UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

ČO TREBA VEDIEŤ Z PRAVDEPODOBNOSTI NA PRACOVNOM POHOVORE NA WALL STREET II

BAKALÁRSKA PRÁCA

2018

Anna Mária LAURENČÍKOVÁ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

ČO TREBA VEDIEŤ Z PRAVDEPODOBNOSTI NA PRACOVNOM POHOVORE NA WALL STREET II

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program:	Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor:	1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	doc. RNDr. Beáta Stehlíková, PhD.

Bratislava 2018

Anna Mária LAURENČÍKOVÁ

40238280

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta:	Anna Mária Laurenčíková
Študijný program:	ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor:	aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce:	bakalárska
Jazyk záverečnej práce:	slovenský
Sekundárny jazyk:	anglický

Názov: Čo treba vedieť z pravdepodobnosti na pracovnom pohovore na Wall Street II
What one needs to know on a job interview at Wall Street II

Anotácia: Jednotlivé kapitoly práce sú založené na príkladoch z kapitoly o pravdepodobnosti v knihe „Quant Job Interview: Questions and Answers":
(1) Príklady s prekvapujúcimi výsledkami- pr. 14, 15
(2) Diskusia o predpokladoch – pr. 16
(3) Ruská ruleta – pr. 17
(4) Úlohy o náhodných stretnutiach – pr. 24
(5) Korelácia – pr. 26
(6) Príklady súvisiace s trojuholníkmi – pr. 17, 48
(7) Podmienená pravdepodobnosť – pr. 40
Každá kapitola danú tému rozvíja,uvádza zovšeobecnenia, príklady s podobnou myšlienkou alebo tematikou. Výpočty sú doplnené počítačovými simuláciami.

Cieľ: - Riešenia príkladov z [1] doplniť príbuznými príkladmi, zovšeobecneniami a pod. tak, aby ich náročnosť zodpovedala bakalárskej práci.
- Vybrané úlohy doplniť počítačovými simuláciami.

Literatúra: [1] Joshi, M. S., Denson, N., & Downes, A. (2008). Quant Job Interview: Questions and Answers. Melbourne, Pilot Whale Press.
Ďalšia literatúra podľa vlastného výberu

Vedúci:	doc. RNDr. Mgr. Beáta Stehlíková, PhD.
Katedra:	FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry:	prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
Dátum zadania:	31.10.2017

Dátum schválenia: 20.11.2017 doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

....
študent vedúci práce

Poďakovanie Chcela by som sa poďakovať svojej vedúcej bakalárskej práce doc. RNDr. Beáte Stehlíkovej, PhD. za trpezlivosť, cenné odborné rady a pripomienky a priateľský prístup, ktoré mi pomohli pri písaní tejto práce. Ďakujem aj mojim rodičom a priateľom za ich trpezlivosť a podporu počas celého štúdia.

Abstrakt v štátnom jazyku

LAURENČÍKOVÁ, Anna Mária: Čo treba vedieť z pravdepodobnosti na pracovnom pohovore na Wall Street II [Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: doc. RNDr. Beáta Stehlíková, PhD., Bratislava, 2018, 90 s.

Cieľom tejto bakalárskej práce je uviesť riešenia príkladov z pravdepodobnosti, ktoré sa objavili na pracovných pohovoroch. V práci sú uvedené aj ich zovšeobecnenia a iné príklady k daným témam, ktoré by mohli slúžiť ako príprava na takéto pracovné pohovory.

Bakalárska práca má 7 kapitol. V každej kapitole sú uvedené príklady z pravdepodobnosti z danej témy a ich rozšírenia. Pri riešení jednotlivých, aj náročnejších, príkladov sa opiera o základné princípy pravdepodobnosti. Každú kapitolu je doplnená počítačovou simuláciou v softvéri R, vďaka čomu je možné jednotlivé príklady lepšie pochopiť. Súčasťou práce sú aj kódy príslušných simulácií.

