UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

ČO TREBA VEDIEŤ Z PRAVDEPODOBNOSTI NA PRACOVNOM POHOVORE NA WALL STREET I

BAKALÁRSKA PRÁCA

2017 Kristína KATRÁKOVÁ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

ČO TREBA VEDIEŤ Z PRAVDEPODOBNOSTI NA PRACOVNOM POHOVORE NA WALL STREET I

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program:	Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor:	1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	doc. RNDr. Beáta Stehlíková, PhD.

Bratislava 2017

Kristína KATRÁKOVÁ

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

14419899

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta:	Kristína Katráková
Študijný program:	ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor:	aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce:	bakalárska
Jazyk záverečnej práce:	slovenský
Sekundárny jazyk:	anglický

Názov: Čo treba vedieť z pravdepodobnosti na pracovnom pohovore na Wall Street I
What one needs to know on a job interview at Wall Street I

Anotácia: Jednotlivé kapitoly práce sú založené na príkladoch z kapitoly o pravdepodobnosti v knihe „Quant Job Interview: Questions and Answers“:
(1) Hádzanie mincou – pr. 5
(2) Výpočet strednej hodnoty a disperzie – pr. 6, 13, 37
(3) Príklady o ponožkách – pr. 20
(4) Príklady s hracími kartami – pr. 21
(5) Náhodné prechádzky – pr. 22
Každá kapitola danú tému rozvíja,uvádza zovšeobecnenia, príklady s podobnou myšlienkou alebo tematikou. Výpočty sú doplnené počítačovými simuláciami.

Cieľ: - Riešenia príkladov z [1] doplniť príbuznými príkladmi, zovšeobecneniami a pod. tak, aby ich náročnosť zodpovedala bakalárskej práci.
- Vybrané úlohy doplniť počítačovými simuláciami.

Literatúra: [1] Joshi, M. S., Denson, N., & Downes, A. (2008). Quant Job Interview: Questions and Answers. Melbourne, Pilot Whale Press.
Ďalšia literatúra podľa vlastného výberu

Vedúci:	doc. RNDr. Mgr. Beáta Stehlíková, PhD.
Katedra:	FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry:	prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
Dátum zadania:	31.10.2017

Dátum schválenia: 20.11.2017 doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

....
študent vedúci práce

Poďakovanie Na tomto mieste by som sa veľmi rada poďakovala mojej vedúcej bakalárskej práce doc. RNDr. Beáte Stehlíkovej, PhD. nielen za ochotu, pomoc a odborné rady, ale aj za trpezlivosť a podnetné pripomienky, ktoré mi veľmi pomohli pri písaní tejto práce.

Abstrakt

KATRÁKOVÁ, Kristína: Čo treba vedieť z pravdepodobnosti na pracovnom pohovore na Wall Street I [Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: doc. RNDr. Beáta Stehlíková, PhD., Bratislava, 2018, 101 s.

Táto práca sa zaoberá príkladmi z pravdepodobnosti, ktoré sa môžu objaviť na pohovore. Vysvetľuje podrobné riešenia príkladov, ktoré sa objavili v zbierke príkladov na pohovor na Wall Street a zároveň uvádza aj riešenia rozšírení týchto príkladov. Príklady sú doplnené aj o počítačové simulácie, naprogramované v programe R, ktoré slúžia na skontrolovanie výsledkov. Na výpočet využívame rôzne metódy. Okrem klasických metód z teórie pravdepodobnosti, ako je výpočet klasickej pravdepodobnosti a podmienených pravdepodobnosti, využijeme napríklad aj Pellovu rovnicu z teórie čísel a riešenie diferenčných rovníc. Súčasťou práce je aj dotazník, ktorý je zameraný na hry s hracími kartami. Cieľom práce je uľahčiť čitateľovi prípravu na pracovný pohovor, zároveň môže slúžiť ako zdroj príkladov čitateľovi, ktorý sa zaujíma o tieto oblasti z matematiky, a teda práca slúži ako zbierka príkladov z pravdepodobnosti.

Kľúčové slová: Diferenčné rovnice, Pellova rovnica, Dirichletov princíp, momentová vytvárajúca funkcia, podmienená pravdepodobnosť, klasická pravdepodobnosť, geometrická pravdepodobnosť

Abstract

KATRÁKOVÁ, Kristína: What one needs to know on a job interview at Wall Street I [Bachelor Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: doc. RNDr. Beáta Stehlíková, PhD., Bratislava, 2018, 101 p.

This bachelor thesis deals with probability examples which can occur at a job interview. It explains detailed solutions of examples and their enhancements which occured in a collection of examples for a Wall Street job interview. The examples are extended by computer simulations programmed in the R program and are used for checking the results. We use different methods for the calculation. Apart from the basic methods from probability theory, such as the calculation of classical probability and conditional probability, we also use Pell‘s equation from the number theory and the solution of difference equations. One part of the thesis is a questionnaire which focuses on card games. The aim of our thesis is to make the preparation for a job interview easier and at the same time to serve as a source of examples for the reader who is interested in that field of mathematics. This thesis can be used as a collection of examples from probability.

Keywords: Difference equation, Pell‘s equation, Dirichlet‘s principle, Moment generating functions, Conditional probability, Classical probablity, Geometric probability

Obsah

Úvod

Väčšina mladých ľudí po ukončení štúdia na strednej alebo vysokej škole rozmýšľa, kde sa zamestná. Veľa mladých ľudí malo popri škole nejakú brigádu, kde boli prijímaní na základe pohovoru. Keďže sa jednalo o brigádu, pohovor nebol ničím náročný. Keď sa ale človek uchádza o zamestnanie, pohovor býva zvyčajne náročnejší. Kým v minulosti stačilo, aby mal človek vyštudovanú školu potrebnú k danej práci, dnes je to vo väčšine prípadov len bonus. Zamestnávateľov viac zaujíma, či sa človek vie vynájsť v ťažko riešiteľných situáciách, či je ambiciózny, či má odvahu hovoriť o svojich návrhoch a zlepšeniach, či neutečie pri prvej stresovej situácii alebo či má logické zmýšľanie. Na pohovoroch sa preto mnohokrát pýtajú otázky, ktoré sú na prvý pohľad pre uchádzača nepochopiteľné a zbytočné, lenže pre zamestnávateľa majú veľkú výpovednú hodnotu o jeho schopnostiach popasovať sa so všetkými problémami, ktoré ho v práci postretnú.

Príprava na pohovor je teda nevyhnutná. Preto bola napríklad vydaná kniha s otázkami, s ktorými sa môže uchádzač stretnúť na pohovore na Wall Street [20]. Tie sú zahrnuté vo viacerých témach, my sa však zameriame na otázky týkajúce sa pravdepodobnosti. Najprv sa budeme zaoberať príkladmi o ponožkách. Každý určite pozná problém, keď ráno vyberá ponožky zo zásuvky a nevie nájsť pár. V prvej kapitole si ukážeme niekoľko zaujímavých príkladov, kde väčšina otázok bude smerovaná práve ku párovaniu ponožiek. Využijeme v nej napríklad Dirichletov princíp [6] a ukážeme si riešenie jedného príkladu pomocou Pellovej rovnice [17]. V druhej kapitole sa zameriame na výpočet strednej hodnoty a disperzie. Príklady budú viac matematické v porovnaní s ostatnými kapitolami, ale jeden príklad bude aj z praxe, konkrétne, ako sa dá využiť momentová vytvárajúca funkcia v poisťovníctve. Tretia kapitola je venovaná jednej z najčastejších oblastí príkladov z pravdepodobnosti, a to je hod mincou. Ukážeme si napríklad úlohu, kde budeme skúmať, aké výherné skupiny, ktoré sa skladajú z toho, či padne znak alebo hlava, prípadne ich kombinácia, sa oplatí pri hre voliť. V štvrtej kapitole si ukážeme príklady, ktoré sa týkajú hracích kariet. Niektoré zadania príkladov sme dali do dotazníka, v ktorom sme chceli zistiť, akú odpoveď zvolia ľudia iba pomocu logického myslenia. Takisto si ukážeme, či je naozaj výhodné pri odpovediach, kde máme vybrať z viacerých možností správnu odpoveď, voliť taktiku *„ označím tú možnosť, ktorá už dlho nebola“*. V poslednej kapitole sa zameriame na náhodné prechádzky. Ukážeme si, aký je očakávaný čas návratu mravca, ktorý chodí po hranách kocky, kým sa vráti do vrcholu, z ktorého vyštartoval. Ukážeme si aj príklad o Adamovi, ktorý chodil na prechádzky náhodnými dverami. Zaujímať nás bude, keď si zakaždým obuje a vyzuje topánky pri dverách, ktoré si zvolí, kedy sa dostane do situácie, že pôjde na prechádzku a nebude si mať čo obuť.

Cieľom našej práce bude teda vyriešiť vybrané príklady z [20], doplniť ich príbuznými príkladmi alebo zovšeobecneniami. Použijeme počítačové simulácie, ktoré naprogramujeme v programe R. Práca bude doplnená aj o grafy a bude slúžiť ako rozširujúca zbierka, ktorú môže využiť uchádzač o zamestnanie pri príprave na pohovor napríklad na Wall Street alebo v iných firmách [14]. Príklady sa pokúsime jasne a zrozumiteľne vysvetliť, aby čitateľ nemal s pochopením žiaden problém.

1 Príklady o ponožkách

V tejto kapitole sa budeme zaoberať rôznymi príkladmi o ponožkách z pravdepodobnosti. Teória pravdepodobnosti sa zaoberá popisovaním náhodných javov a pravdepodobnosti ich nastatia. V [31] je nasledovná interpretácia klasickej pravdepodobnosti.
O náhodnom pokuse hovoríme vtedy, keď konáme pokus, ktorého výsledok nie je jednoznačne určený podmienkami, pomocou ktorých je vykonávaný. Nech A je nejaké overiteľné tvrdenie o výsledku náhodného pokusu. Prehlásenie *nastal jav* A znamená, že je pravdivé tvrdenie A o výsledku náhodného pokusu. Zaujímajú nás pri tom iba také pokusy, v ktorých sledovaný jav vykazuje v opakovaných pokusoch nejakú stabilitu: výskyt javu A v postupnosti n „nezávislých" pokusov, má tendenciu pri veľkých hodnotách n sa príliš nemeniť, má tendenciu držať sa nejakej konštanty. Túto konštantu budeme nazývať pravdepodobnosť. Definícia pravdepodobnosti $[18, str.18]$ je nasledovná:

Definícia 1.1. *Nech Ω je neprázdna a S je $\sigma-$algebra podmnožín Ω. Ľubovoľnú reálnu funkciu $P : S \to \mathbb{R}^+$, pre ktorú sú splnené podmienky:*

- *$P(\Omega)=1$,*
- *ak $A_i \in S$, $i = 1, 2, \ldots$ pričom $A_i \cap A_j = \emptyset$ pre $i \neq j$, tak*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i),$$

budeme nazývať pravdepodobnosť a trojicu (Ω, S, P) pravdepodobnostný priestor.

Ako náhodné javy budeme chápať množiny zo $\sigma-$algebry podmnožín množiny Ω, kde Ω je neprázdna množina elementárnych udalostí. Hovoríme, že udalosť A nastáva, ak výsledkom experimentu je elementárna udalosť ω taká, že $\omega \in A$. V $[18, str.18]$ sú zhrnuté vlastnosti pravdepodobnosti, ktoré budeme používať pri našich výpočtoch. Špeciálnym prípadom je tzv. klasická pravdepodobnosť a geometrická pravdepodobnosť. Klasická definícia pravdepodobnosti z $[31, str.9]$ je potom nasledovná:

Definícia 1.2. *Nech Ω je konečná a neprázdna množina, nech S je $\sigma-$algebra všetkých podmnožín množiny Ω. Pravdepodobnosť je daná vzťahom*

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}. \tag{1}$$

Počet daných udalostí vyjadruje $|.|$. Vzorec (1) použijeme v riešení prvého príkladu, ktorý si zoberieme z knihy *Quant Job Interview Questions and Answers (Second Edition)* $[20, pr.3.20]$.

1.1 Ponožky v zásuvke

V zásuvke máme 2 červené a 2 čierne ponožky. Ak vytiahnem náhodne 2 ponožky, aká je pravdepodobnosť, že budú tvoriť pár?

1.1.1 Riešenie

V zásuvke máme 4 ponožky, ak chceme, aby sme po vytiahnutí ponožiek mali pár, musíme vytiahnuť buď dve červené, alebo dve čierne ponožky. V tomto prípade bude Ω množina elementárnych udalostí, čiže $\Omega = \{\textit{červená, čierna}\}$. Situáciu modelujeme pomocou množiny dvojíc $\Omega \times \Omega$. Potom $A = \{\textit{červená červená, červená čierna, čierna červená, čierna čierna}\}$. V čitateli (1) bude teda súčet možností, že sme vytiahli buď dve červené, alebo dve čierne ponožky. Do menovateľa dosadíme počet prvkov množiny Ω. Čiže dostávame

$$P = \frac{\binom{2}{2} + \binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{3}.$$

V príklade boli ďalšie podotázky, ktoré už neboli vyriešené:

A. *Aká by bola pravdepodobnosť nájdenia páru, keby sme mali n odlišných farieb ponožiek, z ktorých by sme ťahali dve ponožky?*

B. *Aká by bola pravdepodobnosť nájdenia páru, keby sme mali n odlišných farieb ponožiek, z ktorých by sme ťahali tri ponožky?*

C. *Máme 20 červených a 20 čiernych ponožiek v zásuvke. Koľko ich musíme vytiahnuť, aby sme si boli istí, že máme pár?*

Poďme sa pozrieť na riešenie jednotlivých podotázok:

A. Zadanie úlohy sa v tomto prípade zmenilo v tom, že už nemáme dve farby, ale máme n farieb po dve ponožky a z nich ideme ťahať dve. Otázka je stále rovnaká, a teda aká je pravdepodobnosť, že to bude pár? Riešenie bude podobné ako v prvom príklade, pretože znova použijeme vzorec (1). V čitateli vyjadríme pravdepodobnosť, že sme vybrali dve ponožky rovnakej farby a v menovateli, že sme vybrali dve ponožky zo všetkých možných. Keďže je farieb n, pri každej farbe nám môže nastať takáto situácia, a teda v čitateli bude n sčítancov.

$$P = \frac{\binom{2}{2} + \binom{2}{2} + \ldots + \binom{2}{2}}{\binom{2n}{2}} = n\frac{1}{\binom{2n}{2}} = \frac{n}{\frac{(2n)!}{2(2n-2)!}} = \frac{1}{2n-1}.$$

B. V tomto prípade je to o niečo zložitejšie. Musíme zahrnúť aj tretiu ponožku, čiže stále musíme vytiahnuť dve ponožky rovnakej farby, aby sme mali pár, ale kvôli tomu, že ťaháme tri, tak vytiahneme aj jednu, ktorá určite bude inej farby. Keďže máme n farieb, nevieme, pri ktorej farbe vytiahneme pár, teda vyjadríme pravdepodobnosť pre jednotlivé farby a tie spolu sčítame. Pre jednu konkrétnu farbu, z ktorej máme pár, sú priaznivé možnosti tie, v ktorých sme tento pár vybrali (teda vybrali sme 2 ponožky z 2) a k nemu ešte ľubovoľnú ďalšiu ponožku (teda 1 zo zvyšných $2n-2$). Týchto priaznivých možností je teda $\binom{2}{2}\binom{2n-2}{1}$. Keďže ťaháme tri ponožky z $2n$ všetkých, tak všetky možnosti, ako vytiahnuť ponožky sú $\binom{2n}{3}$.

$$P = \frac{\binom{2}{2}\binom{2n-2}{1} + \binom{2}{2}\binom{2n-2}{1} + \ldots + \binom{2}{2}\binom{2n-2}{1}}{\binom{2n}{3}} = n\frac{\binom{2}{2}\binom{2n-2}{1}}{\binom{2n}{3}} = \frac{\frac{n(2n-2)!}{(2n-3)!}}{\frac{(2n)!}{3!(2n-3)!}} = \frac{3}{2n-1}.$$

C. Toto zadanie sa dá veľmi ľahko vyriešiť pomocou Dirichletovho princípu [6], ktorý hovorí, že ak máme n krabíc a m objektov, kde $m > n$, tak keď umiestnime objekty do krabíc, tak v aspoň jednej krabici budú 2 objekty. V našom prípade máme 20 čiernych a 20 červených ponožiek. Po vytiahnutí 2 ponožiek sa môže stať, že budeme mať jednu čiernu a jednu červenú, ale keď vytiahneme ďalšiu, teda tretiu ponožku, určite dostaneme pár. Takže aby sme si boli istí, že máme pár, musíme vytiahnuť 3 ponožky. Podľa článku [9] je tento princíp pomenovaný podľa Dirichleta, pretože on by mal byť prvým, kto objavil tento princíp. Dve storočia pred ním však bola zmienka o princípe, ktorý hovoril, že keď sú objekty umiestnené do krabíc a tých objektov je viac ako krabíc, tak potom musí byť aspoň jedna krabica, ktorá obsahuje aspoň dva objekty. V článku sa ďalej spomína, že meno Dirichlet sa bežne spája s týmto princípom, pretože sa všeobecne verilo, že on bol prvý, kto tento princíp spomenul. Dirichlet však nikdy nespomenul, že tento princíp, ktorý spísal, je nový.

1.2 Párovanie ponožiek

Pozrieme sa na ďalší príklad. Tentokrát sa zamierame na strednú hodnotu vytiahnutých párov. V článku [23] sa objavil príklad o ponožkách, kde treba nájsť strednú hodnotu. Tento problém bol riešený neskôr v článkoch [24, 19]. V článku [24] sú tri riešenia problému a v článku [19] je riešenie doplnené o ďalšiu úlohu, ktorá je takisto vyriešená. Zadanie znie nasledovne: *Máme n rôznych párov ponožiek. Náhodne z nich po jednom vyberáme ponožky. Ak vyberieme takú, že už bol vybraný jej pár, odložíme ich. Aká je stredná hodnota odložených párov po tom, čo sme vybrali k ponožiek?*

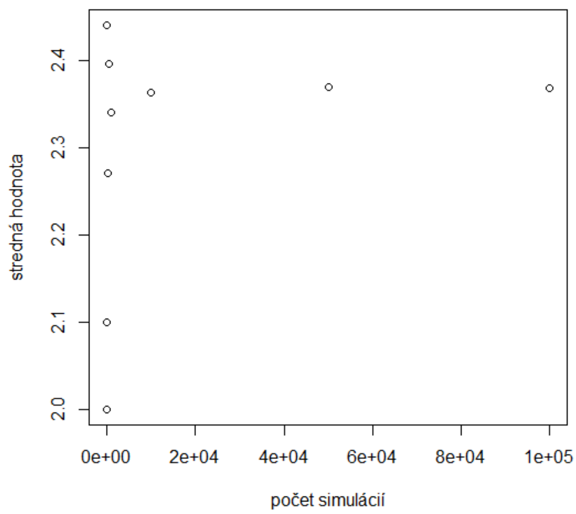
1.2.1 Výsledky z R

Tento príklad sme naprogramovali v programe R, aby sme vedeli potom porovnať odhady stredných hodnôt, ktoré vypočítal počítač a aké nám vyšli po ručnom výpočte. Na začiatok si ukážeme výsledky simulácií, ako vychádza stredná hodnota pre nami zvolené $n = 10$ a $k = 10$.

Tabuľka 1: Počítačové odhady stredných hodnôt pri rôznych počtoch simulácií

počet simulácií	stredná hodnota
1	2,0000
10	2,1000
50	2,4400
100	2,2700
500	2,3960
1000	2,3400
10 000	2,3624
50 000	2,36876
100 000	2,3685

Z hodnôt vidíme, ako sa stabilizuje priemerný počet odložených párov so zvyšujúcim sa počtom simulácií.



Obr. 1: Stredná hodnota pre $n = 10, k = 10$.

1.2.2 Prvé riešenie založené na indikátoroch

V [24] sú tri rôzne riešenia, postupne si vysvetlíme všetky tri. Na začiatku definujeme náhodnú veličinu, diskrétnu náhodnú veličinu a strednú hodnotu diskrétnej náhodnej veličiny zo [18].

Definícia 1.3. *Náhodná veličina je ľubovoľná funkcia* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *taká, že pre každé* $x \in \mathbb{R} : \{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\} \in S$.

Definícia 1.4. *Náhodná veličina* X *je diskrétna, ak nadobúda konečne alebo spočítateľne veľa hodnôt; t.j. existuje taká konečná alebo spočítateľná množina* H, *že* $P(\{\omega \in \Omega; X(\omega) \in H\}) = 1$.

Definícia 1.5. *Nech* X *je diskrétna náhodná veličina, ktorá nadobúda hodnoty* $x_i, i = 1, 2, \ldots$ *s pravdepodobnosťami* $p_i = P(X = x_i)$. *Strednou hodnotou náhodnej veličiny* X *nazveme číslo* $E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$, *ak tento rad konverguje absolútne. Ak rad nekonverguje absolútne, budeme hovoriť, že náhodná veličina nemá strednú hodnotu.*

Poďme sa pozrieť teraz na riešenie. Pravdepodobnosť, že i-ta a j-ta ponožka po vytiahnutí zo zásuvky tvoria pár, je rovná $\frac{1}{2n-1}$. Toto sme si už ukázali v príklade (3.20). Nás zaujíma, či ponožky tvoria pár, alebo netvoria, teda či udalosť nastane, alebo nenastane. Označíme X ako počet všetkých vytiahnutých párov ponožiek, ktoré sme odložili. Ďalej označíme

X_{ij} ako indikátor [26], ktorý nám ukazuje, či udalosť nastala, alebo nenastala, čiže či i-ta a j-ta ponožka po vytiahnutí tvoria pár. Indikátor má alternatívne rozdelenie.

$$X_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ak i-ta a j-ta vytiahnutá ponožka tvoria pár, kde } 1 \leq i < j \leq k, \\ 0, & \text{inak.} \end{cases}$$

Stredná hodnota sa vypočíta v našom prípade

$$E(X_{ij}) = 1 \times P(X_{ij} = 1) + 0 \times P(X_{ij} = 0) = \frac{1}{2n-1}.$$

Toto je stredná hodnota náhodnej veličiny X_{ij}, ktorá vyjadruje, či i-ta a j-ta ponožka po vytiahnutí tvoria pár. Keďže X je počet všetkých párov, tak $X = \sum_{1\leq i<j\leq k} X_{ij}$. Stredná hodnota X sa dá vyjadriť ako

$$E(X) = E\left(\sum_{1\leq i<j\leq k} X_{ij}\right).$$

Vieme, že stredná hodnota súčtu náhodných veličín je rovná súčtu stredných hodnôt náhodných veličín, preto

$$E\left(\sum_{1\leq i<j\leq k} X_{ij}\right) = \sum_{1\leq i<j\leq k} E(X_{ij}) = \sum_{1\leq i<j\leq k} \frac{1}{2n-1} = \frac{1}{2n-1} \sum_{1\leq i<j\leq k} 1.$$

Suma, ktorá nám ostala, vyjadruje počet všetkých možných kobinácií dvoch párov ponožiek, ak sme vytiahli k ponožiek, čiže sa dá napísať ako kombinačné číslo $\binom{k}{2}$, odkiaľ už dostávame výsledok:

$$E(X) = \frac{\binom{k}{2}}{2n-1} = \frac{k(k-1)}{2(2n-1)}.$$

1.2.3 Druhé riešenie založené na indikátoroch

V druhom riešení z [24] sa nebudeme pozerať na ponožky jednotlivo, ako sme to robili v predchádzajúcom riešení, ale budeme sa pozerať na pár. Znovu na to pôjdeme cez indikátory. Počet všetkých vytiahnutých párov nám bude označovať Y a indikátor Y_i $(1 \leq i \leq n)$ bude označovať to, že i-ty pár je prítomný medzi prvými vytiahnutými k ponožkami

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{ak i-ty pár je medzi prvými k ponožkami,} \\ 0, & \text{inak.} \end{cases}$$

Pravdepodobnosť toho, že $Y_i = 1$, sa dá vyjadriť pomocou vzorca (1). V čitateli sú vyjadrené všetky možnosti, že medzi vybranými ponožkami bol i-ty pár. Keďže predpokladáme, že už sme jeden pár vybrali, budeme teraz vyberať $k-2$ ponožiek z $2n-2$, a teda počet priaznivých možností je $\binom{2n-2}{k-2}$. V menovateli sú vyjadrené všetky možnosti, ktoré môžu nastať, a teda $\binom{2n}{k}$. Výsledná pravdepodobnosť je $\frac{\binom{2n-2}{k-2}}{\binom{2n}{k}}$. Teraz už len jednoducho vyjadríme strednú hodnotu indikátora

$$E(Y_i) = \frac{\binom{2n-2}{k-2}}{\binom{2n}{k}}.$$

Naším zadaním bolo vypočítať strednú hodnotu všetkých vytiahnutých párov, nielen pre náhodnú premennú Y_i. Počet párov vyjadríme ako sumu hodnôt jednotlivých Y_i, teda $Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, odkiaľ dostávame

$$E(Y) = E\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right).$$

Stredná hodnota súčtu je znovu súčet stredných hodnôt

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} E(Y_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\binom{2n-2}{k-2}}{\binom{2n}{k}} = \frac{\binom{2n-2}{k-2}}{\binom{2n}{k}} \sum_{i=1}^{n} 1 = \frac{\binom{2n-2}{k-2}}{\binom{2n}{k}} n \\ &= \frac{\frac{(2n-2)!}{(k-2)!(2n-k)!}}{\frac{(2n)!}{k!(2n-k)!}} n = \frac{k(k-1)}{2(2n-1)}. \end{aligned}$$

1.2.4 Tretie riešenie založené na podmienenej pravdepodobnosti

Poďme sa pozrieť na tretie riešenie nášho príkladu. Označme X_k ako počet párov obsiahnutých v prvých k vybraných ponožkách. Ďalej definujme pomocnú náhodnú veličinu Y_{k+1}, pre ktorú platí

$$Y_{k+1} = \begin{cases} 1, & \text{ak } k+1\text{-vá ponožka tvorí pár s predtým vytiahnutou ponožkou} \\ 0, & \text{inak.} \end{cases}$$

Najskôr definujeme podmienenú pravdepodobosť z $[18, str.23]$.

Definícia 1.6. *Podmienenou pravdepodobnosťou udalosti A za podmienky, že nastala udalosť B taká, že $P(B) > 0$, budeme rozumieť číslo*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Podmienenú pravdepodobnosť možno využiť aj pri počítaní pravdepodobností prienikov. Pričom platí nasledujúca veta zo $[18, str.23]$.

