako n predmetov rozdelených do n skupín, potom niektorá skupina obsahuje minimálne dva predmety [7, str. 5].

Podľa tohto princípu má jedna zo skupín dievčat minimálne troch členov. Povedzme, že je to skupina X , teda napríklad $\{Anna, Berta, Cecília\} \subset X$. Pokiaľ sa tieto tri medzi sebou navzájom nepoznajú, tvrdenie je dokázané. Ak sa poznajú aspoň dve z nich, napríklad Anna a Berta, potom spolu s Ferom tvoria trojicu známych. Názorne to vieme ilustrovať na Obr. 1. Plné čiary spájajú osoby, ktoré sa navzájom poznajú. Osoby spojené prerušovanou čiarou sa nepoznajú.



Obr. 1: Situácie vo výťahu ak Fero pozná Annu, Bertu a Cecíliu



Obr. 2: Situácie vo výťahu ak Fero nepozná Annu, Bertu a Cecíliu

Ak by skupinou s minimálne tromi členmi bol Y , postupovalo by sa podobne. Pokiaľ sa aspoň dve dievčatá v tejto skupine navzájom nepoznajú, spolu s Ferom tvoria trojicu neznámych. Ostatná možnosť, že sa budú aspoň tri dievčatá z Y poznať, opäť vedie k riešeniu.

2 Petrohrad

Petrohrad bol hlavným mesto Ruskej ríše po dobu takmer dvesto rokov. Dodnes je stelesnením pýchy a slávy cárskeho Ruska.

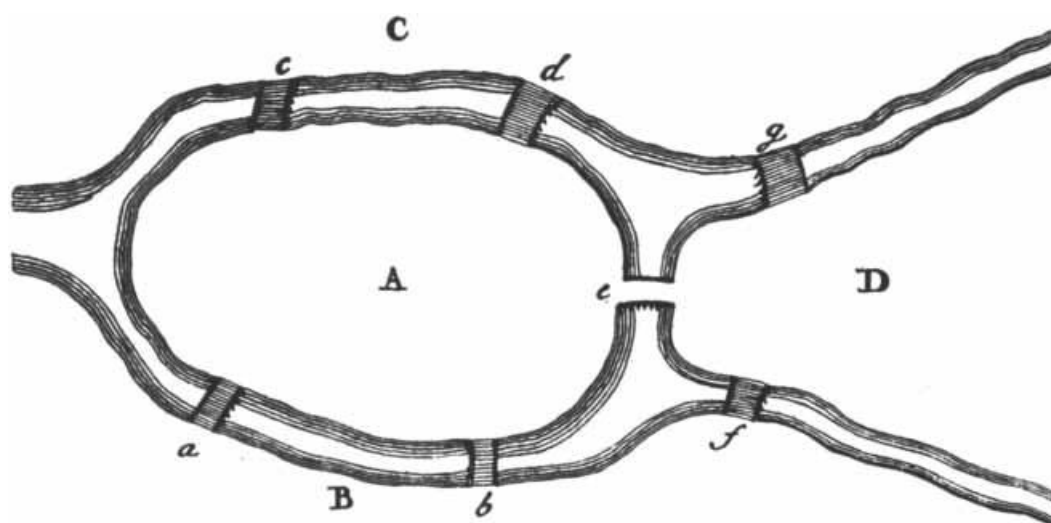
Bol založený v roku 1703. Cár Peter Veľký sa ho rozhodol vybudovať v močaristej oblasti, ktorá pôsobila, že je neustále zahalená v hmle. Pri vytváraní dizajnu mesta bolo rozhodujúce rozdelenie súše líniami rieky Nevy a jej kanálmi. Dôraz sa pritom nekládol na osadenie samostatných budov, ale na tvorbu celých panorám. Pozoruhodnosť Petrohradu tak tkvie v jeho dômyselnom rovnhnutí.

Jedinečnosť mesta spočíva aj v jeho polohe. Nachádza sa na okraji obrovského ruského teritória, a preto je „oknom do Európy“. Mnoho európskych učencov bolo, krátko po jeho vzniku, pozvaných do Petrohradu, aby tu, v časoch, kedy v Rusku iba vznikali prvé školy, mohla byť založená Ruská akadémia vied. Taktiež do tohto mesta boli pozvaní viacerí európski umelci. Skĺbením ruských tradícií a európskeho vplyvu vznikol úplne nový fenomén - kultúra Petrohradu [23].

2.1 Euler a mosty Königsbergu

Vyššie tridsať rokov svojho života v tomto meste prežil, jeden z najvýznamnejších matematikov v histórii ľudstva, Leonhard Euler. Pôsoobil tu na Ruskej akadémii vied a v čase svojho pôsobenia v tomto meste, okrem iného, vyriešil aj historicky významný problém o königsbergských mostoch, čo sa stalo prelomovým v disciplíne teórie grafov. Ako uvádza The Euler Archive, Euler svoje výsledky v roku 1735 odprezentoval akadémii [26] a jeho riešenie bolo uverejnené v *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, prvom z časopisov publikovaných akadémiou [8]. Eulerov latinský originál [9] bol do angličtiny preložený niekoľkokrát, na stránke [26] sú spomenuté dva z nich. My budeme vychádzať z prekladu v článku [20].

Rieka Pregel v pruskom meste Königsberg, dnešná Pregola v Kaliningrade v Rusku, oddeľuje od pevniny dva ostrovy. V 18. storočí boli tieto ostrovy prepojené s pevninou a navzájom medzi sebou dokopy siedmimi mostmi. Otázka znela, či si človek vie naplánovať prechádzku mestom tak, aby prešiel po každom z mostov práve jedenkrát.



Obr. 3: Eulerov náčrt mostov v Königsbergu [9]

Eulerovo riešenie tohto problému je dnes uvedené v takmer každej učebnici teórie grafov či diskkrétnej matematiky. Väčšinou sa uvádza v súčasnej terminológii teórie grafov, kde je zopár javov pomenovaných práve po priekopníkovi tejto matematickej disciplíny. Jedno takéto riešenie preberieme z [28]. Najprv nás však bude zaujímať pôvodné riešenie, v ktorom si autor musel vystačiť s jednoduchším názvoslovím.

Euler jednotlivé časti mesta označil veľkými písmenami A, B, C, D a mosty malými a, b, c, d, e, f, g (Obr. 3). Prechod z miesta A do miesta B označil ako AB , pričom nezáležalo na tom, ktorý z mostov na túto trasu využil. Cestu cez jednotlivé mosty tak zapisoval iba ako postupnosť veľkých písmen, napríklad $ABDC$ zodpovedalo prechodu cez tri mosty. Pre výskyt jednotlivých písmen v postupnosti odvodil všeobecné pravidlá.

Keby do niektorej časti mesta H viedli iba dva mosty, v danej postupnosti by sa toto písmeno vyskytlo minimálne raz (jedným mostom tam človek príde, druhým odíde). Pokiaľ by sme v tejto časti mesta začínali našu trasu, tak sa vo výslednej postupnosti objaví dvakrát - na začiatku a na konci. Vo všeobecnosti, ak je počet mostov, vedúcich do oblasti H , párny, môžu nastať dve situácie. Pokiaľ nezačíname v tejto oblasti, výskyt písmena H v postupnosti bude o polovicu menší ako je počet mostov, ktoré vedú do tejto oblasti. V prípade, že v H začíname, bude početnosť výskytu v postupnosti o jedna väčšia ako polovica počtu mostov.

Ak by mosty boli tri, napríklad ako pre oblasť C z obrázka, tak sa táto v postupnosti nutne bude musieť objaviť dvakrát. Región A s piatimi mostami sa v postupnosti

určite vyskytne trikrát. Všeobecne, ak počet mostov vedúcich do oblasti je nepárny, pričítame k nemu jednotku a následne predelíme dvomi, čím dostaneme koľkokrát sa v postupnosti daná oblasť objaví.

Počet písmen v postupnosti, keďže ich dvojice predstavujú prechody cez mosty, však môže byť najviac o jedna väčší ako počet mostov. Teda pokiaľ súčet nutných výskytov jednotlivých písmen v tejto postupnosti bude väčší ako súčet mostov zväčšený o jedna, niektorým mostom bude treba prejsť viackrát, čiže nebude existovať požadované riešenie.

Na základe týchto úvah Euler vymyslel schému na určenie, či v ľubovoľnom danom systéme riek a mostov je možné prejsť každým mostom práve raz. Postup je podľa neho nasledovný: Najprv označíme jednotlivé vodou oddelené regióny ako A, B, C , atď. Ďalej, počet mostov zväčšíme o jedna a toto číslo zapíšeme na vrch papiera. Ako tretí krok vytvoríme tabuľku, ktorá bude mať v prvom stĺpci pod sebou označenia jednotlivých regiónov $A, B, C \dots$ a v druhom stĺpci k nim zodpovedajúce počty mostov, ktoré do nich vedú. Ďalej, písmená s párnym počtom mostov označíme hviezdíčkou. Potom do tretieho stĺpca ku každému párnemu počtu mostov napíšeme polovicu tohto počtu a ku každému nepárnemu napíšeme polovicu zo súčtu jednotky a príslušného počtu mostov. Na záver sčítame čísla v poslednom stĺpci. Pokiaľ je výsledný súčet rovný číslu na vrchu papiera, tak požadovaná trasa bude existovať, pričom musí začínať v regióne bez hviezdíčky. Rovnako bude trasa existovať aj pokiaľ výsledný súčet bude o jedna menší ako číslo na vrchu papiera, čo zodpovedá počtu mostov. V tomto prípade však musíme začínať v niektorom z regiónov označených hviezdíčkou, čiže s párnym počtom mostov.

