UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

VYSOKOŠKOLSKÁ MATEMATIKA PRE STREDNE POKROČILÝCH

BAKALÁRSKA PRÁCA

2018 Juraj HANUŠ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

VYSOKOŠKOLSKÁ MATEMATIKA PRE STREDNE POKROČILÝCH

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program:	Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor:	1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	doc. RNDr. Mgr. Beáta Stehlíková, PhD.

Bratislava 2018

Juraj HANUŠ

29338556

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta:	Juraj Hanuš
Študijný program:	ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor:	aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce:	bakalárska
Jazyk záverečnej práce:	slovenský
Sekundárny jazyk:	anglický

Názov: Vysokoškolská matematika pre stredne pokročilých
Intermediate university mathematics

Anotácia: Názov je inšpirovaný kapitolou "Matematická analýza pre stredne pokročilých" v knihe Lorena C. Larsona Metódy riešenia matematických problémov, ktorá obsahuje veľa príkladov z vysokoškolských matematických sútaží a bola napísaná aj ako pomôcka k príprave na ne. V práci sú zozbierané príklady zo súťaží (Putnam Exam, IMC, Vojtech Jarník Competition a pod.), obsahuje ich riešenia a vlastné nové príklady na precvičenie využívajúce podobnú myšlienku alebo postup.

Cieľ: - Nasledujúce dve témy doplniť na 5 (každá bude predstavovať jednu kapitolu práce), do každej vybrať 3-4 príklady zo súťaží.
(a) Vety o strednej hodnote (Rolle, Lagrange, Cauchy): IMC 2013 - deň 1 - pr. 2; Jarník 2015 - kategória I - pr. 1; Jarník 2012 - kategória I - pr. 1. (b) Derivovanie integrálu podľa hornej hranice: Putnam 1990 - B1; Putnam 1991 - B5
- Na začiatku kapitoly stručne zhrnúť teóriu potrebnú na riešenie príkladov, ku každému príkladu okrem zadania a riešenia uviesť aj rozbor úlohy a niekoľko vlastných príkladov s podobnou myšlienkou so stručnými riešeniami.

Literatúra:
[1] Larson, L. C. (1990). Metódy riešenia matematických problémov. Bratislava: Alfa.
[2] Radulescu, T. L., Radulescu, V. D., & Andreescu, T. (2009). Problems in Real Analysis: advanced calculus on the real axis. Springer Science & Business Media.
Ďalšia literatúra podľa vlastného výberu (knihy, časopisy, archívy súťaží).

Vedúci:	doc. RNDr. Mgr. Beáta Stehlíková, PhD.
Katedra:	FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry:	prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
Dátum zadania:	31.10.2017

Dátum schválenia: 20.11.2017

doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

.... študent

.... vedúci práce

Poďakovanie: Rád by som sa poďakoval svojej školiteľke doc. RNDr. Beáte Stehlíkovej, PhD. za odborné rady, pripomienky a cenné odporúčania, ako aj za milý a profesionálny prístup. Taktiež vďaka patrí mojej rodine a priateľke, ktorí ma celý čas podporovali v písaní, ako aj všetkým vyučujúcim na študijnom programe Ekonomická a finančná matematika, pretože bez vedomostí, ktoré mi poskytli, by som túto prácu nemohol napísať.

Abstrakt

HANUŠ, Juraj: Vysokoškolská matematika pre stredne pokročilých [Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: doc. RNDr. Mgr. Beáta Stehlíková, PhD., Bratislava 2018,66 s.

V tejto bakalárskej práci sú riešené rozličné príklady zozbierané z vysokoškolských matematických súťaží. Práca je rozdelená do piatich kapitol, každá predstavuje jeden tematický celok. Hlavnou myšlienkou nie je iba ponúknuť čitateľovi riešenie príkladu, ale detailnejšie ho rozobrať, prípadne ponúknuť alternatívny postup. V niektorých príkladoch je riešenie doplnené taktiež zaujímavosťami, či obrázkami, pre jeho lepšiu vizualizáciu.

Kľúčové slová: matica, vlastná hodnota, stredná hodnota, derivácia, integrál, nerovnosť, príklad, riešenie

Abstract

HANUŠ, Juraj: Intermediate university mathematics [Bachelor Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: doc. RNDr. Mgr. Beáta Stehlíková, PhD., Bratislava 2018,66 p.

In this bachelor thesis one can find various solved problems collected from mathematical undergraduate contests. The thesis is divided into five chapters, each representing one mathematical topic. Main idea is not only offer a solution to a problem, but also analyse in detail, eventually to present alternative way of solving. In several problems is solution appended by curiosities, motivation or figures - for better visualization of it.

Key words: matrix, eigenvalue, mean value, derivation, integral, inequality, problem, solution

Obsah

Úvod

Vysokoškolská matematika sa môže uberať rôznymi smermi. Avšak pre prvé dva, respektíve tri ročníky na vysokej škole, je najrelevantnejšia matematická analýza, ktorej sú v tejto práci venované štyri kapitoly (II.-V.). Prvá kapitola sa bude zaoberať lineárnou algebrou a geometriou.

V práci možno nájsť riešené príklady z vysokoškolských matematických súťaží, menovite Putnam Exam [19], IMC - International Mathematical Competition [8] a Vojtěch Jarník Competition [24].

Cieľom bakalárskej práce je pripraviť čitateľa na spomenuté súťaže, ako aj poskytnúť doplnok k výučbe, či pomoc s prípravou na štátne skúšky. Navyše, práca skrz rôzne zaujímavosti a vizualizácie ponúka tzv. „thinking out of the box" - motivuje čitateľa, aby sa neučil iba riešenia, ale aby si pod nimi aj predstavil čosi viac, respektíve, aby si uvedomil, prečo sa dané riešenia môžu použiť. Inými slovami, snažili sme sa nie len riešiť príklady, ale hľadať súvislosti. Preto častokrát uvádzame viac ako jedno riešenie.

Názov bakalárskej práce, konkrétne časť „pre stredne pokročilých", je trochu mätúci, pretože ak považujeme priemerného tretiaka na študijnom programe Ekonomická a finančná matematika ako stredne pokročilého v oblasti vysokoškolskej matematiky, tak v práci sa vyskytujú aj úlohy mierne „nad rámec" obtiažnosti, s ktorou sa tretiak počas štúdia stretne (najmä príklady A6/B6 z [19]). Preto veríme, že by práca vďaka úrovni náročnosti príkladov mohla mať aj prínos pre autora a podporiť jeho matematický rast.

Vzhľadom k tomu, že bez teoretického pozadia by sme neboli schopní riešiť príklady, tak sme sa rozhodli pred každou kapitolou uviesť teóriu potrebnú na riešenie.

Veríme, že teoretické vsuvky budú vykompenzované dynamickými príkladmi a dúfame, že nimi oslovíme čitateľa, čo je náš ďalší cieľ a v prípade úspechu aj pozitívny prínos.

Mathematics is the language, in which God has written the universe.

Galileo Galilei

1 Lineárna algebra a geometria

Táto bakalárska práca pozostáva z veľkej časti z príkladov matematickej analýzy, nesie však názov „Vysokoškolská matematika pre stredne pokročilých“. Názov je ovplyvnený touto kapitolou, ktorá sa nezaoberá matematickou analýzou v takom rozsahu, ako ostatné. No bez znalosti lineárnej algebry by do veľkej miery nebolo možné riešiť príklady z viacrozmernej analýzy, keďže jej základy buduje práve algebra. Hlavné body nášho záujmu budú vlastnosti matíc, ich invertovateľnosť, či súvis s determinantmi a vlastnými hodnotami. V kapitole budú zhrnuté niektoré užitočné poznatky z Lineárnej algebry a geometrie I. a II., ktorá sa ukázala ako výborná prípava na tieto typy príkladov a poskytla nám viaceré užitočné nástroje.

Teória

Definícia: Skalár λ je vlastná hodnota štvorcovej matice A, ak existuje nenulový vektor x, pre ktorý platí, že $Ax = \lambda x$. [26]

Definícia: Vektor x je vlastný vektor štvorcovej matice A, ak existuje skalár λ, pre ktorý platí $Ax = \lambda x$. [26]

Definícia: Matica A s rozmerom $n \times n$ je diagonalizovateľná, ak môže byť zapísaná v tvare $A = PDP^{-1}$, kde D je diagonálna $n \times n$ s vlastnými hodnotami na diagonále a P je regulárna matica vlastných vektorov korešpondujúcich k vlastným hodnotám. [16]

Tvrdenie: Charakteristický polynóm je definovaný ako $det(A - \lambda I)$. Vypočítaním koreňov charakteristického polynómu, dostávame vlastné hodnoty λ. [22]

Veta: [Caley-Hamiltonova veta]
Každá štvorcová matica A je koreňom svojho charakteristického polynómu a teda platí, že ak λ je vlastná hodnota a charakteristický polynóm v premennej λ je $p(\lambda) = det(\lambda I_n - A)$, tak potom $p(A) = 0$. [22]

Tvrdenie: Vlastné hodnoty antisymetrickej matice sú rýdzoimaginárne, t.j. majú tvar $i \cdot b$, kde $b \in \mathbb{R}$. [22]

Tvrdenie: Komplexné vlastné hodnoty sa vyskytujú vždy v pároch. To znamená, že ak μ je vlastná, imaginárna hodnota matice A, tak aj $\bar{\mu}$ je vlastná hodnota k danej matici. [22]

Tvrdenie: Matica A je regulárna, t.j. existuje práve jedno riešenie systému $Ax = b$ práve vtedy, keď matica A je invertovateľná, t.j. existuje A^{-1} tak, že $AA^{-1} = I$. [22]

Tvrdenie: Majme dve matice M,K, pričom M má rozmer $n \times k$ a K má rozmer $k \times n$. Ak sú obe regulárne, tak platí, že $(MK)^{-1} = K^{-1}M^{-1}$. Rovnako to platí aj s transpozíciou: $(MK)^T = K^T M^T$, tu však prirodzene netreba regulárnosť matíc. [22]

Tvrdenie: Ak je matica A diagonalizovateľná, tak existuje jej $S\Lambda S^{-1}$ rozklad, pričom S je matica vlastných vektorov a Λ je diagonálna matica s vlastnými hodnotami na diagonále. [22]

Tvrdenie: Súčet vlastných hodnôt je stopa matice, zatiaľ čo ich súčin je jej determinant. [22]

Ilustračný príklad: Nájdeme vlastné hodnoty matice B.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

Vypočítajme determinant matice $B - \lambda I$, čím zistíme charakteristický polynóm:

$$det(B - \lambda I) = \lambda(\lambda - 1) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1$$

Položme charakteristický polynóm rovný nule. Keďže matica je 2×2, tak aj jej charakteristický polynóm je stupňa 2, čo indikuje, koľko bude mať daná matica vlastných hodnôt. Vyriešením kvadratickej rovnice zistíme obe vlastné hodnoty matice B:

$$\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Všimnime si zaujímavosť, a síce, že ide o „zlatý rez“. Navyše, tento charakteristický polynóm spolu s Fibonacciho postupnosťou má taktiež uplatnenie v diferenčných rovniciach.

1.1 Nulová stopa

Tento príklad je z IMC 2011/2, druhého súťažného dňa.

Dokážte, alebo vyvráťte. Existuje taká 3×3 matica A, že pre jej stopu platí $tr(A) = 0$ a $A^2 + A^T = I$.

Riešenie:

Idea postupu vychádza z riešenia uvedeného na stránke súťaže [8], ktorého rozšírením a detailnejším vysvetlením bolo zostavené toto riešenie.

Keďže $A^2 + A^T = I$, tak aj $A^T = I - A^2$. Transponovaním rovnice dostávame $A = I - (A^2)^T = I - (A^T)^2$.

Následne sa A^T dá prepísať ako $I - A^2$, čo je vidno zo zadania. A teda máme:

$$\begin{aligned} A &= I - (I - A^2)^2 \\ A &= I - (I - 2A^2 + A^4) \\ A &= 2A^2 - A^4 \\ 0 &= A^4 - 2A^2 + A \end{aligned}$$

Keďže $Ax = \lambda x$, tak z poslednej rovnosti môžeme vyčítať, čo musí spĺňať vlastná hodnota λ. Teda platí:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(A^4 - 2A^2 + A\right) x \\ 0 &= A^3(\lambda)x - 2A(\lambda)x + \lambda x \\ 0 &= \lambda A^2(\lambda)x - 2\lambda^2 x + \lambda x \\ 0 &= \lambda^2 A(\lambda)x - 2\lambda^2 x + \lambda x \\ 0 &= (\lambda^4 - 2\lambda^2 + \lambda)x \end{aligned}$$

Avšak tu treba dať pozor v argumentácii - nejedná sa o charakteristický polynóm, pretože stupeň rovnice je 4 a nie 3, teda je to iba podmienka pre λ. Keďže vektor x je nenulový, tak:

$$\begin{aligned}\lambda^4 - 2\lambda^2 + \lambda &= 0 \\ \lambda(\lambda^2 + \lambda - 1)(\lambda - 1) &= 0\end{aligned}$$

A teda vlastné hodnoty matice A môžu byť $0, 1$, alebo $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.
Vieme, že ak λ je vlastná hodnota A, tak potom λ^2 je vlastná hodnota A^2. A teda spektrum A^2 obsahuje tri členy z $\{0, 1, \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\}$.
Ak predpokladáme, že stopa matice A je 0, tak do úvahy prichádza iba spektrum $\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1\}$, kvôli tomu, že stopa matice je súčet jej vlastných hodnôt. Nulové spektrum (t.j. že všetky vlastné hodnoty sú nuly) sme vylúčili na základe nasledovnej úvahy:
Ak by všetky vlastné hodnoty boli nuly, tak charakteristický polynóm matice A by bol $p(\lambda) = \lambda^3$. Čiže by platilo, že $A^3 = 0$. Ak prenásobime podmienku zo zadania $A^2 + A^T = I$ maticou A, dostávame, že $A^3 + A^T A = A$, respektíve, že $A^T A = A$. Keďže na ľavej strane máme symetrickú maticu, tak musí byť aj na pravej, čo znamená, že A je symetrická. Tým pádom platí, že $A^2 = A$ a teda po vrátení sa naspäť k podmienke zo zadania: $2A = I$, respektíve $A = \frac{1}{2}I$, čo je spor s predpokladom, že A má všetky vlastné hodnoty rovné nula.
Späť k riešeniu. Vieme, že spektrum A^2, sú umocnené členy zo spektra A a teda

$$\left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}, 1\right\}$$

Na druhej strane vieme, že $A^2 = I - A^T$. Kedže transpozícia zachováva vlastné hodnoty a navyše platí pre vlastné hodnoty ľubovoľnej matice $J = H + c \cdot I$, že $\lambda_J = \lambda_H + c \cdot 1$, tak spektrum A^2 je

$$\left\{0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$$

Lenže spektrá by sa prirodzene mali rovnať. Vzhľadom k tomu, že to tak nieje, nastáva spor. ■

1.2 Inverzia

Tento príklad je zo súťaže Vojtěch Jarník 2015/1 - II.kategórie.

Nech A a B sú dve 3×3 matice s reálnymi prvkami. Dokážte, že

$$A - \left(A^{-1} + \left(B^{-1} - A\right)^{-1}\right)^{-1} = ABA \tag{1}$$

predpokladajúc, že všetky inverzné matice na ľavej strane existujú.