Veta 1.7. *Nech $A_1, \dots, A_n \in S$ sú také, že $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$. Potom*

$$P(\cap_{i=1}^n A_i) = P(A_1)P(A_2|A_1)\dots P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{-1}).$$

My budeme hľadať pravdepodobnosť $P(k+1$-vá ponožka vytvorí pár s predtým vytiahnutou ponožkou | prvých k ponožiek obsahuje X_k párov$) = P(Y_{k+1} = 1|X_k)$.
Zrejme $X_{k+1} = X_k + Y_{k+1}$. Keď ideme počítať pravdepodobnosť $P(Y_{k+1} = 1)$, tak budeme uvažovať, že sme zatiaľ vytiahli k ponožiek, teda ostalo nám ešte $2n - k$. Vieme, že X_k nám reprezentuje počet už vytiahnutých párov, teda $2X_k$ bude reprezentovať počet vytiahnutých ponožiek, ktoré nás už nezaujímajú, lebo už majú pár. Aby $Y_{k+1} = 1$, potrebujeme sa trafiť do $k - 2X_k$ ponožiek. Teda môžme napísať

$$P(Y_{k+1} = 1|X_k) = \frac{k - 2X_k}{2n - k}.$$

Nás zaujíma stredná hodnota odložených párov po tom, čo sme vybrali k ponožiek. Najprv si ale vyjadríme, čomu sa rovná stredná hodnota $E(k+1)$, čo reprezentuje strednú hodnotu párov po tom, čo sme vytiahli $k+1$ ponožiek.

$$E(k+1) = E(X_{k+1}) = E(X_k + Y_{k+1}) = E(X_k) + E(Y_{k+1}) = E(k) + \frac{k - 2E(k)}{2n - k}. \qquad (2)$$

Po prvom vytiahnutí určite $E(1) = 0$, pretože z jednej ponožky sa nedá urobiť pár. Použitím vzorca $E(k+1) = E(k) + \frac{k-2E(k)}{2n-k}$ vieme vypočítať ďalšie stredné hodnoty

$$\begin{aligned}
E(2) &= E(1) + \frac{1 - 2E(1)}{2n-1} = \frac{1}{2n-1}, \\
E(3) &= E(2) + \frac{2 - 2E(2)}{2n-2} = \frac{1}{2n-1} + \frac{2 - \frac{2}{2n-1}}{2n-2} = \frac{3}{2n-1}, \\
E(4) &= E(3) + \frac{3 - 2E(3)}{2n-3} = \frac{3}{2n-1} + \frac{3 - \frac{2.3}{2n-1}}{2n-3} = \frac{6}{2n-1},
\end{aligned}$$

V čitateli sa objavuje postupnosť 0,1,3,6,..., resp. postupnosť 0,1,1+2,1+2+3,.... Môžeme vysloviť predpoklad, že $E(k) = \frac{\frac{1}{2}k(k-1)}{2n-1}$. Teraz ho dokážeme matematickou indukciou.
Pre $k = 1$, tvrdenie platí

$$E(1) = \frac{1(1-1)}{2(2n-1)} = 0.$$

Chceme dokázať, že ak $E(k) = \frac{k(k-1)}{2(2n-1)}$, potom $E(k+1) = \frac{k(k+1)}{2(2n-1)}$.

Z (2) poznáme strednú hodnotu pre $k+1$ vytiahnutých ponožiek: $E(k+1) = E(k) + \frac{k-2E(k)}{2n-k}$. Teraz dosadíme za $E(k)$ náš indukčný predpoklad a budeme ďalej upravovať tento výraz

$$\begin{aligned} E(k+1) &= \frac{k(k-1)}{2(2n-1)} + \frac{k - \frac{k(k-1)}{2n-1}}{2n-k} = \frac{k(k-1)}{2(2n-1)} + \frac{k(2n-k)}{(2n-k)(2n-1)} \\ &= \frac{k(k-1)+2k}{2(2n-1)} = \frac{k(k+1)}{2(2n-1)}, \end{aligned}$$

čo je už náš hľadaný výsledok.

1.2.5 Štvrté riešenie založené na multiplikatívnom princípe, rozšírené o výpočet pravdepodobnosti nájdenia páru

Teraz si vysvetlíme riešenie z [19], kde najskôr vyjadríme strednú hodnotu odložených párov vytiahnutých ponožiek a potom si odvodíme vzorec na pravdepodobnosť, že pri j-tom ťahaní nájdeme pár. Na odvodenie vzorca pre pravdepodobnosť, že sa medzi vytiahnutými ponožkami vyskytuje práve m dvojíc párov, použijeme vzorec (1). Počet všetkých možností, ako vybrať k ponožiek z $2n$ všetkých ponožiek, vyjadríme ako $\binom{2n}{k}$. V čitateli bude $\binom{n}{m}\binom{n-m}{k-2m}2^{k-2m}$, čo vyjadruje počet všetkých možností, že sa medzi nimi vyskytuje práve m dvojíc párov. To vyplýva z multiplikatívneho princípu [27], ktorý hovorí, že ak sa jedna udalosť môže vyskytnúť m spôsobmi a druhá sa môže vyskytnúť nezávisle od prvej n spôsobmi, potom sa dve udalosti môžu vyskytnúť mn spôsobmi. V našom prípade máme $\binom{n}{m}$ možností, ako vybrať práve m párov zo všetkých n párov. Po vytiahnutí m párov máme pri ďalšom výbere $\binom{n-m}{k-2m}$ možností, ako vybrať ďalšie páry ponožiek. Od k ponožiek sme už odpočítali tie dvojice, ktoré sme vybrali a tvoria pár, takže počet ďalších ťahaných ponožiek bude $k-2m$. V dôsledku toho, že sme vytiahli $2m$ ponožiek, ktoré tvoria pár, musíme odstrániť z celkového počtu existujúcich párov počet vytiahnutých párov, a teda ťaháme ponožky zo zvyšných $n-m$ párov. Všetky možné výbery jednotlivých ponožiek po vytiahnutí $2m$ ponožiek nám vyjadruje 2^{k-2m}.
Pravdepodobnosť, že sme vytiahli práve m párov je teda

$$P = \frac{\binom{n}{m}\binom{n-m}{k-2m}2^{k-2m}}{\binom{2n}{k}}, \tag{3}$$

kde m pôjde od $\max\{0, k-n\}$ po $\frac{k}{2}$. Spodné ohraničenie vyplýva z toho, že ak $k > n$, tak určite sa bude medzi vybratými ponožkami vyskytovať aspoň $k-n$ párov. Ak $k < n$, nemusí sa vyskytovať medzi vybranými ponožkami žiaden pár a m pôjde od nuly. Horné ohraničenie je $\frac{k}{2}$ kvôli tomu, že to je najväčší možný počet párov, ktoré budeme mať po vytiahnutí k ponožiek.

V prípade, ak $k = 1$, tak nikdy nevznikne pár. Ak $n = 1$, pre $k = 2$ pravdepodobnosť výberu páru je vždy rovná 1. Teraz predpokladajme, že $n \geq 2$ a $k \geq 2$ a pomocou (3) vypočítajme strednú hodnotu vytiahnutých párov

$$E(k) \;=\; \sum_{m=\max\{0,k-n\}}^{k/2} m\frac{\binom{n}{m}\binom{n-m}{k-2m}2^{k-2m}}{\binom{2n}{k}}. \tag{4}$$

V tomto kroku urobíme ekvivalentú úpravu a vynásobíme strednú hodnotu jednotkou, aby sme sa jednoduchšie dostali k požadovanému výsledku.

$$E(k) = \frac{k(k-1)}{2(2n-1)}\sum_{m=\max\{1,k-n\}}^{k/2} m\frac{\binom{n}{m}\binom{n-m}{k-2m}2^{k-2m}2(2n-1)}{\binom{2n}{k}k(k-1)}.$$

V ďalšom kroku upravíme kombinačné číslo

$$E(k) = \frac{k(k-1)}{2(2n-1)}\sum_{m=\max\{1,k-n\}}^{k/2} \frac{2(2n-1)m\frac{n!}{m!(n-m)!}\frac{(n-m)!}{(k-2m)!(n-k+m)!}2^{k-2m}}{k(k-1)\frac{(2n)!}{k!(2n-k)!}}.$$

Faktoriály rozpíšeme, tým pádom sa nám niektoré členy vykrátia

$$\begin{aligned}
E(k) &= \frac{k(k-1)}{2(2n-1)}\sum_{m=\max\{1,k-n\}}^{k/2} \frac{2(2n-1)m\frac{n(n-1)!}{m(m-1)!(n-m)!}\frac{(n-m)!}{(k-2m)!(n-k+m)!}}{k(k-1)\frac{2n(2n-1)(2n-2)!}{k(k-1)(k-2)!(2n-k)!}}\\
&= \frac{k(k-1)}{2(2n-1)}\sum_{m=\max\{1,k-n\}}^{k/2} \frac{\frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!}\frac{(n-m)!}{(k-2m)!(n-k+m)!}2^{k-2m}}{\frac{(2(n-1))!}{(k-2)!(2n-k)!}}.
\end{aligned}$$

Teraz faktoriály upravíme znova na kombinačné číslo, odkiaľ dostávame

$$E(k) = \frac{k(k-1)}{2(2n-1)}\sum_{m=\max\{1,k-n\}}^{k/2} \frac{\binom{n-1}{m-1}\binom{n-m}{k-2m}2^{k-2m}}{\binom{2(n-1)}{k-2}}.$$

V poslednom kroku v čitateli ku $\binom{n-m}{k-2m}$ a 2^{k-2m} pripočítame nulu

$$E(k) \;=\; \frac{k(k-1)}{2(2n-1)}\sum_{m=\max\{1,k-n\}}^{k/2} \frac{\binom{n-1}{m-1}\binom{(n-1)-(m-1)}{(k-2)-2(m-1)}2^{(k-2)-2(m-1)}}{\binom{2(n-1)}{k-2}}.$$

Ďalej $m-1$ nahradíme r. Aby bola táto úprava ekvivalentná s pôvodnou, musíme ohraničenie v sume posunúť o 1, čiže odpočítame jednotku v ohraničení a dostávame

$$\begin{aligned}
E(k) &= \frac{k(k-1)}{2(2n-1)}\sum_{r=\max\{0,(k-2)-(n-1)\}}^{(k-2)/2} \frac{\binom{n-1}{r}\binom{(n-1)-r}{(k-2)-2r}2^{(k-2)-2r}}{\binom{2(n-1)}{k-2}}\\
&= \frac{k(k-1)}{2(2n-1)}\times 1.
\end{aligned}$$

Teraz si vysvetlíme, čo reprezentujú jednotlivé členy v sume. Počet možností, že sa medzi ponožkami, kde už bol nájdený jeden pár vyskytuje ďalších r párov, nám reprezentuje $\binom{n-1}{r}$. Počet možností, ako vybrať ďalšie ponožky, keď už sme našli r párov vyjadruje $\binom{(n-1)-r}{(k-2)-2r}$ a počet všetkých kombinácií, ako vybrať jednotlivé ponožky po tom, čo sme našli r párov vyjadruje $2^{(k-2)-2r}$. V menovateli, $\binom{2(n-1)}{k-2}$ reprezentuje počet všetkých možností, ako vybrať ponožky, ak sme predtým našli jeden pár. Sčítanec v sume je teda pravdepodobnosť, že sme vytiahli práve r párov ponožiek, ak bol predtým už nájdený jeden pár. Čiže vyberáme $k-2$ ponožiek zo všetkých $2n-2$. Pričom r pôjde od $r = max\{0,(k-2)-(n-1)\}$ po $(k-2)/2$. Suma je rovná 1, pretože je to celková suma pravdepodobnosti všetkých udalostí, ktoré môžu nastať, či už nájdeme všetky páry, iba niekoľko párov alebo žiaden pár. Teda dostávame riešenie príkladu.

V tomto štvrtom riešení sa vyskytlo aj rozšírenie zadania, kde okrem strednej hodnoty autor hľadal aj pravdepodobnosť, že pri j-tom ťahaní sme našli pár. Teraz si vysvetlíme riešenie hľadanej pravdepodobnosti. Použijeme vetu o úplnej prvadepodobnosti zo $[18, str.23]$.

Veta 1.8. *Nech $A_j \in S$, $P(A_j) > 0$, $j = 1, 2, \dots$ pričom $\cup_{j=1}^{\infty} A_j = \Omega$ a $A_i \cap A_j = \emptyset$ pre $i \neq j$. Potom pre ľubovoľné $B \in S$*

$$P(B) = \sum_{j=1}^{\infty} P(B|A_j)P(A_j).$$

V našom prípade budeme teda počítať:

$P(\text{nájdem pár pri } j\text{-tom ťahaní}) = \sum_{m=\max\{0,(j-1)-n\}}^{(j-1)/2} P(\text{nájdem pár pri } j\text{-tom ťahaní}|\text{mám } m \text{ párov z prvých } j-1 \text{ ťahaní})P(\text{mám } m \text{ párov z prvých } j-1 \text{ ťahaní})$.

Ohraničenie v sume nám pôjde od $\max\{0,(j-1)-n\}$ po $(j-1)/2$, pretože počítame pravdepodobnosť, že sme vytiahli m párov z prvých $j-1$ ťahaní. Pravdepodobnosť je teda rovná

$$P(B) = \sum_{m=\max\{0,(j-1)-n\}}^{(j-1)/2} \frac{(j-1)-2m}{2n-(j-1)} \frac{\binom{n}{m}\binom{n-m}{(j-1)-2m}2^{(j-1)-2m}}{\binom{2n}{j-1}}, \tag{5}$$

kde $P(B)$ označuje pravdepodobnosť, že nájdem pár pri j-tom ťahaní. Prvý zlomok v sume budeme uvažovať tak, že sme zatiaľ vytiahli $j-1$ ponožiek, teda ostalo nám ešte $(2n-(j-1))$. Vieme, že m nám reprezentuje už počet vytiahnutých párov, teda $2m$ bude reprezentovať počet vytiahnutých ponožiek, ktoré nás už nezaujímajú, lebo majú pár. Aby sme našli pri j-tom ťahaní pár, potrebujeme sa trafiť do $(j-1)-2m$ ponožiek. Druhý zlomok sme vyjadrili tak isto ako v prípade (3). Počet možností, ako vybrať práve m párov zo všetkých n párov je rovný $\binom{n}{m}$. Po vytiahnutí m párov počet našich možností pri ďalšom výbere bude $\binom{n-m}{(j-1)-2m}$, kde od $j-1$ ponožiek sme už odpočítali tie ponožky, ktoré sme vybrali a tvoria pár. V dôsledku toho, že sme vytiahli $2m$ ponožiek, ktoré tvoria pár, musíme odstrániť z celkového počtu existujúcich párov počet vytiahnutých párov, teda platí $n-m$. Všetky možné výbery jednotlivých ponožiek po vytiahnutí $2m$ ponožiek nám vyjadruje $2^{(j-1)-2m}$.

$$E(j-1) = \sum_{m=\max\{0,(j-1)-n\}}^{(j-1)/2} mP(j-1) = \sum_{m=\max\{0,(j-1)-n\}}^{(j-1)/2} m\frac{\binom{n}{m}\binom{n-m}{(j-1)-2m}2^{(j-1)-2m}}{\binom{2n}{j-1}}.$$

Úpravou (5) dostaneme

$$P(B) = \frac{(j-1)-2E(j-1)}{2n-(j-1)} = \frac{j-1}{2n-1}, \qquad j = 1, 2, \ldots, 2n.$$

Čo je teda výsledný vzorec na výpočet pravdepodobnosti, že pri j-tom ťahaní nájdeme pár.

1.2.6 Výsledky z R

Teraz sa vrátime ku strednej hodnote, ktorú sme mali počítať v príklade. Pre kontrolu, či je stredná hodnota naozaj taká, akú vypočítame, sme naprogramovali v programe R kód, ktorý nám najprv zistí, koľko ponožiek sa vybralo zo zásuvky pri pevne stanovenom n, k a potom niekoľkonásobným opakovaním vypočíta, aká je stredná hodnota týchto vybraných ponožiek. Kód nám aj vypisuje, koľkokrát sa konkrétny počet párov v danom cykle objavil. V nasledujúcej tabuľke si ukážeme výsledky. V prvých dvoch stĺpcoch sú nami určené n, k, v treťom stĺpci je hodnota, ktorú sme vypočítali pomocou vzorca a vo štvrtom stĺpci je hodnota, ktorú sme dostali po výpočte v R-ku. Funkciu v R-ku sme pre nami stanovené n, k zopakovali 10000- krát.

Tabuľka 2: Porovnanie odhadov stredných hodnôt vypočítaných pomocou vzorca a počítača

n	k	výpočet - vzorec	výpočet - R
10	10	2,3684	2,3624
20	10	1,1538	1,1534
30	20	3,2203	3,2168
20	5	0,2564	0,2557

Z tabuľky vidíme, že stredná hodnota vypočítaná v R-ku sa veľmi málo líši od tej, ktorá je vypočítaná pomocou vzorca.

1.3 Počet ponožiek v zásuvke

V knihe *Fifty Challenging Problems in Probability* [25] sa objavil ďalší zaujímavý príklad o ponožkách. Tentokrát pravdepodobnosť, že vytiahneme červený pár máme danú. Našou úlohou bude nájsť počet ponožiek v zásuvke. Zadanie: *V zásuvke máme červené a čierne ponožky. Ak náhodne vyberieme zo zásuvky dve ponožky, pravdepodobnosť, že obe sú červené, je $\frac{1}{2}$. Koľko najmenej ponožiek v zásuvke môže byť? Koľko, ak je počet čiernych ponožiek párny?*

1.3.1 Riešenie

V knihe [25] sú všetky príklady vyriešené, tak sa ideme pozrieť, ako riešili konkrétne príklad, ktorý zaujíma nás.

Označme si r ako počet červených ponožiek a b ako počet čiernych ponožiek. Pravdepodobnosť, že prvá vytiahnutá ponožka bude červená, je $\frac{r}{r+b}$. Pravdepodobnosť, že druhá bude červená, závisí od toho, či bola prvá vytiahnutá červená alebo čierna a je rovná $\frac{r-1}{r+b-1}$. Teda celková pravdepodobnosť je

$$\frac{r}{r+b}\frac{r-1}{r+b-1} = \frac{1}{2}. \tag{6}$$

Teraz si ukážeme, v akom vzťahu sú medzi sebou prvý a druhý člen súčinu. Dokážeme, že prvý bude väčší ako druhý. Postupne budeme robiť ekvivalentné úpravy.

$$\begin{aligned}\frac{r}{r+b} &> \frac{r-1}{r+b-1}\\ r(r+b-1) &> (r-1)(r+b)\\ r^2+rb-r &> r^2+rb-r-b\\ 0 &> -b.\end{aligned}$$

V druhom kroku sme mohli zlomky vynásobiť menovateľmi, pretože tie sú kladné. Nakonci nám ostalo $0 > -b$, čo aj naozaj platí, pretože r, b sú kladné čísla. Takže naozaj, prvý člen je väčší než druhý. Ďalej vieme, že keby sme vynásobili prvý člen sám so sebou, tak by pravdepodobnosť bola väčšia ako $\frac{1}{2}$, pretože súčin väčšieho a menšieho člena je rovný $\frac{1}{2}$, preto súčin väčšieho člena so sebou bude väčší ako $\frac{1}{2}$. Analogicky, keby sme druhý člen vynásobili sám so sebou, pravdepodobnosť by bola menšia ako $\frac{1}{2}$, a teda môžeme to zapísať v tvare

$$\left(\frac{r}{r+b}\right)^2 > \frac{1}{2} > \left(\frac{r-1}{r+b-1}\right)^2. \tag{7}$$

Táto nerovnosť nie je ekvivalentná s (8), je to len jej nutná podmienka. Keďže r, b sú kladné nezáporné čísla, môžeme (7) odmocniť, odkiaľ dostávame

$$\frac{r}{r+b} > \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{r-1}{r+b-1}.$$

Z prvej nerovnosti máme

$$r > \frac{1}{\sqrt{2}-1}b = (\sqrt{2}+1)b.$$

Z druhej nerovnosti máme

$$(\sqrt{2}+1)b+1 > r,$$

alebo teda

$$(\sqrt{2}+1)b+1 > r > (\sqrt{2}+1)b. \tag{8}$$

Pre $b = 1, r$ musí byť väčšie než $2,414$ a menšie než $3,414$ a jediné riešenie je $r = 3$. Pre $r = 3, b = 1$, dostávame:

$$P = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2},$$

odkiaľ vidíme, že najmenší počet ponožiek v zásuvke je 4. Ďalšia otázka bola, čo ak je b párne, takže budeme do (8) dosádzať postupne párne čísla. V nasledujúcej tabuľke sú vypočítané pravdepodobnosti pre jednotlivé b a r.

Tabuľka 3: Pravdepodobnosti pre jednotlivé b a r

b	interval r	prípustné r	P(2 červené ponožky)
2	5.8, 4.8	5	$\frac{5}{7}\frac{4}{6} \neq \frac{1}{2}$
4	10.7, 9.7	10	$\frac{10}{14}\frac{9}{13} \neq \frac{1}{2}$
6	15.5, 14.5	15	$\frac{15}{21}\frac{14}{20} = \frac{1}{2}$

Pravdepodobnosť rovná jednej polovici je vtedy, keď $b = 6, r = 15$, takže najmenší počet ponožiek v šuflíku, ak je b párne, je 21. Keby sme chceli vedieť ďalšie hodnoty b, r, podľa [21] by nás to viedlo k Pellovej rovnici. Týmto riešenie v [21] končí, my sa ale bližšie pozrieme na uvedenú poznámku o Pellovej rovnici.

1.3.2 Pellova rovnica

Pellova rovnica je špeciálny prípad diofantickej rovnice, ktorá má tvar

$$x^2 - dy^2 = 1,$$

kde $x, y \in \mathbb{Z}$ sú neznáme a $d \in \mathbb{N}$ je fixný parameter, ktorý nie je štvorec.
Najprv si povieme niečo o histórii Pellovej rovnice [3]. V roku 628 bol indický matematik Brahmagupta prvý, ktorý študoval Pellovu rovnicu rozsiahlo. Ako prvý objavil metódu generujúcu veľa riešení Pellovej rovnice a povedal, že ak by mohol nájsť len jedno riešenie rovnice, tak by mohol vygenerovať ďalšie. Hovoril, že ak by mohol nájsť riešenie x, y pre $x^2 - dy^2 = k$, kde $k = \pm 1, \pm 2$ alebo ± 4, tak by mohol nájsť celočíselné riešenie Pellovej rovnice. Túto metódu pomenoval *samasa*.
Ďalší veľký krok vo výskume Pellovej rovnice urobil v roku 1150 Bhaskar II. Pokračoval v krokoch Brahmagupta, našiel spôsob, ako nájsť riešenie Pellovej rovnice začínajúcu riešením $x^2 - dy^2 = k$ pre x, y. Vybudoval metódu, ktorú nazval *chakravala*. Je to algoritmus, ktorý umožňuje vyriešiť Pellovu rovnicu. V roku 1657 Fermat vyzval matematikov v Európe, aby riešili mnohé problémy, z ktorých jeden bol problém, ktorý Bhaskara II predtým riešil mnoho rokov: $61x^2 + 1 = y^2$. To viedlo matematika Brounckera k štúdiu tejto rovnice. Brouncker prišiel k riešeniu, ktoré používa reťazový zlomok.

Z [17] vieme, že spojenie Johna Pella s rovnicou spočíva v tom, že preložil preklad Thomasa Brankera z knihy od Johna Rahna- "Teutsche Algebra"do angličtiny s diskusiou o Brounckerovom riešení rovnice. Leonard Euler si mylne myslel, že toto riešenie bolo vymyslené Pellom, vďaka ktorému pomenoval rovnicu po Pellovi.

S nájdením riešenia Pellovej rovnice nám pomôže nasledujúca veta z [3].

Veta 1.9. *Ak $d > 0$ nie je štvorec, Pellova rovnica $x^2 - dy^2 = 1$ má nekonečne veľa riešení, ktoré vyrátame nasledujúcim spôsobom. Ak (x_0, y_0) je najmenšie možné, pozitívne riešenie, tak všeobecné riešenie je dané ako*

$$x + y\sqrt{d} = \pm(x_0 + y_0\sqrt{d})^k, k \in \mathbb{Z}.$$

Skúsme si ukázať riešenie nasledujúceho príkladu:

$$x^2 - 3y^2 = 1.$$

Prvé riešenie odhadneme. Vidíme, že rovnica má riešenie, ak $x = 2$ a $y = 1$.

Nové reálne číslo, ktoré zodpovedá riešeniu rovnice $x^2 - 3y^2 = 1$ je

$$(2 + 1\sqrt{3})(2 + 1\sqrt{3}) = 7 + 4\sqrt{3}.$$

Našli sme ďalšie riešenie, pretože $(7, 4)$ rieši našu rovnicu. Ideme hľadať ďalšie riešenie.

$$(2 + \sqrt{3})^3 = (2 + \sqrt{3})(7 + 4\sqrt{3}) = 26 + 15\sqrt{3}.$$

$(26, 15)$ rieši našu rovnicu. Podobným postupom dostávame ďalšie riešenia

$$x + y\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^n, n \in \mathbb{N}.$$

1.3.3 Použitie Pellovej rovnice pri riešení úlohy o ponožkách

Teraz sa vrátime k riešeniu nášho pôvodného príkladu. Aplikovaním vety sme zistili, že riešením Pellovej rovnice nie sú konkrétne čísla r, b, ale nové premenné x, y, ktoré vznikli transformáciou r, b a ktoré vyhovujú riešeniu Pellovej rovnice. To, že r, b nie sú konkrétne čísla, sa dalo očakávať na základe podmienky (8). Z niekoľkých riešení rovnice $x^2 - 8y^2 = 1$ sa zdá, že riešenia rovnice sú $y = b$ a $x = 2r - 2b - 1$ a teda (r, b) spĺňajú

$$(2r - 2b - 1)^2 - 8b^2 = 1.$$

Teraz musíme dokázať nasledovnú pomocnú lemu, z ktorej vyplýva, že naše pozorovanie platí pre všetky riešenia r, b.

Lema 1.10.

$$(2r-2b-1)^2-8b^2=1 \Leftrightarrow \frac{r}{r+b}\frac{r-1}{r+b-1}=\frac{1}{2}.$$

Dôkaz. Postupne budeme upravovať obidve rovnosti, z ktorých dokážeme túto lemu. Najprv budeme upravovať druhú rovnicu

$$\begin{aligned}\frac{r}{r+b}\frac{r-1}{r+b-1}&=\frac{1}{2}\\ 2r(r-1)&=(r+b)(r+b-1)\\ 2r^2-2r&=r^2+rb-r+rb+b^2-b\\ r^2-2rb-r+b-b^2&=0\\ 4r^2-8rb-4r+4b-4b^2&=0.\end{aligned}$$

S touto rovnicou už nevieme ľahko pohnúť, tak ideme upravovať prvú rovnicu

$$(2r-2b-1)^2-8b^2=1 \tag{9}$$

$$4r^-4rb-2r-4rb+4b^2+2b-2r+2b+1-8b^2=1 \tag{10}$$

$$4r^2-8rb-4r+4b-4b^2=0. \tag{11}$$

Prvú rovnicu sme upravili na taký istý tvar ako aj druhú rovicu. Tým sme dokázali lemu. □

Zavedieme substitúciu $x=2r-2b-1$, $y=b$. Hľadáme riešenia rovnice $x^2-8y^2=1$ pomocou vety (1.9). Z nich $r=\frac{1}{2}x+y+\frac{1}{2}, b=y$. Z lemy vyplýva, že tak dostaneme hľadané riešenie. V nasledujúcej tabuľke sú ďalšie riešenia rovnice $x^2-8y^2=1$ a nášho príkladu.