V Königsbergu je 7 mostov, čiže túto úlohu prevedieme na nájdenie postupnosti 8 písmen. Do oblasti A vedie päť mostov, takže v danej postupnosti sa toto písmeno vyskytne trikrát. Mestské časti B, C, D sú každá spojená s okolím tromi mostmi, teda ich početnosť v postupnosti bude dva. Po sčítaní početností nutných výskytov jednotlivých písmen vidieť, že z nich nie je možné utvoriť chcenú postupnosť. Schematicky toto riešenie vieme zapísať do nasledovnej tabuľky:

		8
A	5	3
B	3	2
C	3	2
D	3	2
		9

Tabuľka 1: Eulerova schéma pre königsbergské mosty [9, str. 136]

Tabuľka, ktorú vytvoril, je relatívne prehľadná a zvolený postup sa dá považovať za efektívny. Vo svojej práci však Euler uviedol ešte jednoduchšie riešenie. Všimol si, že súčet čísel v druhom stĺpci je nevyhnutne dvojnásobkom reálneho počtu mostov. Je to tak preto, lebo mosty, vedúce do jednotlivých častí mesta, sú v tabuľke zarátané dvakrát - raz pre každú z dvoch oblastí, ktoré spájajú. Z toho vyplýva, že súčet druhého stĺpca bude určite párne číslo. Preto ak je pri niektorom regióne nepárny počet mostov, takýchto regiónov sa v tabuľke určite bude nachádzať párny počet.

V závislosti od počtu častí mesta, do ktorých vedie nepárny počet mostov, potom môžu nastať nasledujúce prípady pre súčet tretieho stĺpca.

Ak sa v systéme nenachádza žiadna takáto oblasť, teda všetky čísla v druhom stĺpci tabuľky sú párne, a teda v treťom stĺpci sú zapísané ich polovice, súčet tretieho stĺpca bude o jedna menší ako číslo na vrchu papiera. V takomto prípade bude vždy existovať trasa prechádzajúca všetkými mostami, nech už začneme v ktorejkoľvek časti mesta.

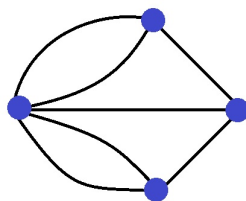
Ak sú práve dve z čísel v druhom stĺpci nepárne a ostatné párne, požadovanú trasu vieme dostať, keď začneme v niektorej z oblastí s nepárnym počtom mostov. V treťom stĺpci sú pri párných číslach zapísané ich polovice a pri nepárných ich polovice po prirátaní jednotky, ako sme zdôvodnili vyššie. Keďže súčet čísel v druhom stĺpci je dvojnásobkom počtu mostov, je zrejmé, že ak tento súčet zväčšíme o dva a následne vydělíme dvomi, dostaneme číslo o jedna väčšie ako počet mostov. Presne takýmito operáciami však, v prípade dvoch nepárných oblastí, dostaneme súčet tretieho stĺpca, ktorý tak bude rovný číslu na vrchu papiera.

Pokiaľ by nepárných dvojíc v druhom stĺpci bolo viac, očividne, súčet tretieho stĺpca by bol väčší ako číslo na vrchu papiera, takže požadovanú cestu by neexistovala.

Definitívne teda, podľa Eulera, na určenie, či v ľubovoľnej kombinácii riek a mostov je možné prejsť po každom moste práve raz, je najjednoduchšie použiť nasledujúce

pravidlá: Ak do viacerých ako dvoch častí mesta vedie nepárny počet mostov, nie je možné nájsť cestičku vyhovujúcu zadaným podmienkam. Ak však nepárny počet mostov vedie práve do dvoch regiónov, cestičku vieme dostať tak, že začneme v jednom z nich. Pokiaľ do všetkých oblastí vedie párny počet mostov, cestička bude existovať bez ohľadu na miesto, v ktorom bude začínať.

V reči dnešnej terminológie úlohu o mostoch často interpretujú, napríklad ako v [28, str. 15-16], nasledovne: Graf na Obr. 4 znázorňuje zadanú situáciu, pričom uzly grafu predstavujú jednotlivé časti mesta Königsberg a hrany zodpovedajú siedmim mostom. Úlohou je prejsť po každej hrane grafu práve raz, teda nájsť tzv. eulerovský ťah. Ten neexistuje, pokiaľ sú v grafe viac ako dva uzly nepárneho stupňa. Stupeň uzla je pritom daný počtom hrán, ktoré sú s ním incidentné, teda doň vedú. Ak sú v grafe práve dva uzly nepárneho stupňa, existuje otvorený eulerovský ťah začínajúci v jednom z týchto uzlov a končiaci v druhom. Špeciálne, ak sú všetky uzly párneho stupňa, potom existuje uzavretý eulerovský ťah, začínajúci a končiaci v tom istom uzle.



Obr. 4: Grafické znázornenie situácie v Königsbergu

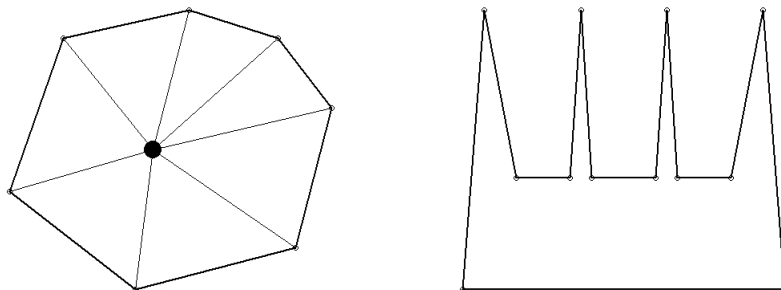
2.2 Ako ustrážiť galériu

V Petrohrade sa nachádza jedno z najväčších a najznámejších múzeí na svete - Ermitáž. Pozostáva z mnohých palácových budov, tiahnucich sa asi kilometer pozdĺž rieky Nevy, ktoré sú už samé o sebe skvostmi. V 400 sálach je vystavených vyše 3 miliónov exponátov - obrazov, sôch, úžitkového umenia, archeologických artefaktov, numizmatických objektov - od antických zbierok (patria k najlepším mimo Grécka a Talianska), cez zbierky stredovekého Orientu (patria k najlepším svojho druhu na svete), po zbierky západoeurópskeho umenia (prakticky všetky európske školy sú tu zastúpené dielami svojich významných predstaviteľov). Ermitáž sa môže pýšiť napríklad dielami

Raffaella, Canovy, Tiziana, Picassa, Rodina, 22 plátnami Rubensa či kolekciou 27 Rembrandtových obrazov [2].

S múzeom, respektíve galériou, sa spája problém, ktorý v roku 1973 na konferencii v Stanforde potom, čo Václav Chvátal vyslovil požiadavku, aby mu zadali nejakú geometricky zaujímavú úlohu, pohotovo vymyslel Victor Klee [22, str. 1], uznávaný matematik a dlhoročný profesor na University of Washington. Problém spočíva v určení postačujúceho počtu strážnikov miestnosti galérie s n stenami. Každú časť miestnosti pritom musí mať v dohľade aspoň jeden strážnik. Ak strážnici stoja na fixných pozíciách, ale môžu sa otáčať, najmenej koľko strážnikov je potrebných?

Steny miestnosti, pokiaľ nie je oválna, vytvárajú nejaký mnohouholník s n stranami. Pokiaľ je tento mnohouholník konvexný, na ustrázenie miestnosti bude stačiť jeden strážnik. Dokonca môže stáť na ľubovoľnom mieste v stráženej miestnosti. V realite však steny múzea môžu mať tvar úplne ľubovoľného uzavretého mnohouholníka.

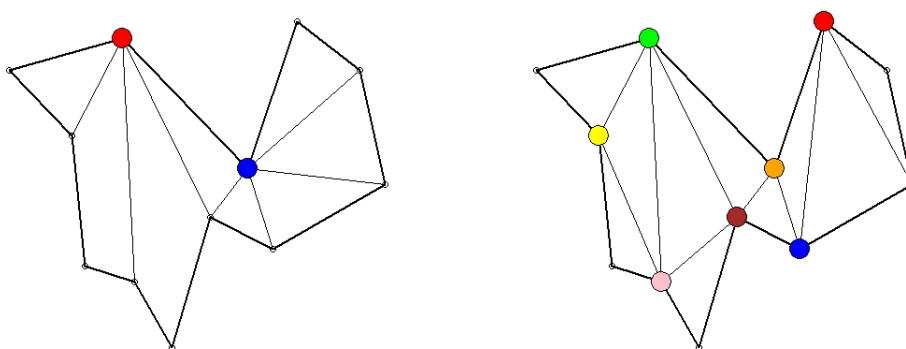


Obr. 5: Špeciálne prípady tvarov múzea

Odpoveď na túto dilemu dal jej iniciátor Václav Chvátal, pochádzajúci z Prahy, momentálne emeritný profesor Concordia University v Montreale, v tvrdení známom ako „Art gallery theorem“. Na ustrázenie každej miestnosti tvaru mnohouholníka s n stenami podľa neho vždy stačí $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ strážnikov [22, str. 9, THEOREM 1.1]. V tvrdení tiež uvádza, že tento počet nemusí byť vždy nevyhnutný. Taká situácia nastáva, napríklad, keď je mnohouholník konvexný a stačí iba jeden strážnik, bez ohľadu na počet vrcholov (Obr. 5 vľavo). Naopak, sú aj situácie, kedy je tento počet strážnikov nevyhnutný (Obr. 5 vpravo). Chvátalovo riešenie bolo publikované v roku 1975 v Journal of Combinatorial

Theory [12] spolu s dôkazom, ktorého uvedieme iba hlavné myšlienky. O tri roky neskôr bol totiž v tom istom časopise publikovaný iný dôkaz, ktorý zaberá iba jednu stranu.