Riešenie 1:

Postupnými ekvivalentnými úpravami - prenásobovaním rovnice maticami zľava, respektíve sprava, sa pokúsime dokázať (1).

$$\begin{aligned} A - \left(A^{-1} + \left(B^{-1} - A\right)^{-1}\right)^{-1} &= ABA \\ I - A^{-1}\left(A^{-1} + \left(B^{-1} - A\right)^{-1}\right)^{-1} &= BA \\ I - \left[\left(A^{-1} + \left(B^{-1} - A\right)^{-1}\right)A\right]^{-1} &= BA \end{aligned}$$

A teda dostávame

$$I - \left[I + \left(B^{-1} - A\right)^{-1} A\right]^{-1} = BA \tag{2}$$

Tu sa zatiaľ zastavme a pokúsme sa previesť výraz $\left(B^{-1} - A\right)^{-1} A$ do výhodnejšieho tvaru.

$$\left(B^{-1} - A\right)^{-1} A = \left[A^{-1}\left(B^{-1} - A\right)\right]^{-1} = \left[A^{-1}B^{-1} - I\right]^{-1} = \left[(BA)^{-1} - I\right]^{-1}$$

Dosaďme do (2) a pokračujme v počítaní:

$$\begin{aligned} I - \left[I + \left((BA)^{-1} - I\right)^{-1}\right]^{-1} &= BA \\ \left[I + \left((BA)^{-1} - I\right)^{-1}\right]^{-1} &= I - BA \\ (I - BA)\left[I + \left((BA)^{-1} - I\right)^{-1}\right] &= I \\ I - BA + \left((BA)^{-1} - I\right)^{-1} - (BA)\left((BA)^{-1} - I\right)^{-1} &= I \\ (BA)\left((BA)^{-1} - I\right)^{-1} + BA &= \left((BA)^{-1} - I\right)^{-1} \\ \left((BA)^{-1} - I\right)^{-1} + I &= (BA)^{-1}\left((BA)^{-1} - I\right)^{-1} \\ \left[\left((BA)^{-1} - I\right)BA\right]^{-1} &= \left[(BA)^{-1} - I\right]^{-1} + I \end{aligned}$$

Pri nasledovnej rovnici

$$(I - BA)^{-1} \;=\; \left[(BA)^{-1} - I\right]^{-1} + I \tag{3}$$

sa opäť zastavíme a výraz $[(BA)^{-1} - I]^{-1}$ upravíme do vyhovujúcejšieho tvaru.

$$\begin{aligned}
\left[(BA)^{-1} - I\right]^{-1} &= \left[(BA)^{-1}(BA)(BA)^{-1} - (BA)(BA)^{-1}\right]^{-1} \\
&= \left[\left((BA)^{-1}(BA) - (BA)\right)(BA)^{-1}\right]^{-1} \\
&= (BA)\left[(BA)^{-1}(BA) - (BA)\right]^{-1} \\
&= (BA)\,(I - BA)^{-1}
\end{aligned}$$

Spätným dosadením do (3) dostávame

$$\begin{aligned}
(I - BA)^{-1} &= BA\,(I - BA)^{-1} + I \\
I &= BA + I - BA \\
I &= I
\end{aligned}$$

Týmto sme dokázali (1). $\blacksquare$

Riešenie 2:

Idea postupu vychádza z riešenia uvedeného na stránke súťaže [24], ktorého rozšírením a detailnejším vysvetlením bolo zostavené toto riešenie.

Maticu A^{-1} v zátvorke prenásobime identickou maticou v špeciálnom tvare. Urobíme to preto, aby sme sa efektívne zbavili členu $(B^{-1} - A)^{-1}$, ktorý si výjmeme pred zátvorku. Následne upravujeme výraz ekvivalentnými úpravami využívajúc vlastnosti inverzie, až do čo najjednoduchšieho tvaru.

$$\begin{aligned}
(A^{-1} + (B^{-1} - A)^{-1})^{-1} &= [A^{-1}(B^{-1} - A)(B^{-1} - A)^{-1} + (B^{-1} - A)^{-1}]^{-1} = \\
&= [(A^{-1}(B^{-1} - A) + I)(B^{-1} - A)^{-1}]^{-1} = \\
&= [(A^{-1}B^{-1} - A^{-1}A + I)(B^{-1} - A)^{-1}]^{-1} = \\
&= [A^{-1}B^{-1}(B^{-1} - A)^{-1}]^{-1}
\end{aligned}$$

Platí, že:

$$\begin{aligned}
[A^{-1}B^{-1}(B^{-1} - A)^{-1}]^{-1} &= (B^{-1} - A)BA \\
&= B^{-1}BA - ABA
\end{aligned}$$

a tak sa dostávame na koniec úprav:

$$(A^{-1} + (B^{-1} - A)^{-1})^{-1} = A - ABA \tag{4}$$

Dosadením upraveného tvaru (4) do pôvodnej rovnice (1) získavame

$$\begin{aligned} A - [A - ABA] &= ABA \\ ABA &= ABA \end{aligned}$$

Čím je dôkaz ukončený. ■

1.3 Vlastné hodnoty a Eulerova identita

Tento príklad je zo súťaže Vojtěch Jarník 2003/1 - II.kategórie

Dve reálne štvorcové matice A a B spĺňajú $A^{2002} = B^{2003} = I$ a $AB = BA$. Chceme dokázať, že $A + B + I$ je invertovateľná.

Riešenie:

Sporom. Predpokladajme teda, že by matica $A+B+I$ nebola invertovateľná. Z toho ale vyplýva, že by to bola singulárna matica. To znamená, že by platilo $(A + B + I)x = 0$ pre nejaké nenulové $x \in \mathbb{R}^n$. Po roznásobení dostávame

$$\begin{aligned} (B + I)x &= -Ax \\ A(B + I)x &= -A^2x \\ ABx + Ax = BAx + Ax &= (B + I)Ax = -A^2x \end{aligned}$$

Lenže ak $(B + I)x = -Ax$ a zo singularity požadujeme, že $B + A + I = 0$, tak potom $B + I = -A$ a platí:

$$(B + I)^2x = A^2x$$

Umocnením dostávame:

$$(B + I)^{2002}x = A^{2002}x$$

Keďže zo zadania vieme, že $A^{2002} = I$, tak platí aj

$$(B + I)^{2002} = Ix$$

respektíve

$$(B+I)^{2002}x = x \tag{5}$$

Avšak z $B^{2003} = I$ vyplýva, že aj

$$B^{2003}x = x \tag{6}$$

Označme vlastnú hodnotu matice B ako λ_B, pre ktorú dostávame z (5), (6) nasledovné dve rovnice:

$$\begin{aligned} (\lambda_B + 1)^{2002} - 1 &= 0 \\ \lambda_B^{2003} - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Je zrejmé, že riešenia rovníc ležia na jednotkovej kružnici. Preto hľadáme prienik dvoch kružníc so stredmi $[0,0], [-1,0]$ a polomerom $r = 1$. Označme x, y ako reálnu a imaginárnu časť z λ_B a riešme nasledovný systém rovníc:

$$\begin{aligned} (x+1)^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{aligned}$$

Vyjadrime si $y^2 = 1 - x^2$ a dosadzovacou metódou vyriešime rovnicu
$x^2 + 2x + 1 + 1 - x^2 = 1$, z čoho vyplýva, že $2x = -1$.
Po dosadení nám výjdu dve možné riešenia:

$$[x,y]^T = \left[-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right]; \quad [x,y]^T = \left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

Keďže sú riešenia z jednotkovej kružnice, vieme zapísať λ_B ako $\lambda_B = x + iy$, kde i je imaginárne číslo.

Preto ak dosadíme jedno z riešení:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1\right)^{2002} - 1 &= 0 \\ \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{2003} - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Napíšeme si tieto dva výrazy cez eulerovu identitu.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i &= \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = e^{\frac{i4\pi}{3}} \\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i &= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = e^{\frac{i2\pi}{3}} \end{aligned}$$

Teraz si zoberme napríklad druhú rovnicu

$$\left(e^{\frac{i2\pi}{3}}\right)^{2003} = 1 \implies e^{\frac{i4006\pi}{3}} = 1 \implies e^{\frac{i\pi}{3}} e^{i\pi 1335}$$

Po dosadení

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)(-1 + i0) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \neq 1$$

Spor. $\blacksquare$

1.4 Vlastné hodnoty a transformácia vektora

Tento príklad je zo súťaže IMC 2013/1, prvého hracieho dňa.

Nech A a B sú reálne, symetrické matice so všetkými vlastnými hodnotami väčšími ako 1. Nech λ je reálna vlastná hodnota matice AB. Dokážte, že $\mid \lambda \mid > 1$

Riešenie 1:

Nech θ je vlastná hodnota matice A a nech φ je vlastná hodnota B.

Ak θ je vlastná hodnota matice A, tak potom $Ax = \theta x$ a keďže $\theta > 1$ tak z toho vyplýva séria implikácií:

$$\theta > 1 \implies \theta x \geq x \implies Ax \geq x$$

Analogicky ak φ je vlastná hodnota matice B, tak potom $Bx = \varphi x$ a keďže $\varphi > 1$ tak z toho vyplýva séria implikácií:

$$\varphi > 1 \implies \varphi x \geq x \implies Bx \geq x$$

Označme teda vlastnú hodnotu matice AB ako λ. Využijúc symetriu matíc:

$$\begin{aligned}
ABx &= \lambda x \\
(ABx)^T &= (\lambda x)^T \\
x^T(AB)^T &= \lambda x^T \\
x^T &= \lambda x^T A^{-1} B^{-1} \\
\frac{1}{\lambda} x^T &= x^T A^{-1} B^{-1} \\
\frac{1}{\lambda} x &= \left(A^{-1} B^{-1}\right)^T x \\
\frac{1}{\lambda} x &= \left((BA)^T\right)^{-1} x \\
\frac{1}{\lambda} x &= (AB)^{-1} x \\
\frac{1}{\lambda} x &= (B^{-1})(A^{-1}) x
\end{aligned}$$

Pre všetky vlastné hodnoty θ, φ prináležiace maticiam A, B platí, že ak sú väčšie ako 1, tak všetky vlastné hodnoty inverzných matíc A^{-1}, B^{-1} budú kladné čísla, menšie ako 1.

Vychádzajme teda z dvoch predpokladov: .

$$A^{-1}x = \frac{1}{\theta} x \leq x \tag{7}$$

$$B^{-1}x = \frac{1}{\varphi} x \leq x \tag{8}$$

Z nerovností (7), (8) vyplýva, že $B^{-1}A^{-1}x < x$. Ak však toto platí a platí aj, že $\frac{1}{\lambda}x = (B^{-1})(A^{-1})x$, tak z toho už priamo vyplýva, že $\frac{1}{\lambda}$ je kladné číslo, menšie ako 1. Tým sme dokázali, že pre vlastnú hodnotu λ matice AB platí $\mid \lambda \mid > 1$ $\blacksquare$.

Riešenie 2:

Riešenie bolo prevzaté zo stránky súťaže [8].

Transformácia daná maticami A, B predlžuje každý nenulový vektor, čo je vidno z rozkladu $S\Lambda S^{-1}$, kde na diagonále matice Λ vystupujú čísla väčšie ako 1. Preto súčin AB taktiež predlžuje každý nenulový vektor a preto jeho reálne vlastné hodnoty sú v absolútnej hodnote väčšie ako 1. $\blacksquare$

1.5 Zrkadlo, až na diagonálu

Tento príklad je zo súťaže Vojtěch Jarník 2007/2 - II.kategórie

Nech A je reálna $n \times n$ matica spĺňajúca

$$A + A^T = I$$

Ukážte, že $det(A) > 0$

Riešenie:

Idea postupu vychádza z riešenia uvedeného na stránke súťaže [24], ktorého rozšírením a detailnejším vysvetlením bolo zostavené toto riešenie.

Na začiatok si uvedomíme, že ak má platiť $A + A^T = I$, tak matica A musí mať nutne $\frac{1}{2}$ na diagonále. Pre ostatné prvky platí, že $a_{i,j} = -a_{j,i}$

Matica A sa dá zapísať v tvare $A = \frac{1}{2}I + B$, kde B je antisymetrická matica, t.j. platí $B = -B^T$. Nech x je vlastný vektor s príslušnou vlastnou hodnotou λ. Potom platí:

$$Ax = \frac{1}{2}Ix + Bx = \frac{1}{2}x + Bx = \lambda x$$

z čoho vyplýva, že

$$Bx = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) x$$

Na základe lemy, uvedenej na začtiaku kapitoly, platí, že vlastné hodnoty antisymetrickej matice sú rýdzoimaginárne. Označme teda vlastnú hodnotu antisymetrickej matice ako $\mu \in \mathbb{C}$, pričom $\mu = ib$, kde $b \in \mathbb{R}$ a $i^2 = -1$.

Keďže $Bx = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) x$, tak musí byť splnené, že:

$$\begin{aligned} \lambda - \frac{1}{2} &= ib \\ \lambda &= \frac{1}{2} + ib \end{aligned}$$

Vieme, že imaginárne vlastné hodnoty sú vždy v pároch, to znamená, že ak μ je vlastná hodnota matice B, tak aj $\bar{\mu}$ je vlastná hodnota k danej matici. Determinant je súčin vlastných hodnôt. Počítajme:

$$detA = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{2} + ib_j\right)$$

Pri násobení môžeme venovať špeciálnu pozornosť členom $(\frac{1}{2}+ib_j)(\frac{1}{2}-ib_j) = \frac{1}{4}+b_j^2 > 0$.

A teda súčin vlastných čísel - čo je determinant - sa zjednoduší na súčin kladných čísel, ktorý je kladný. ■

Poznámky:

- Existuje jediná symetrická matica spĺňajúca zadanie. Je to diagonálna matica s $\frac{1}{2}$ na diagonále.
- A^{-1} komutuje s $B = A - \frac{1}{2}I$. (dôkaz zrejmý)
- Pre $n = 2k - 1$ má matica A vždy aspoň jednu vl.hodnotu rovnú $\frac{1}{2}$. Vyplýva to z toho, že $A = \frac{1}{2}I + B$, kde B je antisymetrická matica a teda má všetky vlastné hodnoty rýdzoimaginárne. Imaginárne vlastné hodnoty sa vyskytujú vždy v pároch. To znamená, že pre párny rozmer majú všetky komplexné vlastné hodnoty aj svoje komplexne združené. Avšak pre nepárny rozmer nám ostáva jedna komplexná vlastná hodnota, ktorá je identická so svojou komplexne združenou, a tou je nula. Preto má A vlastnú hodnotu $\frac{1}{2}$, pôvodom z polovice identitickej matice.
- Zostavili sme v MatLabe krátky program, ktorý vygeneroval maticu $A = \frac{1}{2}I + B$ s náhodným rozmerom z intervalu (1,9) a náhodnými zložkami z toho istého intervalu pomocou príkazu *skewdec* spĺňajúcu podmienku zo zadania. Za účelom praktickej vizualizácie uvádzame dva príklady matice A s vektorom vlastných hodnôt Λ.

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & -4 & -5 \\ 4 & 0.5 & -6 \\ 5 & 6 & 0.5 \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix} 0.5 + 8.775 \cdot i \\ 0.5 - 8.775 \cdot i \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & -3 \\ 3 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 0.5 + 3 \cdot i \\ 0.5 - 3 \cdot i \end{bmatrix}$$

1.6 Rovnaké determinanty

Tento príklad je zo súťaže IMC 2015/1, prvého súťažného dňa.

Pre všetky $n \geq 2$ a pre všetky reálne matice A, B, ktoré majú takú vlastnosť, že

$$A^{-1} + B^{-1} = (A + B)^{-1} \tag{9}$$

dokážte, že $det(A) = det(B)$.

Riešenie:

Idea postupu vychádza z riešenia uvedeného na stránke súťaže [8], ktorého rozšírením a detailnejším vysvetlením bolo zostavené toto riešenie.

$$\begin{aligned}
(A+B)^{-1} &= A^{-1} + B^{-1} \\
I &= (A+B)(A+B)^{-1} \\
&= (A+B)(A^{-1} + B^{-1}) \\
&= I + BA^{-1} + AB^{-1} + I
\end{aligned}$$

Dostávame

$$I + BA^{-1} + AB^{-1} = 0 \tag{10}$$

Zavedením substitúcie v (10) $X = AB^{-1}$:

$$\begin{aligned}
X + X^{-1} + I &= 0 \\
X^2 + X + I &= 0 \\
X^3 + X^2 + X - X^2 - X - I &= 0 \\
X^3 &= I
\end{aligned}$$

Vieme, že ak platí posledná rovnosť, tak aj $det(X^3) = det(I)$, teda $det(X) = 1$.