Tabuľka 4: Riešenia nami nájdenej Pellovej rovnice a nášho príkladu

x	y	$\to$	r	b
3	1		3	1
17	6		15	6
99	35		85	35
577	204		493	204
3363	1189		2871	1189

1.4 Ponožky starostu mesta Wohascum

V ďalšom príklade z [13] sa pozrieme na problém starostu strediska Wohascum, ktorý má ponožky v rôznych odtieňoch sivej a chce ich náhodne, ale správne spárovať. Zadanie teda znie: *Starosta má 10 párov ponožiek, v rozmedzí desiatich farebných odtieňov od svetlosivej až po čiernu. Pár je nenositeľný, ak sa farba jednej ponožky od druhej odlišuje o viac ako jeden odtieň. Aká je pravdepodobnosť, že ak náhodne spárujeme ponožky, budú spárované tak, že všetkých 10 párov bude nositeľných?*

1.4.1 Riešenie

V knihe bolo aj riešnie tohto príkladu, ktoré si ideme ukázať a vysvetliť.

Jeho základná myšlienka je, že nositeľné páry začneme párovať od najtmavších odtieňov. Najprv vyjadríme, koľko máme prijateľných možností, ako spárovať ponožky. Predpokladajme, že máme n párov ponožiek v postupne tmavších odtieňoch s rovnakými podmienkami na to, aby bol pár nositeľný. Nech $f(n)$ vyjadruje počet párov, ktoré sú prijateľné. Pre $n \leq 2$ máme iba jeden pár, to je prijateľné párovanie a $f(1) = 1, f(2) = 3$. Pre $n > 2$ treba zvážiť jednu ponožku z $n-$teho páru (najtmavší pár). Ona musí byť spárovaná so svojou dvojičkou alebo s jednou z ponožiek z $n-1$ páru. Ak je spárovaná so svojou dvojičkou, máme $f(n-1)$ prijateľných možností, ako spárovať $n-1$ ostávajúcich párov. Ak je spárovaná s ktoroukoľvek z dvoch ponožiek z $n-1$ páru, jej párová dvojica musí byť spárovaná s druhou ponožkou svojho páru a ostáva nám $n-2$ vhodných párov a $f(n-2)$ prijateľných možností, ako ich spárovať. Pretože sú tu dve možnosti, ako to urobiť, obidve ich zahrnieme pre $n > 2$, a teda dostávame

$$f(n) = f(n-1) + 2f(n-2).$$

Charakteristická rovnica tohto rekurentného vzťahu je $r^2 - r - 2 = 0$, ktorá má riešenie $r = 2, r = -1$. Odkiaľ dostávame

$$f(n) = a2^n + b(-1)^n,$$

pre nejaké konštanty a, b. Pre $f(1) = 1$ a $f(2) = 3$ sme našli $a = \frac{2}{3}$ a $b = \frac{1}{3}$, a teda

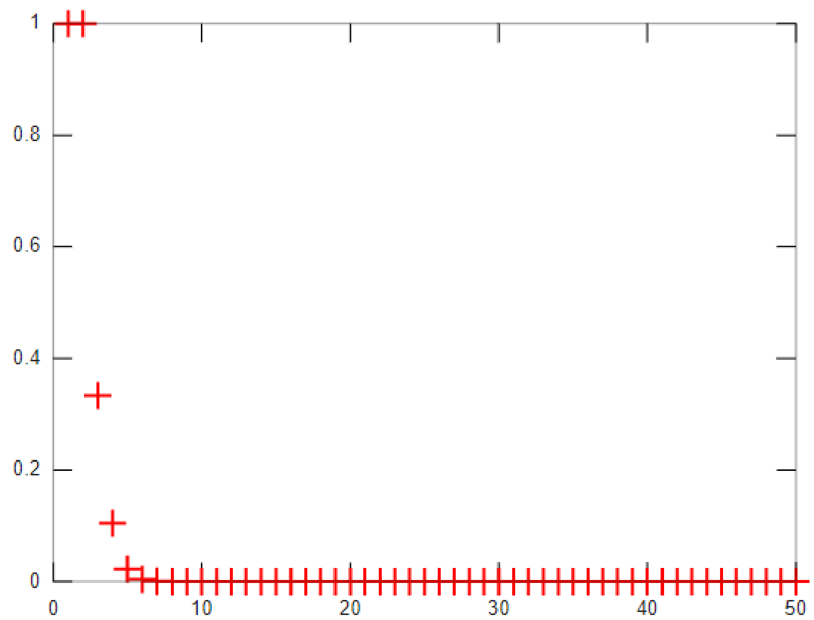
$$f(n) = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}.$$

Počet prijateľných možností, ako spárovať 10 párov ponožiek je $f(10) = 683$.

Na nájdenie celkového počtu párov si všimnime, že daná ponožka môže byť spárovaná 19-timi možnosťami. Jedna daná ponožka ostávajúcich 18−tich, môže byť spárovaná sedemnástimi možnosťami a tak ďalej. Teda celkový počet párov je $19.17\dots3.1$, čo môžeme napísať ako dvojitý faktoriál 19!!, v ktorom sa činitele znižujú po dvoch [1], čiže dostávame pravdepodobnosť

$$\frac{683}{19.17\dots3.1} \approx 1,04318 \times 10^{-6}. \tag{12}$$

Týmto sme vyriešili príklad z [13]. Teraz urobíme rozšírenie príkladu a ukážeme, aký by bol výsledok, keby bolo n veľké. Toto už v [13] nebolo. Intuitívne sa dá očakávať, že je to nula, pretože čím viac odtieňov ponožiek budeme mať, tým bude menšia pravdepodobnosť, že ich správne spárujeme. Urobíme limitu výslednej pravdepodobnosti pre n idúce do nekonečna. V Octave sme si vykreslili graf, ako bude vyzerať pravdepodobnosť pre $n \in \{1, 2, \dots, 50\}$ (Obr. 2).



Obr. 2: Limita pre n idúce do nekonečna.

Z grafu sa zdá, že limita je nulová. Toto tvrdenie teraz dokážeme.

Počítame limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{(2n-1)!!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3(2n-1)!!}.$$

Výraz, ktorého limitu počítame, zdola ohraničíme 0, zhora ju ohraničíme tak, že využijeme nerovnosť $(-1)^n \leq 1$

$$0 \leq \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3(2n-1)!!} \leq \frac{2^{n+1} + 1}{3(2n-1)!!}.$$

Teraz ideme upravovať ďalej horné ohraničenie

$$\frac{2^{n+1} + 1}{3(2n-1)!!} = \frac{2}{3} \times \frac{2^n}{(2n-1)!!} + \frac{1}{3(2n-1)!!}.$$

Platí $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3(2n-1)!!} = 0$, ukážeme, že aj $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{(2n-1)!!} = 0$.

Výraz v limite ohraničíme nasledovne

$$\frac{1}{(2n-1)!!} \leq \frac{2^n}{(2n-1)!!} \leq \frac{2^n}{(2n-1)^n}.$$

Prvá nerovnosť je jasná, pretože keď prvý výraz vynásobime 2^n, určite je výsledkom väčšia hodnota. Teraz dokážeme, že $(2n-1)!! \leq (2n-1)^n$. Dvojitý faktoriál bude menší, nanajvýš rovný ako obyčajný faktoriál ($n!! \leq n!$), pretože pri dvojitom faktoriále odpočítavame dve čísla, kdežto pri obyčajnom faktoriále iba po jednom čísle. Ak dokážeme, že $n! \leq n^n$, tak bude platiť $n!! \leq n^n$. Táto nerovnosť sa dá jednoducho dokázať.

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots 2.1.$$

Teraz každý člen v rozpísanom faktoriále ohraničíme n.

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots 2.1 \leq n.n\dots n = n^n.$$

Týmto sme dokázali nerovnosť $n! \leq n^n$, takže aj nerovnosť $n!! \leq n^n$. Teraz sa ideme pozrieť, či existujú limity výrazov, ktorými sme ohraničili výraz v hľadanej limite.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n-1)!!} = 0. \tag{13}$$

Keďže $(2n-1)!!$ ide do nekonečna, tak prevrátená hodnota pôjde do nuly. Týmto sme dokázali, že limita dolného ohraničenia existuje. Ohraničenie zhora môžeme vyjadriť ako

$$\frac{2^n}{(2n-1)^n} = \left(\frac{2}{2n-1}\right)^n \leq \frac{2}{2n-1}.$$

Výraz sme takto mohli ohraničiť, pretože $\frac{2}{2n-1}$ pre $n > 3$ bude v intervale $(0, 1)$ a keď budeme toto číslo umocňovať, tak ho zmenšíme. Limita posledného výrazu je rovná 0.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{2n-1} = 0, \tag{14}$$

odkiaľ už dostávame hodnotu limity

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{(2n-1)!!} \leq 0.$$

Z toho vyplýva, že platí aj

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3(2n-1)!!} \leq 0,$$

čiže

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3(2n-1)!!} = 0.$$

2 Výpočet strednej hodnoty a disperzie

2.1 Padne hlava

Veľa príkladov z pravdepodobnosti je o tom, aby sme našli strednú hodnotu a disperziu, či už nejakej pravdepodobnosti, alebo rozdelenia a podobne. Túto kapitolu venujeme celú práve riešeniu takýchto príkladov. Ako prvý si zoberieme príklad o hádzaní mincou z $[18, pr.3.6]$. Zadanie je nasledovné: *Predstavme si, že hádžeme pravou mincou. Označme N ako počet hodov, pokým nám padne hlava (zahrnutý je aj posledný hod). Aká je stredná hodnota a disperzia N?*

2.1.1 Riešenie

Náhodná veličina N má geometrické rozdelenie. Z $[28, str.140]$ poznáme definíciu geometrického rozdelenia:

Definícia 2.1. *Náhodná veličina má geometrické rozdelenie s parametrom $p \in (0,1)$, ak $P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$, pre $k = 1, 2, \ldots$.*

Ďalej budeme pracovať s náhodnou veličinou preznačenou ako X. Určitá pozornosť by sa mala venovať tomu, aby sa zabránilo nejednoznačnosti vyplývajúcej zo zahrnutia konečného hodu. Niektoré definície ho zahŕňajú a vytvárajú priestor $\{1, 2, \ldots\}$, kým ostatné nie a dávajú priestor $\{0, 1, 2, \ldots\}$. V tomto prípade používame prvú definíciu, pretože konečený hod zahŕňame. Podľa našej definície je jasné, že ak $X = k$, máme $k-1$ hodov, dokým nám v k-tom hode padne hlava. Z toho vieme určiť pravdepodobnosť, že v k-tom kole padne hlava

$$P(X = k) = 0,5^{k-1}0,5 = 0,5^k.$$

Použitím štandardného výpočtu pre strednú hodnotu dostávame

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} 0,5^k k.$$

Teraz vypočítame, čomu je rovná suma.

$$E(X) = 0,5^1 + 2 \times 0,5^2 + 3 \times 0,5^3 + \ldots \tag{15}$$

Podľa D'Alambertovho kritéria [22] zistíme konvergenciu radu. Vidíme, že tento rad konverguje absolútne, pretože je to rad s nezápornými členmi a platí:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{0,5^{k+1}(k+1)}{0,5^k k}=\lim_{k\to\infty}\frac{0,5k}{k}+\lim_{k\to\infty}\frac{0,5}{k}=0,5.$$

Zistili sme, že limita je menšia ako jedna. Z toho vyplýva, že rad konverguje, čiže existuje limita čiastočného súčtu, limita prenásobená konštantou a podobne. Z [22] vieme, že ak rad s členmi a_k konverguje a má súčet A, tak konverguje aj rad s členmi ka_k, $k\in\mathbb{R}$ a má súčet kA. Teda náš rad môžeme prenásobiť konštantou $0,5$.

$$0,5E(X)=0,5^2+2\times 0,5^3+3\times 0,5^4+\dots$$

Tento prenásobený rad tiež konverguje. Môžeme ho teda znova prenásobiť konštantou. Tentokrát prenásobíme rad (-1). Novovzniknutý rad bude tiež konvergovať.

$$-0,5E(X)=-0,5^2-2\times 0,5^3-3\times 0,5^4-\dots \tag{16}$$

Z [22] vieme, že ak rady s členmi a_k, b_k konvergujú a majú súčty A, B, potom aj rad s členmi a_k+b_k konverguje a má súčet $A+B$. Teda rady (15) a (16) môžeme spolu sčítať a dostávame

$$0,5E(X)=0,5^1+2\times 0,5^2+3\times 0,5^3+\dots-0,5^2-2\times 0,5^3-3\times 0,5^4-\dots.$$

Keďže náš rad konverguje, dokonca konverguje absolútne, môžeme ho prerovnať, pretože tým sa jeho konvergencia nezmení. Teda dostávame

$$\begin{aligned}0,5E(X) &= 0,5^1+(2\times 0,5^2-0,5^2)+(3\times 0,5^3-2\times 0,5^3)+\dots\\ 0,5E(X) &= 0,5^1+0,5^2+0,5^3+\dots.\end{aligned}$$

Z pravej strany rovnice môžeme vybrať $0,5$ pred zátvorku. V zátvorke nám ostane súčet nekonečného geometrického radu, kde $q=0,5$. Týmito úpravami dostávame

$$\begin{aligned}0,5E(X) &= 0,5(1+0,5^1+0,5^2+0,5^3+\dots)\\ 0,5E(X) &= 0,5\left(\frac{1}{1-0,5}\right)\\ 0,5E(X) &= 1\\ E(X) &= 2.\end{aligned}$$

Čo už je náš hľadaný výsledok strednej hodnoty.

Teraz si to odvodíme pre všeobecné riešenie, a teda ako sa vypočíta stredná hodnota pre náhodnú veličinu s geometrickým rozdelením, pretože nám to môže pomôcť aj pri ďalších príkladoch. Pravdepodobnosť tejto náhodnej veličiny je daná ako $p(1-p)^{k-1}$. Umocnili sme to na $k-1$ kvôli tomu, že neberieme do úvahy posledný hod, a teda máme $k-1$ hodov, než nám prvýkrát padne hlava. Strednú hodnotu môžme napísať ako

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} p(1-p)^{k-1}k \\ E(X) &= \frac{p}{1-p}\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^k k \\ \frac{1-p}{p}E(X) &= (1-p) + 2(1-p)^2 + 3(1-p)^3 + 4(1-p)^4 + \dots \end{aligned}$$

Teraz rovnice prenásobíme $-(1-p)$ a rovnice spolu sčítame, odkiaľ dostávame

$$\begin{aligned} \frac{(1-p)(1-(1-p))}{p}E(X) &= (1-p)\left(1 + (1-p) + (1-p)^2 + (1-p)^3 + \dots\right) \\ E(X) &= 1 + (1-p) + (1-p)^2 + (1-p)^3 + \dots, \end{aligned}$$

čo už je suma nekonečného geometrického radu, kde $q = 1-p$, a teda môžeme napísať

$$E(X) = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}. \tag{17}$$

Teraz sa vrátime späť ku riešeniu nášho príkladu. Strednú hodnotu sme definovali ako číslo, ktoré istým spôsobom charakterizuje náhodnú veličinu. O tom, nakoľko je táto charakterizácia „dobrá“, teda ako sú hodnoty rozptýlené okolo strednej hodnoty, nám bude hovoriť disperzia náhodnej veličiny. Z $[18, str.44]$ poznáme definíciu disperzie.

Definícia 2.2. *Nech X je diskrétna náhodná veličina so strednou hodnotou $E(X)$. Disperzia náhodnej veličiny X je číslo*

$$D(X) = E[(X - E(X))^2],$$

ak táto stredná hodnota existuje.

Disperzia sa dá jednoduchšie počítať pomocou vzorca

$$D(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - (E(X))^2. \tag{18}$$

Tento jednoduchší vzorec použijeme aj my pri riešení nášho príkladu. Strednú hodnotu $E(X)$ už poznáme, teraz potrebujeme vypočítať, čomu sa rovná $E(X^2)$.

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{\infty} 0,5^k k^2.$$

Ideme vypočítať, čomu je rovná suma. Budeme postupovať podobne ako pri hľadaní $E(X)$. Najskôr dokážeme konvergenciu radu pomocou D‘Alambertovho kritéria [22]

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{0,5^{k+1}(k+1)^2}{0,5^k k^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{0,5k^2}{k^2} + \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k^2} + \lim_{k\to\infty} \frac{0,5}{k^2} = 0,5.$$

Zistili sme, že limita je menšia ako jedna, teda rad konverguje, čiže existuje limita čiastočného súčtu, limita prenásobená konštantou a podobne. Preto s ním môžeme robiť nasledujúce ekvivalentné úpravy. Najprv si rozpíšeme sumu a celú ju vynásobime $0,5^2$.

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 0,5 + 4 \times 0,5^2 + 9 \times 0,5^3 + 16 \times 0,5^4 + \dots \\ 0,5^2 E(X^2) &= 0,5^3 + 4 \times 0,5^4 + 9 \times 0,5^5 + 16 \times 0,5^6 + \dots \end{aligned}$$

Druhý riadok odpočítame od prvého a dostaneme

$$\begin{aligned} (1-0,5^2)E(X^2) &= 0,5 + 4 \times 0,5^2 + 8 \times 0,5^3 + 12 \times 0,5^4 + 16 \times 0,5^5 + \dots \\ (1-0,5^2)E(X^2) &= 0,5 + 4 \times 0,5(0,5 + 2 \times 0,5^2 + 3 \times 0,5^3 + 4 \times 0,5^4 + \dots). \end{aligned}$$

Vidíme, že výraz v zátvorke je rovný $E(X)$, preto môžeme napísať

$$\begin{aligned} (1-0,5^2)E(X^2) &= 0,5 + 2E(X) \\ E(X^2) &= \frac{0,5 + 2E(X)}{1-0,5^2} = \frac{0,5 + 2.2}{1-0,5^2} = 6. \end{aligned}$$

Teda teraz poznáme $E(X)$ aj $E(X^2)$, ktoré môžeme dosadiť do (18), odkiaľ dostávame hodnotu disperzie

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 6 - 2^2 = 2.$$

Týmto sme základný príklad vyriešili.

2.1.2 Súčty nekonečných radov

Teraz sa trochu vrátime ku súčtom nekonečných radov a ukážeme si, aké môžu byť zradné. V predchádzajúcom príklade sme mali absolútne konvergentný rad. Teraz si ukážme, ako je to s relatívne konvergentným radom. Rad je relatívne konvergentný, ak rad $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je konvergentný a rad $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ je divergentný. V našom prípade máme rad

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots.$$

Tento rad je konvergentný a limita súčtu je ln2. Keď dáme rad do absolútnej hodnoty, dostávame harmonický rad, ktorý je divergentný. Keďže je relatívne konvergentný, môžeme ho prenásobiť nejakou konštantou z množiny reálnych čísel. V našom prípade $-\frac{1}{2}$ a dostávame

$$-\frac{1}{2}S = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \dots.$$

Aj tento rad konverguje, preto ho môže sčítať s pôvodným radom a dostávame

$$\frac{1}{2}S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \dots.$$

Teraz by sme mohli chcieť pokračovať tak, ako sme to robili aj v predchádzajúcom príklade pri výpočte strednej hodnoty, a teda prerovnaním radu.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}S &= 1 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{5} + \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right) + \dots \\
\frac{1}{2}S &= 1 + (-1) + \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \dots.
\end{aligned}$$

Znova prerovnáme rad a dostávame

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}S &= 1 + (-1) + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} + \dots \\
&= 0,
\end{aligned}$$

čo je nesprávny výsledok. Chyba nastala pri prerovnaní radu, pretože z [22] vieme, že ak je rad relatívne konvergentný, tak prerovnaním radu môžeme zmeniť súčet relatívne konvergentného radu a takisto jeho prerovnaním môže z relatívne konvergentného radu vzniknúť divergentný rad. Preto je dôležité byť opatrný pri každom kroku pri úpravách nekonečných radov.

2.1.3 Návrat k príkladu 2.1, doplňujúce otázky

V príklade boli aj ďalšie podotázky, ktoré si postupne vyriešime.

A. *Na konci tohto roka vám zaplatíme 1\$, na konci budúceho roka 2\$ a tak ďalej. Efektívna úroková miera je i. Odvoďte, aká je terajšia hodnota tohto platobného toku.*

B. *Odvoďte strednú hodnotu a disperziu Poissonovho náhodného rozdelenia.*

C. *Aká je stredná hodnota a disperzia, ak X bude počet znakov predtým, ako nám padne hlava?*

A. Poďme sa pozrieť na riešenie prvej podotázky. Pod efektívnou úrokovou mierou chápeme prepočet úrokovej miery s viacnásobným pripisovaním úrokov na úrokovú mieru s jednorazovým pripisovaním úrokov. Ďalej nás zaujíma terajšia hodnota peňazí, vo financiách sa používa výraz present value [2]. Súčasná hodnota peňazí je dnešná hodnota platieb, ktoré sa uskutočnia v budúcnosti. V našom prípade bude hodnota peňazí rovná

$$PV = \frac{1}{1+i} + \frac{2}{(1+i)^2} + \frac{3}{(1+i)^3} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(1+i)^k}.$$

Teraz si vyjadríme, čomu sa rovná suma a tým dostaneme aj odpoveď na hľadanú otázku, a teda aká je súčasná hodnota peňazí. Postupovať budeme podobne, ako sme to robili aj v riešení úvodného príkladu. Najprv si podľa D‘Alambertovho kritéria dokážeme, že rad konverguje

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k+1}{(1+i)^{k+1}}}{\frac{k}{(1+i)^k}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+i} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+i)k} = \frac{1}{1+i}.$$

Pre $i > 0$ je táto limita menšia ako jedna, teda rad konverguje, čiže existuje limita čiastočného súčtu, limita prenásobená konštantou a podobne. Preto s ním môžeme robiť nasledujúce ekvivalentné úpravy. Sumu si rozpíšeme a vynásobime ju $\frac{1}{1+i}$

$$\begin{aligned} PV &= \frac{1}{1+i} + \frac{2}{(1+i)^2} + \frac{3}{(1+i)^3} + \frac{4}{(1+i)^4} \cdots \\ \frac{1}{1+i} PV &= \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{2}{(1+i)^3} + \frac{3}{(1+i)^4} + \frac{4}{(1+i)^5} \cdots \end{aligned}$$

V ďalšom kroku odpočítame druhú rovnicu od prvej

$$\frac{1+i-1}{1+i} PV = \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \frac{1}{(1+i)^4} \cdots$$

Na pravej strane rovnice vyjmeme $\frac{1}{1+i}$ pred zátvorku

$$\frac{i}{1+i} PV = \frac{1}{1+i} \left(1 + \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \frac{1}{(1+i)^4} \cdots \right)$$

V zátvorke máme súčet nekonečného geometrického radu, kde $q = \frac{1}{1+i}$, $|q| < 1$, za predpokladu, že $i > 0$, teda zátvorku môžeme napísať v tvare

$$\begin{aligned}
\frac{i}{1+i}PV &= \frac{1}{1+i}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{1+i}}\right) \\
\frac{i}{1+i}PV &= \frac{1}{1+i}\frac{1+i}{i} \\
PV &= \frac{1+i}{i^2}.
\end{aligned}$$

Ak by nastal taký prípad, že $|q| \geq 1$, bolo by to preto, že $i \in (-1, 0]$, čiže efektívna úroková miera by bola záporná. Príkladom takej úrokovej miery je EURIBOR. V takom prípade by súčet nekonečného geometrického radu divergoval, čiže by nemal konečný súčet, a teda nevedeli by sme povedať, aká je terajšia hodnota platobného toku. Týmto sme našli riešenie prvej podotázky.

B. V druhej podotázke máme nájsť strednú hodnotu a disperziu Poissonovho rozdelenia. Najprv si uvedieme definíciu tohto rozdelenia $[18, str.39]$.

Definícia 2.3. *Náhodná veličina X má Poissonovo rozdelenie s parametrom $\lambda > 0$ (označujeme $X \sim Pois(\lambda)$), ak*

$$P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},$$

pre $k = 0, 1, \ldots$.

Strednú hodnotu vyjadríme ako

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Rozpíšeme si sumu a postupne budeme robiť ekvivalentné úpravy, aby sme sa dostali k výsledku.

$$\begin{aligned}
E(X) &= e^{-\lambda}\lambda + 2e^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{2} + 3e^{-\lambda}\frac{\lambda^3}{6} + 4e^{-\lambda}\frac{\lambda^4}{24} + \ldots \\
E(X) &= e^{-\lambda}\left(\lambda + 2\frac{\lambda^2}{2} + 3\frac{\lambda^3}{6} + 4\frac{\lambda^4}{24} + \ldots\right) \\
E(X) &= e^{-\lambda}\left(\lambda + \lambda^2 + \frac{\lambda^3}{2} + \frac{\lambda^4}{6} + \frac{\lambda^5}{24} + \ldots\right) \\
E(X) &= e^{-\lambda}\lambda\left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^3}{6} + \frac{\lambda^4}{24} + \ldots\right) \\
E(X) &= e^{-\lambda}\lambda\left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \frac{\lambda^4}{4!} + \ldots\right)
\end{aligned}$$

Taylorov rozvoj pre e^x je nasledovný

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + O(x^n).$$

Tento rozvoj využijeme v našom výpočte, pretože si môžeme všimnúť, že v zátvorke je Taylorov rozvoj pre e^λ

$$E(X) = e^{-\lambda}\lambda\left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \frac{\lambda^4}{4!} + \ldots\right) = e^{-\lambda}\lambda e^\lambda = \lambda. \tag{19}$$

Z Taylorovho rozvoja pre e^λ vyplýva nasledujúca pomôcka, ktorú využijeme pri výpočte disperzie

$$e^\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}. \tag{20}$$

Z (19) vyplýva, že stredná hodnota Poissonovho rozdelenia je $E(X) = \lambda$. Teraz vypočítame disperziu. Výpočet urobíme pomocou vzorca (18). $E(X)$ už poznáme, teraz si potrebujeme vyjadriť, čomu sa rovná $E(X^2)$.