Chvátal začal dôkaz platnosti svojho tvrdenia trianguláciou, teda rozdelením daného mnohouholníka na konečný počet trojuholníkov kreslením nepretínajúcich sa uhlopriečok v jeho vnútri. Nie je úplne zrejmé, že toto sa dá vždy spraviť bez pridania ďalšieho vrcholu. Keby sme trianguláciu chceli zovšeobecniť, tak už v trojrozmernom prípade by sme narazili na problém. Pokiaľ sa však zaoberáme rovinnými útvarmi, tak podľa [22, str. 12, THEOREM 1.2] mnohouholník s n vrcholmi vieme rozdeliť na $n - 2$ trojuholníkov tým, že do neho pridáme $n - 3$ vnútorných uhlopriečok. Týmto rozdelením vznikne niekoľko skupín trojuholníkov, ktoré majú nejaký jeden vrchol spoločný. Zoskupenia trojuholníkov okolo spoločného vrchola môžu tvarom pripomínať vejár (angl. *fan*), a tak ich aj Chvátal nazval.



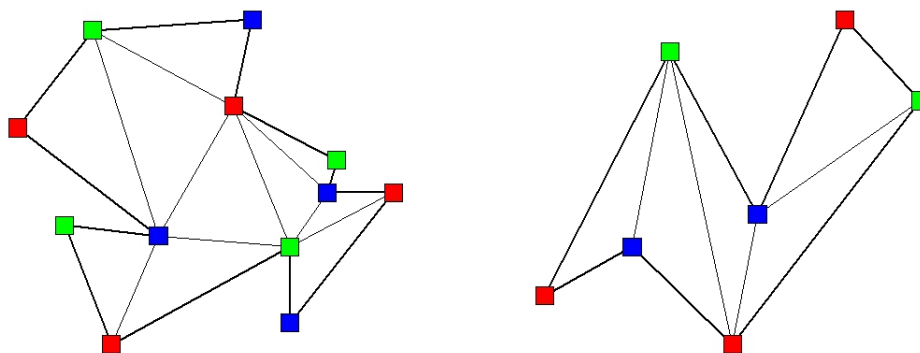
Obr. 6: Dve z možných triangulácií 12-uholníka s príslušnými vejármi

Cieľom Chvátalovho dôkazu bolo indukciou ukázať platnosť tvrdenia, že každú trianguláciu n -uholníka vieme rozdeliť na g vejárov, kde $g \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ [22, str. 6]. Pre $n = 3, 4$ alebo 5 , každá možná triangulácia spĺňa definíciu vejára, teda platí indukčný predpoklad. Pre $n \geq 6$, Chvátal najprv poodeľoval časti triangulovanej oblasti, na ktorých aplikoval indukčný predpoklad. Využil pritom svoje ďalšie pozorovanie, že v každom mnohouholníku s počtom vrcholov $n \geq 6$ existuje uhlopriečka, ktorá odtína presne 4, 5 alebo 6 hrán tohto mnohouholníka [22, str. 7, LEMMA 1.1]. Následne

oddelené časti opäť pripojil, čím dostal platnosť overovaného tvrdenia.

Strážnikov potom stačilo postaviť do vrcholov týchto vejárov. Každý strážnik vidí všetky trojuholníky vo svojom vejári, a keďže vejárov je $g \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, tak $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ strážnikov bude určite stačiť na pokrytie celej miestnosti.

Ako sme už spomenuli, tri roky po vyjdení Chvátalovho článku bol v tom istom časopise publikovaný jednoduchší spôsob, ako sa presvedčiť, že toto tvrdenie platí. Vymyslel ho Steve Fisk, ktorý vtedy pôsobil na Bowdoin College [10]. Na začiatku tiež použil trianguláciu. V ďalšom kroku zafarbil vrcholy trojuholníkov tromi farbami tak, že žiadne dva susedné vrcholy neboli rovnakej farby. Teda každý trojuholník mal každý vrchol inej farby. Že takéto trojfarbenie je vždy možné, vidieť z indukcie. Pre $n = 3$ to platí. Potom, pre $n > 3$, ak zvolíme ľubovoľné dva vrcholy u a v , ktoré sú spojené uhlopriečkou, táto uhlopriečka bude rozdeľovať graf na dva menšie triangulované útvary, oba obsahujúce hranu uv . Indukciou vieme zafarbiť každú z týchto dvoch častí farbami 1, 2, 3, pričom v oboch prípadoch môžeme zvoliť farbu 1 pre u a farbu 2 pre v . Keď potom tieto časti opäť spojíme hranou uv , dostaneme pôvodný graf zafarbený tromi farbami presne podľa požiadaviek.



Obr. 7: Fiskova metóda určenie počtu strážnikov

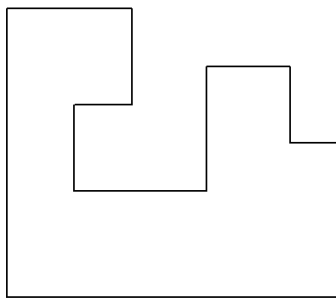
Na záver si stačí uvedomiť, že každá zo zvolených troch farieb môže byť použitá nanajvýš v tretine zafarbených vrcholov. Povedzme, že a, b, c je počet vrcholov jednotlivých farieb a že platí $a \leq b \leq c$. Celkový počet vrcholov je n , čiže $a + b + c = n$. Ak by

bolo $a > \frac{n}{3}$, potom by súčet všetkých troch farieb bol väčší ako n . Preto určite $a \leq \frac{n}{3}$, a keďže to musí byť celé číslo, tak $a \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$. Každý z trojuholníkov obsahuje vrchol tejto farby, takže ak strážnikov postavíme do týchto vrcholov, každý trojuholník bude niekým strážený, a teda aj celé múzeum.

Praktickú aplikáciu Fiskovej myšlienky vidno na Obr. 7. V prípade 12-uholníka je jedno, ktorej farby vrcholy zvolíme, pri použití tejto metódy budeme vždy potrebovať aspoň štyroch strážnikov. Môžeme však vidieť, že na ustráženie tohto priestoru by stačili aj iba traja ľudia, ktorých by sme postavili napríklad do červených vrcholov s výnimkou pravého horného. Pri 9-uholníku efektívne zvolíme farbu s najmenšou početnosťou, môžeme si vybrať či strážnikov postavíme do modrých alebo zelených vrcholov. Z bezpečnostného hľadiska by sme asi volili zelené, keďže z tých je vidieť celé múzeum takmer bez nutnosti otáčania sa.

Rokmi sa vyvinuli rôzne obmeny tohto problému. Niektoré sú už vyriešené, niektoré na svoje riešenie ešte čakajú. Jedna zo sérií týchto preformulovaných úloh je založená na rôznom umiestnení strážnikov. Napríklad, aká bude situácia, pokiaľ strážnici nebudú stáť vo vrcholoch, ale na hranách alebo uhlopriečkach mnohouholníka a budú sa môcť pozdĺž nich pohybovať [22, Chapter 3]?

Ďalšia skupina úloh vznikla úvahami o tvare múzea. Jedným z možných prípadov je ortogonálne múzeum [22, Chapter 2], teda také, ktorého všetky vnútorné uhly sú buď 90° alebo 270° (Obr. 8). Ak v takomto múzeu umiestnime strážnikov do rohov, bude ich stačiť $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ [22, str. 46, THEOREM 2.2].



Obr. 8: Ortogonálny mnohouholník

Zložitejší prípad nastane, ak mnohouholník bude obsahovať diery [22, Chapter 5] - tieto typy úloh vychádzajú zo skutočnosti, že v múzeách sú predmety často vystavené aj v strede miestnosti a cez ne strážnik nevidí.

Z ďalších modifikácií je zaujímavá napríklad úloha o „strážení strážnikoch“. Okrem dohľadu nad celou miestnosťou treba, v tomto prípade, zobrať do úvahy, že každý strážnik musí byť v zornom poli aspoň jedného ďalšieho strážnika [18].

3 Angelov vodopád

Najvyšší vodopád na svete, občas mylne pokladaný za anjelský [5], objavil v roku 1935 bývalý americký vojnový pilot Jimmy Angel, podľa ktorého bol pomenovaný. Padajúca voda prekonáva výšku 979 metrov, čo je približne osemnásťkrát viac ako výška Niagarských vodopádov. Prúd vody však nie je stály - zatiaľ čo v daždivých obdobiach voda zaplavuje aj dažďový les pod vodopádom, v časoch sucha sa jej veľká časť vyparí ešte počas pádu. Vtedy je možné vidieť obrovský skalný amfiteáter, ktorý dopadajúca voda rokmi vymlela [6, str. 366-367].

Najjednoduchší spôsob, ako sa k vodopádu dá dostať, je letecky. Vyhliadkové lety patria k najzaujímavejším atrakciám pre turistov. Z lietadla, ktoré sa takmer na dosah priblíži ku gigantickej skalnej stene, musí byť pozorovanie vodopádu ohurujúcim (aj ohlušujúcim) zážitkom.

S lietadlom sa spája jeden matematický problém z kategórie tzv. matematických puzzle. Publikovaný bol v knihe [14] spolu s ďalšími otázkami z pracovných pohovorov na City of London a Wall Street. Mnohí ľudia by pravdepodobne na pracovnom pohovore neočakávali zrovna takéto typy otázok. V týchto sférach sú však netradičné otázky na pohovoroch celkom časté, vrátane matematických.