Potom platí, že $det(A) = det(XB) = det(X)det(B) = det(B)$ ■

Poznámky:

Keďže nebolo úplne zrejmé, ako musia vyzerať matice, aby spĺňali podmienku (9) zo zadania, vykonali sme krátky pokus v MatLabe za účelom spestrenia príkladu. V cykle sme generovali náhodné matice A, B, ktorých prvky sú z $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ a overili, či spĺňajú podmienku (9). Ak podmienku splnili, program sa prerušil a vypísal, na koľkatý pokus sa mu podarilo takéto matice vygenerovať. Ak matice nevyhovovali podmienke, cyklus pokračoval.

- Pokus č.430

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Pokus č.7797

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

- Pokus č.9441

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Pokus č.28083

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

2 Vety o strednej hodnote

V nasledujúcej kapitole si priblížime vety o strednej hodnote, ktoré následne využijeme pri výpočtoch príkladov. Okrem všeobecne známych viet o strednej hodnote - Rolleho, Lagrangeova a Cauchyho, spomenieme aj Bolzanovu vetu, ktorej využitie ozrejmime neskôr.

Aj keď prvá z viet o strednej hodnote nesie názov po francúzskom matematikovi M.Rollem, tak nebol to on, kto ako prvý disponoval jej znalosťou. Bol to totiž indický matematik Bhāskara II, kto ako prvý naznačil hlavnú myšlienku vety. [25]

Podľa [3] Rolle vetu nedokázal celú a dokázal ju až Cauchy, avšak zdroje [1] a [4] sa zhodujú, že Rolle dôkaz skonštruoval. Podľa [4] to bolo v roku 1691, pričom dôkaz uviedol spolu s vypracovanou metódou separácie reálnych koreňov algebraickej rovnice s reálnymi koeficientami. Spochybnenie dokázania vety môže byť zapríčinené podľa všetkého nedostatočnou publikáciou. [1].

Teória

Veta: [Rolleho veta o strednej hodnote]

Nech funkcia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ spĺňa nasledovné kritéria:

- f je spojitá na intervale $[a, b]$
- v každom bode intervalu (a,b) existuje konečná derivácia funkcie f
- $f(a) = f(b)$

Potom existuje také $c \in (a, b)$, že $f'(c) = 0$. [11]

Veta: [Lagrangeova veta o strednej hodnote]

Nech funkcia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ vyhovuje nasledovným podmienkam:

- f je spojitá na intervale $[a, b]$
- v každom bode intervalu (a, b) existuje konečná derivácia funkcie f

Potom existuje také $c \in (a, b)$, že $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. [11]

Veta: [Cauchyho veta o strednej hodnote]

Majme funkcie f, g obe $[a, b] \to \mathbb{R}$, pričom spĺňajú

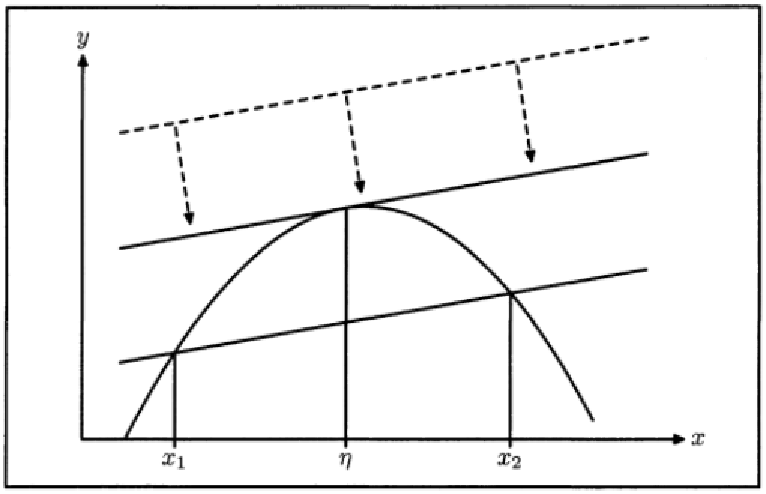
- f, g sú spojité na $[a, b]$
- v každom bode $[a, b]$ existuje derivácia f, g
- $g'(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$

Potom existuje $c \in [a, b]$, že $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$. [11]

Veta: [Bolzanova]

Nech $f(x)$ je spojitá funkcia definovaná na $[a, b]$. Potom ak $f(a) \cdot f(b) < 0$, tak existuje aspoň jeden bod $c \in (a, b)$taký, že $f(c) = 0$. [15]

Geometrický dôkaz Lagrangeovej vety:



Obr. 1: Lagrangeova veta [21]

Zoberieme rovnobežnú priamku so spojnicou $f(x_1)$ a $f(x_2)$. Pomaly ju posúvame ku grafu funkcie. Keďže predpokladáme, že funkcia je diferencovateľná na celom intervale, tak máme istotu, že nebude mať žiadne zlomy (je hladká). Z toho vyplýva, že pri určitom posune sa bude celkom zrejme jednať o dotyčnicu ku grafu funkcie. Pripomeňme si, že derivácia je smernica dotyčnice. Lenže dotyčnica je rovnobežná s priamkou prechádzajúcou bodmi $[x_1, f(x_1)], [x_2, f(x_2)]$, ktorá môže byť vyjadrená ako $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, čiže majú rovnakú smernicu a preto platí Lagrangeova veta.

Aplikácia Lagrangeovej vety v ekonómii:

Lagrangeova veta nachádza svoju aplikáciu aj v ekonómií, konkrétne v neoklasickom modeli. [6]

Označme $K = K(t)$ ako kapitál - funkciu času. Označme $Y = Y(K) = Y(K(t))$ ako produkciu - funkciu kapitálu. Predpokladajme, že ľudia majú konštantnú mieru šetrenia $s \in (0,1)$ a mieru amortizácie $\delta \in (0,1)$ - časť rozšíreného kapitálu.

Čistá miera rastu kapitálu (anglicky skrátene „Net investment") za časovú jednotku je

$$I = sY - \delta K \tag{11}$$

V ekonomickej teórii zvyčajne platí, že I je rýchlosť rastu kapitálu a preto

$$\dot{K} = sY - \delta K \tag{12}$$

Ak uvážime diskrétny čas namiesto spojitého (12), dostávame

$$K(t+1) - K(t) \quad = \quad sY(t) - \delta K(t) \tag{13}$$

Predpokladajme, že čas beží diskrétne. Podľa Lagrangeovej vety platí $K(t+1)-K(t) = \dot{K}(x)$ pre $t < x < t+1$. Pomocou Lagrangeovej vety teda aproximujeme model (13) na spojitý.

V ekonomickej teórii sa často používa (12) namiesto (13), ale pozor, tieto dve rovnice nie sú ekvivalentné.

2.1 Arctangens pomôže

Tento príklad je zo súťaže Vojtěch Jarník 2015/1 - I.kategórie.

Nech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je diferencovateľná funkcia na $\mathbb{R}$. Dokážte, že existuje $x \in [0,1]$, že

$$\frac{4}{\pi}\left(f(1) - f(0)\right) = (1 + x^2)f'(x)$$

Riešenie 1:

Využijeme Cauchyho vetu o strednej hodnote. Pozorným okom sa dá si všimnúť, že členy $(1 + x^2)$ a $\frac{4}{\pi}$ niečim indikujú funkciu arkustangens. Respektíve, pripomínajú ho ich prevrátené hodnoty, čo neskôr využijeme.

Zadefinujme si teda novú funkciu $g(x) = \operatorname{arctg}(x)$. Podľa Cauchyho vety o strednej hodnote platí:

$$\begin{aligned}
\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(1)-f(0)}{g(1)-g(0)} \iff \frac{f'(c)}{\frac{1}{1+c^2}} &= \frac{f(1)-f(0)}{\frac{\pi}{4}} \\
\frac{\pi}{4} f'(c) &= \frac{1}{1+c^2}(f(1)-f(0)) \\
(1+c^2)f'(c) &= \frac{4}{\pi}(f(1)-f(0)) \\
(1+x^2)f'(x) &= \frac{4}{\pi}(f(1)-f(0)) \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Riešenie 2:

Idea postupu vychádza z riešenia uvedeného na stránke súťaže [24], ktorého rozšírením a detailnejším vysvetlením bolo zostavené toto riešenie.

Zoberme $\psi(x) = \varphi(\tan(x))$ na $[0, \frac{\pi}{4}]$. Podľa Lagrangeovej vety o strednej hodnote existuje $c \in [a,b]$, že

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

a teda existuje také $\xi \in [0, \frac{\pi}{4}]$, že

$$\psi\left(\frac{\pi}{2}\right) - \psi(0) \;=\; \frac{\pi}{4}\psi'(\xi)$$

respektíve

$$\varphi(1) - \varphi(0) \;=\; \frac{\pi}{4}(1+\tan^2(\xi)) \cdot \varphi'(\xi)$$

Položením $z = \tan(\xi)$ dostávame

$$\frac{4}{\pi}\left(f(1) - f(0)\right) = (1+z^2)f'(z)$$

čo bolo treba dokázať. $\blacksquare$

Poznámky:

Pre $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$ na intervale $[0,1]$ aplikujme Lagrangeovu vetu o strednej hodnote: $f'(x) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0}$, z čoho vyplýva, že $\frac{1}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$.

Chceme, aby platilo $\frac{4}{\pi}(f(1)-f(0)) = (1+x^2)f'(x)$, čo je v našom prípade $\frac{\pi}{4} \cdot \frac{4}{\pi} = (1+c^2) \cdot \frac{1}{(1+c^2)}$, respektíve $1 = 1$. Teda sme ukázali, že ak $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$, tak vzťah platí pre ľubovoľné x. Celá táto myšlienka vyplýva v podstate aj z riešenia 1.

2.2 Veľa goniometrie

Tento príklad je zo súťaže IMC 2013/2, prvého súťažného dňa.

Nech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je dvakrát diferencovateľná funkcia. Predpokladajme, že $f(0) = 0$. Dokážte, že existuje $\xi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ spĺňajúce

$$f''(\xi) = f(\xi)(1 + 2\tan^2\xi)$$

Riešenie 1:

Nech $\Theta(x) = \frac{f(x)}{\cos^2(x)}$, potom $\Theta(x) \cdot \cos^2(x) = f(x)$. Motivácia pre danú voľbu pre $\Theta(x)$ vznikla z túžby vykrátiť tangens.

Hľadáme také ξ, že $f''(\xi) = f(\xi)(1 + 2\tan^2\xi)$

$$\begin{aligned} [\Theta(\xi)\cos^2(\xi)]'' &= \Theta(\xi)\cos^2(\xi)[1 + 2\tan^2(\xi)] \\ \left[\Theta'(\xi)\cos^2(\xi) - 2\Theta(\xi)\cos(\xi)\sin(\xi)\right]' &= \Theta(\xi)\cos^2(\xi) + 2\Theta(\xi)\sin^2(\xi) \\ \Theta''(\xi)\cos^2(\xi) - 4\Theta'(\xi)\cos(\xi)\sin(\xi) - 3\Theta(\xi)\cos^2(\xi) &= 0 \end{aligned}$$

Na skúmanom intervale môžeme predeliť rovnicu výrazom $\cos(\xi)$. Dostávame:

$$\Theta''(\xi)\cos(\xi) - 4\Theta'(\xi)\sin(\xi) - 3\Theta(\xi)\cos(\xi) = 0 \tag{14}$$

Pozorný čitateľ si všimne (overí si), že (14) je to isté ako

$$[\Theta(\xi)\cos(\xi) - 3\Theta(\xi)\sin(\xi)]' = 0$$

Hľadajme teda body $a \neq b : \phi(a) = \phi(b) = 0$.

$\phi(x) = \Theta'(x)\cos(x) - 3\Theta(x)\sin(x)$ a tak riešme kedy $\Theta'(x)\cos(x) = 3\Theta(x)\sin(x)$. Dosadením za $\Theta(x)$ dostávame podmienku, že $f'(x)\cos(x) - f(x)\sin(x) = 0$, čo je ekvivalentné s

$$\phi(x) = 0 \iff [f(x)\cos(x)]' = 0$$

Uvedomíme si, že $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Označme $f(x)\cos(x) = \psi(x)$. Vieme, že $\psi\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \psi(0) = \psi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ a preto podľa Lagrangeovej vety existujú body $a, b, a \neq b : \phi(a) = \phi(b) = 0$, čím je tvrdenie dokázané. ■

Riešenie 2:

Idea postupu vychádza z riešenia uvedeného na stránke súťaže [8], ktorého rozšírením a detailnejším vysvetlením bolo zostavené toto riešenie.

Nech $g(x) = f(x)cos(x)$. Keďže $g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = g(0) = g\left(\frac{\pi}{2}\right)$, tak podľa Rolleho vety existujú body $c_1 \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ a $c_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, že $g'(c_1) = g'(c_2) = 0$.

Uvažujme funkciu $h(x) = \frac{g'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{f'(x)\cos(x) - f(x)\sin(x)}{\cos^2(x)}$.

Vieme, že $h(c_1) = h(c_2) = 0$, takže podľa Rolleho vety existuje $c \in (c_1, c_2)$ také, že

$$\begin{aligned}
0 &= h'(c) = \frac{g''(c)\cos^2(c) + 2g'(c)\cos(c)\sin(c)}{\cos^4(c)} = \\
&= \frac{[f''(c)\cos(c) - 2f'(c)\sin(c) - f(c)\cos(c)]\cos(c) + 2\sin(c)[f'(c)\cos(c) - f(c)\sin(c)]}{\cos^3(c)} = \\
&= \frac{f''(c)\cos^2(c) - f(c)\left[\cos^2(c) + 2\sin^2(c)\right]}{\cos^3(c)} = \frac{1}{\cos(c)}\left[f''(c) - f(c)\left(1 + 2\tan^2(c)\right)\right]
\end{aligned}$$

a teda

$$f''(c) - f(c)\left(1 + 2\tan^2(c)\right) = 0 \iff f''(c) = f(c)\left(1 + 2\tan^2(c)\right) \tag{15}$$

čo bolo treba dokázať. ■

Poznámky:

Zoberme si niekoľko funkcií a poďme ich analyzovať v súvislosti so zadaním príkladu.

- Ak $f(x) = \sin(x)$, tak existuje jediné riešenie problému.

- Pre funkciu $f(x) = x^2$ platí, ak $2 = x^2(1 + 2\tan^2(x))$, tak má funkcia práve jedno riešenie na $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Keďže funkcia je párna, tak je to tak aj symetricky pre $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

- Ak zoberieme funkciu $f(x) = \cos(x) - 1$, tak po zavedení substitúcie $\cos(x) = y$ dostávame rovnicu $2y^3 - 4y^2 - y + 2 = 0$, ktorá má síce tri korene. Tretí koreň $y_3 = 2$ ihneď vylúčime, kvôli tomu, že kosínus je ohraničený jednotkou. Po spätnom dosadení teda prichádzajú do úvahy iba dve riešenia, a síce $y_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Tu však treba vylúčiť aj y_1, keďže kosínus je na $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ kladný. Tým pádom má rovnica jediné riešenie, $x = \frac{\pi}{4}$.

- Uvedené príklady ukazujú, prečo je v tvrdení uvádzaná iba existencia a nie aj jednoznačnosť. Je to preto, lebo počet riešení môže byť rôzny.

2.3 Bolzano

Tento príklad je zo súťaže Vojtěch Jarník 2012/1 - I.kategórie.

Nech $f : [0,1] \to [0,1]$ je diferencovateľná funkcia taká, že $\mid f'(x) \mid \neq 1$ pre všetky $x \in [0,1]$. Dokážte, že existujú jediné body $\alpha, \beta \in [0,1]$ také, že $f(\alpha) = \alpha$ a $f(\beta) = 1-\beta$

Riešenie:

Idea postupu vychádza z riešenia uvedeného na stránke súťaže [24], ktorého rozšírením a detailnejším vysvetlením bolo zostavené toto riešenie.

Zoberme funkcie $g(x) = f(x) - x$ a $h(x) = f(x) - (1-x)$. Keďže $f(0) \in [0,1]$, tak $g(0) \geq 0$ a $g(1) \leq 0$. Použitím Bolzanovej vety dostávame, že existuje $g(\alpha) = 0$. Lenže $g(\alpha) = f(\alpha) - \alpha = 0$, z čoho vyplýva, že $f(\alpha) = \alpha$.