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda}\lambda + 2^2 e^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{2!} + 3^2 e^{-\lambda}\frac{\lambda^3}{3!} + 4^2 e^{-\lambda}\frac{\lambda^4}{4!} + \ldots \\
&= e^{-\lambda}\left(\lambda + 2\lambda^2 + 3\frac{\lambda^3}{2!} + 4\frac{\lambda^4}{3!} + 5\frac{\lambda^5}{4!} + \ldots\right) \\
&= e^{-\lambda}\lambda\left(1 + 2\lambda + 3\frac{\lambda^2}{2!} + 4\frac{\lambda^3}{3!} + 5\frac{\lambda^4}{4!} + \ldots\right)
\end{aligned}$$

Teraz si výraz v zátvorke prepíšeme do sumy

$$E(X^2) = e^{-\lambda}\lambda\sum_{k=1}^{\infty} k\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Vidíme, že suma sa podobá na (19), a to aj chceme, preto sa teraz pokúsime upraviť sumu. Môžeme ku k pripočítať špeciálnu nulu

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1+1)\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}. \tag{21}$$

Druhú sumu môžeme upraviť posunutím k, odkiaľ dostávame

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^\lambda. \tag{22}$$

Prvú sumu musíme viac upraviť, aby sme sa dostali k želanému výsledku. Najprv sa zbavíme člena $k-1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)\lambda^{k-1}}{(k-1)(k-2)!} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-2)!}.$$

Tým, že sme odstránili v čitateli aj menovateli $k-1$, suma nám nepôjde od 1, ale od 2. Teraz čitateľ vynásobíme špeciálnou jednotkou a upravíme na požadovaný tvar

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-2)!} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}\lambda^{1}\lambda^{-1}}{(k-2)!} = \lambda \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k}}{k!} = \lambda e^{\lambda}. \tag{23}$$

Dosadením $(22), (23)$ do (21) dostávame

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{\lambda} + \lambda.$$

Teraz budeme pokračovať vo výpočte $E(X^2)$

$$E(X^2) = e^{-\lambda}\lambda(\lambda e^{\lambda} + \lambda) = \lambda^2 + \lambda.$$

Teraz už ľahko vypočítame disperziu, a teda

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

Vidíme, že disperzia a stredná hodnota Poissonovho rozdelenia sa rovnajú, a teda vyriešili sme aj druhú podotázku.

C. Poďme sa pozrieť na riešenie tretej podotázky. Pýtajú sa nás, aká bude stredná hodnota a disperzia, ak X bude počet znakov predtým, ako padne hlava. Preoznačíme si X na X_1, kvôli tomu, že v riešení budeme využívať aj strednú hodnotu a disperziu náhodnej veličiny X zo základného príkladu. Keďže $k$krát padne znak s pravdepodobnosťou $1/2$ a raz padne hlava s pravdepodobnosťou $1/2$, tak výsledná pravdepodobnosť bude

$$P(X_1 = k) = 0,5^k 0,5,$$

kde $k = 0, 1, 2, \ldots$, pretože posledný hod nie je zahrnutý v X_1. Strednú hodnotu môžeme potom vyjadriť ako

$$E(X_1) = \sum_{k=0}^{\infty} k0,5^k 0,5 = 0,5 \sum_{k=0}^{\infty} k0,5^k = 0,5 \sum_{k=1}^{\infty} k0,5^k = 0,5E(X). \tag{24}$$

V poslednom kroku sme zmenili v sume k, ktoré už nejde od 0, ale od 1. Mohli sme to urobiť, pretože keď $k = 0$, príslušný člen sumy sa rovná nule. V príklade 3.6 sme zistili, že $E(X)$ je rovná 2. Dosadením tejto strednej hodnoty do (24) dostávame hľadanú strednú hodnotu

$$E(X_1) = 0,5E(X) = 0,5 \times 2 = 1.$$

Disperziu vypočítame pomocou disperzie $D(X)$ z úvodného príkladu

$$D(X_1) = D\left(0,5\sum_{k=1}^{\infty} k0,5^k\right) = 0,5^2 D\left(\sum_{k=1}^{\infty} k0,5^k\right) = 0,5^2 D(X) = \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{2}.$$

Čo už je naša hľadaná disperzia.

2.2 Momentová vytvárajúca funkcia

Väčšina príkladov, ktoré sme v tejto bakalárskej práci počítali, boli aplikované v bežnom živote. Či už to bolo párovanie ponožiek, alebo hádzanie mincou. Ďalší príklad, ktorým sa budeme zaoberať, už bude čisto matematický a len ťažko by sme ho našli v reálnom živote priamo v tejto podobe. Neskôr však uvidíme, že takéto výpočty majú aj praktické aplikácie. Konkrétne to bude príklad z $[20, pr.3.37]$, ktorého zadanie znie: *Ak je X z rozdelenia $N(\mu, \sigma)$ a $\lambda > 0$, vypočítajte hodnoty $E(X^2)$ a $E(e^{\lambda X})$.*

2.2.1 Riešenie

Ako prvé vyriešime, čomu je rovné $E(X^2)$. Pomôžeme si vzorcom na výpočet disperzie (18), odkiaľ vyjadríme

$$E(X^2) = D(X) + (E(X))^2.$$

Ak je X z normálneho rozdelenia $N(\mu, \sigma)$, tak potom $E(X) = \mu$ a $D(X) = \sigma^2$. Použitím týchto poznaní dostávame

$$E(X^2) = D(X) + (E(X))^2 = \sigma^2\mu^2.$$

Definícia $[18, str.59]$ normálneho rozdelenia náhodnej veličiny je nasledovná:

Definícia 2.4. *Náhodná veličina má normálne rozdelenie s parametrami μ, σ^2, ak má hustotu:*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Teda už poznáme hustotu X. Tá nám pomôže v riešení druhej časti príkladu, kde už na to pôjdeme pomocou všeobecného vzťahu na výpočet strednej hodnoty $[18, str.56]$ pre spojité náhodné veličiny.

Veta 2.5. *Ak X je spojitá náhodná veličina s hustotou f a $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je borelovská funkcia, tak*

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx, \tag{25}$$

ak tento integrál konverguje absolútne.

Funkcia hustoty normálneho rozdelenia je $f(x)$. Teraz ideme na základe týchto zistení vypočítať, čomu je rovné $E(e^{\lambda X})$.

$$E(e^{\lambda X}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\lambda x - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx. \tag{26}$$

Najprv si skúsime upraviť exponent pri eulerovom čísle, aby sme tam dostali „krajší“ výraz, z ktorého by sme mohli vidieť viac.

$$\lambda x - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} = \frac{2\sigma^2\lambda x - x^2 + 2x\mu - \mu^2}{2\sigma^2} = -\frac{x^2 - 2x(\mu + \sigma^2\lambda)}{2\sigma^2} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2},$$

V prvom zlomku upravíme čitateľ na štvorec a dostávame

$$-\frac{x^2 - 2x(\mu + \sigma^2\lambda)}{2\sigma^2} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} = -\frac{(x - (\mu + \sigma^2\lambda))^2}{2\sigma^2} + \frac{(\mu + \sigma^2\lambda)^2 - \mu^2}{2\sigma^2}.$$

Exponent sme upravili do požadovaného tvaru a pokračujeme v rovnici (26)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\lambda x - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = e^{\frac{(\mu+\sigma^2\lambda)^2 - \mu^2}{2\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-(\mu+\sigma^2\lambda))^2}{2\sigma^2}} dx = e^{\lambda\mu + \frac{\sigma^2\lambda^2}{2}}.$$

Čo už je náš požadovaný výsledok. Integrál je rovný 1, pretože výraz v integráli je hustota normálneho rozdelenia $N(\mu + \sigma^2\lambda, \sigma)$.
Výsledok druhej časti príkladu je teda rovný

$$E(e^{\lambda X}) = e^{\lambda\mu + \frac{\sigma^2\lambda^2}{2}}. \tag{27}$$

V riešení bola táto funkcia interpretovaná ako momentová vytvárajúca funkcia náhodnej premennej X. Podľa $[31, str.112]$ je definícia momentovej vytvárajúcej funkcie nasledovná.

Definícia 2.6. *Reálnu funkciu reálnej premennej*

$$M_X(t) = E(e^{tX})$$

nazveme momentovou vytvárajúcou funkciou náhodnej veličiny X.

V príklade boli ďalšie podotázky, ktoré už neboli vyriešené a my si ich postupne vyriešime. Zadania boli nasledovné

A. *Vypočítajte momentovú vytvárajúcu funkciu náhodnej premennej, ktorá ma Poissonovo rozdelenie s parametrom α a o ktorej viete, že*

$$P(Y=k)=e^{-\alpha}\frac{\alpha^k}{k!}.$$

B. *Ukážte, že ak momentová vytvárajúca funkcia X je daná $M(\lambda)$, potom môžeme počítať momenty pomocou*

$$E(X^n)=\left.\frac{d^nM(\lambda)}{d\lambda^n}\right|_{\lambda=0}. \tag{28}$$

C. *Všimnite si, že ak $Y\sim N(0,1)$, potom $X=\sigma Y+\mu$. Vypočítajte momentovú vytvárajúcu funkciu Y a použite ju na potvrdenie výpočtu momentovej vytvárajúcej funkcie X, ktorú ste vypočítali.*

A. Poďme sa pozrieť na riešenie prvej podotázky, a teda aká je momentová vytvárajúca funkcia náhodnej premennej, ktorá ma Poissonovo rozdelenie. Strednú hodnotu diskrétneho rozdelenia môžeme vypočítať ako

$$E(g(X))=\sum_{i=0}^{\infty}g(x_i)P(X=x_i).$$

V našom prípade budeme teda počítať

$$E(e^{\lambda Y})=\sum_{k=0}^{\infty}e^{\lambda k}e^{-\alpha}\frac{\alpha^k}{k!}=e^{-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}e^{\lambda k}\frac{\alpha^k}{k!}=e^{-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha e^{\lambda})^k}{k!}.$$

Teraz použijeme (20), pomocou ktorej už dostávame riešenie prvej podotázky

$$E(e^{\lambda Y})=e^{-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha e^{\lambda})^k}{k!}=e^{-\alpha}e^{\alpha e^{\lambda}}=e^{\alpha(e^{\lambda}-1)}.$$

B. Poďme sa pozrieť na riešenie druhej podotázky. Najprv je dôležité, aby sme si uvedomili, že $M(\lambda)=E(e^{\lambda X})$. Teraz sa ideme pozrieť, čomu je rovná pravá strana rovnice (28) pri prvých deriváciách. Ako prvé si to ukážeme pre prvú deriváciu

$$\frac{dM(\lambda)}{d\lambda}=\frac{d}{d\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\lambda x}f_X(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{d}{d\lambda}e^{\lambda x}\right)f_X(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}xe^{\lambda x}f_X(x)dx.$$

Môžeme si označiť $xe^{\lambda x}$ ako funkciu $g(x)$ a použijeme (25), odkiaľ dostávame

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{\lambda x} f_X(x)dx = E(Xe^{\lambda X}).$$

V zadaní sme mali vypočítať deriváciu momentu podľa lambdy za podmienky, že lambda je rovná nule. Dosadením tejto podmienky dostávame

$$E(Xe^{\lambda X}) = E(Xe^0) = E(X).$$

Vidíme, že pre prvú deriváciu to platí. Ukážeme si, že aj pre druhú deriváciu to platí.

$$\begin{aligned}\frac{d^2 M(\lambda)}{d\lambda^2} &= \frac{d^2}{d\lambda^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{d}{d\lambda}xe^{\lambda x}\right) f_X(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{\lambda x} f_X(x)dx = E(X^2 e^{\lambda X})|_{\lambda=0} = E(X^2).\end{aligned}$$

Aj v tomto prípade dosadíme podmienku zo zadania, čiže položíme lambdu rovnú nule

$$E(X^2 e^{\lambda X}) = E(X^2 e^0) = E(X^2).$$

Aj pre druhú deriváciu to platí. Teraz si ukážeme, ako vyzerá $n-$tá derivácia.

$$\begin{aligned}\frac{d^n M(\lambda)}{d\lambda^n} &= \frac{d^n}{d\lambda^n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{d^n}{d\lambda^n}e^{\lambda x}\right) f_X(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{\lambda x} f_X(x)dx = E(X^n e^{\lambda x}).\end{aligned}$$

Pre $\lambda = 0$ dostávame

$$\left.\frac{d^n M(\lambda)}{d\lambda^n}\right|_{\lambda=0} = E(X^n e^0) = E(X^n).$$

Týmto sme vyriešili aj druhú podotázku. Tento dôkaz bol urobený pre spojité náhodné veličiny, čiže pre tie, ktoré majú hustotu.

C. Poďme sa pozrieť na riešenie tretej podotázky. Teraz si vypočítame momentovú vytvárajúcu funkciu pre $Y \sim N(0,1)$, teda $E(e^{\lambda Y})$.

$$E(e^{\lambda Y}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{2\lambda y - y^2}{2}}dx. \tag{29}$$

Teraz upravíme mocninu pri e pre ďalší postup.

$$\frac{2\lambda y - y^2}{2} = -\frac{y^2 - 2\lambda y}{2} = -\frac{y^2 - 2\lambda y + \lambda^2}{2} + \frac{\lambda^2}{2} = -\frac{(y-\lambda)^2}{2} + \frac{\lambda^2}{2}.$$

Upravenú mocninu dosadíme do (29) a pokračujeme.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{2\lambda y - y^2}{2}}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-\lambda)^2}{2}+\frac{\lambda^2}{2}}dx = e^{\frac{\lambda^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-\lambda)^2}{2}}dx = e^{\frac{\lambda^2}{2}}.$$

Odkiaľ už dostávame riešenie $E(e^{\lambda Y})$, ktoré si ďalej označíme ako $g_Y(\lambda)$

$$E(e^{\lambda Y}) = g_Y(\lambda) = e^{\frac{\lambda^2}{2}}.$$

V zadaní sme mali dané, že $X = \mu + \sigma Y$. Poďme si vyjadriť, čomu sa rovná momentová vytvárajúca funkcia pre X.

$$g_X(\lambda) = E(e^{\lambda(\mu+\sigma Y)}) = e^{\lambda\mu}E(e^{\lambda\sigma Y}) = e^{\lambda\mu}g_Y(\lambda\sigma).$$

Pre $\sigma = 1$ sme vypočítali, že $g_Y(\lambda) = e^{\frac{\lambda^2}{2}}$. Odtiaľ vidíme, že $g_Y(\lambda\sigma) = e^{\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}}$. Z toho nám vyplýva

$$g_X(\lambda) = e^{\lambda\mu}e^{\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}} = e^{\lambda\mu+\frac{\sigma^2\lambda^2}{2}},$$

čo už je výsledok momentovej vytvárajúcej funkcie pre X, ktorú sme vypočítali v základnom príklade. Teda potvrdili sme výpočet a tým sme aj vyriešili tretiu podotázku.

Načo sú vlastne momentové vytvárajúce funkcie dôležité? Teraz si z [15] ukážeme, ako a kde sa dajú tieto funkcie využiť. Jedným z dôvodov je výpočet veľkej odchýlky. Nech $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, kde X_i sú nezávislé a rovnako rozdelené ako X, so strednou hodnotou $E(X) = \mu$ a momentovou vytvárajúcou funkciou ϕ. V danom prípade je pravdepodobnosť, že S_n je ďaleko od svojej strednej hodnoty rovná $n\mu$, presnejšie $P(S_n > an)$, kde $a > \mu$. Z [15] poznáme vetu o ohraničení veľkej odchýlky.

Veta 2.7. *Predpokladajme, že $\phi(t)$ je konečná pre $t > 0$. Potom pre hocijaké $a > \mu$ platí*

$$P(S_n \geq an) \leq e^{-nI(a)},$$

kde $I(a) = sup\{at - ln\phi(t) : t > 0\} > 0$.

Poďme si to ukázať na konkrétnom príklade.

2.3 Hod kockou

V [15] bol aj príklad s riešením. Zadanie príkladu: *Hádžeme n-krát pravidelnou kockou. Nech S_n je suma všetkých vašich hodov. Odhadnite pravdepodobnosť, že S_n presahuje svoju strednú hodnotu najmenej o n, pre $n = 100$ a $n = 1000$.*

2.3.1 Riešenie

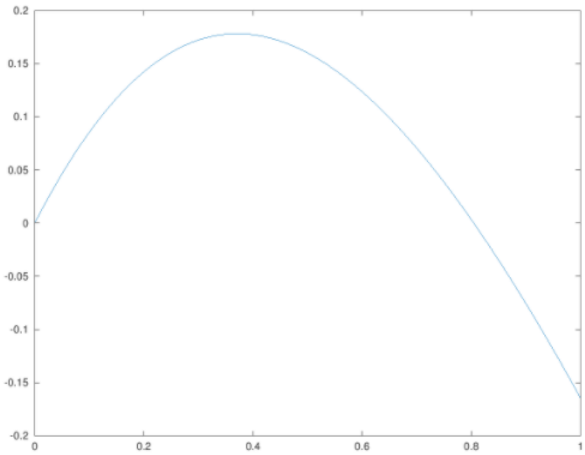
Dosadíme to do vety (2.7). Všimnite si, že stredná hodnota μ je rovná $3,5$, čiže $E(S_n) = 3,5n$. Ďalej potrebujeme nájsť hornú hranicu $P(S_n \geq 4,5n)$, t.j. $a = 4,5$. Navyše vieme, že

$$\phi(t) = E(e^{it}) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} e^{it} = \frac{e^t(e^{6t}-1)}{6(e^t-1)}.$$

My potrebujeme vypočítať $I(4,5)$, o ktorom z vety vieme, že je to pre $t > 0$ maximum funkcie

$$4,5t - ln\phi(t), \tag{30}$$

ktorej graf je na obrázku nižšie.



Obr. 3: Graf funkcie (30)

Maximum je približne v $t \approx 0,37105$. Dosadením do (30) dostávame, že $I(4,5)$ je o niečo väčší než $0,178$. Odkiaľ dostávame hornú hranicu

$$(S_n \geq 4,5n) \leq e^{-0,178n},$$

čo je okolo $0,17$ pre $n = 10$, $1,83 \times 10^{-8}$ pre $n = 100$ a $4,16 \times 10^{-78}$ pre $n = 1000$.

2.4 Momentová vytvárajúca funkcia v poisťovníctve

Teraz si ukážeme, kde sa dá momentová vytvárajúca funkcia použiť v reálnom živote. V [15] bol príklad aj s riešením z prostredia poisťovne. Tento príklad bol v skutočnosti hlavnou motiváciou pre štúdium veľkej odchýlky, švédskym štatistikom Haraldom Cramerom, ktorý pracoval ako poradca v poisťovni v roku 1930. Zadanie je nasledovné: *Predpokladajme, že poisťovňa dostáva denne trvalý tok platieb vo výške λ. Tatktiež dostáva každý deň nejaké množstvo pohľadávok. Predpokladajme, že toto množstvo pohľadávaok má strednú hodnotu μ a disperziu σ^2. Ďalej predpokladajme, že pohľadávky sú deň čo deň od seba nezávislé. Kontrolóri požadujú, aby v rámci periódy n dní, bola poisťovňa schopná pokryť svoje pohľadávky platbami získanými v rovnakej perióde alebo inak. Zastrašovaná prísnymi kontrolami, poisťovňa chce neuspokojiť kontrolórov s pravdepodobnosťou menej než nejaké malé číslo ϵ. Parametre n, μ, σ a ϵ sú fixné, ale λ je niečo, čo poisťovňa kontroluje. Nájdite, čomu je rovná λ.*

Teraz si ideme vysvetliť, ako bol príklad riešený v [15]. Podľa predpokladu má pohľadávka Y normálne rozdelenie, teda $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ a platby, ktoré pokrývajú pohľadávky, budú potom $X = \frac{Y-\mu}{\sigma}$, čiže z toho vidíme, že budú mať normálne štandardné rozdelenie, teda $X \sim N(0,1)$. Všimnime si, že potom $Y = \sigma X + \mu$. Kombinované množstvo pohľadávok môžeme napísať ako

$$\begin{aligned} X_1 + \dots X_n &= \frac{Y_1 - \mu}{\sigma} + \dots + \frac{Y_n - \mu}{\sigma} \\ \sigma(X_1 + \dots X_n) &= Y_1 + \dots Y_n - \mu - \dots - \mu \\ n\lambda = Y_1 + \dots Y_n &= \sigma(X_1 + \dots X_n) + n\mu, \end{aligned}$$

kde X_i sú nezávislé, rovnako rozdelené náhodné veličiny s rozdelením $X_i \sim N(0,1)$, takže potrebujeme nájsť ohraničenie pre

$$P\left(X_1 + \dots X_n \geq \frac{\lambda - \mu}{\sigma} n\right) \leq e^{-In}.$$

V tretej podotázke príkladu 3.37 v tejto bakalárskej práci sme vypočítali, že momentová vytvárajúca funkcia pre náhodnú veličinu s rozdelením $N(0,1)$ je

$$\phi(t) = e^{\frac{t^2}{2}}.$$

Z vety (2.7) vieme, že potrebujeme určiť, čomu je rovný I, teda musíme nájsť, čomu je rovné I =sup$\{at - \ln(\phi(t))\}$. V našom prípade je a rovné $a = \frac{\lambda-\mu}{\sigma}$ a $\ln(\phi(t)) = \frac{t^2}{2}$. Dosadením týchto výrazov do I dostávame

$$I = \sup\left\{\frac{\lambda - \mu}{\sigma} t - \frac{t^2}{2}\right\}.$$

Teraz potrebujeme túto funkciu maximalizovať pre $t > 0$. Funkciu zderivujeme podľa t a položíme rovné nule, čiže dostávame

$$\frac{\lambda - \mu}{\sigma} - t = 0.$$

Druhou deriváciou zistíme, či v bode $t = \frac{\lambda-\mu}{\sigma}$ je lokálne maximum alebo minimum. Druhá derivácia je rovná -1, z [22] vieme, že ak je druhá derivácia záporná, v bode t je maximum. Teda našli sme maximum a teraz ho dosadíme do I, odkiaľ dostávame

$$I = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda - \mu}{\sigma}\right)^2.$$

Nakoniec riešením rovnice $e^{-In} = \epsilon$ dostávame

$$\begin{aligned} e^{-In} = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda-\mu}{\sigma}\right)^2 n} &= \epsilon \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda - \mu}{\sigma}\right)^2 n &= \ln(\epsilon) \\ \lambda &= \mu + \sigma\sqrt{\frac{-2\ln(\epsilon)}{n}}. \end{aligned}$$

Čo je náš hľadaný výsledok.

3 Hádzanie mincou

3.1 Risk alebo zisk

V pravdepodobnosti sa vyskytuje množstvo príkladov o hodoch mincou. Mincou sme si hádzali už keď sme boli malí. Väčšinou s kamarátom, kedy ak padol znak, vyhral on a ak hlava, vyhrali sme my. Vtedy sme ešte nevedeli, že za touto nevinnou hrou sa ukrýva matematika. Poďme sa ale pozrieť na trochu zložitejší príklad, ktorý sa môže vyskytnúť na pohovore. Príklad je z [20, *pr.*3.5], kde je aj riešenie, ktoré si podrobne vysvetlíme. Zadanie príkladu je nasledovné: *Predstavte si, že hádžete pravou mincou. Začínate s 1$. Ak vám padne hlava, vaša pozícia sa zdvojnásobi, ak padne znak, vaša pozícia sa zníži o polovicu. Aká je očakávaná stredná hodnota, ak budete hádzať mincou donekonečna?*

3.1.1 Riešenie

Poďme sa pozrieť, ako v knihe riešili tento problém. Najprv si ukážeme, čo sa stane pri prvom hode. Pôjdeme na to cez indikátory [26]. Nech X_i vyjadruje, aká udalosť nastala v i-tom hode.

$$X_{ij} = \begin{cases} 2, & \text{padla hlava, s p.p.} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & \text{inak.} \end{cases}$$

Strednú hodnotu X_i môžeme potom vyjadriť ako

$$E(X) = \frac{1}{2}2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{5}{4}.$$

Označme si S_n ako súčin všetkých hodov. Potom $S_n = 1.X_1.X_2 \dots X_n$. Nás zaujíma $E(S_n)$. Za predpokladu, že hody sú nezávislé, stredná hodnota súčinu je súčin stredných hodnôt. Z toho vyplýva

$$E(S_n) = E\left(\prod_{i=0}^{n} X_i\right) = \prod_{i=0}^{n} E(X_i) = \left(\frac{5}{4}\right)^n.$$

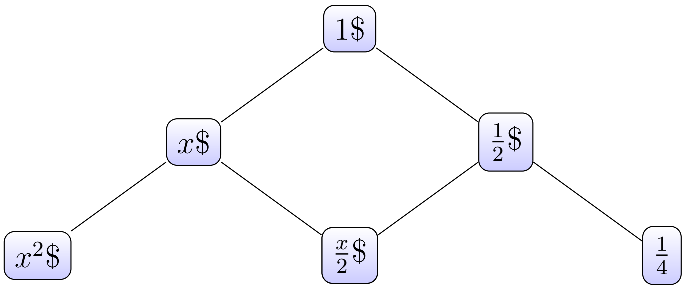
Ak n pošleme donekonečna, tak aj stredná hodnota pôjde donekonečna. V príklade boli dve rozšírenia, ktoré už neboli vyriešené a my sa ich teraz pokúsime vyriešiť.

A. *Predstavte si, že ak padne hlava, tak vaša hodnota narastie x-krát, namiesto* 2. *Klasifikujte dlhodobé správanie ako funkciu od x.*

B. *Predstavte si, že ak padne hlava, tak vaša hodnota narastie x-krát a ak padne znak, hodnota klesne $y < 1$ krát. Klasifikujte dlhodobé správanie ako funkciu od x a y.*

A. Poďme sa pozrieť na prvú podotázku. Na začiatku si nakreslíme jednoduchý strom, ktorý nám znázorňuje, ako sa bude správať hodnota našich peňazí po prvých hádzaniach.