Kľúčové slová: prekvapujúce výsledky, predpoklady, Ruská ruleta, náhodná prechádzka, náhodné stretnutie, korelácia, podmienená pravdepodobnosť

Abstract

LAURENČÍKOVÁ, Anna Mária: What one needs to know on a job interview at Wall Street II [Bachelor Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: doc. RNDr. Beáta Stehlíková, PhD., Bratislava, 2018, 90 p.

The purpose of this bachelor thesis is to present solutions of probability problems that appeared at the job interviews. The thesis also presents their generalizations and other problems connected to the given topics that could serve as a preparation for such job interviews.

Bachelor thesis has 7 chapters. In each chapter are given problems of the probability connected to the given topic and its extensions. In solving of the particular, also more advanced, problems, the thesis is based on the basic principles of probability. Each chapter is complemented by simulation in R software, which makes it easier to understand each problem. The thesis contains also codes of the respective simulations.

Keywords: suprise results, preconditions, Russian roulette, random walk, random meeting, correlation, conditional probability

Obsah

Úvod

Asi každý z nás už niekedy použil slová pravdepodobnosť, pravdepodobne, či s najväčšou pravdepodobnosťou. Pôvod pravdepodobnosti môžeme nájsť v hrách založených na náhode. Ľudí v minulosti zaujímalo, aká je pravdepodobnosť ich výhry napríklad v hre Hod mincou. Prvé formalizované poznatky z pravdepobnosti sa však datujú až v 16.storočí. Za rozvoj teórie pravdepodobnosti sa považuje listová komunikácia medzi Pascalom a Fermatom z roku 1654. Zaoberali sa otázkou, ako správne rozdeliť bank medzi hráčov, ak musela byť hra predčasne prerušená.

Avšak pravdepodobnosť už dávno nie je iba matematickou záležitosťou. Čím ďalej, tým viac sa s ňou stretávame aj v bežnom živote a dokonca aj v odvetviach, kde by sme ju vôbec nečakali, napríklad v medicíne, biológii či finančníctve. Preto by pre nás nemalo byť prekvapením, že aj otázky z pravdepodobnosti nás môžu čakať na pracovnom pohovore na Wall Street, či na podobnú pracovnú pozíciu.

Cieľom ľudí, ktorý vedú takéto pohovory, je preveriť si schopnosť uchádzača rozmýšľať pravdepodobnostne. To znamená, vedieť použiť poznatky z pravdepodobnosti na praktických ale aj teoretických príkladoch. Takýmto príkladom z pravdepodobnosti sa venuje celá jedna kapitola z [21].

V našej bakalárskej práci uvádzame riešenia príkladov z [21], ktoré sa na takýchto pohovoroch vyskytli, dopĺňame ich ďalšími príkladmi, ktoré s danou témou súvisia a rozširujú pôvodné príklady. Vybrané príklady dopĺňame počítačovými simuláciami v softvéri R, ktoré pomáhajú riešenie lepšie pochopiť, prípadne slúžia na porovnanie výsledkov získanými teoretickým výpočtom.

1 Príklady s prekvapujúcimi výsledkami

Pri riešení príkladov z pravdepodobnosti sa často môžeme stretnúť s výsledkami, ktoré by sme na začiatku neočakávali. Snáď najznámejším príkladom s takýmito výsledkami je tzv. Narodeninový paradox [3]. Zďaleka to nie je ale jediný takýto príklad.

1.1 Príklady o súrodencoch

Príklad 1.1. *Rodina má dve deti. Vieme, že jedno z detí je dievča. Aká je pravdepodobnosť, že druhé z detí je chlapec? [21]*

Príklad 1.2. *Rodina má dve deti. Vieme, že aspoň jedno z nich dievča. Aká je pravdepodobnosť, že obe deti sú dievčatá? [21]*

Príklad 1.3. *Ako sa zmení výsledok, ak vieme, že staršie z detí je dievča? [21]*

Riešenie: Zavedieme si definície potrebné na riešenie príkladov podľa [20].