Analogicky $h(0) \cdot h(1) \leq 0$, preto opäť podľa Bolzanovej vety existuje $\beta : f(\beta) = 1 - \beta$.

Týmto je dokázaná existencia bodov α, β. Teraz treba dokázať jednoznačnosť.

Predpokladajme, že existuje $\alpha, \alpha' \in [0,1], \alpha < \alpha'$ také, že $f(\alpha) = \alpha$ a $f(\alpha') = \alpha'$. Podľa Lagrangeovej vety o strednej hodnote existuje $\theta \in [\alpha, \alpha']$ také, že

$$f'(\theta) = \frac{f(\alpha') - f(\alpha)}{\alpha' - \alpha} = \frac{\alpha' - \alpha}{\alpha' - \alpha} = 1,$$

čo je však spor s predpokladom, že $\mid f'(x) \neq 1 \mid$.

Analogicky, nech existujú $\beta, \beta' \in [0,1], \beta < \beta'$ také, že $f(\beta) = 1 - \beta$ a $f(\beta') = \beta'$. Opätovným aplikovaním Lagrangeovej vety dostávame

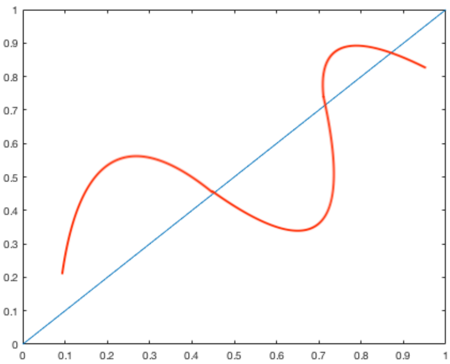
$$f'(\gamma) = \frac{f(\beta') - f(\beta)}{\beta' - \beta} = \frac{(1-\beta') - (1-\beta)}{\beta' - \beta} = 1,$$

čo je takisto spor. Týmto je dôkaz ukončený. ■

Poznámky:

- Pri dokazovaní jednoznačnosti α stačilo použiť Rolleho vetu. Pretože ak $f(a) = a$, tak platí, že $g(a) - g(b) = 0$. A teda podľa Rolleho vety existuje také c, pre ktoré platí, že $g'(c) = 0$, čiže aj $f'(c) = 1$, čo je ten istý spor.

- Dôkaz jednoznačnosti, za predpokladu, že $f'(x) \neq 1$, sa dá aj graficky interpretovať. Majme funkciu na obrázku pod textom, vyznačenú červeným grafom a funkciu $y = x$ so smernicou $k = 1$, vyznačenú modrým grafom. Z geometrickej interpretácie Lagrangeovej vety vyplýva, že na funkcií celkom určite existuje nejaký bod, ktorým keď vedieme dotyčnicu ku „červenej“ funkcií, tak dotyčnica bude rovnobežná s „modrou“ funkciou. Preto je derivácia rovná 1, čo podľa predpokladu nemôže nastať.



Obr. 2: Grafická interpretácia

3 Viacrozmerné integrovanie

Počiatky integrovania, respektíve matematickej disciplíny označovanej pojmom „calculus“ siahajú až do starovekého Grécka. Keď v tých časoch Gréci chceli zistiť obsah kruhu, používali na to aproximáciu cez n-uholníky. Presne tento spôsob sa neskôr ukázal ako relevantný aj vo výpočtoch určitého integrálu pomocou integrálnych súčtov.
Po vyše 1600 rokoch sa Johaness Kepler rozhodol, že sa pokúsi vypočítať objem vínneho sudu - chcel zistiť, koľko vína sa tam zmestí. Kepler si sud rozdelil na veľmi veľa malých častí, ktoré premietal do úsečiek. Aj keď môžeme toto považovať za základy integrálneho počtu, niektoré jeho postupy sa neskôr ukázali ako chybné.
Bonavenura Cavalieri bol prvý, kto vyčíslil určitý integrál lineárnej funkcie a paraboly. Neskôr Blaise Pascal zaviedol všeobecný vzťah pre integrál z polynómu.
Integrálny počet, aký dnes poznáme, vznikol však až v 17. storočí vďaka dvom veľkým vedcom nezávisle od seba: Sir Isaac Newton a Gottfried Wilhelm Leibniz, ktorí spolu však teóriu nemohli rozviesť, nakoľko viedli spor ohľadom prvenstva v objavení infinitezimálneho počtu. Po týchto dvoch matematikoch je pomenovaná aj slávna Newton-Leibnizova formula.
Čo sa týka ďalšieho rozvoja integrovania, určite by bolo vhodné spomenúť Eulera, Cauchyho, Riemanna, či Lebesqua. Prirodzene, to už je téma na inú prácu. [18]

Teória

Definícia: Nech $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je elementárna oblasť typu $[x, y]$, t.j. $\Omega = \{(x, y), a \leq x \leq y \wedge \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$. Pod dvojnásobným integrálom (podľa [12]) rozumieme:

$$\int_a^b \left(\int_{\phi(x_1)}^{\psi(x_1)} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1$$

Definícia: Nech $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ je uzavretá oblasť a $f : \Lambda \to \mathbb{R}$ je spojitá na Λ. Dvojným integrálom (podľa [12]) funkcie f skrz množinu Λ nazývame:

$$\iint_\Lambda f(x, y) dxdy = \int_a^b \int_{\phi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dxdy = \int_{\phi(y)}^{\psi(y)} \int_a^b f(x, y) dydx$$

Poznámka: Definície sa dajú „rozšíriť“ do vyšších rozmerov.

Poznámka: „Beztrestný“ prechod medzi dvojným a dvojnásobným integrálom nám zaručí Fubiniho veta vyslovená nižšie.

Definícia: Nech Ω je oblasť v $\mathbb{R}^n$ (t.j. otvorená a súvislá množina). Oblasť Ω nazveme merateľnou, ak $\exists$ rastúca postupnosť uzavretých hranatcov K_n a klesajúca postupnosť otvorených hranatcov O_n takých, že platí: $K_n \subset \Omega \subset O_n$ a $\lim\limits_{n\to\infty} \mid O_n - K_n \mid = 0$. Spoločná limita $\lim\limits_{n\to\infty} \mid K_n \mid = \lim\limits_{n\to\infty} \mid O_n \mid = \mid \Omega \mid$ sa nazýva miera. [12]

Poznámka: Pod pojmom „hranatec“ si predstavíme konečné zjednotenie kvádrov typu $\Pi_{i=1}^{n} I_i$, kde I_i je interval. [12]

Veta: [Fubiniho veta]

Ak Ω je elementárna oblasť a f je spojitá na $\bar{\Omega}$. Potom (podľa [12]) platí:

$$\iint_{\Omega} f(x)dx = \int_a^b \left(\int_{\phi(x_2)}^{\psi(x_1} f(x_1, x_2)dx_2 \right) dx_1$$

Poznámka: Rovnako platí Fubiniho veta aj na elementárnej oblasti typu $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.

Regulárne zobrazenie (transformácia): Nech $\psi : \Omega' \subset \mathbb{R}^n \to \Omega\mathbb{R}^n$ je prosté C^1 zobrazenie, pričom $\psi(\Omega') = \Omega$ Nech J je Jacobiho matica:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial \psi_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n} \end{bmatrix}$$

Označme determinant horeuvedenej Jacobiho matice (Jakobián) ako $J_\psi(y)$.

Ak $J_\psi(y) \neq 0$ (Jacobiho matica je regulárna - invertovateľná), hovoríme, že zobrazenie ψ je regulárne. [12]

Metóda substitúcie: Nech f je Riemannovsky integrovateľná funkcia na oblasti Ω a nech zobrazenie $\psi : \Omega' \subset \mathbb{R}^n \to \Omega \subset \mathbb{R}^n$ je regulárne. Potom (podľa [12]) platí vzťah substitúcie $x = \psi(y) \in \Omega$ pre integrál vypočítaný pomocou novej premennej $y \in \Omega'$:

$$\int_{\Omega} f(x)dx = \int_{\Omega'} f(\psi(y)) \cdot \mid J_\psi(y) \mid dy$$

Tabuľka transformácií:

Tabuľka 1: Transformácie

Typ transformácie	**x**	**y**	**z**	**Jakobián**
Polárne súradnice	$x = r \cdot cos(\phi)$	$y = r \cdot sin(\phi)$	-	r
Cylindrické súradnice	$x = r \cdot cos(\phi)$	$y = r \cdot sin(\phi)$	$z = u$	r
Sférické súradnice	$x = r \cdot cos(\phi)cos(\psi)$	$y = r \cdot sin(\phi)cos(\psi)$	$z = r \cdot sin(\psi)$	$r^2 cos(\psi)$
Eliptické súradnice	$x = a \cdot r \cdot cos(\phi)$	$y = b \cdot r \cdot sin(\phi)$	-	abr
Eliptické súradnice II.	$x = a \cdot r \cdot cos(\phi)cos(\psi)$	$y = b \cdot r \cdot sin(\phi)$	$c \cdot r \cdot sin(\psi)$	$abcr^2 cos(\psi)$

Ilustračný príklad: Chceli by sme pomocou integrálov overiť, či naozaj platí známy vzorec zo strednej školy na výpočet objemu gule, a síce

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Riešenie:

Vieme, že rovnica gule je $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Po aplikácií sférických transformácií dostávame:

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos(\phi)\cos(\psi) \\ y &= r \cdot \sin(\phi)\cos(\psi) \\ z &= r \cdot \sin(\psi) \end{aligned}$$

Z rovnice gule získame hranice:

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad = \quad r^2$$

teda platí, že

$$r \in (0, R)$$

Napokon, ak nemáme zadanú dodatočnú sprísňujúcu podmienku, tak hranice pre ϕ, ψ sú $(0, 2\pi)$, respektíve $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Vložme teda do integrálu jakobián a vypočítajme objem.

$$\begin{aligned}
\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos(\psi) dR d\phi d\psi &= \\
2 \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 dr d\phi &= \\
4\pi \int_0^R r^2 dr &= \frac{4}{3}\pi R^3
\end{aligned}$$

A tak sme dokázali platnosť „stredoškolského“ vzorca na výpočet objemu gule.

3.1 Donut

Tento príklad je zo súťaže Putnam, z roku 2006/A1.

Vypočítajte objem telesa ohraničeného plochou

$$\left(x^2 + y^2 + z^2 + 8\right)^2 \leq 36\left(x^2 + y^2\right)$$

Riešenie 1:

Použijeme cylindrické súradnice.

$x = r\cos(\phi)$

$y = r\sin(\phi)$

$z = u$

Z toho nám vyplýva:

$$\begin{aligned}
r^2 + u^2 + 8 &\leq 6r \\
r^2 - 6r + u^2 + 8 &\leq 0 \\
(r-3)^2 + u^2 &\leq 1
\end{aligned}$$

Vieme, že $\phi \in (0, 2\pi)$. Potrebujeme však zistiť, do akého intervalu patrí r, respektíve u. Po vyriešení kvadratickej nerovnice $(r-3)^2 + u^2 \leq 1$ dostávame, že $r \in (3 - \sqrt{1-u^2}, 3 + \sqrt{1-u^2})$. Z toho však rovno vyplýva, že $u \in (-1, 1)$, keďže odmocňované číslo požadujeme kladné.

Keď už máme ujasnené hranice, môžeme prejsť k samotnému integrovaniu.

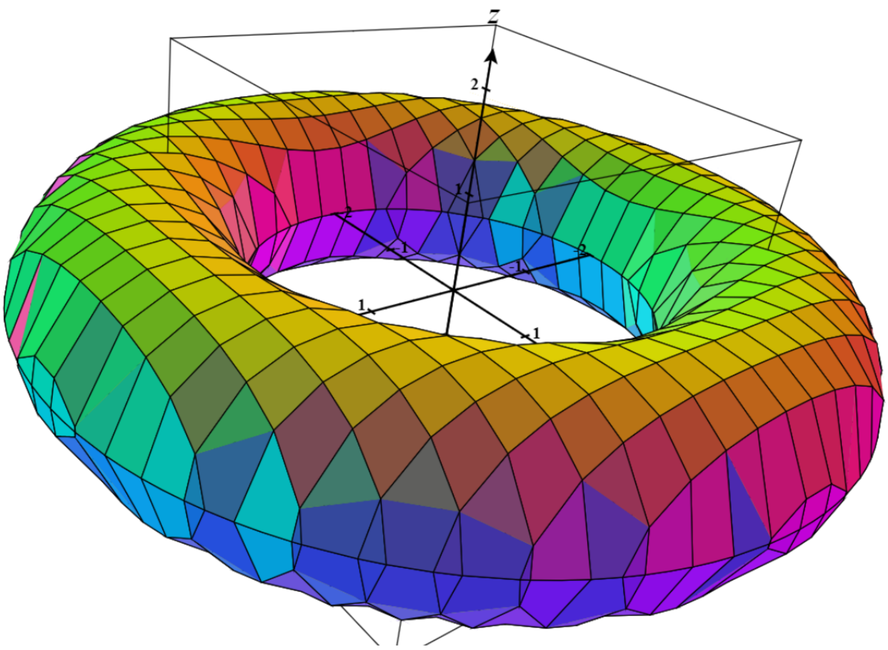
$$\int_{-1}^{1} du \int_{3-\sqrt{1-u^2}}^{3-\sqrt{1-u^2}} r dr \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi \int_{-1}^{1} du \int_{3-\sqrt{1-u^2}}^{3-\sqrt{1-u^2}} r dr \quad = \quad 12\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2} du$$

Zavedieme substitúciu: $|u = \sin(\omega), du = \cos(\omega)d\omega|$ a pokračujeme vo výpočtoch:

$$12\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2}du \quad = \quad 12\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \omega d\omega = 12\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cos(2\omega) + \frac{1}{2}d\omega = 12\pi\frac{\pi}{2} = 6\pi^2$$

A teda objem telesa ohraničeného danou plochou je $6\pi^2$.

Poznámky: Teleso, ktorého objem sme vypočítali, vyzerá nasledovne:

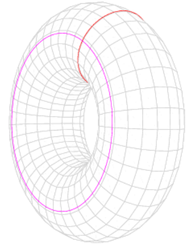


Obr. 3: Torus [17]

Toto všeobecne známe teleso vzniká rotáciou disku po kružnici a je známe pod menom torus. V riešení 2 uvedenom nižšie sa využíva Guldinova veta (známa taktiež ako Pappusova). Hovorí o tom, že objem telesa, vzniknutého otáčaním plochy okolo osi, ktorá túto plochu nepretína, je rovná súčinu veľkosti obsahu S tejto plochy a dĺžky kružnice, ktorou opíše ťažisko tejto plochy. [16]

$$V = 2\pi \cdot S \cdot l$$

Navyše, môže toto teleso, pripomínajúce šišku (anglicky „donut“ - preto názov príkladu), vzniknúť ako karteziánsky súčin disku a kruhu, zobrazený na obrázku nižšie.



Obr. 4: Karteziánsky súčin disku a kruhu [25]

Riešenie 2:

Idea postupu vychádza z riešenia uvedeného na archíve riešení súťaže [19], ktorého rozšírením a detailnejším vysvetlením bolo zostavené toto riešenie.

Pomocou transformácie prejdeme k cylindrickým súradniciam. Zvoľme $r = x^2 + y^2$. Postupne sa dostaneme k obmedzeniu

$$r^2 + z^2 + 8 \leq 6r,$$

respektíve

$$(r-3)^2 + z^2 \leq 1. \tag{16}$$

Pozorný čitateľ si všimne, že (16) nám definuje vyššie spomenutý torus a plocha, ktorá rotuje, je kruh. Odvolaním sa na Pappusovu (Guldinovu) vetu, dostávame, že objem telesa je plocha kruhu (rovná π) vynásobená dĺžkou kružnice opisujúcej ťažisko plochy (rovná $2\pi \cdot 3$). Preto je objem telesa $6\pi^2$.