Obr. 4: Binárny strom reprezentujúci prvé hody kockou



Označme si S_1 ako náhodnú premennú po i-tom hode. S_1 je prvý koreň nášho stromu. Stredná hodnota S_1 sa dá vyjadriť ako

$$E(S_1) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}.$$

Potom strednú hodnotu S_2 môžeme vyjadriť ako

$$E(S_2) = \frac{1}{2}xE(S_1) + \frac{1}{2}\frac{1}{2}E(S_1) = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)E(S_1) = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)^2,$$

kde $E(S_1)$ vyjadruje strednú hodnotu predchádzajúceho kroku. Teda máme na výber dve možnosti, buď sa nám hodnota peňazí zvýši x-krát, alebo sa zníži o polovicu. Keďže teraz rátame strednú hodnotu v druhej vetve stromu, musíme tam započítať aj prvú vetvu, preto obidve možnosti vynásobíme strednou hodnotou predchádzajúceho kroku. Vyzerá to, že pre S_n bude stredná hodnota nasledovná:

$$E(S_n) = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)^n.$$

Teraz to dokážeme pomocou indukcie. Pre $n = 1$ sme už vyššie ukázali, že to platí. Ako indukčný predpoklad máme $E(S_n) = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)^n$. Teraz si ukážeme, či to platí aj pre $n+1$.

$$E(S_{n+1}) = \frac{1}{2}xE(S_n) + \frac{1}{2}\frac{1}{2}E(S_n) = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)E(S_n).$$

Využitím indukčného predpokladu dostávame

$$E(S_{n+1}) = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)E(S_n) = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)^{n+1}.$$

Týmto sme dokončili dôkaz matematickou indukciou. Teda vyriešili sme prvú podotázku. Tento príklad by sa dal riešiť takisto aj cez indikátory a dostali by sme sa k rovnakému výsledku. Nech X_i vyjadruje, aká udalosť nastala v i-tom hode.

$$X_{ij} = \begin{cases} x, & \text{padla hlava, s p.p.} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & \text{inak .} \end{cases}$$

Strednú hodnotu X_i môžeme potom vyjadriť ako

$$E(X_i) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}.$$

Strednú hodnotu očakávanej výhry po n hodoch vyjadríme

$$E(S_n) = E\left(\prod_{i=0}^{n} X_i\right) = \prod_{i=0}^{n} E(X_i) = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{2x+1}{4}\right)^n.$$

B. Riešenie druhej podotázky sa v zásade nelíši od riešenia prvej. Hodnota peňazí nám bude klesať $y < 0$ násobne. Vyjadríme to cez indikátory, a teda X_i vyjadruje, aká udalosť nastala v i-tom hode.

$$X_i = \begin{cases} x, & \text{padla hlava, s p.p.} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{y}, & \text{inak.} \end{cases}$$

Strednú hodnotu X_i môžeme potom vyjadriť ako

$$E(X_i) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = \frac{x+y}{2}.$$

Strednú hodnotu očakávanej výhry po n hodoch vyjadríme ako

$$E(S_n) = E\left(\prod_{i=0}^{n} X_i\right) = \prod_{i=0}^{n} E(X_i) = \left(\frac{x+y}{2}\right)^n.$$

3.2 Kto je na tom lepšie?

Pri príkladoch o minciach naďalej ostávame. Teraz si ukážeme ďalší príklad, ktorý bol spomenutý v knihe [7, $str.$25]. Jeho zadanie je nasledovné: *Kamila a Kristína hrali nasledujúcu hru. Zobrali si mincu, ktorá mala na jednej strane hlavu a na druhej znak. Potom touto mincou hádzali dovtedy, kým prvýkrát padli po sebe dve hlavy alebo v danom poradí znak, hlava. V prvom prípade vyhrala Kristína, v druhom Kamila. Ktorá z nich je na tom lepšie? V akom pomere je pravdepodobnosť ich výhier?*

3.2.1 Riešenie

V knihe bol príklad aj vyriešený. My si teraz postupne vysvetlíme toto riešenie. Kristína vyhrá, ak padne $\{HH\}$, Kamila ak padne $\{ZH\}$. Môžeme uvažovať dve možnosti. Buď hra niekedy skonči, alebo hra nikdy neskončí. Poďme sa pozrieť na to, či je vôbec možné aby hra nikdy neskončila. Hra sa neskončí, ak od druhého kola padá iba znak. Teda ak v prvom kole padne s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$ znak, tak podľa geometrickej pravdepodobnosti (2.1) bude od druhého kola padať znak s pravdepodobnosťou $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. Ak v prvom kole padne hlava s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$, tak v druhom môže padnúť znova buď hlava alebo znak. Ak padne znak, tak vieme, že bude padať stále s pravdepodobnosťou $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. Pravdepodobnosť, že hra neskončí ($= P(N)$), a teda od druhého kola budú padať iba znaky, môžeme napísať ako

$$P(N) \;=\; \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Keďže sa pozeráme na sitáciu, že hra nikdy neskončí, budeme hádzať donekonečna mincou. Teraz urobíme limitu pravdepodobnosti, že hra nikdy neskončí.

$$P(N) \;=\; lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0. \tag{31}$$

Vidíme, že hra nikdy neskončí s nulovou pravdepodobnosťou, čiže hra musí raz skončiť s pravdepodobnosťou jedna. Poďme teraz vypočítať jednotlivé pravdepodobnosti výhier dievčat. V prvom kole môže s rovnakou pravdepodobnosťou, čiže $\frac{1}{2}$, padnúť hlava aj znak. Ak padne ako prvý znak, vyhráva Kamila, pretože uvažujeme, že hra niekedy skončí, a teda ak bude niekoľkokrát za sebou padať znak, raz musí padnúť aj hlava. Akonáhle padne hlava, vyhráva Kamila. Pravdepodobnosť, že vyhrá Kamila je teda $P(\textit{vyhrá Kamila}|\textit{padol znak})P(\textit{padol znak}) = \frac{1}{2} \times 1 = 0,5$. Pravdepodobnosť, že vyhrá Kristína je rovná nule, teda $P(\textit{vyhrá Kristína}|\textit{padol znak})P(\textit{padol znak}) = \frac{1}{2} \times 0 = 0$. Poďme sa pozrieť na druhý prípad. S pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$ môže padnúť v prvom kole hlava. Kamila v takomto prípade môže vyhrať s rovnakou pravdepodobnosťou ako Kristína, pretože ak v druhom kole padne s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$ hlava, automaticky vyhráva Kristína. Ak v druhom kole s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$ padne znak, vyhráva Kamila, pretože vieme, že hra niekedy skončí, a teda raz musí padnúť hlava, čiže vyhráva Kamila. Z toho vieme určiť pravdepodobnosť výhry jednotlivých dievčat, ak padne v prvom kole hlava, a teda pre Kamilu, je to rovné $P(\textit{vyhrá Kamila}|\textit{padla hlava})P(\textit{padla hlava}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 0,25$. Pre Kristínu je to $P(\textit{vyhrá Kristína}|\textit{padla hlava})P(\textit{padla hlava}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 0,25$. Celkovú pravdepodobnosť môžeme teda napísať

$$\begin{aligned}
P(Kamila) &= P(\textit{vyhrá Kamila}|\textit{padol znak})P(\textit{padol znak}) + \\
&+ P(\textit{vyhrá Kamila}|\textit{padla hlava})P(\textit{padla hlava}) \\
P(Kamila) &= 0,5 + 0,25 = 0,75 \\
P(Kristina) &= P(\textit{vyhrá Kristína}|\textit{padol znak})P(\textit{padol znak}) + \\
&+ P(\textit{vyhrá Kristína}|\textit{padla hlava})P(\textit{padla hlava}) \\
P(Kristina) &= 0 + 0,25 = 0,25,
\end{aligned}$$

čiže lepšie je na tom Kamila. V príklade sme mali určiť, aký je pomer výhry jednotlivých dievčat. Pravdepodobnosti ich výhier už poznáme, a teda hľadaný pomer pravdepodobnosti výhry Kamily ku výhre Kristíny je rovný

$$\frac{0,75}{0,25} = \frac{3}{1}. \tag{32}$$

Čiže hľadaný pomer je 3:1.

Tento príklad sme si naprogramovali aj v R. Porogram nám vypočíta, kto v danej hre vyhral. Spustili sme ho 100 000-krát a program nám vypočítal, koľkokrát vyhrala Kamila a koľkokrát vyhrala Kristína. V nasledujúcej tabuľke je napísané, koľkokrát ktorá vyhrala, ak Kamila mala vyhrať, keď padne ZH a Krstína, keď padne HH.

Tabuľka 5: Porovnanie počtu výhier medzi Kamilou a Kristínou

Kamila	Kristína
74937	25063

Z tabuľky vidíme, že Kamila naozaj vyhráva častejšie ako Kristína a je to približne v priemere 75:25. Teda Kamila vyhráva s pravdepodobnosťou 75%.

Za vyriešeným príkladom v knihe boli ďalšie rozšírenia tohto príkladu, ktoré už neboli vyriešené. My si zoberieme jedno rozšírenie a postupne si vysvetlíme jeho riešenie. Zadanie:

Uvažujte to isté zadanie ako v príklade ,,Kto je na tom lepšie?"s tým, že tentokrát si dievčatá vybrali iné skupiny. Kamila vyhrá, ak padne ZHH, Kristína vyhrá, ak padne HHZ. Predpokladajte, že sa hra skončí.

Teraz si ukážeme riešenie tohto rozšírenia. V zadaní máme napísané, že máme predpokladať, že hra skončí. My si teraz ukážeme, prečo je v zadaní takýto predpoklad. Uvažujme situácie, kedy hra neskončí. Ako prvý si vezmeme prípad, že bude padať iba znak. Z geometrickej pravdepodobnosti (2.1) vieme, že pravdepodobnosť takejto udalosti je rovná

$$P(ZZ\dots Z) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Prípad, že bude padať iba hlava sa vypočíta ekvivalentne, pretože hlava padne s rovnakou pravdepodobnosťou ako znak. Teda dostávame

$$P(HH\dots H) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Ďalší prípad, kedy hra neskončí je ten, že bude padať striedavo hlava, znak. Obidva môžu padnúť s rovnakou pravdepodobnosťou, čiže dostávame

$$P(HZHZ\dots HZ) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\dots\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n}.$$

V tomto prípade je jedno, či padne ako prvý znak, alebo hlava, pretože ako sme už spomínali, obidva môžu padnúť s rovnakou pravdepodobnosťou, a teda aj výsledná pravdepodobnosť bude rovnaká.

Ostal nám ešte jeden prípad a to taký, že nám v prvom kole padne hlava a v ostatných bude padať iba znak. Pravdepodobnosť toho, že v prvom kole padne hlava je $\frac{1}{2}$. Pravdepodobnosť, že bude padať stále iba znak je rovný $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, z toho dostávame výslednú pravdepodobnosť, a teda

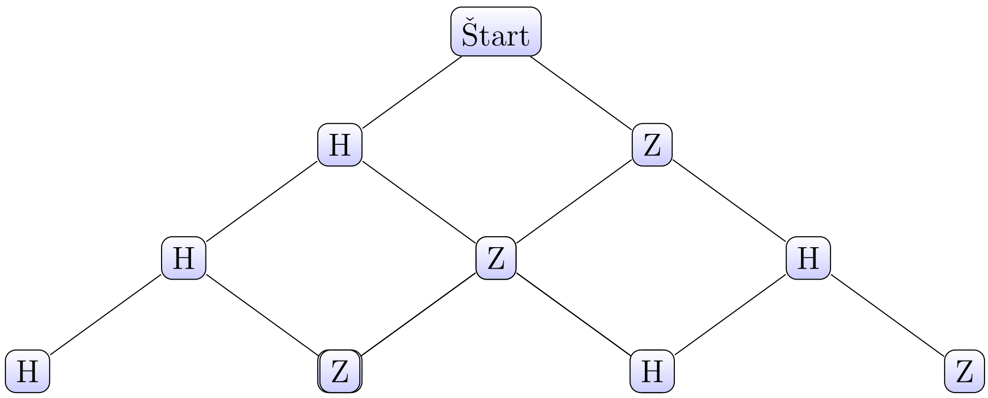
$$P(HZZ\dots Z) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n}.$$

Keďže toto sú prípady, kedy hra nikdy neskončí, očakávame, že n pôjde donekonečna. Teda urobíme limitu súčtu týchto pravdepodobnosti, odkiaľ zistíme, aká je táto pravdepodobnosť.

$$\begin{aligned} P(N) &= lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right) && (33)\\ &= 0. && (34) \end{aligned}$$

Vidíme, že pravdepodobnosť takýchto prípadov ide v limite do nuly, takže situácia, že hra nikdy neskončí, nastane s nulovou pravdepodobnosťou. Z toho je zrejme, že hra sa raz skončí s pravdepodobnosťou jedna.
Vráťme sa ku riešeniu príkladu. Pomôže nám, ak si nakreslíme strom s prvými udalosťami, ktoré môžu nastať.

Obr. 5: Binárny strom reprezentujúci prvé hody mincou



Poďme si postupne rozobrať každý prípad. Hlava alebo znak padne vždy s rovnakou pravdepodobnosťou, a to $\frac{1}{2}$. Ak v prvom kole padne hlava, a aj v druhom kole padne hlava, tak určite vyhrá Kristína, pretože hra niekedy skončí. Teda aj keby niekoľko kôl po sebe padala hlava, tak raz musí padnúť znak a vtedy vyhráva Kristína. Ak v prvom kole padla hlava a v druhom kole padne znak, tak určite vyhrá Kamila. Teraz si odvodíme, prečo vyhrá Kamila. Keďže padol znak, po druhom kole máme situáciu HZ. V ďalšom, teda treťom kole, môže padnúť znova hlava alebo znak. Obidve dievčatá majú vo výherných trojkombináciach, že padnú dve hlavy po sebe. Na to aby vyhrala Kristína, potrebujeme kombináciu HHZ, ale keďže teraz uvažujeme situáciu, že v druhom kole padol znak, tak automaticky raz vyhrá Kamila, pretože ak padnú dve hlavy a pred nimi už padol znak je to výherná kombinácia pre Kamilu. Pre situáciu, že v prvom kole padne hlava sú pravdepodobnosti pre jednotlivé dievčatá nasledovné:

$$\begin{aligned} P(\textit{vyhrá Kamila}|\textit{padla hlava})P(\textit{padla hlava}) &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 0,25 \\ P(\textit{vyhrá Kristína}|\textit{padla hlava})P(\textit{padla hlava}) &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 0,25. \end{aligned}$$

Ak v prvom kole padol znak, tak určite vyhrá Kamila, kvôli tomu, čo sme si spomínali vyššie. Čiže my očakávame, že hra raz skončí, takže budú musieť padnúť dve hlavy za sebou. Keďže ako prvý padol znak, dostaneme situáciu ZHH, čo je výhra Kamily. Teda pravdepodobnosť pre dievčatá bude rovná

$$\begin{aligned} P(\textit{vyhrá Kamila}|\textit{padol znak})P(\textit{padol znak}) &= \frac{1}{2} \times 1 = 0,5 \\ P(\textit{vyhrá Kristína}|\textit{padol znak})P(\textit{padol znak}) &= \frac{1}{2} \times 0 = 0. \end{aligned}$$

Celkovú pravdepodobnosť už dostaneme sčítaním jednotlivých pravdepodobností, odkiaľ dostávame

$$\begin{aligned} P(Kamila) &= 0,25 + 0,5 = 0,75 \\ P(Kristina) &= 0,25 + 0 = 0,25. \end{aligned}$$

Vidíme, že Kamila je na tom lepšie. Overíme si to ešte v programe, ktorý sme naprogramovali. V programe iba zmeníme výherné skupiny, ktoré si dievčatá určili. V tabuľke je počet, koľkokrát obe vyhrali, keď sme program spustili 100 000-krát.

Tabuľka 6: Porovnanie počtu výhier medzi Kamilou a Kristínou

Kamila	Kristína
75029	24971

Vidíme, že Kamila naozaj vyhráva častejšie ako Kristína. Týmto sme si náš výpočet potvrdili.

4 Príklady s hracími kartami

4.1 Padne eso

V tejto kapitole sa budeme zaoberať príkladmi o kartách. Ako prvý si rozoberieme príklad z [20, *pr*.3.21], ktorého zadanie je nasledovné: *Ak ťahám dve karty s návratom z obyčajnej sady kariet, aká je pravdepodobnosť, že obe sú esá? Aká ak ťahám bez návratu?*

4.1.1 Riešenie

S návratom znamená, že keď vytiahnem prvýkrát kartu, zapíšem si jej hodnotu a vrátim ju naspäť do balíčka, odkiaľ vyberám druhýkrát kartu.
Máme 13 hodnôt kariet a z každej hodnoty máme po 4 druhy (srdcové, pikové, kárové a krížové). Teda celkovo máme 52 kariet, z ktorých štyri sú esá. Pravdepodobnosť vytiahnutia esa v prvom kole je rovná

$$\mathrm{P}(\text{vytiahneme eso v prvom kole}) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}.$$

Pravdepodobnosť vytiahnutia esa v druhom kole je rovnaká, a teda tiež $\frac{1}{13}$. Celková pravdepodobnosť s návratom kariet bude teda súčin týchto pravdepodobností

$$\mathrm{P}(\text{vytiahneme dve esá s návratom}) = \frac{1}{13}\frac{1}{13} = \frac{1}{169}.$$

Ak by sme ťahali bez návratu, tak pravdepodobnosť vytiahnutia esa v prvom kole by bola rovnaká ako v prvom prípade, a teda $\frac{1}{13}$. Lenže teraz už kartu nevraciame naspäť, teda v balíku máme už iba 51 kariet a rátame s tým, že vytiahnutá karta bola eso. V balíčku nám ostali už iba tri esá, čiže pravdepodobnosť, že v druhom kole ťahania vytiahneme eso je rovná $\frac{3}{51}$. Celková pravdepodobnosť bude súčin týchto pravdepodobností

$$\mathrm{P}(\text{vytiahneme dve esá bez návratu}) = \frac{1}{13}\frac{3}{51} = \frac{1}{221}.$$

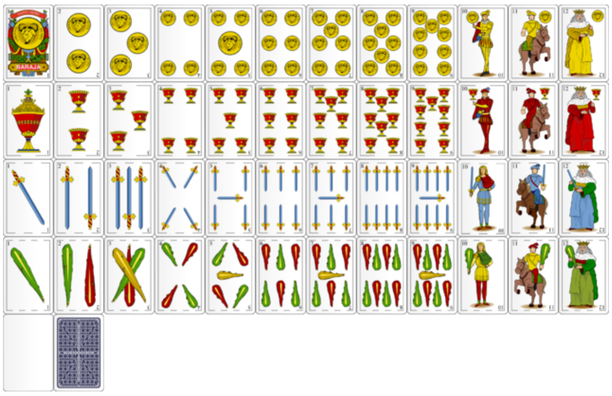
V príklade boli ďalšie podotázky:

A. *Aká je pravdepodobnosť, že sme dostali dve esá v Pontoone?*

B. *Aká je pravdepodobnosť vytiahnutia troch es s a bez návratu?*

C. *Aká je pravdepodobnosť vytiahnutia esa a kráľa bez návratu?*

A. Poďme sa pozrieť na riešenie prvej podotázky. Najskôr si vysvetlíme, čo je to Pontoon [29]. Pontoon je exotickejšia varianta hry Blackjack. Pontoon používa $4-8$ balíčkov španielskych kariet (obr. 16), pričom každý balíček obsahuje 48 kariet - 52 originálnych kariet, z ktorých sú odobrané 4 desiatky. Na začiatku hry sa rozdajú hráčom dve karty, ktoré sú otočené lícom nahor a dealerovi sa rozdajú tiež dve karty, ktorých hodnotu ale nevidíme. Hráč sa snaží o to, aby jeho karty dali dokopy súčet 21. Podľa toho, akú má hodnotu kariet sa rozhodne, či chce ešte jednu kartu alebo bude hrať iba s tými dvomi, čo má. Po rozhodnutí dealer otáča svoje karty. Výhrava ten, kto má bližší alebo rovný súčet kariet 21.



Obr. 6: Španielske karty [12]

Zoberme si, že máme 4 balíky španielskych kariet. Čiže dokopy budeme mať 192 kariet, v ktorých sa bude vyskytovať 16 es. Tým, že karty sa rozdajú hneď na začiatku, uvažujeme o tom ako o ťahaní bez návratu. Teda pravdepodobnosť, že prvá karta bude eso, je rovná

$$\mathrm{P}(\text{vytiahneme prvé eso}) = \frac{4}{192}.$$

Pravdepodobnosť, že druhá karta bude eso je rovná $\frac{15}{191}$, pretože uvažujeme, že sme už jedno eso vytiahli. Celková pravdepodobnosť bude rovná

$$\mathrm{P}(\text{vytiahneme dve esá bez návratu}) = \frac{4}{192}\frac{15}{191} = \frac{5}{764} \doteq 0,0065445.$$

V nasledujúcej tabuľke je uvedené, aká by bola pravdepodobnosť pre každý možný počet (#) balíčkov.

Tabuľka 7: Pravdepodobnosti pre rôzny počet balíkov

# balíkov	# es	# kariet	P(dostali sme 2 esá)
4	16	192	$\frac{16}{192} \cdot \frac{15}{191} = \frac{5}{764} \doteq 0,0065445$
5	20	240	$\frac{20}{240} \cdot \frac{19}{239} = \frac{19}{2868} \doteq 0,0066248$
6	24	288	$\frac{24}{288} \cdot \frac{23}{287} = \frac{23}{3444} \doteq 0,0066783$
7	28	336	$\frac{28}{336} \cdot \frac{27}{335} = \frac{9}{1340} \doteq 0,0067164$
8	32	384	$\frac{32}{384} \cdot \frac{31}{383} = \frac{31}{4359} \doteq 0,0071117$

Z tabuľky vidíme, že čím viac máme balíkov, tým je pravdepodobnosť, že dostaneme dve esá väčšia, ale rozdiel medzi tým je len minimálny.

B. Druhú podotázku budeme riešiť rovnako, ako sme riešili príklad. Najprv si ukážeme, keď ťaháme karty s návratom. Máme vytiahnuť tri esá a po každom ťahaní kartu vraciame späť do balíčka, čiže pri každom ťahaní máme pravdepodobnosť vytiahnutia esa rovnú $\frac{1}{13}$. Celková teda bude rovná

$$\text{P(vytiahneme tri esá s návratom)} = \frac{1}{13}\frac{1}{13}\frac{1}{13} = \frac{1}{2197}.$$

Ak by sme ťahali bez návratu, v každom kole budeme rozmýšľať, že sme v predchádzajúcom vytiahli eso a nevrátili ho naspäť do balíčka. Teda v prvom kole bude pravdepodobnosť rovná $\frac{1}{13}$. V druhom kole sme už vytiahli jedno eso, teda pravdepodobnosť, že znova vytiahneme eso bude rovná $\frac{3}{51}$. V treťom kole rozmýšľame tak ako v druhom, čiže už sme vytiahli dve esá a pravdepodobnosť bude rovná $\frac{2}{50}$. Celková pravdepodobnosť je rovná

$$\text{P(vytiahneme tri esá bez návratu)} = \frac{1}{13}\frac{3}{51}\frac{2}{50} = \frac{1}{5525}.$$

C. V tretej podotázke sa nás pýtali na pravdepodobnosť vytiahnutia kráľa a esa bez návratu. Pravdepodobnosť vytiahnutia esa v prvom kole je rovná $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$, pretože esá sú štyri a kariet je 52. V druhom kole počítame s tým, že v prvom sme vytiahli eso a nevrátili sme ho späť do balíčka, teda máme tam už iba 51 kariet. Tentokrát chceme vytiahnuť kráľa. Tí sú v balíčku stále ešte štyria, teda pravdepodobnosť, že v druhom kole vytiahnem kráľa je rovná $\frac{4}{51}$. Celková pravdepodobnosť je rovná

$$\text{P(vytiahneme eso a kráľa bez návratu)} = \frac{1}{13}\frac{4}{51} = \frac{4}{663}.$$

4.2 Rozdávač kariet

Ďalší príklad zoberieme zo zbierky skúškových príkladov [30] od H. Tijmsa, kde sú uvedené aj riešenia týchto príkladov. Konkrétne si zoberieme príklad 8E-14, ktorého zadanie je nasledovné: *V pokrovej hre s tromi hráčmi A, B, C, rozdávač kariet je vybraný nasledujúcim spôsobom. V poradí $ABCABC\ldots$ sú rozdávané karty z premiešaného balíka kariet hráčom, pokým jeden z nich nedostane eso. Prvý hráč, ktorý dostane eso, začína hru ako rozdávač kariet. Myslíte si, že každý hráč má rovnakú šancu stať sa rozdávačom kariet?*

4.2.1 Riešenie

Teraz si vysvetlíme riešenie tohto príkladu z [30]. Nech P_k je pravdepodobnosť, že pri k-tej karte sa objaví prvé eso. Potom pomocou vety o pravdepodobnosti prienikov udalostí (1.7) môžeme vyjadriť aj pravdepodobnosť P_k. Pripomeňme si, ako vyzerá zápis takej pravdepodobnosti.

$$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)\ldots P(A_n|A_1\ldots A_{n-1}),$$

kde $P(A_1)$ je pravdepodobnosť, že prvá karta bola eso. $P(A_2|A_1)$ je pravdepodobnosť, že druhá karta bola eso, za podmienky, že prvá karta nebola eso. $P(A_n|A_1\ldots A_{n-1})$ je pravdepodobnosť, že n-tá karta bola eso, za podmienky, že $n-1$ kariet pred ňou neboli eso. Z toho vyplýva

$$\begin{aligned}
P_1 &= \frac{4}{52}\\
P_2 &= \frac{48}{52}\frac{4}{51}\\
&\vdots\\
P_k &= \frac{48}{52}\frac{47}{51}\ldots\frac{48-k+2}{52-k+2}\frac{4}{52-k+1}, k = 3,\ldots,49.
\end{aligned}$$

Traja hráči nemajú rovnakú šancu stať sa rozdávačom kariet. Pre $p = A, B, C$, nech r_p je pravdepodobnosť, že hráč p sa stane rozdávačom kariet. Potom $r_A > r_B > r_C$, pretože pravdepodobnosť P_k je klesajúca v k. Teraz si ukážeme, prečo je P_k klesajúca. Podľa výpočtu prvých dvoch pravdepodobností, teda P_1 a P_2, vidíme, že P_2 je naozaj menšia než P_1, a teda klesla. Poďme sa pozrieť, ako to bude medzi členom $k-1$ a k. My predpokladáme, že $P_{k-1} > P_k$. Teraz sa to pokúsime dokázať.

$$
\begin{aligned}
P_{k-1} &> P_k \\
\frac{48}{52}\frac{47}{51}\cdots\frac{48-k+3}{52-k+3}\frac{4}{52-k+2} &> \frac{48}{52}\frac{47}{51}\cdots\frac{48-k+2}{52-k+2}\frac{4}{52-k+1}.
\end{aligned}
$$

Vidíme, že prvé členy sa nám poškrtajú a ostane nám

$$
\begin{aligned}
\frac{48-k+3}{52-k+3}\frac{4}{52-k+2} &> \frac{48-k+3}{52-k+3}\frac{48-k+2}{52-k+2}\frac{4}{52-k+1} \\
1 &> \frac{48-k+2}{52-k+1} \\
52-k+1 &> 48-k+2 \\
53 &> 50.
\end{aligned}
$$

Teda vidíme, že naozaj je P_k menšia ako P_{k-1}. Takto by sme to mohli dokázať pre všetky členy a teda P_k je klesajúca v k. Teraz ideme pokračovať ďalej v riešení príkladu. Pravdepodobnosť jednotlivých hráčov, že sa stanú rozdávačmi kariet, sa môže vypočítať nasledovne

$$
\begin{aligned}
r_A &= P_1 + P_4 + P_7 + P_{10} + P_{13} + \dots P_{49} = \sum_{n=0}^{16} P_{1+3n} = 0,3600 \\
r_B &= P_2 + P_5 + P_8 + P_{11} + P_{14} + \dots P_{47} = \sum_{n=0}^{15} P_{2+3n} = 0,3328 \\
r_C &= P_3 + P_6 + P_9 + P_{12} + P_{15} + \dots P_{48} = \sum_{n=0}^{15} P_{2+3n} = 0,3072.
\end{aligned}
$$

r_B, r_C pôjdu v sume iba po $n = 15$, pretože ak by aj oni mali $n = 16$, to by už určite hráč pred nimi musel dostať eso. Ak by boli všetky štyri esá na posledných štyroch miestach, tak rozdávačom kariet by sa stal hráč, ktorý by dostal kartu najviac na 49-tom mieste a na tom mieste dostane kartu hráč A. Týmto sme si ukázali riešenie z [30].