Zadanie úlohy o lietadle znie takto: V zástupe čaká 100 ľudí, ktorí po jednom nastupujú do lietadla so 100 sedadlami. Prvý človek v zástupe je však staršia osoba s horším zrakom (iná formulácia uvádza, že stratila svoj palubný lístok), takže, namiesto hľadania svojho miesta, si sadne na ľubovoľné sedadlo. Ostatní si potom buď sadnú na svoje miesto, alebo ak je obsadené, na hociktoré iné voľné. Aká je pravdepodobnosť, že posledný pasažier bude sedieť na svojom mieste [14, str. 91, Question 3.25]?

Odpoveď môže byť, na prvý pohľad, prekvapivá. Jedno z jej odôvodnení, ktoré sa zhoduje s vysvetlením v [14, str. 115, Solution to Question 3.25], spolu s možným matematickým riešením má na svojej internetovej stránke uverejnené počítačový programátor Lawrence Kesteloot [15]. Je spoluautorom programu, ktorý štúdio DreamWorks Animation použilo pri tvorbe vyše 30 filmov, a za ktorý bol, spolu s ostatnými tvorcami, ocenený Akadémiou filmových umení a vied. Vo voľnom čase sa však, podľa svojich slov, rád venuje aj zbieraniu a riešeniu zaujímavejších matematických puzzle.

V príklade o lietadle ako pomôcku uvádza rozmyslenie si situácie pre prípad dvoch sedadiel a dvoch cestujúcich. Keď si prvý pasažier zvolí niektoré sedadlo, druhý už nemá na výber a pôjde na to, ktoré mu ostalo. Teda pravdepodobnosť, že druhý pasažier bude sedieť na svojom mieste, závisí od rozhodnutia prvého pasažiera. Ten má k dispozícii dve sedadlá, z ktorých si vyberá náhodne, takže každé z nich zvolí s 50%-nou pravdepodobnosťou.

Keď prejdeme naspäť k 100 sedadlám, prvého človeka v zástupe nazveme A a posledného Z , stále pôjde iba o rozhodovanie medzi ich dvomi sedadlami. Akurát toto rozhodovanie nemusí padnúť na prvého pasažiera, ale na niekoho ďalšieho zo zástupu, kto bude mať obsadené svoje miesto. Ak uvažujeme iba miesta A a Z , pasažier A si každé z nich vyberie s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$. Pokiaľ si sadne na nejaké iné miesto, povedzme 13-teho pasažiera, tak cestujúci 2 až 12 si sadnú na svoje miesta, no a ten 13-ty sa bude rozhodovať medzi miestom A a miestom Z . Ak si sadne na A , po ňom prichádzajúci ľudia budú mať svoje miesta voľné, vrátane posledného pasažiera. Ak si sadne na miesto pasažiera Z , tomu ostane sedadlo A . Teda na základe rozhodnutia 13-teho pasažiera bude sedadlo Z obsadené s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$. Rozhodujúci sa pasažier si, prirodzene, môže sadnúť aj na miesto niekoho iného, tým sa však iba oddiali moment rozhodovania. Povedzme, že by tak urobil, a rovnako tak každý ďalší cestujúci by si vybral sedadlo niekoho iného, okrem miest A a Z . Pasažierovi 99 by tak zostali na výber už len tieto dve miesta. Čiže posledný pasažier Z by mal 50%-nú šancu, že bude sedieť na svojom sedadle, alebo mu ostane miesto pasažiera A .

Matematicky sa na to dá pozrieť nasledovne. Ak $f(n)$ predstavuje pravdepodobnosť, že posledný človek v lietadle s n sedadlami bude sedieť na svojom mieste, môže byť definovaná rekurzívne takto:

$$f(n) = \frac{1}{n} \cdot 1 + \frac{1}{n} \cdot f(n-1) + \dots + \frac{1}{n} \cdot f(n-1) + \frac{1}{n} \cdot 0.$$

Výraz $\frac{1}{n}$ je pravdepodobnosť, že si prvý pasažier vyberie sedadlo i -te človeka zo zástupu, pre $1 \leq i \leq n$. Zakaždým je prenasobená pravdepodobnosťou, že posledný pasažier v takom prípade bude sedieť na svojom mieste. Ak si cestujúci A sadne na svoje miesto, cestujúci Z bude určite tiež sedieť na svojom mieste ($\frac{1}{n} \cdot 1$). Pokiaľ A obsadí miesto Z , ten už sa na svoje sedadlo nedostane ($\frac{1}{n} \cdot 0$). V ostatných prípadoch si A vyberie

niektoré zo sedadiel pasažierov 2 až $n - 1$. Pravdepodobnosť, že posledný pasažier bude sedieť na svojom mieste, tak môže ovplyvniť už iba obsadenosť zvyšných $n - 1$ sedadiel, preto daná pravdepodobnosť je $f(n - 1)$. Keďže A si vyberá zo sedadiel 2 až $n - 1$, má $n - 2$ možností. Pravdepodobnosť $f(n)$ má teda takýto predpis:

$$f(n) = \frac{1}{n} \cdot 1 + (n - 2) \cdot \frac{1}{n} \cdot f(n - 1).$$

Vieme, že $f(2) = \frac{1}{2}$. Dosadením tejto za $f(n - 1)$:

$$f(n) = \frac{1}{n} + \frac{n - 2}{n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2 + n - 2}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2},$$

výjde $f(n) = \frac{1}{2}$ pre každé $n > 1$. Teda nech už je počet n , cestujúcich a sedadiel, akýkoľvek, posledný človek bude sedieť na svojom mieste s 50%-nou pravdepodobnosťou.

Iný pohľad na túto úlohu, s drobnou zmenou v zadaní, ktorá ale nezmenila riešenie, bol uverejnený v diskusii na Math Stack Exchange [30]. Zmena spočíva v tom, že vždy, keď niektorý cestujúci nájde svoje sedadlo obsadené, poprosí o jeho uvoľnenie. Človek, ktorý doteraz sedel na nesprávnom mieste, mu miesto uvoľní a presadne si inam. Prvý pasažier sa takto bude presúvať a musieť hľadať nové sedadlo, až pokým sa mu nepodarí dostať sa na svoje miesto. Teda keď do lietadla nastúpi posledný cestujúci, prvý pasažier bude sedieť buď na svojom mieste alebo na jeho s rovnakou pravdepodobnosťou, keďže si sedadlo vyberal náhodne.

Dajú sa nájsť rôzne obmeny tejto úlohy. Napríklad v nasledujúcom článku nebola formulovaná ako situácia v lietadle. Hlavnou zmenou však bolo, že pravdepodobnosť, že bude sedieť na svojom mieste, bolo treba vypočítať pre každého človeka, nie iba pre posledného. Išlo o usádzanie n študentov v miestnosti s n sedadlami. Prvý si pritom mohol sadnúť hocikam, zatiaľ čo ostatní mali fixne pridelené miesta a vybrať si iné mohli, iba ak bolo ich miesto už obsadené.

Yared Nigussie, profesor na Columbia University, uviedol vo svojom článku *Finding your seat versus tossing a coin* [21], že výsledná pravdepodobnosť, že v poradí j -ty

človek, $2 \leq j \leq n$, z počtu ľudí $n \geq 2$ bude sedieť na svojom mieste, je $P(n, j) = \frac{n-j+1}{n-j+2}$. Platnosť tohto svojho tvrdenia podporil hneď dvoma dôkazmi.

Prvý z nich je matematickou indukciou. Pre $n = 2$ tvrdenie očividne platí, keďže každý z dvoch ľudí bude sedieť na jednom z dvoch sedadiel s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$. Ďalej, Nigussie označil jednotlivých študentov ako A_1, A_2, \dots, A_n a im prislúchajúce sedadlá ako S_1, S_2, \dots, S_n . Študent A_1 si však vyberie náhodné miesto, povedzme S_k , $1 \leq k \leq n$. Ostatní si sadajú v poradí od študenta A_2 po A_n . Pravdepodobnosť $P(n, j)$, že A_j sedí na S_j , pre $j \geq 2$, je potom:

$$P(n, j) = \begin{cases} 1 & \text{ak } k \in \{1\} \cup \{j+1, j+2, \dots, n\} \\ 0 & \text{ak } k = j \\ P(n-k+1; j-k+1) & \text{ak } k \in \{2, 3, \dots, j-1\}. \end{cases}$$

V prípade, keď $2 \leq k \leq j-1$, nie sú brané do úvahy sedadlá S_2, S_3, \dots, S_k a študenti A_1, A_2, \dots, A_{k-1} , pretože tí určite sedia na svojom mieste (A_1 podľa predpokladu sedí na S_k). Tým sa potom, pre každé $p \geq k$, A_p dostane do roly $A_{p-(k-1)}$ v miestnosti s $n - (k-1)$ sedadlami a $n - (k-1)$ študentmi.

Pravdepodobnosť, že si A_1 sadne na S_k , je pre každé $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ rovná $\frac{1}{n}$, takže:

$$P(n, j) = \frac{1}{n} \cdot \left(1 + \sum_{k=2}^{j-1} P(n-k+1; j-k+1) + 0 + \sum_{k=j+1}^n \right).$$

Keďže $P(n-k+1; j-k+1) = \frac{n-k+1-(j-k+1)+1}{n-k+1-(j-k+1)+2} = \frac{n-j+1}{n-j+2}$, dosadením tohto do $P(n, j)$ a následnou úpravou výrazov dostávame:

$$\begin{aligned} P(n, j) &= \frac{1}{n} \cdot \left((j-2) \frac{n-j+1}{n-j+2} + n-j+1 \right) \\ &= \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{(j-2) \cdot (n-j+1)}{n-j+2} + \frac{(n-(j-2)) \cdot (n-j+1)}{n-j+2} \right) \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{n \cdot (n-j+1)}{n-j+2} \\ &= \frac{n-j+1}{n-j+2}, \end{aligned}$$

čím je tvrdenie dokázané.