3.2 Viac ako len integrál

Tento príklad je zo súťaže Vojtěch Jarník, z roku 2015/4 - II.kategórie.

Nájdite všetky spojito-diferencovateľné funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre každé $a \geq 0$ platí nasledovný vzťah:

$$\iiint_{D(a)} xf\left(\frac{ay}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) dxdydz = \frac{\pi a^3}{8}\left(f(a) + \sin(a) - 1\right)$$

kde $D(a) = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, |\, y \,| \leq \frac{x}{\sqrt{3}}\right\}$

Riešenie:

Idea postupu vychádza z riešenia uvedeného na stránke súťaže [24], ktorého rozšírením a detailnejším vysvetlením bolo zostavené toto riešenie.

Použijeme sférické súradnice.

$x = r\cos(\phi)\cos(\psi)$

$y = r\sin(\phi)\cos(\psi)$

$z = r\sin(\psi)$

Vieme, že jakobián tejto transformácie je $= r^2\cos(\psi)$.

$$\begin{aligned}
[r\cos(\phi)\cos(\psi)]^2 + [r\sin(\phi)\cos(\psi)]^2 + [r\sin(\psi)]^2 &\leq a^2 \\
(r\cos(\psi))^2 + (r\sin(\psi))^2 &\leq a^2 \\
r^2 &\leq a^2
\end{aligned}$$

Teda zatiaľ máme

$$r \in (0, a); \phi \in (0, 2\pi); \psi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

Toto však ešte nie sú definitívne hranice, vzhľadom k tomu, že množina $D(a)$ je daná aj druhým ohraničením a síce $\mid y \mid \leq \frac{x}{\sqrt{3}}$.

Počítajme:

$$\begin{array}{rcl}
\mid y \mid & \leq & \frac{x}{\sqrt{3}} \\
-\frac{x}{\sqrt{3}} \leq & y & \leq \frac{x}{\sqrt{3}} \\
-\frac{r\cos(\phi)\cos(\psi)}{\sqrt{3}} \leq & r\sin(\phi)\cos(\psi) & \leq \frac{r\cos(\phi)\cos(\psi)}{\sqrt{3}} \\
-\frac{r\cos(\phi)}{\sqrt{3}} \leq & r\sin(\phi) & \leq \frac{rcos(\phi)}{\sqrt{3}} \\
-\frac{\cos(\phi)}{\sqrt{3}} \leq & \sin(\phi) & \leq \frac{\cos(\phi)}{\sqrt{3}} \\
-\frac{1}{\sqrt{3}} \leq & \frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)} & \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \\
-\frac{1}{\sqrt{3}} \leq & \tan(\phi) & \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \implies \phi \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)
\end{array}$$

A teda integrovaný výraz prejde nasledovnými úpravami:

$$\begin{aligned}
xf\left(\frac{ay}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) &= r\cos(\phi)\cos(\psi)f\left(\frac{ar\sin(\phi)\cos(\psi)}{\sqrt{r\cos(\phi)\cos(\psi)^2 + r\sin(\phi)\cos(\psi)^2}}\right) = \\
&= r\cos(\phi)\cos(\psi)f(a\sin(\phi))
\end{aligned}$$

Po pripojení Jakobiánu sa dostávame ku konečnému tvaru:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} f(a\sin(\phi))\cos(\phi)d\phi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\psi)d\psi \int_0^a r^3 dr$$

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} f(a\sin(\phi))\cos(\phi)d\phi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\psi)d\psi \int_0^a r^3 dr = \\
&= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} f(a\sin(\phi))\cos(\phi)d\phi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\psi)d\psi \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a = \\
&= \frac{a^4}{4}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} f(a\sin(\phi))\cos(\phi)d\phi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\psi)d\psi = \\
&= \frac{a^4}{4}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} f(a\sin(\phi))\cos(\phi)d\phi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2\psi)+1}{2}d\psi = \\
&= \frac{a^4}{8}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} f(a\sin(\phi))\cos(\phi)d\phi \left[\frac{\sin(2\psi)}{2}+\psi\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^4}{8}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} f(a\sin(\phi))\cos(\phi)d\phi
\end{aligned}$$

Integrovaním sme získali upravený tvar rovnice:

$$\frac{\pi a^4}{8}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} f(a\sin(\phi))\cos(\phi)d\phi = \frac{\pi a^3}{8}[f(a)+\sin(a)-1]$$

Respektíve

$$a\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} f(a\sin(\phi))\cos(\phi)d\phi = f(a)+\sin(a)-1$$

Po zavedení substitúcie $a\sin(\phi) = t$ máme

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(t)dt = f(a)+\sin(a)-1 \tag{17}$$

Zo (17) je vidno, že ak $a = 0$, tak $f(0) = 1$, pretože integrál s nulovými hranicami je nula, takisto ako $\sin(0)$.

Keďže $a \geq 0$, tak nevieme priamo vypočítať funkčnú hodnotu v bode $\frac{-a}{2}$, a tak si pomôžeme deriváciou (17).

$$f\left(-\frac{a}{2}\right) = 2f'(a) + 2\cos(a) - f\left(\frac{a}{2}\right) \tag{18}$$

Funkcia f je spojitá na $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, pretože

$$\lim_{a\to a_{0_+}} f\left(-\frac{a}{2}\right) = 2f'(a_0) + 2\cos(a_0) - f\left(\frac{a_0}{2}\right) = \lim_{a\to a_{0_-}} f\left(-\frac{a}{2}\right)$$

Pošleme teraz $a \to 0_+$. Treba si však uvedomiť, že požadujeme spojitosť funkcie f a teda chceme, aby $\lim\limits_{a\to 0_+} f\left(-\dfrac{a}{2}\right) = 1$, respektíve $f(0) = 1$.
A teda

$$\begin{aligned} 1 &= 2\lim_{a\to 0_+} f'(a) + 2 - 1 \qquad (19) \\ 0 &= \lim_{a\to 0_+} f'(a) \qquad (20) \end{aligned}$$

Dostali sme podmienky na to, aby bola funkcia f spojitá na reálnych číslach. My však požadujeme od nej viac - chceme aby bola spojito diferencovateľná. Preto ideme skúmať podmienky na prvú deriváciu.
Keďže platí

$$f'(a) = \frac{1}{2}f\left(\frac{a}{2}\right) + \frac{1}{2}f\left(-\frac{a}{2}\right) - 2\cos(a)$$

a zároveň f má byť spojito diferencovateľná, tak musí nutne existovať aj druhá derivácia f''. Po zderivovaní máme

$$f''(a) = \frac{1}{4}f\left(\frac{a}{2}\right) - \frac{1}{4}f\left(-\frac{a}{2}\right) + 2\sin(a)$$

takže $f \in C^2(0,\infty)$.
Chceme aby f' bola spojitá, čo však máme vďaka hladkosti zaručené na $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Nakoniec musí z (19) platiť, že

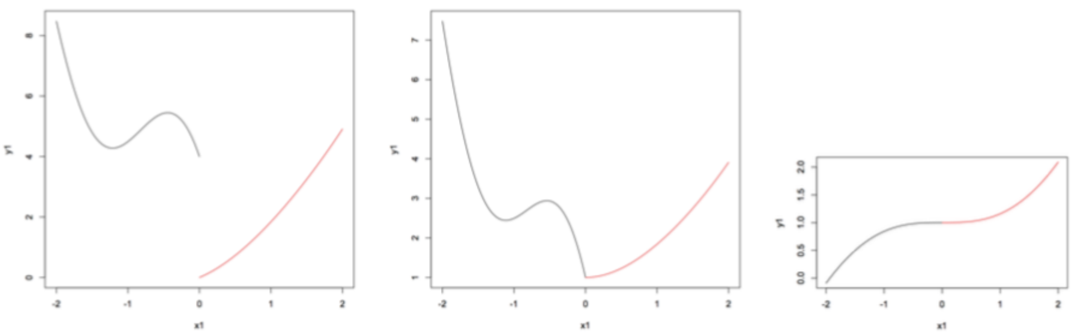
$$\lim_{a\to 0_+} f''(a) = 0 \qquad (21)$$

Zhrnutie: Hľadali sme všetky funkcie vyhovujúce zadaniu, resp. (18). Po našej analýze sme dospeli k tomu, že hľadané funkcie musia spĺňať nasledovné podmienky:

- $f(0) = 1$
- $\lim\limits_{a\to 0_+} f'(a) = 0$
- $f \in C^2(0,\infty)$
- $\lim_{a\to 0_+} f''(a) = 0$
- $f\left(-\frac{a}{2}\right) = 2f'(a) + 2\cos(a) - f\left(\frac{a}{2}\right)$

Poznámky:

Ako príklad uvedieme tri funkcie, ktoré sme analyzovali v R a zisťovali sme, prečo (ne)vyhovujú riešeniu.



Obr. 5: Tri funkcie z R studio

Na ľavom obrázku je vykreslená funkcia $x^2 + \sin(x)$, ktorá ako vidíme sa nespráva tak, ako by sme chceli (požadovali), pretože $f(0) \neq 1$.
Na strednom obrázku možno vidieť funkciu $x^2 + \sin(x) + 1 - x$, ktorá taktiež nevyhovuje, pretože $f''(0) \neq 0$. Kvôli tomuto funkcia nie je C^2 hladká.
Napokon, funkcia $1 + x - \sin(x)$ sa ukázala ako vhodná, pretože spĺňa všetky podmienky, čo je vidno aj na pravom obrázku.

Predstavme si, že zabudneme na obmedzenie pre a, respektíve nech $a \in \mathbb{R}$. Vyčíslujme postupne derivácie v bode 0. Uvidíme, že sa nám strieda séria $\{0, -1, 0, 1\}$ od $n = 2$. Vďaka tomuto cyklu vieme rekurentne vyjadriť vzťah, pre n-tú deriváciu v bode 0. Rekurzia nás povedie k nasledujúcej diferenčnej rovnici vyjadrujúcej vzťah pre n-tú deriváciu

$$x(n) = x(n-1) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} n\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} n\right)$$

3.3 Integrálna nerovnosť

Tento príklad je zo súťaže Putnam, z roku 2003/B6.

Nech $f(x)$ je spojitá funkcia definovaná na intervale $[0, 1]$. Ukážte, že

$$\int_0^1 \int_0^1 \mid f(x) + f(y) \mid dxdy \geq \int_0^1 \mid f(x) \mid dx$$

Riešenie 1:

Idea postupu vychádza z riešenia uvedeného na diskusnom fóre o matematických súťažiach [2], ktorého rozšírením a detailnejším vysvetlením bolo zostavené toto riešenie.

Zadefinujme si dve podmnožiny intervalu $[0, 1]$.

$$\begin{aligned} M &:= \{x \in [0,1] | f(x) \geq 0\} \\ M^c &:= \{x \in [0,1] | f(x) < 0\} \end{aligned}$$

Pre funkciu f platí, že $f^+(x) = \max(f(x), 0)$ a $f^-(x) = \max(-f(x), 0)$. Z toho vyplýva, že $f = f^+ - f^-$ a $|f| = f^+ + f^-$. Navyše $f^+ = 0$ na celej množine M^c, rovnako ako $f^- = 0$ na M.

Z poznatkov o merateľnosti množín vieme, že

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 |f(x) + f(y)| dxdy &= \int_M \int_M |f(x) + f(y)| dxdy + \int_M \int_{M^c} |f(x) + f(y)| dxdy \\ &+ \int_{M^c} \int_M |f(x) + f(y)| dxdy + \int_{M^c} \int_{M^c} |f(x) + f(y)| dxdy \end{aligned}$$

Kedže integrál z konštanty je miera množiny cez ktorú sa integruje: $\int_M c \cdot dM = c \cdot \mid M \mid$ a keďže je funkcia na množine M nezáporná, tak

$$\begin{aligned} \int_M \int_M |f(x) + f(y)| dxdy &= \int_M \int_M (f(x) + f(y)) dxdy \\ &= |M| \int_M f(x) dx + |M| \int_M f(y) dy \\ &= 2|M| \int_M f^+(x) dx \end{aligned}$$

kde $|M|$ je miera množiny M. Analogicky

$$\int_{M^c} \int_{M^c} |f(x) + f(y)| dxdy = 2|M^c| \int_{M^c} f^-(x) dx$$

Na základe uvedených faktov si vieme zdola ohraničiť integrál $\int_M \int_{M^c} |f(x)+f(y)|dxdy$. Platí

$$\begin{aligned}
\int_M \int_{M^c} |f(x)+f(y)|dxdy &= \int_M \int_{M^c} |f^+(x)-f^-(y)|dxdy \\
&\geq \left| \int_M \int_{M^c} f^+(x)-f^-(y) \quad dxdy \right| \\
&= \left| |M^c| \int_M f^+(x)dx - |M| \int_{M^c} f^-(y)dy \right|
\end{aligned}$$

Položme teraz $J = \int_M f^+(x)dx$, $H = \int_{M^c} f^-(y)dy$ a $I = \int_0^1 \int_0^1 |f(x)+f(y)|dxdy$. Zistili sme, že

$$I \leq 2|M|J + 2|M^c|H + 2|(|M^c|J - |M|H)|$$

Po umocnení na druhú máme:

$$\begin{aligned}
I^2 &\geq [(2|M|J + 2|M^c|H) + (2|(|M^c|J - |M|H)|)]^2 \\
I^2 &\geq 4|M|^2J^2 + 8|M||M^c|JH + 4|M^c|^2H^2 + 4|M||M^c|J^2 + 4|M^c|^2JH - \\
&- 4|M|^2JH - 4|M||M^c|H^2 + 4|M^c|^2J^2 - 8|M^c||M|JH + 4|M|^2H^2 \\
&\geq 4[|M|^2J^2 + |M^c|^2H^2 + |M^c|^2J^2 + |M|^2H^2] \\
&\geq 4(|M|^2 + |M^c|^2)(J^2 + H^2)
\end{aligned}$$

Vďaka tomu, že $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ platí, že $2(|M|^2 + |M^c|^2) \geq (|M| + |M^c|)^2 = 1$. Taktiež platí, že $2(J^2+H^2) \geq (J+H)^2 = \left(\int_0^1 \mid f(x) \mid dx\right)^2$.

A teda sme dokázali, že

$$\int_0^1 \int_0^1 \mid f(x)+f(y) \mid dxdy = I \geq 2 \cdot 1 \left(\sqrt{\int_0^1 \mid f(x) \mid dx} \right)^2 \geq \int_0^1 \mid f(x) \mid dx \quad \blacksquare$$

Riešenie 2:

Idea postupu vychádza z riešenia uvedeného na diskusnom fóre o matematických súťažiach [2], ktorého rozšírením a detailnejším vysvetlením bolo zostavené toto riešenie.

Nech f je nezáporná na A a nezáporná na B. Potom

$$\begin{aligned}
4\int_A \int_B \min\{|f(x)|, |f(y)|\} &\leq 4\int_A \int_B \sqrt{|f(x)| \cdot |f(y)|} = 4\left(\int_A \sqrt{|f(x)|}\right)\left(\int_B \sqrt{|f(x)|}\right) \\
&\leq \left(\int_A \sqrt{|f(x)|} + \int_B \sqrt{|f(x)|}\right)^2 = \left(\int_0^1 \sqrt{|f(x)|}dx\right)^2 \leq \int_0^1 |f(x)|
\end{aligned}$$

To, že platí prvá nerovnosť, je zrejmé. Rovnosť by nastala, ak by sa $f(x)$ a $f(y)$ rovnali. Druhá nerovnosť vyplýva z toho, že pre všetky kladné a, b platí, že $4\sqrt{a}\sqrt{b} \leq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$, čo je ekvivalentné s $0 \leq (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$.