Skúsme sa pozrieť na to, ako by vyzeralo rozšírenie tohto príkladu pre všeobecné riešenie. Toto rozšírenie v pôvodnom príklade nebolo. Zadanie bude rovnaké, zmení sa iba počet hráčov, ktorý bude teraz N. Počet balíčkov kariet bude n, čiže budeme mať $52n$ kariet. Prvý hráč, ktorý dostane eso, sa stane rozdávačom kariet.

Riešenie: Znova, P_k je pravdepodobnosť, že pri k-tej karte sa objaví prvé eso. Potom

$$P(A_1A_2\dots A_{52n}) = P(A_1)P(A_2|A_1)\dots P(A_{52n}|A_1\dots A_{52n-1}).$$

Z toho vyplýva

$$\begin{aligned}
P_1 &= \frac{4}{52}\\
P_2 &= \frac{48}{52}\frac{4}{51}\\
&\vdots\\
P_k &= \frac{48n}{52n}\frac{48n-1}{52n-1}\dots\frac{48n-k+2}{52n-k+2}\frac{4n}{52n-k+1}, k = 3,\dots,52n-4n+1.
\end{aligned}$$

Ani v tomto prípade nemajú hráči rovnakú šancu stať sa dealerom. Nech r_p je pravdepodobnosť, že hráč p sa stane rozdávačom kariet pre $p = X_1, X_2, X_3, \dots, X_N$. Potom $r_{X_1} > r_{X_2} > r_{X_3} > \dots > r_{X_N}$, pretože pravdepodobnosť P_k je klesajúca v k, pričom by sme to dokázali tak, ako v prvom príklade, len s tým, že teraz nám k môže ísť ďalej ako 49. Pravdepodobnosť jednotlivých hráčov, že sa stanú rozdávačmi kariet sa môže vypočítať nasledovne

$$\begin{aligned}
r_{X_1} &= \sum_{i=0}^{\lfloor\frac{52n-4n}{N}\rfloor} P_{1+Ni}\\
r_{X_2} &= \sum_{i=0}^{\lfloor\frac{52n-4n-1}{N}\rfloor} P_{2+Ni}\\
&\vdots\\
r_{X_j} &= \sum_{i=0}^{\lfloor\frac{52n-4n-(j-1)}{N}\rfloor} P_{j+Ni}\\
&\vdots\\
r_{X_N} &= \sum_{i=0}^{\lfloor\frac{52n-4n-(N-1)}{N}\rfloor} P_{N+Ni}.
\end{aligned}$$

Horné ohraničenie v sume sme vypočítali pomocou toho, že k ide po $52n - 4n + 1$ a pravdepodobnosť jednotlivých hráčov sa cyklicky opakuje, teda riešili sme

$$\begin{aligned}
N + Ni &= 52n - 4n + 1\\
i &= \frac{52n - 4n - (N-1)}{N}.
\end{aligned}$$

Zlomok môže vyjsť aj ako desatinné miesto. Keďže počet kariet je celé číslo, ošetrili sme to tým, že sme použili dolnú medzu čísla i.

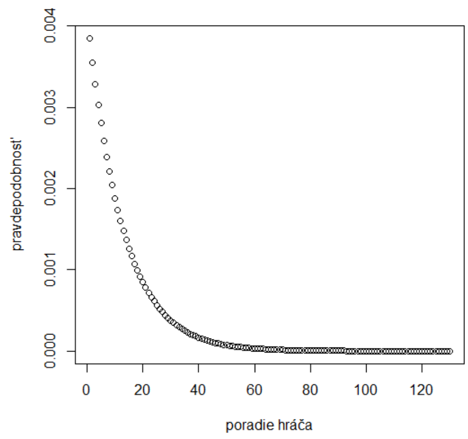
4.2.2 Výsledky z R

V programe R sme si naprogramovali kód, ktorý nám vypočíta pravdepodobnosti pre jednotlivých hráčov. Už sme si ukázali, že pravdepodobnosť jednotlivých hráčov je klesajúca s idúcim poradím, čiže $r_{X_1} > r_{X_2} > r_{X_3} > \ldots > r_{X_N}$. Teraz si ukážeme graficky a aj tabuľkovo, že to je naozaj tak. V nasledujúcej tabuľke v prvom stĺpci je počet hráčov, v druhom stĺpci je počet balíčkov, v treťom stĺpci je pravdepodobnosť, že hráč X_1 sa stane rozdávačom, v štvrtom, že hráč X_2 a v poslednom, že hráč X_N sa stane rozdávačom. Do tabuľky sme nepísali pravdepodobnosti všetkých hráčov, pretože ak je naše N rovné 130, tabuľka by bola veľmi dlhá a neprehľadná. Preto je klesajúcosť pravdepodobností vidieť lepšie na grafe.

Tabuľka 8: Jednotlivé pravdepodobnosti pre rôzny počet hráčov a rôzny počet balíčkov

N	n	r_{X_1}	r_{X_2}	$\ldots$	r_{X_N}
3	1	0,36000	0,33281	...	0,30719
25	1	0,08653	0,08089	...	0,01080
54	1	0,07692	0,07239	...	0,00000
64	4	0,01928	0,01788	...	0,000065
120	7	0,01098	0,01017	...	0,000000146
130	20	0,00384	0,00355	...	0,0000000697

Všimnime si tretí riadok v tabuľke. Vyšlo nám, že posledný hráč má nulovú pravdepodobnosť, že sa stane rozdávačom. Je to kvôli tomu, že hráčov je 54 a keďže máme iba jeden balík kariet, je ich dokopy 52, teda posledným dvom hráčom sa neujde žiadna karta, nie to ešte eso. Teraz si ukážeme graficky (obr. 7), ako vyšla pravdepodobnosť pre 130 hráčov, ak je 20 balíkov kariet.



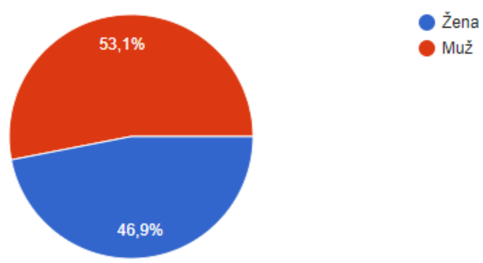
Obr. 7: Pravdepodobnosť pre jednotlivých hráčov

Vidíme, že pravdepodobnosť prudko klesá až do nuly. Teda naozaj je klesajúca.

4.2.3 Vyhodnotenie dotazníka

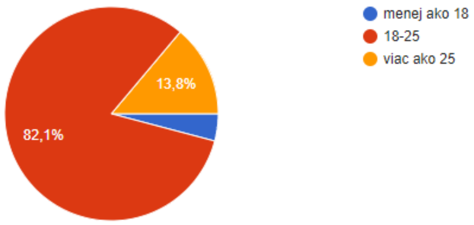
V tejto bakalárskej práci sme sa rozhodli, že sa rôznej vzorky ľudí opýtame na výsledok príkladov, ktoré sa riešia v tejto kapitole. Tí, ktorí vyplňovali dotazník, nemali za úlohu príklad vypočítať, ale mali napísať, čo si myslia, že je správna odpoveď. Konkrétne sme sa pýtali na príklad *Rozdávač kariet*, ktorého výsledky si v tejto podkapitole rozanalyzujeme. Pýtali sme sa aj na príklad *Uhádni moju kartu*, ktorého riešenie a aj analýzu dotazníka si ukážeme neskôr v tejto bakalárskej práci. Dotazník sme rozposlali študentom vysokých škôl, študentom stredných škôl a pracujúcim ľuďom.

Poďme si postupne ukázať výsledky. Pre lepšiu prehľadnosť priložíme grafy jednotlivých odpovedí. Nášho dotazníka sa zúčastnilo dokopy 197 respondentov. Z toho 105 mužov a 92 žien. Na grafe si ukážeme, ako to bolo v percentách.



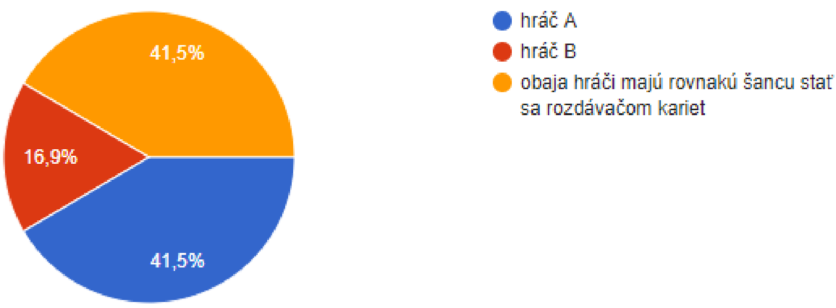
Obr. 8: Pohlavie opýtaných ľudí

Veková skupina bola rôznorodá, najviac ju však tvorili ľudia vo veku 18-25 rokov, tých bolo až 160 zo všetkých opýtaných. Naopak, najmenej bolo ľudí pod 18 rokov. Tých bolo iba 8. Zvyšok tvorili ľudia, ktorí mali nad 25 rokov. Na nasledujúcom grafe si môžeme pozrieť, kto akú časť tvoril v percentách.



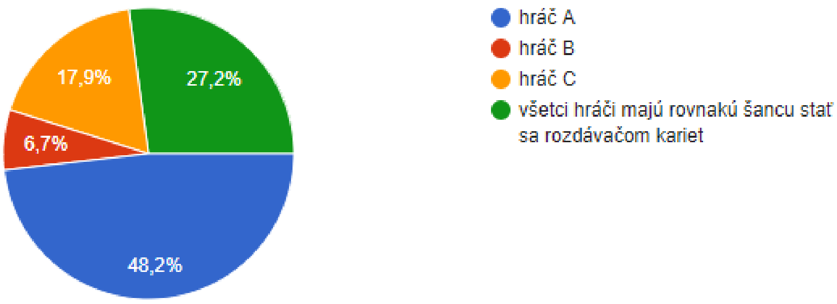
Obr. 9: Vekové rozdelenie opýtaných ľudí

V tretej otázke sme sa pýtali: *V pokrovej hre s dvomi hráčmi* A, B, *rozdávač kariet je vybraný nasledujúcim spôsobom. V poradí* $ABAB\dots$ *sú rozdávané karty z premiešaného balíka kariet hráčom, pokým jeden z nich nedostane eso. V balíku je* 52 *kariet. Prvý hráč, ktorý dostane eso, začína nasledujúcu hru ako rozdávač kariet. Ktorý hráč má najväčšiu pravdepodobnosť stať sa rozdávačom kariet?* Poďme sa pozrieť, ako odpovedali ľudia. Iba 35 ľudí si myslí, že väčšiu pravdepodobnosť stať sa rozdávačom, má hráč B. Odpovede hráč A a obaja hráči majú rovnakú šancu stať sa rozdávačom kariet, mali rovnako veľa hlasov. Z toho vyplýva, že väčšina ľudí si myslí, že buď medzi hráčmi nie je rozdiel, alebo skôr vyhrá hráč A. Znovu si ukážeme graf, ako ľudia hlasovali.



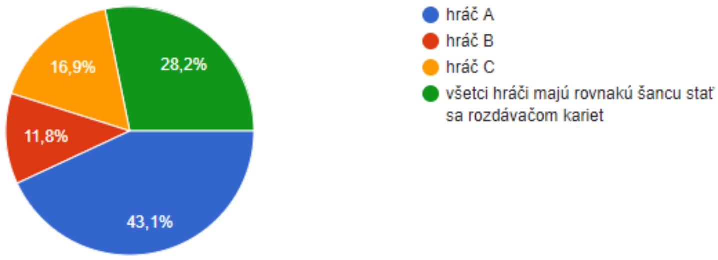
Obr. 10: Kto má najväčšiu pravdepodobnosť stať sa rozdávačom?

V štvrtej otázke sme zmenili iba počet hráčov. Neboli dvaja, ale boli už traja. Otázka ostala nezmenená, a teda: *V pokrovej hre s tromi hráčmi* A, B, C, *rozdávač kariet je vybraný nasledujúcim spôsobom. V poradí* $ABCABC\dots$ *sú rozdávané karty z premiešaného* *balíka kariet hráčom, pokým jeden z nich nedostane eso. V balíku je* 52 *kariet. Prvý hráč, ktorý dostane eso, začína nasledujúcu hru ako rozdávač kariet. Ktorý hráč má najväčšiu pravdepodobnosť stať sa rozdávačom kariet?* Keď sme pridali tretieho hráča, takmer polovica ľudí si myslela, že najväčšiu pravdepodobnosť stať sa rozdávačom má hráč A. Iba 14 ľudí zo všetkých opýtaných si myslelo, že by to mohol byť hráč B. To, že najväčšiu pravdepodobnosť má hráč C, si myslelo 36 ľudí a 53 ľudí tipovalo, že všetci majú rovnakú pravdepodobnosť stať sa rozdávačom. Prikladáme aj graf, kde si môžeme pozrieť v percentách, ako ľudia hlasovali.



Obr. 11: Kto má najväčšiu pravdepodobnosť stať sa rozdávačom?

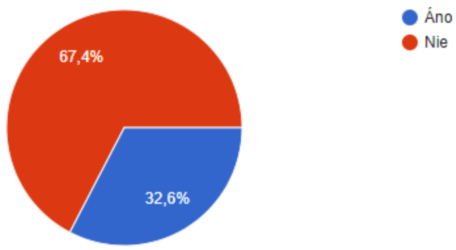
V piatej otázke sme okrem počtu hráčov zmenili aj počet kariet. Nebudeme už mať obyčajný balík 52-och kariet, ale tentokrát máme 104 kariet. Otázka znela: *V pokrovej hre s tromi hráčmi A, B, C, rozdávač kariet je vybraný nasledujúcim spôsobom. V poradí $ABCABC\dots$ sú rozdávané karty z premiešaného balíka kariet hráčom, pokým jeden z nich nedostane eso. Tentokrát je v balíku* 104 *kariet. Prvý hráč, ktorý dostane eso, začína nasledujúcu hru ako rozdávač kariet. Ktorý hráč má najväčšiu pravdepodobnosť stať sa rozdávačom kariet?*. Odpovede sa nelíšili veľmi od predchádzajúcej otázky. Výraznejšie sa zmenil iba počet odpovedí, že hráč A má najväčšiu pravdepodobnosť stať sa rozdávačom, kde viac ľudí hlasovalo za túto možnosť a menej hlasovalo za možnosť, že hráč A má najväčšiu pravdepodobnosť. Na grafe si môžeme pozrieť, ako hlasovali ľudia v percentách.



Obr. 12: Kto má najväčšiu pravdepodobnosť stať sa rozdávačom?

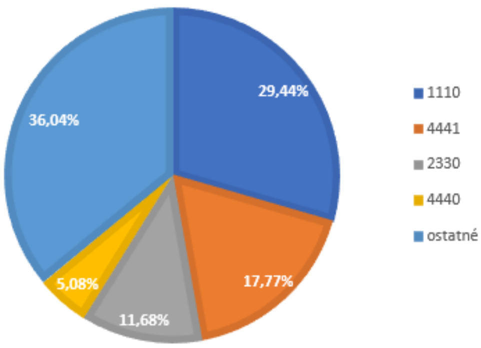
V konečnom dôsledku, keď porovnáme tretiu a štvrtú otázku, vidíme, že pridaním ďalšieho hráča ľudia začali trochu špekulovať a uvažovať, ako na tom budú jednotliví hráči. Tým, že do hry vstúpil hráč C, ľudia mohli uvažovať spôsobom, že nebude predsa len jedno, koľko je tam hráčov a že každý bude mať inú pravdepodobnosť. Preto nám aj počet odpovedí, že všetci majú rovnakú šancu klesol a skončil tamer nerozhodne s odpoveďou, že najväčšiu pravdepodobnosť má hráč C. Porovnaním štvrtej a piatej otázky vidíme, že zmenou počtu kariet ľudia vyhodnotili, že to nemá veľký vplyv na to, kto sa stane s najväčšou pravdepodobnosťou rozdávačom kariet.

V šiestej otázke sme dali neurčitý počet hráčov, teda N a ostali sme pri obyčajnom balíku 52-och kariet. Pýtali sme sa: *V pokrovej hre s* N *hráčmi* $A, B, C, \ldots, N$*, rozdávač kariet je vybraný nasledujúcim spôsobom. V poradí* $ABC \ldots NABC \ldots N \ldots$ *sú rozdávané karty z premiešaného balíka kariet hráčom, pokým jeden z nich nedostane eso. V balíku je* 52 *kariet. Prvý hráč, ktorý dostane eso, začína nasledujúcu hru ako rozdávač kariet. Majú hráči rovnakú pravdepodobnosť stať sa rozdávačmi kariet?*. Takmer štyri šestiny opýtaných ľudí si myslí, že hráči nemajú rovnakú pravdepodobnosť stať sa rozdávačom kariet. Zvyšok si myslí, že majú rovnakú. Na grafe si ukážeme v percenách, koľko ľudí, za ktorú otázku hlasovalo.



Obr. 13: Majú všetci hráči rovnakú pravdepodobnosť stať sa rozdávačom?

Teraz sa pozrieme na vyplnenie dotazníka jednotlivého človeka. Na odpovede sa budeme pozerať ako na štvorice odpovedí. Odpovede sme si označili nasledovným spôsobom. Odpoveď hráč A sme označili ako 1, odpoveď hráč B sme označili 2, odpoveď hráč C sme označili ako 3, odpoveď, že všetci majú rovnakú pravdepodobnosť stať sa rozdávačom sme označili ako 4. V štvrtej otázke sme odpoveď Áno označili ako 1 a odpoveď Nie ako 0. Vznikli nám rôzne kombinácie, ako ľudia hlasovali. Významné pre nás boli iba štyri, lebo za ostatné hlasovalo menej ako 5% ľudí. V nasledujúcom grafe sú jednotlivé kombinácie hlasovania.



Obr. 14: Počet odpovedí za jednotlivé kombinácie v percentách

V nasledujúcich bodoch si vysvetlíme jednotlivé zložky grafu.

- Odpoveď 1110. Je to kombinácia správnych odpovedí, kedy si odpovedajúci myslí, že akokoľvek sa bude meniť počet hráčov alebo počet kariet, vždy vyhrá hráč A. Na poslednú otázku potom odpovedal, že hráči nemajú rovnakú pravdepodobnosť. Za túto kombináciu hlasovalo 58 ľudí.

- Odpoveď 4441. V tomto prípade si človek myslí, že všetci hráči majú vždy, za akýchkoľvek okolností rovnakú pravdepodobnosť stať sa rozdávačom. Za túto kombináciu hlasovalo 35 ľudí.

- Odpoveď 2330. V tomto prípade si odpovedajúci myslí, že vždy má najväčšiu pravdepodobnosť stať sa rozdávačom posledný hráč. Za túto kombináciu hlasovalo 23 ľudí.

- Odpoveď 4440. V tomto prípade na prvé otázky, kde sa mení počet hráčov z dvoch na troch alebo sa mení počet kariet, majú hráči rovnakú pravdepodobnosť. Zmení sa to ale v prípade, keď máme N hráčov. Vtedy človek hlasoval za možnosť, že nemajú rovnakú pravdepodobnosť. Mohlo to byť z toho dôvodu, že si uvedomil, že ak je viac hráčov ako kariet, tí poslední nemusia dostať žiadnu kartu. Za túto kombináciu hlasovalo 10 ľudí.

- Ostatné. V tejto zložke sú zahrnuté ostatné kombinácie, ale keďže za každú z nich hlasovalo menej ako 5%, zahrnuli sme ich spolu, pretože nie sú pre nás významné.

Keď sa pozrieme na odpovede podľa pohlaví, tak za prvú kombináciu hlasovalo až 43 mužov a iba 15 žien. Z toho vyplýva, že uhádlo viac mužov správnu odpoveď. Čo sa týka porovnania veku, nedalo sa veľmi čo porovnávať, keďže väčšina zúčastnených bola vo veku 18-25 rokov. Pre úplnosť uvádzame aj výsledky. V nasledujúcej tabuľke sú zobrazené počty, ako hlasovali všetci ľudia, a potom aj konkrétne ženy a muži za jednotlivé kombinácie.

Tabuľka 9: Počet žien a mužov hlasujúcich za jednotlivé kombinácie

Kombinácie	Počet ľudí	Počet žien	Počet mužov
1110	58	15	43
4441	35	21	14
2330	23	8	15
4440	10	5	5
ostatné	71	43	28

V nasledujúcej tabuľke je zobrazené, za aké kombinácie hlasovali jednotlivé vekové skupiny. Pričom v prvom stĺpci sú jednotlivé kombinácie, v druhom stĺpci je celkový počet hlasujúcich ľudí za danú kombináciu, v treťom stĺpci sú ľudia vo veku menej ako 18 rokov, vo štvrtom stĺpci je veková kategória od 18 do 25 rokov a v poslednom stĺpci sú ľudia nad 25 rokov.

Tabuľka 10: Počet ľudí rôznych vekových skupín, hlasujúcich za jednotlivé kombinácie

Kombinácie	Počet ľudí	menej ako 18	18-25	viac ako 25
1110	58	0	49	9
4441	35	2	25	5
2330	23	0	19	4
4440	10	0	10	0
ostatné	71	6	56	9

4.3 Uhádni moju kartu

Zoberme si z [30] ďalší príklad, ktorý sa zaoberá kartami. Konkrétne príklad 8E-19, ktorého zadanie je nasledovné: *Tvoj priateľ si náhodne vyberie kartu z obyčajného balíka 52-och kariet, ale tak, aby si ty nevidel, aká je to karta. Ty budeš hádať, aká je to karta. Predtým sa však môžeš opýtať kamaráta, buď či je jeho vybraná karta červená alebo či je jeho karta pikové eso. Tvoj priateľ odpovedie pravdivo. Akú otázku by si sa opýtal?*

4.3.1 Riešenie

Na prvý pohľad to vyzerá tak, že viac nám pomôže prvá otázka, a teda či je karta červená. Poďme si ale vysvetliť riešenie z [30], kde sa aj dozvieme, ktorá otázka nám viac pomôže. Nech A je udalosť, že sme správne uhádli, aká karta to je. Pre každú otázku, nech B_1 je udalosť, že priateľ odpovedal na otázku *áno* a B_2 udalosť, že priateľ odpovedal *nie*. Pomocou podmienenej pravdepodobnosti $[18, str.23]$ môžeme pravdepodobnosť vyjadriť ako

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2). \tag{35}$$

Pre otázku, kde sa pýtame, či je karta červená, pravdepodobnosť uhádnutia karty je daná nasledovne

$$P(A) = \frac{1}{26} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{26} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{26}.$$

Keďže polovica kariet je červená a polovica kariet je čierna, tak s pravdepodobnosťou 1/2 vytiahne kamarát červenú kartu. Pravdepodobnosť, že karta je červená, je 1/26, pretože v balíku je 26 červených kariet a my z nich vyberieme jednu.

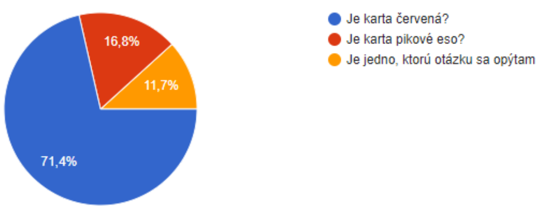
Pre druhú otázku je pravdepodobnosť, že kamarát odpovedal *áno* na otázku, či je karta pikové eso, za podmienky, že si uhádol kartu, rovná 1. Pravdepodobnosť, že vytiahnutá karta je pikové eso, je 1/52, pretože z 52-och kariet môže byť iba jedna pikové eso. Pravdepodobnosť, že si uhádol kartu a pikové eso to nebolo, je rovná 1/51. Pravdepodobnosť, že vytiahnutá karta nebola pikové eso, je rovná 51/52. Odkiaľ už pomocou (35) dostávame

$$P(A) = 1 \times \frac{1}{52} + \frac{1}{51} \times \frac{51}{52} = \frac{1}{26}.$$

Z výsledkov vidíme, že je úplne jedno, ktorú otázku sa opýtame, pretože po odpovedi máme aj tak rovnakú pravdepodobnosť na to, aby sme uhádli, aká karta to naozaj je.

4.3.2 Vyhodnotenie dotazníka

V našom dotazníku sme jednu otázku venovali aj tomu príkladu. Čiže vzorka ľudí a aj počet je ten istý, ako sme napísali v predchádzajúcom príklade, kde sme už vyhodnotili väčšinu dotazníka. V poslednej otázke v dotazníku sme sa pýtali otázku: *Tvoj priateľ si náhodne vyberie kartu z obyčajného balíka 52-och kariet, ale tak, aby si ty nevidel, aká je to karta. Ty budeš hádať, akú kartu vytiahol. Predtým sa však môžeš opýtať kamaráta, buď či je jeho vybraná karta červenej farby alebo či je jeho karta pikové eso. Priateľ ti na otázku odpovie pravdivo. Akú otázku by si sa opýtal?*. Túto otázku sme položili ľuďom hlavne preto, lebo nám logicky vyplýva, že viac by nám mala pomôcť otázka, či je karta červená, pretože sa nám zdá, že to nám vylúči až polovicu kariet ako otázka, kde sa pýtame iba na jednu konkrétnu, a teda vylúčime iba jednu kartu. Naše očakávania sa aj naplnili. Až 140 ľudí si myslelo, že nám pomôže práve otázka, či je karta červená. 34 ľudí si myslelo, že nám pomôže skôr otázka, či je karta pikové eso a iba 23 ľudí si myslelo, že obe nám pomôžu rovnako. Na obrázku (obr. 15) si môžeme pozrieť ako hlasovali ľudia v percentách.



Obr. 15: Ktorá otázka nám viac pomôže?

Pre úplnosť uvádzame aj výsledky, ako hlasovali jednotlivé pohlavia a jednotlivé vekové kategórie. V tabuľke 11 sú zobrazené počty mužov a žien, hlasujúcich za jednotlivé odpovede.

Tabuľka 11: Počet žien a mužov hlasujúcich za jednotlivé odpovede

odpovede	ženy	muži
Je karta červená?	60	81
Je karta pikové eso?	21	12
Je jedno, ktorú otázku sa opýtam	12	11

V tabuľke 12 je uvedený počet ľudí, rôznych vekových skupín, hlasujúcich za jednotlivé odpovede.