Druhý dôkaz je kombinatorický s menej výpočtami. Keď si ide sadnúť študent A_j , usadení sú už študenti A_1, A_2, \dots, A_{j-1} , takže obsadené sú určité sedadlá S_2, S_3, \dots, S_{j-1} (dá sa ukázať indukciou) a ešte jedno zo zvyšných $n - j + 2$ sedadiel. Pre každé, spo- medzi týchto $n - j + 2$, je to však rovnako pravdepodobné. Takže pravdepodobnosť, že j -ty človek bude mať svoje miesto voľné, je $P(n, j) = 1 - \frac{1}{n-j+2} = \frac{n-j+1}{n-j+2}$.

4 „Záhľadný“ stred

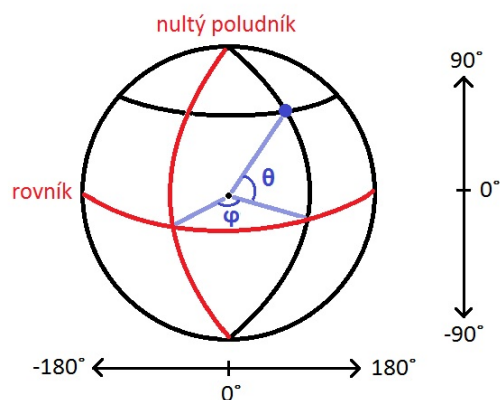
Hrdinovia v knihe hľadali stred kružnice rýsovaním na glóbusu. Tento postup, podľa všetkého, použil aj samotný Jules Verne. Avšak je zrejmé, že drobné nepresnosti v rýsovaní vedú k niekoľkonásobne väčším odchýlkam v skutočnosti. Ak by sme používali glóbus s priemerom napríklad 40 cm, už 1 mm odchýlka na ňom by v realite znamenala posun o 32 km. Preto by aj reálna poloha pokladu bola až o 103 kilometrov ďalej, než ako sa uvádza v knihe. Táto hodnota a ďalšie zaujímavosti boli uverejnené v článku [31] spolu s presným postupom na výpočet stredu kružnice opísanej trojuholníku, ktorého vrcholy poznáme, na povrchu gule. Tento postup aplikujeme na nami vybrané miesta.

Na začiatok vysvetlíme hlavné pojmy a označenia, ktoré budeme používať. Vychádzame pritom z definícií uvedených v [13].

Zem nemá tvar pravidelnej gule. Jej skutočný tvar je v podstate matematicky nedefinovatelný. Preto ho veľakrát treba nahrádzať tzv. referenčnými geometrickými plochami. Glóbus môžeme považovať za referenčnú guľu, teda za nejaké matematicky dobre definované teleso, ktoré je pre naše účely dostatočne podobné skutočnému tvaru Zeme. Na určovanie polohy na referenčnej guli sa najčastejšie využívajú zemepisné (geografické) súradnice - zemepisná šírka a zemepisná dĺžka.

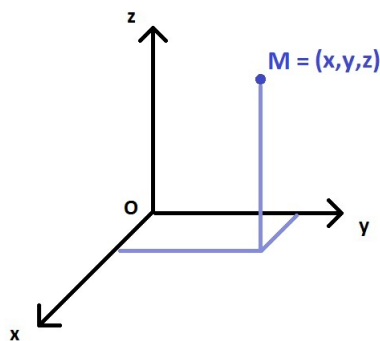
Zemepisná šírka (θ) je uhol, ktorý vytvára kolmica k dotykovej rovine v danom bode s rovinou rovníka referenčnej gule. Jej hodnota sa meria od rovníka smerom k pólom a dosahuje hodnoty od 0° do 90° s kladným znamienkom pre severnú pologuľu (severná zemepisná šírka) a so záporným pre južnú pologuľu (južná zemepisná šírka) (Obr. 9).

Zemepisná dĺžka (φ) je uhol, ktorý vytvára rovina základného poludníka s rovinou miestneho poludníka prechádzajúceho určeným bodom. V súčasnosti je za základný poludník u nás považovaný miestny poludník hvezdárne Old Royal Observatory v Greenwichi (Londýn), preto sa nazýva greenwichský. Hodnota zemepisnej dĺžky je v smere na východ v rozmedzí od 0° do 180° s kladným znamienkom (východná zemepisná dĺžka) a so záporným znamienkom v smere na západ (západná zemepisná dĺžka) (Obr. 9).



Obr. 9: Zemepisná šírka a zemepisná dĺžka

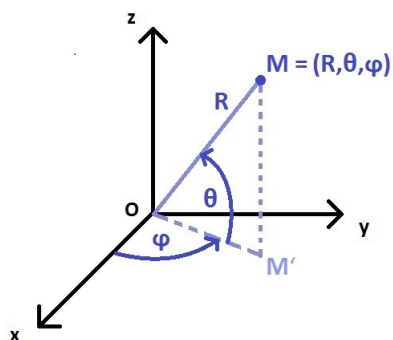
V matematike sa na určovanie polohy bodu v trojrozmernom priestore najčastejšie používa karteziánska súradnicová sústava. Pozostáva z troch navzájom kolmých súradnicových osí x , y , z , ktoré sa pretínajú práve v jednom bode O , ktorý nazývame počiatok súradnicovej sústavy. Každému bodu M v priestore prislúcha usporiadaná trojica hodnôt $[x, y, z]$, ktorá presne určuje jeho polohu (Obr. 10).



Obr. 10: Karteziánske súradnice

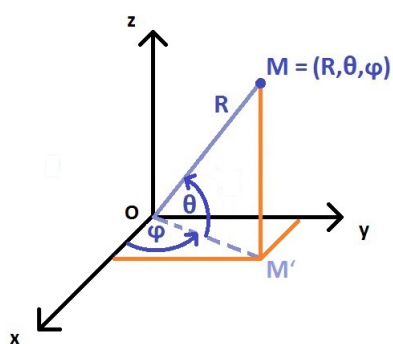
V prípade guľatých útvarov sú však zaužívané tzv. sférické súradnice. Súradnicové osi x , y , z v tomto prípade ostávajú, ale mení sa spôsob, akým sú učené jednotlivé body priestoru. Tým tentoraz prislúcha usporiadaná trojica $[R, \theta, \varphi]$. R značí vzdialenosť bodu M od počiatku súradnicovej sústavy O . Parameter φ je uhlom odklonu priamky, ktorá prechádza počiatkom O a kolným priemetom bodu M do roviny xy , od osi x .

Podobne θ je uhlom odklonu priamky, ktorá prechádza počiatkom O a bodom M , od roviny xy (Obr. 11).



Obr. 11: Sféricke súradnice

Geografické súradnice vieme interpretovať ako sféricke, stačí počiatok sústavy stotožniť so stredom Zeme a os z so zemskou osou. Body na zemskom povrchu sú potom jednoznačne určené trojicami $[R, \theta, \varphi]$, pričom parameter R vyjadruje polomer Zeme, θ zemepisnú šírku a φ zemepisnú dĺžku.



Obr. 12: Sféricke a karteziánske súradnice

Z Obr. 12 je vidieť, že každému bodu v sférických súradniciach $[R, \theta, \varphi]$ možno priradiť aj trojicu karteziánskych súradníc $[x, y, z]$. Jednotlivé súradnice sa pritom

prevádzajú napríklad spôsobom uvedeným v [32, str. 263]:

$$x = R \cos \varphi \cos \theta \quad (4)$$

$$y = R \sin \varphi \cos \theta \quad (5)$$

$$z = R \sin \theta, \quad (6)$$

pre $R \geq 0$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ a $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Funguje to, samozrejme, aj opačne, teda karteziánske súradnice vieme pretransformovať na sférické. Vzorce na takýto prechod sa dajú jednoducho odvodiť z Obr. 12 využitím základných poznatkov o vektoroch a goniometrických funkciách.

Vzdialenosť bodu od počiatku súradnicovej sústavy sa dá vyjadriť aj ako dĺžka vektora, ktorý daný bod reprezentuje. Dĺžku vektora dostaneme podľa [32, str. 234] ako odmocninu zo súčtu druhých mocnín jeho jednotlivých súradníc. Sínus uhla v pravouhlom trojuholníku je definovaný ako pomer dĺžky k uhlu protíľahlej odvesny a dĺžky prepony. Pri kosínuse využívame k uhlu príľahlú odvesnu. Pomer sínusu a kosínusu zodpovedá tangensu. Z toho dostávame:

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \sin \theta &= \frac{z}{R} \\ \sin \varphi &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \cos \varphi &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}$$

To vieme upraviť do nasledovných vzorcov:

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (7)$$

$$\theta = \arcsin \frac{z}{R} \quad (8)$$

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x}. \quad (9)$$

Ďalší pojem, ktorý neskôr využijeme, je vektorový súčin. Definovaný je v [16, str. 89, Definícia 12.9] nasledovne.