Teda dostávame

$$2\int_A\int_B |f(x) + f(y)| \geq 2\int_A\int_B (|f(x)| + |f(y)| - 2\min\{|f(x)|, |f(y)|\}) \geq \tag{22}$$

$$\geq 2\int_A\int_B (|f(x)| + |f(y)|) - \int_0^1 |f(x)| = \tag{23}$$

$$= 2|B|\int_A |f(x)| + 2|A|\int_B |f(x)| - \int_0^1 |f(x)| \tag{24}$$

Rovnosť (24) platí na základe aditivity integrálu a nerovnosť (23) sme si dokázali vyššie. Prvá nerovnosť (22) platí na základe nasledovnej úvahy:

Vieme, že pre ľubovoľné a, b platí vzťah $min\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b) - \frac{1}{2} \mid a - b \mid$. Preto platí aj:

$$\begin{aligned} \min\{\mid x \mid, \mid y \mid\} &= \frac{1}{2}(\mid x \mid + \mid y \mid) - \frac{1}{2} \mid\mid x \mid - \mid y \mid\mid \\ 2\min\{\mid x \mid, \mid y \mid\} &= \mid x \mid + \mid y \mid - \mid\mid x \mid - \mid y \mid\mid \\ \mid\mid x \mid - \mid y \mid\mid &= \mid x \mid + \mid y \mid - 2\min\{\mid x \mid, \mid y \mid\} \end{aligned}$$

Keďže $\mid\mid x \mid + \mid y \mid\mid \geq \mid\mid x \mid - \mid y \mid\mid$, tak platí aj (22).

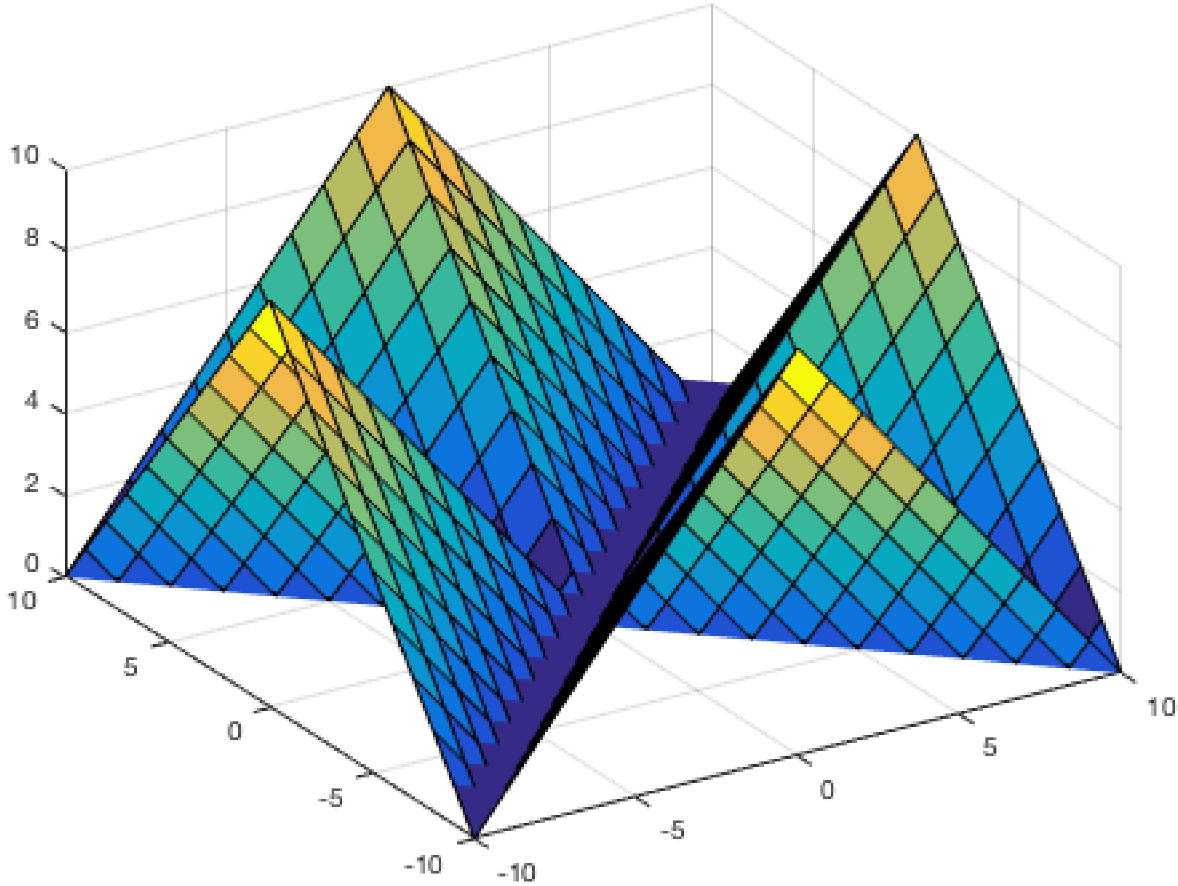
Napokon

$$\int_A\int_A |f(x) + f(y)| + \int_B\int_B |f(x) + f(y)| = 2|A|\int_A |f(x)| + 2|B|\int_B |f(x)|$$

Tým pádom je nerovnosť dokázaná, berúc do uváhy, že $|A| + |B| = 1$. ■

Poznámka:

V riešení sme narazili na $\mid\mid x \mid - \mid y \mid\mid$. Predstavme si to ako funkciu a vykreslime pomocou MatLabu, ako bude funkcia vyzerať.



Obr. 6: $F :=|| x | - | y ||$

3.4 Nerovnosť a vhodná substitúcia

Tento príklad je zo súťaže IMC, z roku 2014/5, druhého hracieho dňa.

Dokážte:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{dxdy}{x^{-1} + | \ln y | -1} \leq 1$$

Pred riešením 1 príkladu je potrebné vysloviť vetu o nerovnosti dokazovanej pomocou derivácie.

Veta: [O dokazovaní nerovnosti pomocou derivácie]

Nech $f, g : I \to \mathbb{R}$ sú spojité a diferencovateľné funkcie na celom intervale I. Nech pre $a \in I$ platí, že $f(a) = g(a)$ a nech pre všetky $x \in I$: $f'(x) > g'(x)$. Potom (podľa [11])

$$\begin{aligned} f(x) &> g(x), \forall x > a \\ f(x) &< g(x), \forall x < a \end{aligned}$$

Riešenie 1:

Idea postupu vychádza z riešenia uvedeného na stránke súťaže [8], ktorého rozšírením a detailnejším vysvetlením bolo zostavené toto riešenie.

Najskôr si zoberme nerovnosť:

$$x^{-1} - 1 \geq |\ln(x)|, \quad x \in (0, 1] \tag{25}$$

Nerovnosť dokážeme pomocou derivácie. Dosadíme krajný bod a pozorujeme, či v ňom nastane rovnosť:

$$\begin{aligned} (x^{-1} - 1)|_{x=1} &= |\ln(x)||_{x=1} = 0 \\ (x^{-1} - 1)' = -\frac{1}{x^2} &\leq -\frac{1}{x} = |\ln(x)|', \quad x \in (0, 1] \end{aligned}$$

Pomocou vety o nerovnosti dokazovanej deriváciou sme dokázali (25) a vieme integrál zo zadania zhora ohraničiť. A teda platí:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{dxdy}{x^{-1} + |\ln(y)| - 1} \leq \int_0^1 \int_0^1 \frac{dxdy}{|\ln(x)| + |\ln(y)|} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{dxdy}{|\ln(xy)|}$$

Následne použijeme vhodnú substitúciu $y = \frac{u}{x}$, aby sa výraz vykrátil:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{dxdy}{|\ln(xy)|} = \int_0^1 \left(\int_u^1 \frac{dx}{x} \right) \frac{du}{|\ln(u)|} = \int_0^1 |\ln(u)|.\frac{du}{|\ln(u)|} = 1 \quad \blacksquare$$

Riešenie 2:

Idea postupu vychádza z riešenia uvedeného na stránke súťaže [8], ktorého rozšírením a detailnejším vysvetlením bolo zostavené toto riešenie.

Použijeme substitúciu $s = x^{-1}$ a $u = s - \ln y$.

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{dxdy}{x^{-1} + \mid lny \mid -1} = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{s-u}}{(s+1)^2 u} duds = \int_0^\infty \left(\int_0^u \frac{e^s}{(s+1)^2} ds \right) du$$

Keďže funkcia $\frac{e^s}{(s+1)^2}$ je konvexná, tak platí, že každý bod na grafe funkcie je pod úsečkou, ktorá spája body $[0, f(0)], [u, f(u)]$. Preto je integrál v (26) menší, ako plocha lichobežníka s vrcholmi $[0, 0], [u, 0], [0, f(0)]$ a $[u, f(u)]$.

$$\int_0^u \frac{e^s}{(s+1)^2} ds \leq \frac{u}{2}\left(\frac{e^u}{(u+1)^2} + 1\right) \tag{26}$$

Ak využijeme vzorec pre výpočet obsahu lichobežníka $S = \frac{(a+c)}{2}v$, tak dostávame pravú stranu nerovnosti (26).

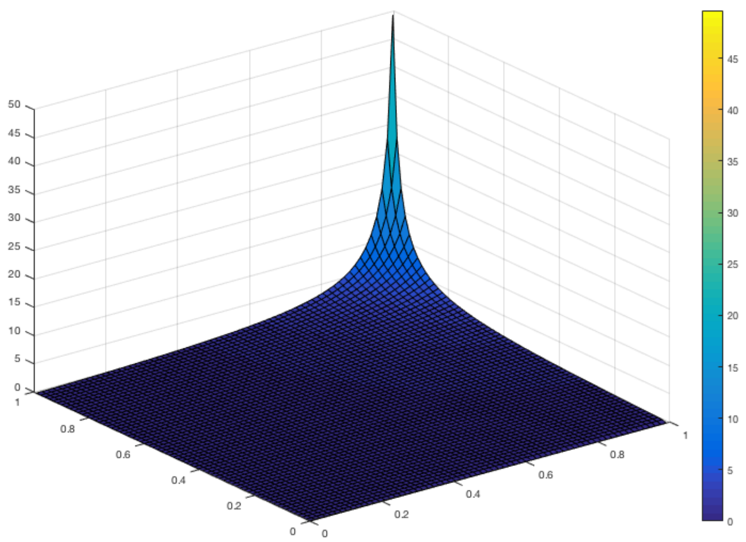
Preto platí:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{dxdy}{|\ln(xy)|} \leq \int_0^\infty \frac{u}{2}\left(\frac{e^u}{(u+1)^2} + 1\right)\frac{e^{-u}}{u} du = \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty \frac{du}{(u+1)^2} + \int_0^\infty e^{-u} du\right) = 1$$

Týmto je tvrdenie dokázané. ■

Poznámky:

Takto vyzerá funkcia, ktorú itegrujeme:



Obr. 7: Funkcia $\frac{dxdy}{x^{-1}+|\ln y|-1}$

Všimnime si, že v bode $[1, 1]$ je funkcia zhora neohraničená, čo vyplýva z dvojnásobnej limity, kde nám pre $x \to 1, y \to 1$ vznikne 0 v menovateli, čo „vystrelí“ celý zlomok do nekonečna.

4 Derivovanie integrálu podľa hornej hranice

Integrál nemusí mať vždy nutne číselné hranice, čo sme si všimli aj v predošlej kapitole. Niekedy sa stretávame s prípadmi, kedy sú hranice integrálu funcie. Vtedy označujeme integrál ako funkciu hornej (alebo dolnej) medze (t.j. hranice).
Keďže v takomto prípade ide o „normálnu“ funkciu, môžeme sa tak za predpokladu splnenia určitých podmienok k integrálu aj správať. To znamená, že ho môžeme aj derivovať, čo si priblížime v tejto kapitole.

Teória

Veta: [Prvá veta o strednej hodnote integrálneho počtu]
Nech $m, M \in \mathbb{R}, a < b$. Nech funkcie f, g majú integrál od a po b. Nech je $f(x) \geq 0$, $m \leq g(x) \leq M$ pre $\forall x \in [a, b]$. Potom (podľa [9]) platí

$$m \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b f(x)dx \tag{27}$$

Veta: [Druhá veta o strednej hodnote integrálneho počtu]
Nech $a < b$ a nech f je reálna funkcia, ktorá má integrál od a po b. Nech g je reálna, monotónna funkcia na $[a, b]$. Potom existuje číslo ζ také, že (podľa [9]) platí

$$a \leq \zeta \leq b, \quad \int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\zeta f(x)dx + g(b)\int_\zeta^b f(x)dx$$

Tvrdenie: Nech $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkcia, funkcie φ, ψ sú diferencovateľné na intervale I a nech $\varphi(I) \subset [c, d], \psi(I) \subset [c, d]$. Potom funkcia $G : I \to \mathbb{R}$ daná predpisom

$$G(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt$$

je diferencovateľná na I a podľa ([13]) platí:

$$G'(x) = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\varphi(x))\varphi'(x)$$

Tvrdenie: Nech $F(y)$ je spojitá funkcia na uzavretom intervale definovaná ako

$$F(y) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y,)dx$$

kde $\varphi(x), \psi(x)$ sú diferencovateľné na danom intervale. Potom platí [11]:

$$F'(y) = f(\psi(y), y) \cdot \psi'(y) - f(\varphi(y), y) \cdot \varphi'(y) + \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx$$

Tvrdenie: Ak je krivka C grafom funkcie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, ktorá má spojitú deriváciu, tak $s(C) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$, čo vyplýva z parametrizácie grafu: $x = t, y = f(t), t \in [a, b]$. [12]

Ilustračný príklad: (Podľa [13]) Nájdite lokálne extrémy a inflexné body funkcie:

$$F(t) = \int_0^x (t-1)(t-2)^2 dt$$

Riešenie: Funkciu si zderivujeme podľa hornej medze:

$$F'(t) = (x-1)(x-2)^2$$

Ak položíme deriváciu rovnú nule, dostávame body, v ktorých funkcia nadobúda lokálne extrémy: $\{1, 2\}$. Vidíme, že funkcia je a intervale $[0, 1]$ klesajúca, a na intervale $[1, \infty]$ rastúca. Teda funkcia nemá v bode $\{2\}$ maximum, ale nadobúda svoje (globálne) minimum v $\{1\}$, kedy je funkčná hodnota $-\frac{17}{12}$.
Inflexné body zistíme pomocou druhej derivácie:

$$F''(t) = (x-2)^2 + 2(x-1)(x-2) = 3(x-2)\left(x - \frac{4}{3}\right)$$

Teda vidíme, že inflexné body sú $\{\frac{4}{3}, 2\}$.

4.1 Príklad starší ako ja

Tento príklad je zo súťaže Putnam 1990/B1.

Nájdite všetky spojite diferencovateľné funkcie f na reálnej osi spĺňajúce podmienky pre všetky x

$$(f(x))^2 = \int_0^x [(f(t))^2 + (f'(t))^2] dt + 1990$$

Riešenie:

Idea postupu vychádza z riešenia uvedeného v [10], ktorého rozšírením a detailnejším vysvetlením bolo zostavené toto riešenie.

Ľavá a pravá strana sa rovnajú vtedy a len vtedy, ak sa rovnajú aj v nule, čiže $f(0)^2 = 1990$ a ich derivácie sa taktiež rovnajú. Čiže pre všetky x platí:

$$2(fx)f'(x) = (f(x))^2 + (f'(x))^2 \tag{28}$$

Podľa (28) platí, že $(f(x) - f'(x))^2 = 0$, z čoho vyplýva, že $f'(x) = f(x)$. Preto $f(x) = ce^x$, pre nejakú konštantu c. Lenže $f^2(0) = 1990$ a teda $c = \pm\sqrt{1990}$, čiže všetky hľadané funkcie sú:

- $f_1(x) = \sqrt{1990}e^x$
- $f_2(x) = -\sqrt{1990}e^x$

4.2 Čo nám povie krivka

Tento príklad je zo súťaže IMC 2004/2, druhého hracieho dňa.

Majme funkcie $f, g : [a, b] \to [0, \infty]$, ktoré sú spojité, neklesajúce a pre všetky $x \in [a, b]$ platí $\int_a^x \sqrt{f(t)dt} \leq \int_a^x \sqrt{g(t)dt}$ a $\int_a^b \sqrt{f(t)dt} = \int_a^b \sqrt{g(t)dt}$. Chceme dokázať, že:

$$\int_a^b \sqrt{1 + f(t)dt} \geq \int_a^b \sqrt{1 + g(t)dt} \tag{29}$$

Riešenie:

Idea postupu vychádza z riešenia uvedeného v [20], ktorého rozšírením a detailnejším vysvetlením bolo zostavené toto riešenie.