Tabuľka 12: Počet ľudí vekových skupín hlasujúcich za jednotlivé odpovede

odpovede	menej ako 18	18-25	viac ako 25
Je karta červená?	7	115	19
Je karta pikové eso?	0	28	5
Je jedno, ktorú otázku sa opýtam	1	18	4

4.4 Padne srdce

Takmer každý študent už zažil situáciu, kedy písal v škole test, kde odpovede mal vyberať z niekoľkých možností a niektoré odpovede nevedel. Keďže nechcel nechať nezakrúžkovanú otázku, pretože príde o bod, skúsi si aspoň tipnúť odpoveď a ak sa trafí, môže získať z toho bod a ak nie, tak o nič nepríde. Niektorí volia taktiku tipnúť prvé, čo im napadne, no a niektorí sa rozhodnú, že zakrúžkujú odpoveď, ktorá sa v teste už dlho neobjavila, pretože si myslia, že majú väčšiu šancu na úspech. Avšak, s touto situáciou sa nemusia stretnúť iba študenti. V dnešnej dobe je veľmi populárne tipovať. Existuje už aj veľa tipovacích spoločností a hier. Medzi najznámejšie, ktoré poznáte aj z televíznych obrazoviek, sú Keno10 a Loto. V princípe v týchto hrách ide o to, tipnúť si niekoľko čísel z číselného radu. Pri každej hre je počet čísel iný. Výhra sa znásobuje podľa počtu trafených čísel. Niekto, kto bežne netipuje a naraz sa rozhodne, že ide tipovať, volí rôzne taktiky, aby mal čo najväčšiu výhru a jednou z nich je aj tá, kedy volí čísla, ktoré sa v predchádzajúcich kolách už dlho neobjavili. My si teraz ukážeme ďalší príklad z [10], ktorý nám ukáže, či je táto ,,taktika"naozaj výhodná. Zadanie príkladu je nasledovné: *Predstavte si, že ťaháte kartu z dobre zamiešaného balíka* 52*-och kariet, jednu po druhej s návratom (t.j. zakaždým keď vytiahnete jednu kartu, vrátite ju naspäť do balíka a ťaháte ďalšiu). Nech* X *je počet kariet, ktoré ťaháme z balíčka, dokým nevytiahneme srdcovú kartu (posledný výber karty nezahŕňame do* X*).*

A. *Aký je očakávaný počet vytiahnutých kariet pred tým, než vytiahneš srdcovú kartu?*

B. *Predstavte si, že vytiahnete* 5 *kariet s návratom a žiadna z nich nie je srdcová karta. Aký je očakávaný počet dodatočne vytiahnutých kariet (bez tých* 5*-tich), než uvidíte prvú srdcovú kartu?*

4.4.1 Riešenie

A. Poďme sa pozrieť najprv na riešenie A. Náhodná veličina X má geometrické rozdelenie. O geometrickom rozdelení už vieme z 2. kapitoly, že pravdepodobnosť úspechu, ktorý príde až po niekoľkých neúspechoch je daná

$$P(X=k)=p(1-p)^k.$$

V našom prípade ide $k=0,1,2,\dots$, pretože nezahŕňame poslednú vybratú kartu. Pravdepodobnosť, že vyberieme srdcovú kartu je rovná $\frac{1}{4}$, kvôli tomu, že máme štyri druhy kariet v balíku (srdcové, pikové, kárové a krížové) a my chceme iba srdcové. Z toho vieme vyjadriť pravdepodobnosť X

$$P(X=k)=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}.$$

Strednú hodnotu vyjadríme ako

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}k.$$

V druhej kapitole sme vypočítali, čomu je takáto stredná hodnota vo všeobecnosti rovná, takže teraz nám stačí iba dosadiť do (17) a dostávame

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{p} \\ E(X) &= \frac{1}{\frac{1}{4}} \\ E(X) &= 4. \end{aligned}$$

B. Poďme sa teraz pozrieť na riešenie B. Toto riešenie nás zaujíma o niečo viac, pretože nám dá odpoveď aj na otázku v úvode tohto príkladu, a teda či sa oplatí ľuďom pri tipovaní voliť taktiku označiť niečo, čo sa už dlho neobjavilo. Označme Y ako počet kariet pred srdcovou kartou. My chceme, aby Y bolo väčšie, nanajvýš rovné 5, podmienenú pravdepodobnosť podľa (1.6) vyjadríme ako

$$P(Y = k|Y \geq 5) = \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}}{\left(\frac{3}{4}\right)^{5}},$$

kde $k = 6, 7, \ldots$, pretože prvých päť kariet, ktoré sme už vybrali, nie sú srdcové. Nás ale zaujíma, aká je stredná hodnota $E(Y - 5|Y \geq 5)$, pretože to je stredná hodnota kariet, bez tých piatich vybraných. Túto strednú hodnotu vyjadríme ako

$$E(Y - 5|Y \geq 5) = \sum_{k=6}^{\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-6}(k-5).$$

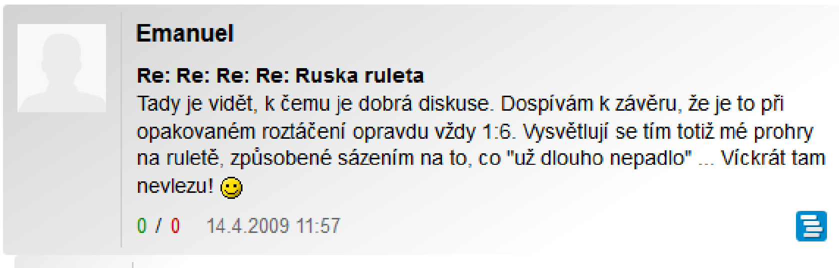
V sume teraz zavedieme substitúciu, kde $i = k - 5$, $k = i + 5$, $i \to 1$ a $k \to 6$. Odkiaľ dostávame

$$E(Y - 5|Y \geq 5) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{i-1} i,$$

čo môžeme teraz už vyriešiť podľa všeobecného vzorca z druhej kapitoly (17). Po dosadení zisťujeme, že stredná hodnota je rovnaká ako aj v prípade, keď sme nevytiahli na začiatku päť kariet, a teda

$$E(Y - 5|Y \geq 5) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4.$$

Spolu teda musíme vytiahnuť 9 kariet a nezáleží vôbec na tom, že sme predtým vytiahli 5 kariet, ktoré neboli srdcové karty. Takže ak budete nabudúce písať test s výberovými odpoveďami alebo budete tipovať v Lote, skúste zvoliť inú taktiku, ako pozerať sa na to, čo sa už dlho neobjavilo. Zakončiť to môžeme komentárom jedného pána na stránke www.idnes.cz, ktorý sa dozvedel, že takáto taktika pri hre ruleta nijako nepomôže ku výhre. Ruleta je kasínová hra pomenovaná z francúzskeho slova roulette, čo znamená malé koleso. V hre sa hráči môžu rozhodnúť umiestniť stávky buď na jedno číslo, rôzne skupiny čísel, červené alebo čierne farby, či je číslo párne, alebo nepárne alebo či sú čísla vysoké (19-36), alebo nízke (1-18).



Obr. 16: Komentár pána Emanuela na taktiku hry [5]

5 Náhodné prechádzky

5.1 Mravec na kocke

V tejto kapitole sa budeme zaoberať príkladmi o náhodných prechádzkach. Ako prvý si zoberieme príklad z [20, pr3.22], ktorého zadanie je nasledovné: *Predpokladajte, že máme mravca pohybujúceho sa po hranách kocky z jedného vrcholu na druhý. Mravec nikdy nezastane a presun po jednej hrane mu trvá jednu minútu. V každom vrchole si mravec náhodne vyberie jednu z troch dostupných hrán a začne po nej ísť. Vyberieme vrchol kocky a dáme naň mravca. Aký je očakávaný počet minút, za ktorý sa mravec vráti do vrcholu, z ktorého vyštartoval?*

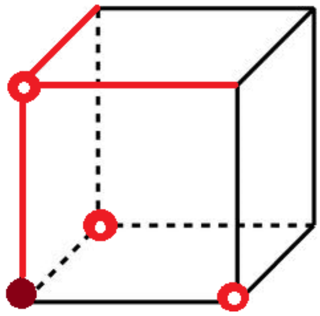
5.1.1 Riešenie

Keď umiestnime mravca na vrchol kocky, budeme sa na tento vrchol odvolávať ako na vrchol 0, pretože je to nulová vzdialenosť od začiatočnej pozície. Všimnime si, že kvôli symetrii kocky, očakávaný počet minút, kým sa mravec vráti na vrchol, z ktorého vychádzal, je funkcia vzdialenosti od začiatočnej pozície, pričom je nepodstatné, na ktorom z troch vrcholov vzdialených o jedna od začiatočného vrcholu sa mravec nachádza. Nech $f(n)$ označuje očakávaný počet minút, kým sa mravec vráti z vrcholu n, kde n je počet vrcholov o koľko sú vzdialené od začiatočného vrcholu a $n = 0, 1, 2, 3$. My chceme nájsť hodnotu $f(0)$.

Po umiestnení mravca na vrchol mravec začne cestovať. Určite bude cestovať jednu minútu a príde na vrchol, ktorý je vzdialený o jeden vrchol od začiatočného a tam sa rozhodne, čo ďalej, čiže

$$f(0) = 1 + f(1).$$

Na nasledujúcom obrázku sú možnosti mravca, akým smerom sa môže vydať z druhého vrcholu. Bordovou guľkou je označený vrchol, z ktorého mravec vychádzal. Červenou guľkou je znázornený vrchol, ku ktorému sa dostal po tom, čo vycestoval. Z jedného vrcholu sú červenou čiarou označené cesty, ktorými sa môže zase vydať. Stačí, keď to nakreslíme iba pre jednu guľku, pretože kocka je symetrická a pre zvyšné dve by to bolo rovnako.

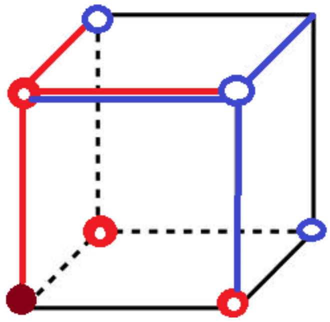


Obr. 17: Mravec nachádzajúci sa na vrchole 1

Z druhého vrcholu, teda toho, ktorý je vzdialený o 1, sa mravec môže s pravdepodobnosťou $\frac{1}{3}$ vrátiť za minútu späť na začiatočný vrchol alebo s pravdepodobnosťou $\frac{2}{3}$ ďalšiu minútu cestovať na vrchol, ktorý je vzdialený o 2 od začiatočného vrcholu, teda

$$f(1) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(1 + f(2)).$$

Z vrcholu vzdialeného o dva vrcholy má na výber dve možnosti, buď sa dostane do vrcholu, ktorý je vzdialený od začiatočného o jeden vrchol, alebo pôjde do vrcholu, ktorý je vzdialený od začiatočného o tri vrcholy. Znovu si to môžeme ukázať na obrázku, kde modré guľky sú vrcholy vzdialené o dva vrcholy od začiatočného a modrou čiarou sú vyznačené cesty, kadiaľ môže ísť. Opäť sme cesty nakreslili iba pre jeden vrchol, pretože kocka je symetrická a pre každý vrchol to platí rovnako.

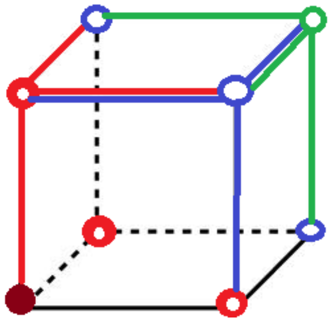


Obr. 18: Mravec nachádzajúci sa na vrchole 2

Zapísať to môžeme tak, že s pravdepodobnosťou $\frac{2}{3}$ sa bude vracať minútu do vrcholu, ktorý je vzdialený o jeden vrchol od začiatočného a s pravdepodobnosťou $\frac{1}{3}$ pôjde minútu do vrcholu, ktorý je vzdialený od začiatočného vrcholu o tri vrcholy, čiže

$$f(2) = \frac{2}{3}(1 + f(1)) + \frac{1}{3}(1 + f(3)).$$

Keď príde do vrcholu vzdialeného o tri vrcholy od začiatočného, jediná možnosť pohybu je prejsť do vrcholu, ktorý je vzdialený o dva vrcholy. Na obrázku je tento vrchol označený zelenou farbou a takisto aj cesty, ktorými môže ísť.



Obr. 19: Mravec nachádzajúci sa na vrchole 3

Matematicky to môžeme vyjadriť tak, že s pravdepodobnosťou 1 sa mravec presunie do vrcholu, ktorý je vzdialený o dva vrcholy, pričom táto cesta mu bude trvať tiež minútu, a teda

$$f(3) = 1 + f(2).$$

Teraz vyriešime sústavy týchto rovníc a dostaneme, čomu sa rovná $f(0)$.

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 + f(1) \\ f(1) &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(1 + f(2)) \\ f(2) &= \frac{2}{3}(1 + f(1)) + \frac{1}{3}(1 + f(3)) \\ f(3) &= 1 + f(2). \end{aligned}$$

Štvrtú rovnicu dosadíme do tretej, odkiaľ dostávame

$$\begin{aligned} f(2) &= \frac{2}{3}(1 + f(1)) + \frac{1}{3}(1 + f(3)) = \frac{2}{3}(1 + f(1)) + \frac{1}{3}(1 + 1 + f(2)) \\ f(2) &= 2 + f(1). \end{aligned}$$

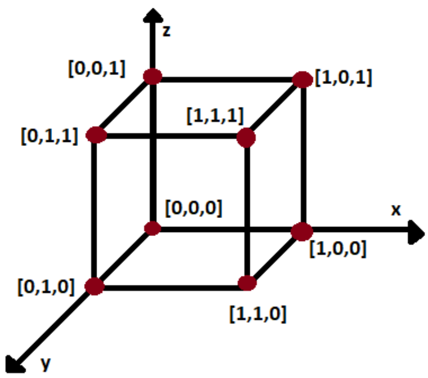
Teraz tento výraz dosadíme do druhej rovnice

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(1 + f(2)) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(1 + 2 + f(1)) \\ f(1) &= 7, \end{aligned}$$

no a teraz toto $f(1)$ dosadíme do prvej rovnice, odkiaľ už dostávame výsledok $f(0) = 1 + f(1) = 1 + 7 = 8$. Teda očakávaný čas, za ktorý sa mravec vráti späť na vchol, z ktorého vyštartoval, je 8 minút.

5.1.2 Výsledky z R

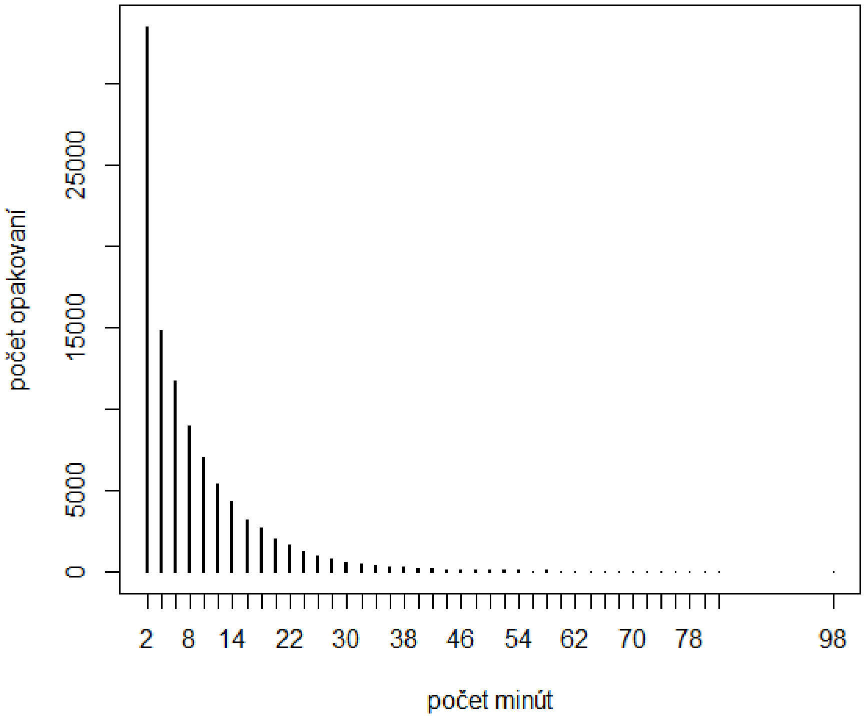
Pohyb mravca sme si naprogramovali aj v R. Program nám narátal čas, za aký sa mravec dostal do vrcholu, z ktorého vyštartoval. Myšlienka programu spočíva v tom, že mravec si v každom vrchole s pravdepodobnosťou $1/3$ vyberie hranu, po ktorej pôjde. Kocku sme umiestnili do súradnicovej sústavy, tým pádom vrcholy sú označené ako kombinácie 0 a 1. Kocka bude vyzerať nasledovne



Obr. 20: Kocka v súradnicovej osi

Keď sa mravec presunie z jedného vrcholu na druhý, zmení sa iba jedna zložka v súradnici, teda zmení sa buď nula na jednotku, alebo naopak. To je hlavná myšlienka programu. Následne sme urobili fukinciu pomocou while cyklu, kedy sa nám za každý pohyb pripočíta čas a ide dovtedy, dokým sa nedostane do bodu $[0, 0, 0]$, respektíve do toho, z ktorého vyštartoval. Program sme zopakovali 100000-krát, aby sme mali čo najpresnejší výsledok a teda v priemere za aký čas sa dostane do východiskovej pozície. Po spustení programu sme zistili, že čas je rovný $7,97236$, čo je veľmi blízke nášmu výsledku, a teda že stredná hodnota je rovná 8.
V programe sme si aj urobili, ako vyzerajú početnosti jednotlivých výsledkov. Na x-ovej osi je zobrazený počet minút, kým sa mravec dostal späť do vrcholu, z ktorého vyštartoval. Na y-ovej osi je zobrazený počet, koľkokrát behom toho, ako sme 100000-krát zopakovali

program, sa mravec vrátil do vrcholu s rovnakým časom.



Obr. 21: Graf pohybu mravca

Z grafu vidíme, že počet prípadov, kedy prechádzka trvala daný počet minút, kým sa mravec vráti do vrcholu, z ktorého vyštartoval, nám veľmi rýchlo klesá do nuly. Na druhej strane sa však občas vyskytli veľmi dlhé prechádzky.

5.1.3 Pokračovanie príkladu 5.1

V príklade boli ďalšie podotázky, ktoré už v knihe neboli vyriešené.

A. *Namiesto konštantného pohybu sa mravec unaví a s pravdepodobnosťou* $\frac{1}{4}$ *si na minútu odpočinie. Aký je teraz očakávaný čas, za ktorý sa vráti späť do vrcholu?*

B. *Zadanie je rovnaké ako v základnom príklade, zmení sa iba útvar, po ktorom mravec chodí. Teraz bude chodiť po pravidelnom štvorstene.*

A. V prvej podotázke máme mravca, ktorý sa po každej ceste cez hranu rozhodne, či na minútu zastane a oddýchne si, alebo bude pokračovať ďalej. Označíme $f(n)$ ako očakávaný počet minút, kým sa mravec vráti z vrcholu n, kde n je počet vrcholov, o koľko sú vzdialené od začiatočného vrcholu a $n = 0, 1, 2, 3$. Na začiatku dáme mravca na jeden vrchol a on sa náhodne pohne nejakým smerom, čiže prejde po hrane a dostane sa na vrchol, ktorý je vzdialený o jeden, pričom cesta trvá minútu. Takže tento pohyb môžeme zapísať v tvare

$$f(0) = 1 + f(1).$$

Akonáhle príde do tohto vrcholu, rozhodne sa, či si ide na minútu oddýchnuť a potom pokračovať v ceste, alebo ide rovno pokračovať v ceste. S pravdepodobnosťou $\frac{1}{4}$ oddychuje, inak ide ďalej. V prípade, že sa rozhodne pre oddych, musíme zohľadniť minútu, ktorú ostane čakať na hrane a potom sa môže pohnúť takým istým spôsobom, ako by sa pohol aj keď neoddychuje. Na výber má dve možnosti. Buď sa vráti do začiatočného vrcholu, alebo pôjde do vrcholu, ktorý je vzdialený o dva vrcholy od začiatočného. Ak sa rozhodne ísť na ďalší vrchol, je jedno, do ktorého z tých dvoch pôjde, lebo kocka je symetrická. Teda môžeme to napísať

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{1}{4}\left(\left(1+\frac{1}{3}\right)+\frac{2}{3}(1+1+f(2)\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}(1+f(2))\right) \\ f(1) &= \frac{17}{12}+\frac{2}{3}f(2). \end{aligned}$$

Keď príde do vrcholu, ktorý je vzdialený o dva vrcholy od toho, z ktorého vyštartoval, znova sa môže rozhodnúť, že si na minútu oddýchne alebo bude pokračovať v ceste. Znova v prípade, že sa rozhodne pre oddych, musíme zohľadniť minútu, ktorú ostane čakať na hrane a potom sa môže pohnúť takým istým spôsobom, ako by sa pohol aj keď neoddychuje. Na výber má dve možnosti. Môže ísť do vrcholu, ktorý je vzdialený od začiatočného o jeden vrchol alebo pôjde do vrcholu, ktorý je vzdialený o tri vrcholy, teda

$$\begin{aligned} f(2) &= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}(1+1+f(1))+\frac{1}{3}(1+1+f(3))\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}(1+f(1))+\frac{1}{3}(1+f(3))\right) \\ f(2) &= \frac{5}{4}+\frac{2}{3}f(1)+\frac{1}{3}f(3). \end{aligned}$$

Akonáhle príde mravec do vrcholu, ktorý je vzdialený o tri vrcholy od začiatočného, môže sa rozhodnúť, či si ide oddýchnuť na minútu, alebo ide pokračovať. Jeho ďalšia cesta, či už s oddychom, alebo bez, môže byť jedine na vrchol, ktorý je vzdialený o dva vrcholy od začiatočného. Ak sa rozhodne oddýchnuť, treba tam tú minútu zohľadniť, teda dostávame

$$\begin{aligned} f(3) &= \frac{1}{4}(1+1+f(2)) + \frac{3}{4}(1+f(2)) \\ f(3) &= \frac{5}{4} + f(2). \end{aligned}$$

Vyriešením sústavy rovníc dostaneme riešenie zadanej úlohy. Najprv dosadíme štvrtú rovnicu do tretej, odkiaľ dostávame

$$\begin{aligned} f(2) &= \frac{5}{4} + \frac{2}{3}f(1) + \frac{1}{3}f(3) = \frac{5}{4} + \frac{2}{3}f(1) + \frac{5}{12} + \frac{1}{3}f(2) \\ f(2) &= \frac{5}{2} + f(1). \end{aligned}$$

Dosadením tejto rovnice do druhej rovnice dostaneme už riešenie $f(1)$, pomocou ktorej už ľahko dopočítame, čomu sa rovná očakávaný čas vrátenia sa mravca do vrcholu, z ktorého začal.

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{17}{12} + \frac{2}{3}f(2) = \frac{17}{12} + \frac{2}{3}\left(\frac{5}{2} + f(1)\right) \\ f(1) &= \frac{37}{4}. \end{aligned}$$

Teraz túto hodnotu dosadíme do prvej rovnice, odkiaľ dostávame

$$f(0) = 1 + f(1) = 1 + \frac{37}{4} = \frac{41}{4} \doteq 10,25.$$

Teda dostali sme riešenie prvej podotázky. Očakávaný čas mravca, za ktorý sa vráti späť do vrcholu, z ktorého vyštartoval s tým, že ak je unavený, tak si na minútu oddýchne, je približne $10,25$.

B. Poďme sa pozrieť na riešenie druhej podotázky. Znovu si označíme $f(n)$ ako očakávaný počet minút, kým sa mravec vráti z vrcholu n, kde n je počet vrcholov o koľko sú vzdialené od začiatočného vrcholu a $n = 0, 1$. My chceme nájsť hodnotu $f(0)$. Mravec štartuje z vrcholu 0 a za minútu prejde na vrchol, ktorý je vzdialený od začiatočného o jeden vrchol, čiže

$$f(0) = 1 + f(1).$$

Z tohto vrcholu sa môže za minútu buď s pravdepodobnosťou $\frac{1}{3}$ vrátiť naspäť na vrchol, z ktorého vyštartoval, alebo s pravdepodobnosťou $\frac{2}{3}$ pokračovať v ceste do ďalšieho vrcholu, ktorý je vzdialený od začiatočného tiež o jeden vrchol, teda

$$f(1) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(1 + f(1)).$$

Vypočítaním druhej rovnice dostaneme číslo, ktoré dosadíme do prvej rovnice, odkiaľ už dostaneme, aký je očakávaný čas mravca, kým sa vráti do začiatočného vrcholu, ak cestuje po štvorstene.

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(1 + f(1)) \\ f(1) &= 3 \\ f(0) &= 1 + f(1) = 1 + 3 = 4. \end{aligned}$$

Teda očakávaný čas mravca sú štyri minúty.

5.2 Adamova náhodná prechádzka

V článku [4] bol zadaný ďalší príklad na náhodné prechádzky, ktorý tam autor uviedol aby ho ostatní mohli vyriešiť. Jeho zadanie je nasledovné.*Adam má dom s prednými a zadnými dverami. Umiestni si n párov vychádzkových topánok pred obidvojo dverí. Pri každej prechádzke si náhodne vyberie dvere, cez ktoré pôjde a náhodne si obuje topánky. Po prechádzke sa vráti náhodne vybranými dverami a vyzuje si pri tých dverách topánky. Nájdite priemerný počet ukončených prechádzok, pokým Adam zistí, že pri dverách, ktoré si vybral na ďalšiu prechádzku, nie sú dostupné žiadne topánky.*

5.2.1 Riešenie

Riešenie tohto príkladu bolo v článku [11]. My si ho teraz postupne ukážeme a vysvetlíme. Označme si X_k ako počet párov topánok, ktoré chýbajú po k-tej prechádzke pri predných alebo zadných dverách, podľa toho, z ktorých dvier Adam vychádza na prechádzku. Nech T je počet prechádzok, kým Adam objaví, že nie sú dostupné žiadne topánky. Nech $f(n)$ je priemerný počet prechádzok, ktoré Adam urobil, než zistil, že pri dverách chýba n párov topánok. Nech $f(k) = E(T|X_0 = k)$. V riešení v článku [11] boli teraz napísané nasledujúce rovnice, ktoré vyjadrujú $f(k)$, kde $k = 0, 1, \ldots, n$.