Ak máme dva vektory a, b v priestore R^3 , pričom vektory $e_1 = (1; 0; 0)$, $e_2 = (0; 1; 0)$, $e_3 = (0; 0; 1)$ tvoria kladnú bázu tohto priestoru, potom existuje jediný vektor $c \in R^3$ taký, že:

$$1. \quad c \perp a, c \perp b; \quad (10)$$

$$2. \quad |c| = \sqrt{\langle a, a \rangle \langle b, b \rangle - \langle a, b \rangle^2} = \sqrt{|a|^2 |b|^2 - \langle a, b \rangle^2}; \quad (11)$$

$$3. \quad \text{ak } a, b \text{ sú lineárne nezávislé, tak } (a, b, c) \text{ je kladná báza v } R^3. \quad (12)$$

Vektorový súčin vektorov a a b je práve tento vektor c , označuje sa $a \times b$. Z tejto definície však nemusí byť dostatočne zrejmalá jednoznačnosť. Vieme, že vektor je určený svojou veľkosťou, smerom a orientáciou [32, str. 47]. Druhý bod definície vektorového súčinu hovorí o jeho veľkosti. Zostáva smer a orientácia. Z prvého bodu definície vieme, že výsledný vektor bude kolmý na rovinu pôvodných vektorov. Tu však prichádzajú do úvahy dve možnosti, pretože kolmý na túto rovinu je aj vektor opačne orientovaný. Z tretieho bodu vieme, že (a, b, c) tvorí kladnú bázu priestoru R^3 , rovnako ako (e_1, e_2, e_3) . V pravotočivej súradnicovej sústave teda z pohľadu posledného bázo­vého vektora je smer otáčania od prvého bázo­vého vektora k druhému o uhol menší ako priamy proti smeru pohybu hodinových ručičiek. Tým už je výsledný vektor jedno­značne daný, pretože z pohľadu opačne orientovaného vektora by smer otáčania bol v smere hodinových ručičiek.

Pokiaľ vektory vstupujúce do vektorového súčinu majú súradnice $a = (a_1; a_2; a_3)$, $b = (b_1; b_2; b_3)$, potom podľa [16, str. 89, Veta 12.14] má výsledný vektor tvar:

$$a \times b = \left(\det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}; -\det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix}; \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \right).$$

Odtiaľ dostávame vzorec:

$$a \times b = (a_2 b_3 - a_3 b_2; a_3 b_1 - a_1 b_3; a_1 b_2 - a_2 b_1). \quad (13)$$

Vektorový súčin v R^3 je, okrem iných vlastností, antikomutatívny. To znamená, že

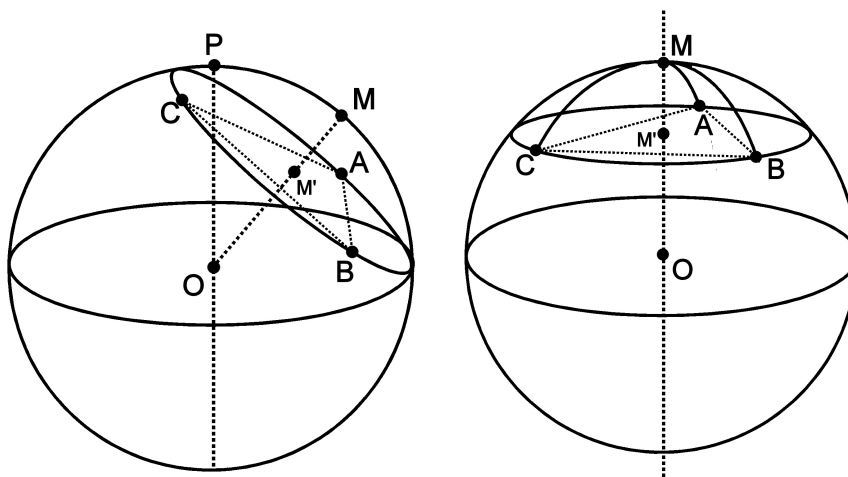
preň platí:

$$a \times b = -b \times a \quad \text{pre } \forall a, b \in R^3. \quad (14)$$

Dôkaz platnosti tohto tvrdenia je uvedený v [16, str. 90, Veta 12.15] spolu s ďalšími vlastnosťami, ktoré však nebudeme potrebovať, preto ich neuvádzame.

Vysvetlili sme všetky základné pojmy, ktoré budeme využívať. Môžeme teda prejsť k hlavnej myšlienke postupu uvedeného v [31].

Hľadané miesto budeme označovať ako bod M . Má to byť stred kružnice opísanej trojuholníku, ktorého vrcholmi sú jednotlivé miesta z predchádzajúcich kapitol, ktoré označíme ako A, B, C . Pre lepšiu názornosť zemeguľu natočíme tak, aby dané miesta ležali na jednej a tej istej rovnobežke, čím sa hľadaný bod M dostane do pozície Severného póla (viď Obr. 13). Body A, B, C tak určujú rovinu, ktorá pretína túto pootočenú zemeguľu a je rovnobežná s jej rovníkom. Spojnice bodov A, B, C tiež ležia v tejto rovine. Priamka prechádzajúca stredom pootočenej Zeme a naším hľadaným bodom M je kolmá na rovník, a teda aj na rovinu určenú bodmi A, B, C .



Obr. 13: Pootočená zemeguľa [31, Figure 2, Figure 3]

Podľa známeho tvrdenia (napríklad [19, Theorem 1-6.]) platí, že pokiaľ je nejaká priamka kolmá na iné dve pretínajúce sa priamky, potom je kolmá aj na rovinu nimi určenú. Čiže priamka prechádzajúca stredom Zeme, ktorá je kolmá na spojnice bodov A, B a C pretína zemský povrch práve v bode M .

Každý bod na zemskom povrchu vieme znázorniť vektorom začínajúcim v strede

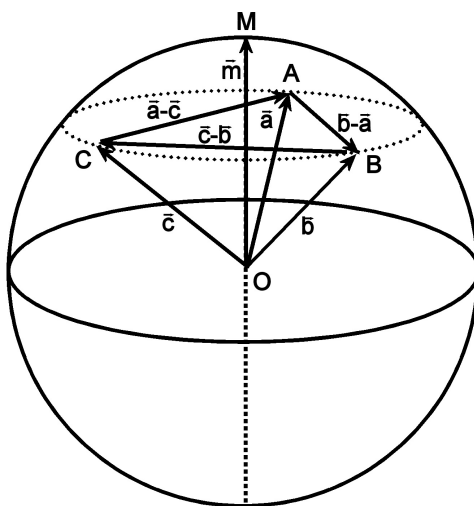
Zeme. Spojnicu ľubovoľných dvoch bodov vieme vyjadriť ako rozdiel vektorov, ktorými sú dané body reprezentované. V našom prípade, ak každý z bodov A , B , C bude reprezentovaný rovnomenným vektorom, zvolíme spojnice $b-a$ a $c-b$.

Vektor μ kolmý na obe tieto spojnice dostaneme podľa (13) ako súčin vektorov:

$$\mu = (b - a) \times (c - b) = a \times b + b \times c + c \times a, \quad (15)$$

kde sme využili, že vektorový súčin je antikomutatívny (14) ($-a \times c = c \times a$) a rovný nule, ak doň vstupujú lineárne závislé vektory ($b \times b = 0$), čo sa dá ľahko vidieť zo vzorca na výpočet vektorového súčinu (13), prípadne priamo z definície dĺžky vektorového súčinu (11).

Keďže vektor μ je kolmý na priamky, ktoré prechádzajú bodmi A , B a B , C a pretínajú sa v bode B , je podľa vyššie uvedeného tvrdenia kolmý aj na rovinu určenú týmito priamkami, a teda, ako je uvedené v článku [31], smeruje „na sever“. To znamená, že až na nejakú normalizačnú konštantu sa zhoduje s vektorom m , ktorý má začiatok v strede zemegule a na povrchu reprezentuje hľadaný bod M .



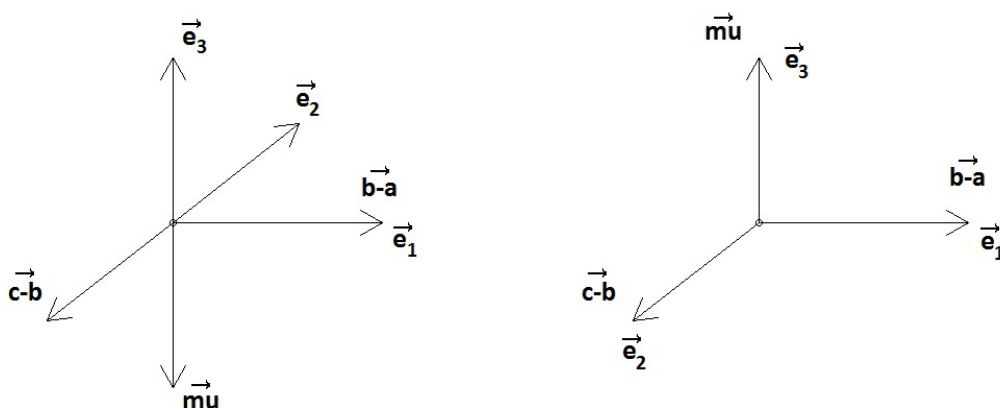
Obr. 14: Vektory reprezentujúce body na zemskom povrchu [31, Figure 5]

Z tvrdenia, že vektor μ smeruje „na sever“, usudzujeme, že autor článku pracoval v ľavotočivej súradnicovej sústave. V kontexte našich definícií, by totiž vektor μ mal na pootočenej zemeguli smerovať „na juh“.