Nech $F(x) = \int_a^x \sqrt{f(t)}dt$ a $G(x) = \int_a^x \sqrt{g(t)}dt$.
F a G sú konvexné, $F(a) = G(a) = 0$ a $F(b) = G(b)$. A teda chceme dokázať, že platí:

$$\int_a^b \sqrt{1 + (F'(t))^2 dt} \geq \int_a^b \sqrt{1 + (G'(t))^2 dt} \tag{30}$$

Uvažujme teraz funkciu $h(r) := \sqrt{1 + r^2}, r \in \mathbb{R}$. Keďže h je konvexná, tak pre všetky $r, s \in \mathbb{R}$ platí

$$h(r) \geq h(s) + (r - s)h'(s)$$

Nech $r = F'(t), s = G'(t)$. Teda, pre všetky $t \in [a, b]$:

$$h(F'(t)) \geq h(G'(t)) + [F'(t) - G'(t)]h'(G'(t))$$

Z čoho vyplýva, že

$$\int_a^b \sqrt{1 + (F'(t))^2 dt} \geq \int_a^b \sqrt{1 + (G'(t))^2 dt} + \int_a^b [F'(t) - G'(t)]h'(G'(t))dt$$

Ak ukážeme, že $\int_a^b [F'(t) - G'(t)]h'(G'(t))dt$ je kladný, tak je jasné, že platí aj $\int_a^b \sqrt{1 + (F'(t))^2 dt} \geq \int_a^b \sqrt{1 + (G'(t))^2 dt}$. Takže je postačujúce dokázať nasledovnú nerovnosť:

$$\int_a^b [F'(t) - G'(t)]h'(G'(t))dt \geq 0$$

Podľa druhej vety o strednej hodnote pre Riemannove integrály existuje také $c \in [a, b]$, že

$$\int_a^b [F'(t) - G'(t)]h'(G'(t))dt = h'(G'(a)) \int_a^c (F'(t) - G'(t))dt + h'(G'(b)) \int_c^b (F'(t) - G'(t))dt$$

Keďže $F(a) = G(a)$ a $F(b) = G(b)$, tak dostávame:

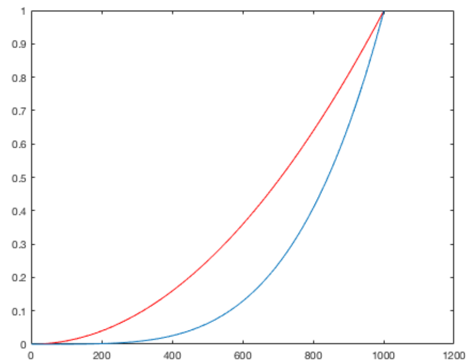
$$\begin{aligned} \int_a^b [F(x) - G(x)]h(G'(x))dx &= h'(G'(a))[F(c) - G(c)] + h'(G'(b))[F(b) - G(b)] \\ &= [F(c) - G(c)](h'(G'(a)) - h'(G'(b))) \end{aligned}$$

Uvedomme si, že výraz $[F(c) - G(c)]$, je záporný, pretože $F(x) \leq G(x)$. Výraz $(h'(G'(a)) - h'(G'(b)))$ je tiež záporný, pretože $h' \circ G'$ je neklesajúca. Tým je tvrdenie dokázané.

■

Poznámky:

Pre lepšiu ilustráciu riešeného problému, využijeme nasledovný obrázok:



Obr. 8: Dve konvexné funkcie

Keďže obe funkcie sú konvexné a začínajú, respektíve končia v tom istom bode, tak dĺžka grafu F je určite väčšia ako G. Je to zjavné - predstavme si, že obe krivky chceme natiahnúť tak, aby z nich vznikli priamky. Keďže funkcia $F(x) \leq G(x)$, tak z obrázku (Obr.8) vidíme, že modrú krivku (graf $F(x)$) by sme museli natiahnúť viac. Preto je dĺžka krivky $F(x)$ dlhšia. $\blacksquare$

4.3 Injektívnosť a obor hodnôt

Tento príklad je zo súťaže IMC 1995/4, druhého hracieho dňa.

Nech $F : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ je funkcia definovaná ako

$$F(x) := \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$$

Ukážte, že F je injektívna a nájdite jej obor hodnôt.

Riešenie:

Idea postupu vychádza z riešenia uvedeného na stránke súťaže [8], ktorého rozšírením a detailnejším vysvetlením bolo zostavené toto riešenie.

Z definície funkcie F máme

$$F'(x) = \frac{x-1}{\ln(x)}, \quad x > 1$$

Z toho vyplýva, že $F'(x) > 0$ pre $x \in (1, \infty)$. Čiže funkcia F je rastúca a preto injektívna. Keďže

$$F(x) \geq (x^2 - x)\min\left\{\frac{1}{\ln(t)} : x \leq t \leq x^2\right\} = \frac{x^2 - x}{\ln^2(x)} \to \infty$$

a keďže $x \to \infty$, vyplýva z toho to, že obor hodnôt F je $(F(1+), \infty)$. Musíme ešte prešetriť funkčnú hodnotu $F(1+)$. Pomôže nám substitúcia $t = e^v$ a teda z definície funkcie F dostávame

$$F(x) = \int_{ln(x)}^{2ln(x)} \frac{e^v}{v} dv$$

Uvedomíme si, že e^v je rastúca funkcia. Preto ak analyzujeme funkciu na $[\ln(x), 2\ln(x)]$, tak ju vďaka tomu, že $e^v < e^{2ln(x)}$ vieme ohraničiť nasledovne:

$$F(x) < e^{2\ln(x)} \int_{\ln(x)}^{2\ln(x)} \frac{1}{v} dv = x^2 \ln 2$$

Podobne

$$F(x) > e^{\ln(x)} \int_{\ln(x)}^{2\ln(x)} \frac{1}{v} dv = x \ln 2$$

Preto pre $\forall x > 1 : x\ln(2) < F(x) < x^2\ln(2)$. Ak urobíme limitu pre $x \to 1^+$, tak dostávame $\forall x > 1 : \ln(2) < F(1^+) < \ln(2)$. Z čoho vyplýva, že $F(1^+) = \ln 2$, čím sme zistili obor hodnôt: $(\ln(2), \infty)$

5 Nerovnosti

Pri riešení matematických problémov, či dôkazoch, sa často využívajú nerovnosti rôznych typov. Široké spektrum druhov nerovností ponúka variabilitu pri ich skúmaní a dokazovaní, ako napríklad dôkaz matematickou indukciou, pomocou derivácií, či pomocou platných, všeobecne známych nerovností. V nasledujúcich riadkoch si rozoberieme zopár zásadných nerovností v matematike, ktoré nám pomôžu pri riešení úloh.
Kapitola bola zaradená ako posledná, pretože vyžaduje komplexné znalosti vysokoškolskej matematiky a využíva vety, či tvrdenia, ktoré boli spomenuté v tejto práci v predošlých kapitolách. Navyše, zo subjektívneho pohľadu sú tieto príklady „najkrajšie", takže ako sa zvykne hovoriť - najlepšie na koniec.

Teória

- **Cauchy-Schwarzova nerovnosť**

  - Nech x, y sú vektory z $\mathbb{R}^n$ a nech $\langle x, y \rangle$ je skalárny súčin. Potom (podľa [7]) platí Cauchyho nerovnosť:

  $$| \langle x, y \rangle | \leq ||x|| \cdot ||y||$$

  kde $||x||$ je norma vektora x.

  Ak $x, y \in \mathbb{R}^n$, tak nerovnosť bude mať tvar

  $$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

- **Čebyševova nerovnosť**

  - Majme čísla $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ a $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$.

  Pre takto zoradené čísla (podľa [16]) platí:

  $$n(a_1 b_n + \cdots + a_n b_1) \leq (a_1 + \ldots a_n)(b_1 + \cdots + b_n) \leq n(a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n)$$

- **AP-GP nerovnosť**

  - Majme čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Nech AP je aritmetický priemer daných čísel, GP je geometrický priemer. Potom (podľa [14]) platí, že $AP \geq GP$, čo môžeme zapísať ako

  $$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq (x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}}$$

Ilustračný príklad: Chceli by sme zdola ohraničiť hyperbolický kosínus jednotkou, a teda chceme ukázať, že pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí, že $coshx \geq 1$.
Na prvý pohľad je to zdanlivo náročná úloha, avšak riešenie nám uľahčí AP-GP nerovnosť.

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 \cdot x_2}$$

Zoberme do úvahy, že $cosh(x)$ je definovaný ako $\frac{e^{-x}+e^x}{2}$, čo je aritmetický priemer dvoch čísel e^{-x}, e^x.
Geometrický priemer týchto čísel je $\sqrt{e^{-x}e^x} = \sqrt{e^0} = \sqrt{1} = 1$.
A teda sme naozaj dokázali hyperbolický kosínus ohraničiť zdola jednotkou.

5.1 Matematická indukcia je zdĺhavejšia

Tento príklad je zo súťaže Putnam 1996/B2.
Ukážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left(\frac{2n-1}{e}\right)^{\frac{2n-1}{2}} < 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) < \left(\frac{2n+1}{e}\right)^{\frac{2n+1}{2}}$$

Riešenie 1:
Dôkaz vykonáme pomocou matematickej indukcie. Najskôr dokážeme prvú nerovnosť a vzápätí druhú.
Poznámka: Niekedy, (obzvlášť pri výskyte mocnín a faktoriálov), pri dokazovaní tvrdenia použitím indukcie v tvare $a_n < b_n$, vykonáme jej druhý krok - teda odvodenie $a_{n+1} < b_{n+1}$ z $a_n < b_n$ - často tak, že sa dokáže nerovnosť $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Keďže $0 < a_n$ a $0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{b_{n+1}}{b_n}$ platí, že $a_{n+1} < b_{n+1}$ (pretože ak $0 < x < y$ a $0 < c \leq d$, tak aj $0 < xc < yd$.)
Prvá nerovnosť:
1°) $n = 1$

$$\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{2}} < 1$$

Výraz na ľavej strane je približne rovný 0,6065, a teda pre $n = 1$ je nerovnosť splnená.

2°) $n = n + 1$

Nech ľavá nerovnosť platí - indukčný predpoklad. Využijeme postup pomocou pomeru po sebe idúcich členov (viď. poznámka).

$$
\begin{aligned}
\frac{\left(\frac{2n+1}{e}\right)^{\frac{2n+1}{2}}}{\left(\frac{2n-1}{e}\right)^{\frac{2n-1}{2}}} &< \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \cdot (2n+1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} \\
\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{2n+1}{2}} (2n+1)^{\frac{2n+1}{2}} &< (2n+1)(2n-1)^{\frac{2n-1}{2}} \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{2n-1}{2}} \\
\left(\frac{1}{e}\right) (2n+1)^{\frac{2n-1}{2}} &< (2n-1)^{\frac{2n-1}{2}} \\
\left(\frac{1}{e}\right) &< \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{\frac{2n-1}{2}} \\
\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^{\frac{2n-1}{2}} &< e
\end{aligned}
$$

Tu sa ponúka známy trik - pripočítanie a odpočítanie jednotky. A teda si výraz $(2n+1)$ prepíšeme ako $(2n - 1 + 2)$. Pomôže nám to kvôli tomu, že si môžeme zlomok $\frac{2n+1}{2n-1} = \frac{2n-1+2}{2n-1}$ upraviť do výhodnejšieho tvaru $1 + \frac{2}{2n-1}$.
A teda sme dospeli k finálnej nerovnosti:

$$\left(1 + \frac{2}{2n-1}\right)^{\frac{2n-1}{2}} < e$$

Vieme, že eulerove číslo je definované ako $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. Funkcia $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ však okolo čísla e neosciuluje, ale do neho rastie. Preto môžeme tvrdiť, že posledná nerovnosť celkom určite platí.
Druhá nerovnosť:

1°) $n = 1$

$$1 < \left(\frac{3}{e}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Výraz na pravej strane je približne rovný 1,1594, a teda pre $n = 1$ je nerovnosť splnená.

2°) $n = n + 1$

Nech pravá nerovnosť platí - indukčný predpoklad. Využijeme rovnaký postup.

$$
\begin{aligned}
\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\cdot(2n+1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)} &< \frac{\left(\frac{2n+3}{e}\right)^{\frac{2n+3}{2}}}{\left(\frac{2n+1}{e}\right)^{\frac{2n+1}{2}}}\\
\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{2n+1}{2}}(2n+1)^{\frac{2n+1}{2}}(2n+1) &< \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{2n+3}{2}}(2n+3)^{\frac{2n+3}{2}}\\
(2n+1)^{\frac{2n+3}{2}} &< \left(\frac{1}{e}\right)(2n+3)^{\frac{2n+3}{2}}\\
e &< \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{\frac{2n+3}{2}}
\end{aligned}
$$

Použijeme opäť podobný trik, avšak v tomto prípade to bude o niečo náročnejšie. Výraz $\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$ prepíšeme ako $\left(\frac{2n+1+2}{2n+1}\right)$ a následne ako $\left(1+\frac{2}{2n+1}\right)$. Takisto aj exponent bude treba si rozpísať: $\frac{2n+3}{2} = \frac{2n+1+2}{2} = \left(\frac{2n+1}{2}+1\right)$

$$\left(1+\frac{2}{2n+1}\right)^{\frac{2n+1}{2}}\cdot\left(1+\frac{2}{2n+1}\right) > e$$

Najskôr zistíme, čomu je rovná limita výrazu za predpokladu, že n pošleme do nekonečna.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{2n+1}\right)^{\frac{2n+1}{2}}\cdot\left(1+\frac{2}{2n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} e\cdot\left(1+\frac{2}{2n+1}\right) = e\cdot 1 = e$$

Ešte musíme overiť, či funkcia do e klesá. Ak áno, tak nerovnosť je dokázaná. Zoberme si teda výraz $\frac{2n+3}{2} = \frac{2n+1+2}{2}$ a zaveďme substitúciu $t = 2n+1$. Chceme teda dokázať, že funkcia

$$f(t) = \left(1+\frac{2}{t}\right)^{\frac{t+2}{2}} = e^{\left(\frac{t+2}{2}\cdot ln\left(1+\frac{2}{t}\right)\right)} \tag{31}$$

je klesajúca. Preto ju zderivujme a ukážme, že derivácia je záporná.

$$f'(t) = e^{\left(\frac{t+2}{2}\cdot ln\left(1+\frac{2}{t}\right)\right)}\cdot\left[\frac{1}{2}ln(1+\frac{2}{x})-\frac{1}{x}\right] \tag{32}$$

Číslo e umocnené na hocičo je určite kladné číslo, ostáva nám prešetriť zátvorku, ktorá by mala byť záporná. Chceme teda dokázať, že

$$ln\left(\frac{x+2}{x}\right) < \frac{2}{x} \tag{33}$$

čo môžeme prepísať ako

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x} &< e^{\frac{2}{x}} \\ \left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{\frac{2}{x}} &< e^{\frac{2}{x}} \end{aligned}$$

Uvedomíme si, že výraz v hranatej zátvorke je menší ako číslo e, čo sme ukázali v prvej časti nerovnosti. Preto platí posledná nerovnosť a tým je príklad ukončený. ■

Riešenie 2:

Riešenie bolo prevzaté z [10].

Odhadnutím plochy pod grafom funkcie $ln(x)$ použitím horných a dolných integrálnych súčtov a z toho, že logaritmus je rastúca funkcia dostávame:

$$\int_1^{2n-1} ln(x)dx < 2(ln(3) + \cdots + ln(2n-1)) < \int_3^{2n+1} ln(x)dx \tag{34}$$

Keďže $\int ln(x)dx = xln(x) - x + C$, exponovaním a odcmocnením dvoch stredných nerovností dostávame

$$\begin{aligned} \left(\frac{2n-1}{e}\right)^{\frac{2n-1}{2}} &< (2n-1)^{\frac{2n-1}{2}} e^{-n+1} \\ &\leq 1 \cdot 3 \cdots (2n-1) \\ &\leq (2n+1)^{\frac{2n+1}{2}} \frac{e^{-n+1}}{3^{\frac{3}{2}}} < \left(\frac{2n+1}{e}\right)^{\frac{2n+1}{2}} \end{aligned}$$

pričom posledné nerovnosti vyplývajú z $1 < e < 3$.