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}f(0) + \frac{1}{4}f(1) \\ f(j) &= 1 + \frac{1}{4}f(j-1) + \frac{1}{2}f(j) + \frac{1}{4}f(j+1), 1 \leq j \leq n-1 \\ f(n) &= 1 + \frac{1}{2}f(n-1) + \frac{1}{2}f(n). \end{aligned}$$

V riešení nebolo ukázané, ako sa dá k týmto rovniciam dopracovať. My si teraz postupne vysvetlíme, ako sa k týmto rovniciam môžeme dopracovať, čiže čomu je rovné $f(n)$ pre jednotlivé n. Najprv si vyjadríme ak $n = 0$, teda pri dverách nechýba žiaden pár.

$$f(0) = \frac{1}{4}(1 + f(0)) + \frac{1}{4}(1 + f(1)).$$

Označme si predné dvere ako P a zadné dvere ako Z. Budeme sa pozerať na to, ako to bude vyzerať s topánkami pri dverách P, pretože analogicky to bude platiť aj pri dverách Z. Prvý člen v rovnici znamená, že s pravdepodobnosťou $\frac{1}{4}$ si pri jedných z dverí Adam obuje topánky a vráti sa z prechádzky tými istými dverami, teda nebude tam chýbať opäť žiadna topánka. Druhý člen v rovnici znamená, že si obuje topánky pri jednych z dverí a vráti sa druhými dverami, teda pri tých, z ktorých vyšiel na prechádzku bude chýbať jedna topánka. S pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$ sa teda vráti do iných dverí, ako vyšiel a tým pádom v tých dverách bude o jednu topánku navyše, lenže naša funkcia sa zaoberá topánkami, ktoré chýbajú, teda bude to rovné nule. Rovnicu $f(0)$ môžeme upraviť do tvaru

$$f(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}f(0) + \frac{1}{4}f(1).$$

Teraz si ukážeme, ako to bude pre $n = 1$. Najprv si vyjadríme, ako bude $f(1)$ vyzerať a potom si vysvetlíme postupne každý člen v rovnici.

$$f(1) = \frac{1}{4}(1 + f(1)) + \frac{1}{4}(1 + f(2)) + \frac{1}{4}(1 + f(0)) + \frac{1}{4}(1 + f(1)).$$

Prvý člen v rovnici nám vyjadruje, že s pravdepodobnosťou $\frac{1}{4}$ si Adam obuje topánku pri dverách P a tými istými dverami sa aj vráti. Pozeráme sa na to, že jedna topánka pri dverách už chýba, čiže tým, že sa vráti naspäť tak opäť bude jedna topánka chýbať. Druhý člen nám hovorí, že s pravdepodobnosťou $\frac{1}{4}$ si Adam obuje topánku pri dverách P, ale z prechádzky sa vráti druhými dverami, teda pri dverách P už budú chýbať dve topánky. Tretí člen rovnice vyjadruje, že Adam si znova s pravdepodobnosťou $\frac{1}{4}$ pri dverách Z obuje topánky a z prechádzky sa vráti dverami P. Keďže pri dverách P chýbala jedna topánka, tým že Adam od druhých dverí zobral topánky a vrátil sa dverami P, nebude tam teraz chýbať žiadna topánka. Štrvtý člen nám hovorí, že Adam si s pravdepodobnosťou $\frac{1}{4}$ obuje pri dverách Z topánky a z prechádzky sa vráti tými istými dverami, teda počet topánok pri dverách P ostane nezmenený, čiže stále tam bude chýbať jedna topánka. Pre

$1 \leq j \leq n-1$ bude zápis rovnaký, preto rovnicu $f(j)$ napíšeme pomocou $f(1)$ a upravíme

$$f(j) = 1 + \frac{1}{4}f(j-1) + \frac{1}{2}f(j) + \frac{1}{4}f(j+1).$$

Teraz si ukážeme, čomu sa rovná $f(n)$. Znova si najprv napíšeme predpis a potom si jednotlivé členy vysvetlíme.

$$f(n) = \frac{1}{2}(1 + f(n-1)) + \frac{1}{2}(1 + f(n)).$$

Keďže pri dverách P už nie sú žiadne topánky, tak ak príde Adam do tých dverí, tak skončil, ale ešte má dve možnosti, ak príde do dverí Z. Teda prvý člen v rovnici znamená, že s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$ príde do dverí Z, obuje si topánky a z prechádzky sa vráti dverami P, kde sa vyzuje, teda už tam bude chýbať iba $n-1$ topánok. Druhý člen nám hovorí, že Adam s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$ príde do dverí Z, obuje si topánky a z prechádzky sa vráti tými istými dverai. Pri dverách P nám tým pádom ostane nezmenený počet chýbajúcich topánok a to je teda n. Rovnicu $f(n)$ môžeme upraviť na tvar

$$f(n) = 1 + \frac{1}{2}f(n-1) + \frac{1}{2}f(n).$$

Rovnice $f(0)$, $f(1)$ až $f(n)$ môžeme upraviť do takéhoto tvaru

$$\begin{aligned}
f(1) - f(0) &= 2f(0) - 2 & (36)\\
f(2) - f(1) &= f(1) - f(0) - 4 & (37)\\
f(3) - f(2) &= f(2) - f(1) - 4 & (38)\\
&\vdots & (39)\\
f(n) - f(n-1) &= f(n-1) - f(n-2) - 4 & (40)\\
f(n) - f(n-1) &= 2. & (41)
\end{aligned}$$

Poslednú rovnicu vynásobime (-1) a rovnice spolu sčítame, odkiaľ dostávame

$$\begin{aligned}
f(n-1) - f(0) &= -2 + f(0) - 4(n-1) - 2 + f(n-1)\\
f(0) &= 2n.
\end{aligned}$$

Dosadením $f(0)$ do prvej rovnice dostávame, čomu je rovné $f(1)$, a teda

$$\begin{aligned}
f(1) &= 3f(0) - 2\\
f(1) &= 6n - 2.
\end{aligned}$$

Teraz potrebujeme nájsť všeobecné riešenie diferenčnej rovnice $f(k)$, ktorú sme získali na základe rovníc v systéme (36). Všeobecné riešenie diferenčných nehomogénnych rovníc poznáme z [16].

$$f(k) - 2f(k-1) + f(k-2) = -4,$$

pre $k = 2, \dots, n$. Najprv si vypočítame, čomu je rovné $f(2)$ a $f(3)$, pretože to použijeme ako počiatočné podmienky a vieme to ľahko vyjadriť, keďže sme si už vypočítali $f(1)$ a $f(0)$.

$$\begin{aligned} f(2) &= 2f(1) - f(0) - 4 \\ f(2) &= 10n - 8, \\ f(3) &= 2f(2) - f(1) - 4 \\ f(3) &= 14n - 18. \end{aligned}$$

Keďže už poznáme počiatočné podmienky, ideme teraz vyriešiť diferenčnú rovnicu. Ako prvé vypočítame homogénne riešenie a potom vypočítame partikulárne riešenie, pretože všeobecné riešenie diferenčnej nehomogénnej rovnice je dané ako súčet homogénneho riešenia a partikulárneho riešenia.

Homogénne riešenie:

Označme si $f(k)$ ako r^k. Charakteristická rovnica rekurentného vzťahu $f(k)-2f(k-1)+f(k-2) = 0$ je $r^2 - 2r + 1 = 0$, ktorá ma riešenie $r = 1$, $r = 1$. Kvadratická rovnica má dve riešenia rovnaké, tedá má dvojnásobný koreň ($r_1 = r_2 = 1 = r_0$). V takomto prípade sú zodpovedajúce riešenia diferenčnej rovnice dané ako

$$\begin{aligned} f_1(n) &= r_0^n \\ f_2(n) &= nf_1(n) = nr_0^n. \end{aligned}$$

V našom prípade $f_1(n) = 1$, $f_2(n) = n$. Z toho dostávame homogénne riešenie, ktoré označíme ako f_H.

$$\begin{aligned} f_H &= c_1f_1(n) + c_2f_2(n) \\ f_H &= c_1 + nc_2. \end{aligned}$$

Teraz si nájdeme partikulárne riešenie, ktoré si označíme ako f_P. Odhaneme ho, že by mohlo vyzerať ako $f_P = cn^2$. Teraz toto partikulárne riešenie dosadíme do rovnice $f(k)$ a dostávame

$$\begin{aligned} cn^2 - 2c(n-1)^2 + c(n-2)^2 &= -4 \\ c &= -2. \end{aligned}$$

Dostávame partikulárne riešenie, teda $f_P = -2n^2$ a pomocou partikulárneho a homogénneho riešenia aj všeobecné riešenie

$$\begin{aligned} f_V &= f_H + f_P \\ f_V &= c_1 + nc_2 - 2n^2. \end{aligned}$$

Dosadením počiatočných podmienok vypočítame, čomu je rovné c_1, c_2, a teda

$$\begin{aligned} f(2) &= 10n - 8 = c_1 + 2c_2 - 8 \\ f(3) &= 14n - 18 = c_1 + 3c_2 - 18. \end{aligned}$$

Vyriešením tejto sústavy rovníc dostávame, že $c_1 = 2n$ a $c_2 = 4n$. Dosadením týchto dvoch konštánt do všeobecného riešenia rovnice dostávame požadovaný výsledok

$$f_V = f(n) = 2n^2 + 2n.$$

Priemerný počet ukončených prechádzok, kým Adam zistí, že pri náhodne vybraných dverách už nie sú žiadne topánky je $2n^2 + 2n$. Týmto sme si ukázali riešenie príkladu.

Záver

Cieľom tejto bakalárskej práce bolo vytvoriť zbierku príkladov, ktorá umožní uchádzačom o novú prácu jednoduchšiu prípravu na pohovor, napríklad na Wall Street. Práca obsahuje príklady z pravdepodobnosti, ktoré sme čerpali hlavne z knihy [20]. V knihe boli riešenia príkladov, ktoré sa môžu objaviť na pohovore doplnené o rozšírenia daných príkladov, ktoré sa môžu na pohovore opýtať. Tieto rozšírenia už v knihe neboli vyriešené. Riešenia sme doplnili o počítačové simulácie, ktoré sme urobili hlavne na skontrolovanie výsledkov. Každú kapitolu sme venovali nejakej téme, ktorá sa zdá byť zaujímavá a doplnili sme ju o príklady, ktoré sa venujú nami vybranému okruhu. Pri písaní sme sa všetko snažili exaktne dokázať, preto sme vždy vysvetlili aj teóriu a aj metódy, ktoré sme v práci využili. Bakalárska práca je väčšieho rozsahu, pretože každý príklad sa snažíme vysvetliť do hĺbky, aby čitateľ pochopil každý krok, ktorý sme urobili a nemusel už nad príkladom veľa premýšľať.

Prvú kapitolu sme venovali príkladom o ponožkách. Najprv sme ukázali riešenie príkladu z knihy [20], následne sme zobrali z iných zdrojov príklady, ktoré sa venujú tiež ponožkám. Príklad *Párovanie ponožiek* sme doplnili aj počítačovou simuláciou, pomocou ktorej sme najprv overili výpočet strednej hodnoty a následne vykreslili graf (1), na ktorom môžeme vidieť, ako sa mení stredná hodnota s počtom simulácií. V riešení príkladu *Počet ponožiek v zásuvke* sme najskôr vysvetlili a neskôr aj využili Pellovu rovnicu, ktorej ak nájdeme riešenie, tak vieme nájsť nekonečne veľa ďalších riešení.

Druhá kapitola bola viac matematická. Venovala sa príkladom na výpočet strednej hodnoty a disperzie. V kapitole sme interpretovali momentovú vytvárajúcu funkciu. Následne sme počítali momentovú vytvárajúcu funkciu pre rôzne rozdelenia, napríklad normálne rozdelenie alebo Poissonovo rozdelenie. Aby si čitateľ vedel lepšie predstaviť, načo taká funkcia slúži, uviedli sme aj príklad, ako môžeme túto funkciu využiť napríklad v poisťovníctve.

Tretiu kapitolu sme zamerali na hod mincou. Príklady o hode mincou sú v pravdepodobnosti veľmi populárne, preto sme túto tému zahrnuli aj do našej práce. Príklad z knihy [20] sme doplnili príkladom z knihy [7], ktorý sa venoval určeniu, ktoré dievča je na tom lepšie. Konkrétne dievčatá si zvolili výherné kombinácie, ktoré keď padnú v požadovanom poradí, tak im prinesú výhru. My sme výpočty doplnili aj o počítačovú simuláciu, kde sme naprogramovali náhodne hody mincou a ak padla požadovaná kombinácia, vrátilo nám, ktoré dievča vyhralo. V tabuľkách (5) a (6) sú zaznamenané počty, koľkokrát ktoré diveča vyhralo, keď sme hru opakovali 100 000-krát.

V štvrtej kapitole sme sa venovali hrám s hracími kartami. Najskôr sme vyriešili príklad z knihy [20] a následne sme kapitolu doplnili príkladmi z iných zdrojov. Súčasťou štvrtej kapitoly bol aj dotazník, ktorého cieľom bolo zistiť, ako ľudia uvažujú, že dopadne nejaká hra bez matematických výpočtov. Dostali teda zadanie príkladu a mali na základe logického uvažovania určiť, čo si myslia, že bude správna odpoveď. Naše predpoklady sa nám potvrdili a väčšina opýtaných odpovedala správne aj bez toho, aby príklad počítala, okrem poslednej otázky, ktorú na naše očakávanie väčšina odpovedala nesprávne. V kapitole sme takisto ukázali, či sa oplatí pri testoch s možnosťou výberu správnej odpovede použiť taktiku, zvolím odpoveď, ktorá už dlho nebola.

Posledná kapitola je venovaná náhodným prechádzkam. Sú v nej zobrazené dva zaujímavé príklady. Jeden je venovaný mravcovi, ktorý sa náhodne pohybuje po hrane kocky a druhý Adamovi a jeho náhodným prechádzkam. Druhý príklad sme riešili pomocou diferenčných rovníc.

Prínosom tejto práce je, že uchádzačovi o zamestnanie sme poskytli viacero príkladov na precvičenie a na lepšiu prípravu na pracovný pohovor. Taktiež sme ukázali, že matematiku, a teda konkrétne pravdepodobnosť nájdeme všade okolo nás a môže byť veľmi zaujímavá a zábavná aj pre obyčajného človeka.

Pre autora bolo prínosom obohatenie sa o nové vedomosti ako napríklad na čo slúži Pellova rovnica. Práca priučila autora o programovanie rôznych hier a simulácií. Takisto bolo pre autora prínosom spozorovať z dotazníka, že veľa ľudí téma pravdepodobnosti naozaj zaujíma. Autor vysvetľuje nové témy, s ktorými sa doteraz na štúdiu nestretol, ale bolo pre neho zaujímavé venovať sa im.

Zoznam použitej literatúry

[1] Arfken, G. B., Weber, H. J.:*Mathematical Methods For Physicists International Student Edition*, Elsevier Academic Press, United States of America, 2005

[2] Benninga, S., Mofkadi, T.: *Principles of Finance with Excel (Hardcover)*, Oxford University Press, New York, 2011

[3] Bhanu Murthy, T.S.: *A Modern Introduction to Ancient Indian Mathematics*, New Age International Publishers, New Delhi, 1992

[4] Blom, G.: *Elementary Problems*, The American Mathematical Monthly 91 (1984), 310, dostupné na internete (23.03.2018): http://www.jstor.org/stable/2322680

[5] BonusWeb, dostupné na internete (09.05.2018): https://bonusweb.idnes.cz/diskuse.aspx?iddiskuse=A090330_161217_bwclanek_vdp

[6] Bukovský, L., Kluvánek, I.:*Dirichletov princíp*, Mladá fronta, Praha, 1969

[7] Burjan, V., Bero, P., Černek, P.: *Matematický koktail*, Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava, 1991

[8] Cohen, H.: *Number Theory: Volume I: Tools and Diophantine Equations*, Springer, New York, 2000

[9] David E. Row, Springer: *The Pigeonhole Principle, Two Centuries Before Dirichlet*, Math Intelligencer 36 (2014), 27-29, dostupné na internete (17.01.2018): https://doi.org/10.1007/s00283-013-9389-1

[10] EDX, Probability: Distribution Models and Continuous Random Variables, Quality education for everyone, everywhere-courses, dostupné na internete(12.03.2018): https://www.edx.org/course/probability-distribution-models-continuous-random-variables

[11] Eisenberg, B.: *Problems and solutions*, The American Mathematical Monthly 94 (1987), 78-79, dostupné na internete (23.03.2018): http://www.jstor.org/stable/2323516

[12] Gambiter, dostupné na internete (09.05.2018): http://gambiter.com/cards/Spanish_playing_cards.html

[13] Gilbert G. T., Krusemeyer M., Larsom L. C., : *The Wohascum County Problem Book*, The Mathematical Association of America, United States of Amerika, 1993

[14] Glassdoor, To help people everywhere find jobs and companies they love, dostupné na internete (09.05.2018): https://www.glassdoor.com/index.htm

[15] Gravner, J.: *Lecture Notes for Introductory Probability*, kompletné zápisky z prednášok, Mathematics Department University of California Davis, California, 2017, dostupné na internete (30.03.2018): https://www.math.ucdavis.edu/ gravner/MAT135B/materials/

[16] Guba, P.: *Diferenčné a diferenciálne rovnice*, FMFI UK, Bratislava, 2018

[17] Jacobson, M., Williams, H.: *Solving the Pell Equation*, Springer, Canada, 2008

[18] Janková, K., Pázman, A.:*Pravdepodobnosť a štatistika*, UK, Bratislava, 2013

[19] Johnson B.R.: *Matching socks (American Mathematical Monthly problem E3148)* [online], Technical report DM-413-IR, Sonoma state university, 1986, dostupné na internete (17.01.2018): http://hdl.handle.net/1828/1675

[20] Joshi, M., Denson, N., Downes, A.:*Quant Job Interview Questions and Answers (Second Edition)*, Pilot Whale Press, Melbourne, 2008

[21] Klazar M.: *Kaleidoskop teórie čísel*, skript k prednáškam, MFF UK, Praha, 2000, dostupné na internete (21.01.2018): http://matematika.cuni.cz/klazar-utc.html

[22] Kollár, M.: *Matematická analýza 2*, FMFI UK, Bratislava, 2016

[23] Luttmann, R.: *Elementary Problems*, The American Mathematical Monthly 93 (1986), 400, dostupné na internete (18.03.2018): http://www.jstor.org/stable/2323611

[24] Luttmann, R., Grunbaum, K., Pedersen, S., Bowron, M., Groeneveld, R.A.: *Problems and solutions*, The American Mathematical Monthly 95 (1988), 357-358, dostupné na internete (17.01.2018): http://www.jstor.org/stable/2323579

[25] Mosteller F.: *Fifty Challenging Problems in Probability with Solutions*, Dover Publications, New York, 1965

[26] Pitman, J.: *Probability*, Springer, New York, 1993

[27] Probability Theory and Mathematical Statistics, dostupné na internete (17.01.2018): http://dspace.library.uvic.ca:8080/handle/1828/1675

[28] Sanders, P.: *A Level Maths for OCR S1*, Nelson Thornes, Cheltenham, 2005

[29] The Wizard of Odds, dostupné na internete (05.03.2018): https://wizardofodds.com/games/pontoon/australian/

[30] Tijms, H.: *Probability Exam Questions with Solutions*, skúškové príklady ku kurzu z pravdepodobnosti, Vrije University, Amsterdam, 2013, dostupné na internete (10.03.2018): http://personal.vu.nl/h.c.tijms/ExamQuestionsUP.pdf

[31] Zvára, K., Štěpán, J.: *Pravděpodobnost a matematická statistika*, Veda, Bratislava, 2002

Príloha A

```
#Parovanie ponoziek
pocetnajdenychparov <- function(n,k) {
ponozky <- c(1:n,1:n);
vybraneponozky <- sample(ponozky, size=k)
vybranepary <- c();

for(i in 1:(k-1))
{
        for(j in (i+1):k)
        {
                if (vybraneponozky[i]==vybraneponozky[j])
                {
                vybranepary <- c(vybranepary, vybraneponozky[i])
                }
        }
}
pocetparov <- length(vybranepary)

}

set.seed(12345)  # kvoli reprodukovatelnosti
opakovania <- replicate(100000, pocetnajdenychparov(10,10))
mean(opakovania)
table(opakovania)

x <- c(1, 10, 50, 100, 500, 1000, 10000, 50000, 100000)
y <- c(2, 2.1, 2.44, 2.27, 2.396, 2.34, 2.3624, 2.3687, 2.3685)
plot(x,y, xlab='pocet simulacii', ylab='stredna hodnota')

#Kto je na tom lepsie?
```

```
copadlo <- function(){
        x <- runif(1, 0, 1)
        if(x < 1/2){
                strana <- 1
        }
        else{
                strana <- 2
        }
        return(strana)
}

zhoda <- function(hody, hladane){
        hladanedlzka <- length(hladane)
        k <- 1
        for(i in 1:length(hody)){

                if(hody[i]==hladane[k]){
                        k <- k+1
                }
                else{
                        k <- 1
                        if(hody[i]==hladane[k]){
                                k <- k+1
                        }
                        else {
                                k <- 1
                        }
                }
                #if(k > hladanedlzka)
                if(k >= hladanedlzka)
                {
```

```
                    return(TRUE)
                }

        }
        return(FALSE)
}

#Kamila <- c(2,1)
#Kristina <- c(1,1)
Kamila  c(2,1,1)
Kristina <- c(1,1,2)

dievcata <- function(Kamila,Kristina){

        hody <- c()
        vyhral <- 0
        padlo <- c()
        while(TRUE){
                padlo <- c(padlo, copadlo())
                if(zhoda(padlo, Kamila)){
                        vyhral <- 1
                        break
                }
                if(zhoda(padlo, Kristina)){
                        vyhral <- 2
                        break
                }
        }
        return(vyhral)
}
```

```
set.seed(12345)  # kvoli reprodukovatelnosti
opakovania <- replicate(100000, dievcata(Kamila,Kristina))
mean(opakovania)
table(opakovania)

#Rozdavac kariet
padneEso <- function(k,n){
        vsetkykarty <- 52*n
        pravdepodobnost <- 1
        for(i in 0:(k-1)){
                if(i==(k-1)){
                pravdepodobnost <- pravdepodobnost*(4/(52*n-i))
                }
                else{
                pravdepodobnost <- pravdepodobnost*((48*n-i)/(52*n-i))
                }
        }
        return(pravdepodobnost)
}

rozdavac <- function(N,j,n){
        k <- floor((52*n-4*n-(j-1))/N)
        suma <- 0
        for(i in 0:k){
                suma <- suma + padneEso(j+N*i,n)
        }
        return(suma)
}

N <- 130
n <- 20
```

```
hraci <- c()
for(j in 1:N){
        hraci <- c(hraci,rozdavac(N,j,n))
}
hraci

plot(hraci, ylab='pravdepodobnost', xlab='poradie hraca')

#Mravec na kocke
pohyb <- function (vrchol){
        pozicia <- 0
        x <- runif(1, 0, 1)
        if (x < 1/3){
                pozicia <- 1
        }
        else if(1/3 < x && x < 2/3){
                pozicia <- 2
        }
        else {
                pozicia <- 3
        }
        if (vrchol[pozicia]==0){
                vrchol[pozicia]=1
        }
        else{
                vrchol[pozicia]=0
        }
  return (vrchol)
}
```

```
pohybmravca <- function(){
        vrchol <- c(0, 0, 0);
        cas <- 1;
        vrchol <- pohyb(vrchol)
        while(vrchol[1]  != 0 || vrchol[2] != 0 || vrchol[3] != 0)
        {
                cas <- cas+1;
                vrchol <- pohyb(vrchol)
        }
        return(cas)
}

set.seed(12345)
opakovania <- replicate(100000, pohybmravca())
mean(opakovania)
table(opakovania)

tab <- table(opakovania)
plot(tab, xlab='pocet minut', ylab='pocet opakovani' )
```

Príloha B

DOTAZNÍK

Otázky, ktoré sme položili ľuďom. Ľudia mali odpovedať, aký si myslia, že bude výsledok príkladu bez toho aby niečo počítali. V prvých otázkach bude rovnaké zadanie, meniť sa bude iba počet hráčov alebo počet kariet.

1.) Pohlavie

a.) Žena

b.) Muž

2.) Vek

a.) menej ako 18

b.) 18-25

c.) viac ako 25

3.) V pokrovej hre s dvomi hráčmi A, B, rozdávač kariet je vybraný nasledujúcim spôsobom. V poradí $ABAB\ldots$ sú rozdávané karty z premiešaného balíka kariet hráčom, pokým jeden z nich nedostane eso. V balíku je 52 kariet. Prvý hráč, ktorý dostane eso začína nasledujúcu hru ako rozdávač kariet. Ktorý hráč má najväčšiu pravdepodobnosť stať sa rozdávačom kariet?

a.) hráč A

b.) hráč B

c.) obaja hráči majú rovnakú šancu stať sa rozdávačom kariet

4.) V pokrovej hre s tromi hráčmi A, B, C, rozdávač kariet je vybraný nasledujúcim spôsobom. V poradí $ABCABC\ldots$ sú rozdávané karty z premiešaného balíka kariet hráčom, pokým jeden z nich nedostane eso. V balíku je 52 kariet. Prvý hráč, ktorý dostane eso začína nasledujúcu hru ako rozdávač kariet. Ktorý hráč má najväčšiu pravdepodobnosť stať sa rozdávačom kariet?

a.) hráč A

b.) hráč B

c.) hráč C

d.) všetci hráči majú rovnakú šancu stať sa rozdávačom kariet

5.) V pokrovej hre s tromi hráčmi A, B, C, rozdávač kariet je vybraný nasledujúcim spôsobom. V poradí $ABCABC\ldots$ sú rozdávané karty z premiešaného balíka kariet hráčom, pokým jeden z nich nedostane eso. Tento krát je v balíku 104 kariet. Prvý hráč, ktorý dostane eso začína nasledujúcu hru ako rozdávač kariet. Ktorý hráč má najväčšiu pravdepodobnosť stať sa rozdávačom kariet?

a.) hráč A

b.) hráč B

c.) hráč C

d.) všetci hráči majú rovnakú šancu stať sa rozdávačom kariet

6.) V pokrovej hre s N hráčmi $A, B, C, \ldots, N$, rozdávač kariet je vybraný nasledujúcim spôsobom. V poradí $ABC\ldots NABC\ldots N\ldots$ sú rozdávané karty z premiešaného balíka kariet hráčom, pokým jeden z nich nedostane eso. V balíku je 52 kariet. Prvý hráč, ktorý dostane eso začína nasledujúcu hru ako rozdávač kariet. Majú hráči rovnakú pravdepodobnosť stať sa rozdávačmi kariet?

a.) áno

b.) nie

Teraz máme úplne iný príklad.

7.) Tvoj priateľ si náhodne vyberie kartu z obyčajného balíka 52-och kariet, ale tak aby si ty nevidel aká je to karta. Ty budeš hádať, akú kartu vytiahol. Predtým sa však môžeš opýtať kamaráta, buď či je jeho vybraná karta červenej farby alebo či je jeho karta pikové eso. Priateľ ti na otázku odpovie pravdivo. Akú otázku by si sa opýtal?

a.) Je karta červená?

b.) Je karta pikové eso?

c.) Je jedno, ktorú otázku sa opýtam