Kvôli zavedeniu značenia južnej šírky a západnej dĺžky záporným znamienkom, sme sa dostali do pravotočivého súradnicového systému. V ňom chceme dosiahnuť zhodnú

orientáciu bázy $\{b-a, c-b, \mu\}$ s bázou $\{e_1, e_2, e_3\}$. Ak $b-a$ stotožníme s e_1 , tak pokiaľ vektor $c-b$ napasujeme na e_2 , bude opačne orientovaný, teda nutne vektor μ musí byť opačne orientovaný ako e_3 (Obr. 15 vľavo).

V ľavotočivej sústave, kde je záporným znamienkom označená južná šírka a východná dĺžka, je usporiadanie vektorov $b-a, c-b$ zhodné s usporiadaním e_1, e_2 , teda aj posledné bázové vektory budú zhodne orientované (Obr. 15 vpravo).



Obr. 15: Pravotočivá a ľavotočivá súradnicová sústava s kladnou bázou $\{e_1, e_2, e_3\}$

V druhom prípade, teda naozaj platí, že vektor m dostaneme iba nejakou normalizáciou vektora μ . Pri štandardnom označení kladných a záporných polosí ho však budeme ešte musieť zmeniť na opačne orientovaný.

Súradnice našich troch miest sú nasledovné:

$$A = \text{Univerzita v Berkeley (37°52, 2' s.š.; 122°15, 54' z.d.)}$$

$$B = \text{Petrohrad (59°57' s.š.; 30°18' v.d.)}$$

$$C = \text{Angelov vodopád (5°58, 05' s.š.; 65°32, 13' z.d.)}$$

Bod M nájdeme podľa presného postupu uvedeného v dodatku článku [31].

Súradnice zadaných troch bodov najprv prevedieme na údaje v stupňoch a priradíme

im príslušné znamienka (južná šírka a západná dĺžka budú so záporným znamienkom):

$$A = (37, 87^\circ; -122, 259^\circ)$$

$$B = (59, 95^\circ; 30, 3^\circ)$$

$$C = (5, 97^\circ; -62, 54^\circ).$$

Ďalej využijeme vzorce (4), (5), (6) na prechod zo sférických súradníc do kar-teziánskych. Ak za priemerný polomer Zeme budeme uvažovať hodnotu 6371 km, kar-teziánske súradnice jednotlivých bodov výjdu zaokrúhlene takto:

$$A = (-2684; -4253; 3911)$$

$$B = (2755; 1610; 5515)$$

$$C = (2922; -5623; 663).$$

Pre vektory $a = A, b = B, c = C$ zrátame vektorové súčiny podľa (13):

$$a \times b = (-29748990; 25576243; 7394122)$$

$$b \times c = (32072995; 14288193; -20190424)$$

$$c \times a = (-19171446; -13206327; -27519944).$$

Podľa (15) sčítaním axb, bxc a $cx a$ dostaneme vektor μ :

$$\mu = a \times b + b \times c + c \times a = (-16847441; 26658110; -40316246).$$

Vzhľadom na počiatočnú voľbu znamienok, čo viedlo k tomu, že sme všetky výpočty robili v pravotočivom súradnicovom systéme, je však tento vektor opačne orientovaný, než ako by sme chceli. Teda až po jeho prenasobení číslom -1 dostaneme výsledný vektor m :

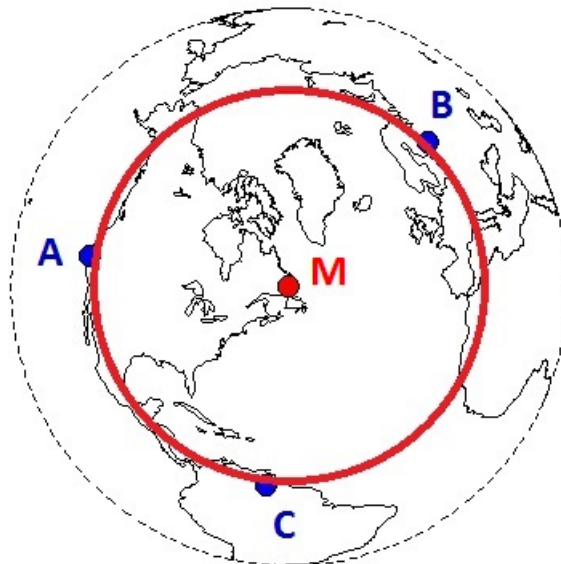
$$m = -\mu = (16847441; -26658110; 40316246).$$

Súradnice vektora m prevedieme späť na sférické súradnice pomocou vzorcov (7),

(8), (9), čím dostaneme zemepisnú šírku a dĺžku hľadaného bodu M :

$$M = (51,96732; -57,70786) = (51^{\circ}58' \text{ s.š.}; 57^{\circ}42,5' \text{ z.d.}).$$

Tento bod spolu s určujúcimi miestami je znázornený na Obr. 16. Na jeho vytvorenie sme využili softvér R (kód v prílohe). Najprv sme vytvorili funkciu, ktorá pre ľubovoľné tri zadané miesta vyráta stred kružnice. Balík `globe` umožňuje jednoduché vykreslenie zemegule aj jednotlivých miest na nej pomocou funkcie `globeearth`. Tá využíva azimutálne kartografické zobrazenie opísané v [13, str. 36]. Zemeguľu premietne do dvojrozmerného priestoru tak, že zobrazovacou plochou je dotyková rovina v bode zadanom do parametra `eye`. Guličky prislúchajúce jednotlivým miestam dokreslí funkcia `globepoints`. Kružnica prechádzajúca týmito bodmi sa pritom nijako nedeformuje a zobrazí sa na kružnicu v dvojrozmernom priestore. Je to kvôli tomu, že za dotykový bod sme zvolili nájdený stred, ktorý sa tak nachádza presne v centre zobrazenia. Keby sme stred kružnice nestotožnili s dotykovým bodom, kružnica by sa zdeformovala.



Obr. 16: Hľadaný stred

Náš hľadaný stred sa nachádza na Labradorskom polostrove na východe Kanady približne 50 km od pobrežia. Táto oblasť je, s výnimkou pobrežia, človekom takmer nedotknutá. Nachádzajú sa tu obrovské lesy s množstvom jazier a potokov, ktoré sú dôsledkom činnosti ľadovca, ktorý kedysi polostrov pokrýval. Až na krásy prírody je to teda vcelku nezaujímavé miesto (ibaže by tu niekto naozaj schoval poklad).

Zaujímavosť nájdeného miesta by sme vedeli docieľiť, keby sme pri zadávaní postupovali opačne a naše tri určujúce miesta nezadali náhodne. Najprv by sme totiž zvolili hľadané miesto. Okolo neho by sme robili kružnice s rôznymi polomerami. Ak by sa na niektorej z nich nachádzali tri dostatočne vzdialené a zaujímavé miesta, tie by sme zvolili za určujúce. Použitie tohto postupu má však jeden, pre niekoho bezvýznamný, nedostatok. Boli by sme ochudobnení o závan tajomnosti hľadaného miesta.

Záver

V tejto práci sme sa vybrali hľadať poklad, ktorý je v strede kružnice opísanej trojuholníku, ktorého vrcholmi sú miesta z jednotlivých kapitol.

V prvej kapitole sme odcestovali do Kalifornie, kde sme riešili niektoré vybrané úlohy, ktoré boli zadané na skúškach miestnej univerzity v Berkeley.

V druhej kapitole sme sa presunuli do Petrohradu, ruského mesta s bohatou kultúrou a históriou, v ktorom podstatnú časť svojho života prežil človek považovaný za najvšestrannejšieho matematika v dejinách - Euler. Zopár jeho dôležitých objavov sa nachádza v jeho riešení problému o königsbergských mostoch, ktorým položil základy topológie a teórie grafov.

V ďalšom príklade, ktorý sa dá zasadiť do prostredia Ermitáže, jedného z najväčších a najvýznamnejších múzeí sveta, sa čitateľ mohol dozvedieť, koľko strážnikov je potrebných na ustráženie miestnosti s daným počtom stien.

Tretím miestom, ktoré sme v našej práci navštívili, bol Angelov vodopád v Južnej Amerike. Namiesto brodenia sa k nemu cez džungľu dažďového pralesa, sme radšej zvolili pohodlnejší spôsob - vyhlídkový let lietadlom. V tematickom príklade sme riešili, či nám náhodou niekto neobsadí naše sedadlo, hoci zo všetkých je rovnako dobrý výhľad.

V poslednej kapitole sme vysvetlili postup z článku [31] a podľa neho našli stred prislúchajúci našim trom miestam.

Na záver by ešte mohlo čitateľa zaujímať, ako dopadli hrdinovia z Verneho knihy. Tí, keď sa doplavili na určenú pozíciu, nikde na okolí nevideli ani stopu po pevnine. V ich prípade by však nepomohli ani najpresnejšie možné výpočty. Poklad bol totiž zakopaný na sopečnom ostrove, ktorý ako sa z vody vynoril, tak v nej zase o niekoľko mesiacov zmizol, spolu s bohatstvom, ktoré ukrýval.

Takouto ojedinelou situáciou sa však netreba nechať odradiť. Skôr sa vám môže stať, že budete potrebovať vymyslieť iné riešenie, než ako že situácia, v ktorej sa nachádzate, bude naozaj neriešiteľná. Preto sa vždy oplatí mať v zálohe nejaký šikovný nástroj, ktorým vieme vyriešiť veľa vecí. A matematika takým nástrojom určite je.