5.2 Odmocniny a Čebyšev

Tento príklad je zo súťaže Vojtěch Jarník 2002/3 - I.kategórie.

Kladné čísla $x_1, ..., x_n$ spĺňajú

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \cdots + \frac{1}{1+x_n} = 1$$

Potom dokážte, že

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \cdots + \sqrt{x_n} \geq (n-1)\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)$$

Riešenie:

Idea postupu vychádza z riešenia uvedeného na stránke súťaže [6], ktorého rozšírením a detailnejším vysvetlením bolo zostavené toto riešenie.

$$\begin{aligned}
\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n} &\geq (n-1)\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}+\frac{1}{\sqrt{x_2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{x_n}}\right) \\
\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n} &\geq n\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}+\frac{1}{\sqrt{x_2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}+\frac{1}{\sqrt{x_2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{x_n}}\right) \\
n\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}+\frac{1}{\sqrt{x_2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{x_n}}\right) &\leq \left(\sqrt{x_1}+\frac{1}{\sqrt{x_1}}\right)\left(\sqrt{x_2}+\frac{1}{\sqrt{x_2}}\right)+\cdots+\left(\sqrt{x_n}+\frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)
\end{aligned}$$

Teraz poďme analyzovať funkciu $f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$. Jej derivovaním podľa x dostávame $f'(x)=\frac{(x-1)\sqrt{x}}{2x^2}$. Po zistení, že $\operatorname{argmin}_{x|f(x)}=1$ ľahko overíme, že funkcia je na $[1,\infty)$ neklesajúca.

Poznámka: Všimnime si, že $f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$

Poznámka: Taktiež platí, že jedine $x_1<1$.

Druhá poznámka platí na základe nasledovnej úvahy: Nech teda $x_1<1$. Z toho vyplýva, že $1+x_1<2$, respektíve $\frac{1}{1+x_1}>\frac{1}{2}$. Lenže ak by bolo aj $x_2<1$, tak by platilo aj $\frac{1}{1+x_2}>\frac{1}{2}$. Čo je však spor s predpokladom, že $\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}=1$.

Späť k riešeniu. Kedže sme zistili, že funkcia $f(x)$ je rastúca, tak vieme, že platí

$$f(x_1)\leq f(x_2)\leq\cdots\leq f(x_n)$$

Na tomto mieste sa odvoláme na Čebyševovu nerovnosť, uvedenú na začiatku kapitoly. Pravú stranu nerovnosti prenásobíme jednotkou v tvare podmienky zo zadania.

$$n\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{x_n}}\right) \leq \left[\left(\sqrt{x_1}+\frac{1}{\sqrt{x_1}}\right)+\cdots+\left(\sqrt{x_n}+\frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)\right]\left(\frac{1}{1+x_1}+\cdots+\frac{1}{1+x_n}\right)$$

Ľavá časť Čebyševovej nerovnosti:

$$n(a_1b_n+\cdots+a_nb_1)\leq(a_1+\ldots a_n)(b_1+\cdots+b_n)$$

Na základe nerovnosti vyhlásime výraz $\frac{1}{\sqrt{x_1}}$ za „a_1“, pričom $\frac{1}{x_1+1}$ bude „naše b_n“, pretože je najväčšie (platí druhá poznámka).

Finále je, že člen „a_1b_n“ sa rovná $\left(\sqrt{x_1}+\frac{1}{\sqrt{x_1}}\right)\left(\frac{1}{x_1+1}\right)=\frac{1}{\sqrt{x_1}}$.

Tým je nerovnosť zo zadania dokázaná. ■

5.3 Integrálna nerovnosť II.

Tento príklad je zo súťaže Putnam 2004/A6.

Nech $f(x,y)$ je spojitá funkcia na jednotkovom štvorci

$0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$. Treba ukázať, že

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dx\right)^2 dy + \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dy\right)^2 dx \le \left(\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dxdy\right)^2 + \int_0^1 \int_0^1 [f(x,y)]^2 dxdy$$

Riešenie:

Idea postupu vychádza z riešenia uvedeného na diskusnom fóre o matematických súťažiach [2], ktorého rozšírením a detailnejším vysvetlením bolo zostavené toto riešenie.

Ukáže sa, že pomôže prepísať si integrály na štvornásobné. Použijeme poznatok, že integrál nezávisí od integračnej premennej.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dy\right)^2 dx = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)f(x,v)dxdydudv \\
I_2 &= \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dx\right)^2 dy = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)f(u,y)dxdydudv \\
I_3 &= \left(\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dxdy\right)^2 = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)f(u,v)dxdydudv \\
I_4 &= \int_0^1 \int_0^1 [f(x,y)]^2 \, dxdy = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)f(x,y)dxdydudv
\end{aligned}$$

Chceme ukázať, že

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dxdy\right)^2 &+ \int_0^1 \int_0^1 [f(x,y)]^2 dxdy - \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dx\right)^2 dy \\
&+ \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dy\right)^2 dx \ge 0
\end{aligned}$$

Respektíve

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)f(u,v)dxdydudv + \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)f(x,y)dxdydudv & \; - \\
-\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)f(u,y)dxdydudv - \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)f(x,v)dxdydudv & \; \ge \; 0
\end{aligned}$$

Výjmeme si $f(x,y)$ a celý integrál označíme ako Ξ.

$$\Xi = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\left[f(u,v) + f(x,y) - f(u,y) - f(x,v)\right] dxdydudv$$

Opäť sa v príklade využije poznatok, že integrál nezávisí od integračnej premennej a postupne zameníme x, y za u, v.

$$\begin{aligned}
\Xi &= \int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(u,y)\left[f(x,v)+f(u,y)-f(x,y)-f(u,v)\right]dxdydudv\\
\Xi &= \int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x,v)\left[f(u,y)+f(x,v)-f(u,v)-f(x,y)\right]dxdydudv\\
\Xi &= \int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(u,v)\left[f(x,y)+f(u,v)-f(x,v)-f(u,y)\right]dxdydudv
\end{aligned}$$

Všetky štyri integrály následne sčítame

$$\begin{aligned}
4\Xi = \int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \quad & f(x,y)f(u,v) && +f(x,y)^2 - f(x,y)f(u,y) - f(x,y)f(x,v) + \\
& f(u,y)f(x,v) && +f(u,y)^2 - f(u,y)f(x,y) - f(u,y)f(u,v) + \\
& f(x,v)f(u,y) && +f(x,v)^2 - f(u,v)f(x,v) - f(x,y)f(x,v) + \\
& f(u,v)f(x,y) && +f(u,v)^2 - f(u,v)f(x,v) - f(u,y)f(u,v) \quad dxdydudv
\end{aligned}$$

A teda

$$\begin{aligned}
4\Xi = \int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x,y)^2 \quad & + \quad f(u,y)^2 + f(x,v)^2 + f(u,v)^2 + 2f(x,y)f(u,v) + \\
& + \quad 2f(u,y)f(x,v) - 2f(u,y)f(u,v) - 2f(x,y)f(x,v) \\
& - \quad 2f(x,y)f(u,y) - 2f(u,v)f(x,v)dxdydudv
\end{aligned}$$

z čoho vyplýva

$$4\Xi = \int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left[(f(x,y)-f(x,v)) + (f(u,v)-f(u,y))\right]^2 \quad dxdydudv$$

Keďže integrujeme výraz umocnený na druhú, tak hodnota integrálu Ξ je určite nezáporné číslo, čím sme dokázali požadovanú nerovnosť. ■

Poznámky:

Rovnosť nástáva práve vtedy, keď vieme napísať $f(x, y) = g(x) + h(y)$. [2]

5.4 Hranie sa so sumami

Tento príkald je zo súťaže IMC 2015/6, druhého hracieho dňa.

Chceme dokázať nasledovné:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)} < 2$$

Riešenie 1:

Idea postupu vychádza z riešenia uvedeného na stránke súťaže [8], ktorého rozšírením a detailnejším vysvetlením bolo zostavené toto riešenie.

Najskôr dokážeme, že

$$\frac{1}{\sqrt{n}(n+1)} < \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}}$$

Prenásobením $\sqrt{n}(n+1)$ dostávame ekvivalentnú nerovnosť

$$\begin{aligned} 1 &< 2(n+1) - 2\sqrt{n(n+1} \\ 2\sqrt{n(n+1} &< n + (n+1) \\ \sqrt{n(n+1)} &< \frac{n + (n+1)}{2} \end{aligned}$$

čo platí na základe AP-GP nerovnosti.

Tým pádom platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}}$$

Suma na pravej strane nerovnosti po rozpísaní dáva

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}} = \frac{2}{\sqrt{1}} - \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} - \dots,$$

kde posledné členy idú zjavne do nuly a ostatné sa navzájom „vybijú“. Zostáva nám prvý člen, ktorý je rovný 2. Tým je nerovnosť dokázaná. ■

Riešenie 2:

Idea postupu vychádza z riešenia uvedeného na stránke súťaže [8], ktorého rozšírením a detailnejším vysvetlením bolo zostavené toto riešenie.

Uvedomme si, že

$$\int_n^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} \leq \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Keďže integrálny súčet iba aproximuje integrál, čiže je od neho vždy menší, alebo rovný, tak platí, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)} < \frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \frac{1}{5\sqrt{4}} + \int_4^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \frac{1}{10} + \frac{2}{\sqrt{4}}$$

Vhodným porovnaním $3\sqrt{2} > 4$ a $4\sqrt{3} > \frac{20}{3}$ dostávame sumu menšiu ako $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{20} + \frac{1}{10} + 1 = 2$, čo bolo treba dokázať. ■

Záver

Cieľom bakalárkej práce bolo vyriešiť príklady z piatich kapitol: Lineárna algebra a geometria, Vety o strednej hodnote, Viacrozmerné integrovanie, Derivovanie integrálu podľa hornej hranice a Nerovnosti. Výber príkladov sme sa snažili urobiť pestrým, a teda príklady vrámci kapitoly využívajú vždy iné postupy a triky.

Na začiatku každej kapitoly sme uviedli vety a tvrdenia, ktoré boli relevantné pre riešenie príkladov z daného celku. Väčšinou išlo o všeobecne známe vety, ktoré sme mali spomenuté počas štúdia, avšak v niekoľkých prípadoch bolo nutné si dohľadať nové tvrdenia nad rámec osnov (Bolzanova veta, Čebyševova nerovnosť, atď.).

Pri riešení príkladov sme čerpali aj z internetových stránok súťaží ([19],[8][24]), kde sú zverejnené riešenia. Treba však povedať, že riešenia, uvedenené na stránkach, sú skorej akési návody a tzv. „hinty“, pretože vo všetkých prípadoch bolo nutné problematiku hlbšie pochopiť a riešenie rozviesť a upresniť.

Ciele práce sme splnili, pretože práca obsahuje jednak bohaté teoretické poznatky, ktoré je možné využiť pri učení na štátne skúšky, ako aj široké spektrum postupov riešení príkladov zo súťaží, v prípade, že by sa čitateľ chcel na nejakej zúčastniť. Navyše, lichotilo by nám, keby čo i len jeden príklad s riešením z tejto práce inšpiroval čitateľa - vyučujúceho k tomu, aby zaviedol príklad do svojej výučby, či už cvičenia, alebo prednášky. Vtedy bude splnený cieľ urobiť doplnok k výučbe do bodky.

Prínosom práce je zostavenie zbierky naozaj náročných, ale za to veľmi pekných príkladov, ktoré veríme, že oslovia každého čitateľa. Navyše, prínosom pre autora je prehĺbenie vedomostí z matematickej analýzy, či lineárnej algebry a geometrie, ako aj celkové zlepšenie matematického myslenia.

Ak sa čitateľ dostal až sem, tak mu za to ďakujeme a veríme, že ho práca oslovila.

Literatúra

[1] Adnes K., Professor Brewer: *The History of Rolle's Theorem*
(dostupné na internete 10.5.2018)
https://math.la.asu.edu/ nbrewer/fall2011/HonorsProjectsF11/KatieAndes.docx

[2] AoPS: Art of problem solving - Undergraduate contest
dostupné na internete (1.12.2017)
https://artofproblemsolving.com/community/c15_ undergraduate_ contests

[3] Besenyei A.: *A brief history of mean value theorem*
(dostupné na internete 10.5.2018)
http://abesenyei.web.elte.hu/publications/meanvalue.pdf

[4] Čižmár J.: *Dejiny matematiky*, Perfekt, Bratislava, 2017

[5] Filo J., Rostás K.: $2^2 \times 13$ *prednášok z matematickej analýzy*, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave, 2016

[6] Generalizations of the Lagrange mean value theorem and applications, Faculty of Sciences and Mathematics, University of Niš, Serbia
dostupné na internete (19.4.2018)
http://www.pmf.ni.ac.rs/filomat

[7] Hamala M., Trnovská M.: *Nelineárne programovanie*, epos, Bratislava, 2013

[8] IMC: International mathematics competition for univesity students,
dostupné na internete (1.11.2017)
http://www.imc-math.org.uk/index.php?year=2017& item=problems

[9] Jarník V.: *Integrální počet I.*, ČSAV, Praha, 1956

[10] Kedlaya K.S., Poonen B., Vakil R.: *The William Lowell Putnam Mathematical Competition 1985-2000*, The Mathematical Association of America, Washington, 2002

[11] Kollár M.: Matematická analýza I.,II., prednášky, FMFI UK, Bratislava, 2015/2016

[12] Kollár M., Kossaczká Ľ., Ševčovič D.: *Diferenciálny a integrálny počet funkcií viac premenných v príkladoch*, Knižničné a edičné centrum FMFI UK, 2012

[13] Kubáček Z., Valášek J.: *Cvičenia z matematickej analýzy I.,II.*, Univerzita Komenského, Bratislava 1996

[14] Larson L.C.: *Metódy riešenia matematických problémov*, Alfa, Bratislava,1990

[15] Mathematics: Discusions about mathematics,
dostupné na internete (1.12.2017)
https://math.stackexchange.com/questions/663181/my-proof-of-bolzanos-theorem

[16] Mathworld: Wolfram
dostupné na internete (3.5.2018)
http://mathworld.wolfram.com/PappussCentroidTheorem.html
http://mathworld.wolfram.com/DiagonalizableMatrix.html
http://mathworld.wolfram.com/ChebyshevSumInequality.html

[17] Monroecc: Monroe Community College
dostupné na internete (2.2.2018)
http://web.monroecc.edu

[18] Pešková I.: *Historie a současnost integrálu*, bakalárska práca, Masarykova univerzita, 2013
dostupné na internete (2.2.2018):
https://theses.cz/id/huhgxd/00171494-360642659.pdf

[19] Putnam archive: Putnam solutions by Kiran Kedlaya,
dostupné na internete (1.11.2017)
http://kskedlaya.org/putnam-archive/

[20] Radulescu T.T., Radulescu V.D., Andreescu T.: *Problems in real analysis: Advanced calculus on the real axis*, Springer,New York, 2009

[21] Riedel T., Sahoo P.K.: *Mean Value Theorems and Functional Equations*, World Scientific, 1998

[22] Strang G.: *Linear algebra and its applications*, Thomson Learning, 2006

[23] The on-line encyclopedia of integer sequences
dostupné na internete (4.4.2018)
https://oeis.org/A062801

[24] VJ-imc: Vojtěch Jarník international mathematics competition,
dostupné na internete (1.11.2017)
http://vjimc.osu.cz/history.html

[25] Wikipedia: Free encyclopedia
dostupné na internete (3.3.2018)
https://en.wikipedia.org/wiki/Torus

[26] Zlatoš P.: *Lineárna algebra a geometria*, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave, 2011