Zoznam použitej literatúry

- [1] R. P. AGARWAL, D. O'REGAN, D. R. SAHU, : *Fixed Point Theory for Lipschitzian-type Mappings with Applications*. Springer, New York, 2009, dostupné na internete (9.5.2017): <https://link.springer.com/book/10.1007/978-0-387-75818-3>
- [2] O. ANDROSOV, T. ATRAPOVOVÁ, A. BANK a spol.: *Ermitáž: Leningrad*. Lidové nakladatelství, Praha, 1982
- [3] Berkeley, University of California, dostupné na internete (14.2.2017): <http://www.berkeley.edu/>
- [4] E. BRACHMANN: *5 things to do while waiting for the elevator in Evans Hall*. The Daily Clog - A Cal blog by The Daily Californian, 2016, dostupné na internete (20.2.2017): <http://www.dailycal.org/2016/10/24/waiting-elevator-evans-hall/>
- [5] C. BREZÁK: *Anjelský vodopád vyzerá anjelsky. Aj z dronu*. SME Cestovanie, 2016, dostupné na internete (15.5.2017): <https://cestovanie.sme.sk/c/20151466/anjelsky-vodopad-vyzerá-anjelsky.html#axzz4hA0ooe2u>
- [6] N. BUCHANAN a spol.: *Čarovný svet*. Reader's Digest Výber, Bratislava, 2000
- [7] L. BUKOVSKÝ, I. KLUVÁNEK: *Dirichletov princíp*. Mladá fronta, Praha, 1969, dostupné na internete (23.4.2017): <http://dml.cz/dmlcz/403700>
- [8] *Commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae*, dostupné na internete (2.5.2017): <http://eulerarchive.maa.org/publications/journals/Commentarii.html>
- [9] L. EULER: *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*. *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 8 (1741), 128-140, dostupné na internete (28.4.2017): <http://eulerarchive.maa.org/docs/originals/E053.pdf>
- [10] S. FISK: *A Short Proof of Chvátal's Watchman Theorem*. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 24 (1978), 374, dostupné na internete (28.4.2017): [http:](http://)

//ac.els-cdn.com/009589567890059X/1-s2.0-009589567890059X-main.pdf?_tid=1d7a2e26-38ed-11e7-8e3a-00000aab0f6c&acdnat=1494797851_c99267077f16162ac26e52f5155296ea

- [11] L. N. CHILDS: *A Concrete Introduction to Higher Algebra*. Springer, New York, 2009, tretie vydanie, dostupné na internete (6.4.2017): <https://link.springer.com/book/10.1007/978-0-387-74725-5>
- [12] V. CHVÁTAL: *A Combinatorial Theorem in Plane Geometry*. Journal of Combinatorial Theory, Series B 18 (1975), 39-41, dostupné na internete (28.4.2017): http://ac.els-cdn.com/0095895675900611/1-s2.0-0095895675900611-main.pdf?_tid=3bfed874-38ed-11e7-932d-00000aab0f27&acdnat=1494797902_6c725c418cd8ab08d6879773081d679a
- [13] J. JAKUBÍK: *Základy kartografie a topografie*, vysokoškolské skriptá, Fakulta prírodných vied, Univerzita Mateja Bella, Banská Bystrica, 2010
- [14] M. JOSHI, N. DENSON, A. DOWNES: *Quant Job Interview Questions and Answers*. Pilot Whale Press, Melbourne, 2013, druhé vydanie
- [15] L. KESTELOOT: *Airplane Seating*, dostupné na internete (4.5.2017): https://www.teamten.com/lawrence/puzzles/airplane_seating.html
- [16] J. KORBAŠ, Š. GYÜRKI: *Prednášky z lineárnej algebry a geometrie*. Vydavateľstvo UK, Bratislava, 2013
- [17] J. LEBL: *Basic Analysis*. dostupné na internete (19.2.2017): <http://www.jirka.org/ra/realanal.pdf>
- [18] T. S. MICHAEL, V. PINCIU: *Art gallery theorems for guarded guards*. Computational Geometry 26 (2003), 247-258, dostupné na internete (15.5.2017): http://ac.els-cdn.com/S0925772103000397/1-s2.0-S0925772103000397-main.pdf?_tid=057ce6d8-397e-11e7-878d-00000aab0f6c&acdnat=1494860087_8d3dffcd41344282625d657af41e1da7

- [19] S. LIBESKIND: *An Introduction to Euclidean Three Dimensional Geometry*, Jones & Bartlett Learning, 2008, dostupné na internete (5.12.2016): http://www.jblearning.com/samples/0763743666/3DSupp_Euclidean%20Geometry_020.pdf
- [20] J. R. NEWMAN: *Leonhard Euler and the Koenigsberg Bridges*. Scientific American, 1953, dostupné na internete (30.4.2017): http://www.imsc.res.in/~sitabhra/teaching/sb15b/ScientificAmerican_1953_Leonhard_Euler_and_the_Koenigsberg_Bridges.pdf
- [21] Y. NIGUSSIE: *Finding your seat versus tossing a coin*. The American Mathematical Monthly, 2014, dostupné na internete (4.5.2017): https://www.researchgate.net/profile/Yared_Nigussie3/publication/262976632_Finding_Your_Seat_Versus_Tossing_a_Coin/links/54aebb2f0cf2b48e8ed45eef/Finding-Your-Seat-Versus-Tossing-a-Coin.pdf
- [22] J. O'ROURKE: *Art Gallery Theorems and Algorithms*. Oxford University Press, 1987, dostupné na internete (26.4.2017): <http://cs.smith.edu/~jorourke/books/ArtGalleryTheorems/art.html>
- [23] N. POPOVA, A. FEDOROV: *Saint Petersburg*. Ivan Fiodorov Art Pulishers, St. Petersburg, 2003
- [24] Risposte ai problemi di Archimede EUREKA del numero 1/2016, dostupné na internete (22.3.2017): <http://maddmaths.simai.eu/archimede/eureka/risposte-ai-problemi-di-archimede-eureka-del-numero-12016/>
- [25] W. RUDIN: *Principles of Mathematical Analysis*. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, New York, 1964, druhé vydanie
- [26] Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis, dostupné na internete (2.5.2017): <http://eulerarchive.maa.org/pages/E053.html>
- [27] P. N. de SOUZA, J.-N. SILVA: *Berkeley Problems in Mathematics*. Problem Books in Mathematics. Springer, 2004, tretie vydanie

- [28] P. ŠIŠMA: *Teorie grafů, 1736–1963*. Prometheus, Praha, 1997, dostupné na internete (2.5.2017): <http://dml.cz/dmlcz/400868>
- [29] D. ŠEVČOVIČ: *Matematická analýza (3)*, prednášky, FMFI UK, Bratislava, 2015
- [30] Taking Seats on a Plane, dostupné na internete (4.5.2017): <https://math.stackexchange.com/questions/5595/taking-seats-on-a-plane>
- [31] G. de VRIES-UITERWEERD: *Spherical Geometry in Mirifiques aventures de maître Antifer*. Verniana - Jules Verne Studies/Etudes Jules Verne - Volume 2 (2009-2010), 1-10, dostupné na internete (29.11.2016): <http://verniana.org/volumes/02/HTML/SphericalGeometry.html>
- [32] P. ZLATOŠ: *Lineárna algebra a geometria. Cesta z troch rozmerov s presahmi do príbuzných odborov*. Marenčin PT, Bratislava, 2011

Príloha A

Výpočet stredu kružnice a následné vykreslenie všetkých štyroch bodov na zemeguli:

```
StredKruznice <- function(thetaA,phiA,thetaB,phiB,thetaC,phiC)
{
# prevod na kartezianske
R <- 6371

xA <- R*cos(phiA*pi/180)*cos(thetaA*pi/180)
yA <- R*sin(phiA*pi/180)*cos(thetaA*pi/180)
zA <- R*sin(thetaA*pi/180)
A <- c(xA,yA,zA)

xB <- R*cos(phiB*pi/180)*cos(thetaB*pi/180)
yB <- R*sin(phiB*pi/180)*cos(thetaB*pi/180)
zB <- R*sin(thetaB*pi/180)
B <- c(xB,yB,zB)

xC <- R*cos(phiC*pi/180)*cos(thetaC*pi/180)
yC <- R*sin(phiC*pi/180)*cos(thetaC*pi/180)
zC <- R*sin(thetaC*pi/180)
C <- c(xC,yC,zC)

# vektorove suciny

AXB <- c(yA*zB-zA*yB, zA*xB-xA*zB, xA*yB-yA*xB)
BXC <- c(yB*zC-zB*yC, zB*xC-xB*zC, xB*yC-yB*xC)
CXA <- c(yC*zA-zC*yA, zC*xA-xC*zA, xC*yA-yC*xA)

m <- AXB+BXC+CXA
m <- -m
```

```

# prevod na sfericke

r <- sqrt(sum(m^2))
thetaM <- asin(m[3]/r)*180/pi
phiM <- atan(m[2]/m[1])*180/pi

return(c(thetaM,phiM))
}

# Berkeley, Petrohrad, Angelov vodopad
A <- c(37.87, -122.259)
B <- c(59.95, 30.3)
C <- c(5.97, -62.54)

M <- StredKruznice(thetaA=A[1],phiA=A[2],thetaB=B[1],phiB=B[2],
thetaC=C[1],phiC=C[2])

library(globe)
zemegula <- globeearth(eye=list(M[2], M[1]))

globepoints(list(M[2], M[1]), eye=list(M[2], M[1]), pch=21,
cex=2, bg="red")
globepoints(loc=list(A[2], A[1]), eye=list(M[2], M[1]), pch=21,
cex=2, bg="blue")
globepoints(loc=list(B[2], B[1]), eye=list(M[2], M[1]), pch=21,
cex=2, bg="blue")
globepoints(loc=list(C[2], C[1]), eye=list(M[2], M[1]), pch=21,
cex=2, bg="blue")

```