Predpokladáme, že experiment je jednoduchý, teda, že výsledkom experimentu je práve jeden prvok z konečnej množiny a všetky možné výsledky sú z hľadiska toho, ako často nastávajú, rovnocenné. Množinu všetkých možných výsledkov experimentu budeme nazývať množinou elementárnych udalostí Ω. Ak po uskutočnení experimentu dostaneme výsledok $\omega \in \Omega$, budeme hovoriť, že nastala elementárna udalosť $A = \{\omega\}$. V prípade, že Ω je konečná, udalosťou rozumieme ľubovoľnú podmnožinu Ω a systém všetkých udalostí označíme $\mathcal{S}$.

Za uvedených predpokladov sformulujeme klasickú alebo Laplaceovú definíciu pravdepodobnosti.

Pravdepodobnosť ľubovoľnej udalosti $A \in \Omega$ je daná vzťahom

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}, \tag{1.1}$$

kde $|.|$ označuje počet prvkov množiny. Trojicu $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ budeme nazývať klasickým pravdepodobnostným priestorom.

Okrem klasickej pravdepodobnosti využijeme aj podmienenú pravdepodobnosť.

Podmienenou pravdepodobnosťou udalosti $A \in \mathcal{S}$ za podmienky, že nastala udalosť $B \in \mathcal{S}$ taká, že $P(B) > 0$ budeme rozumieť číslo

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{1.2}$$

Na ilustráciu toho, v čom sú výsledky týchto troch príkladov prekvapivé, začneme nesprávnym postupom riešenia prvého príkladu. Na prvý pohľad sa môže zdať, že množina elementárnych udalostí bude mať dva prvky, a to $\Omega = \{CH, D\}$, kde CH označuje, že druhé z detí je chlapec a D označuje, že druhé z detí je dievča. Označme A udalosť, že druhé z detí je chlapec, potom $A = \{CH\}$. Mohlo by sa teda zdať, že na základe (1.1) môžeme tvrdiť, že $P(A) = \frac{1}{2}$.

Avšak zabudli sme zohľadniť fakt, že rodina má dve deti, a teda množina elementárnych udalostí Ω a aj samotná udalosť A, ktorej pravdepodobnosť nás zaujíma, vyzerá inak.

Predpokladajme, že rodina má dve deti, ktorých pohlavie nepoznáme, jedno z nich je staršie. Kombinácie sú teda nasledujúce: $(CH, CH), (CH, D), (D, CH), (D, D)$. Tieto kombinácie budú tvoriť Ω, pričom sú rovnocenné a teda každá z nich nastáva s pravdepodobnosťou $\frac{1}{4}$. Označme A udalosť, že jedno z detí je dievča, potom $A = \{(CH, D)$, (D, CH), $(D, D)\}$. Až teraz môžeme aplikovať Laplaceovu definíciu pravdepodobnosti a teda pravdepodobnosť, že jedno z dvoch detí je dievča $P(A) = \frac{3}{4}$.

Označme B udalosť, že jedno z detí je chlapec. Potom $B = \{(CH, CH)$, (CH, D), $(D, CH)\}$ a platí $P(B) = \frac{3}{4}$. Nás zaujíma pravdepodobnosť, že druhé z detí je chlapec, ak vieme, že jedno z detí je dievča, teda

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\{(CH, D), (D, CH)\})}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{2}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}, \tag{1.3}$$

a teda riešením príkladu 1.1 sú $\frac{2}{3}$. Môžeme si teda všimnúť, že výsledok nie je $\frac{1}{2}$ ako by sme na začiatku očakávali.

Označme teraz C udalosť, že obe deti sú dievčatá. Potom $C = \{(D, D)\}$ a $P(C)$ podľa (1.1) je rovná $\frac{1}{4}$. Pravdepodobnosť, že obe deti sú dievčatá, ak vieme, že aspoň jedno z detí je dievča je rovná

$$P(C|A) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\{(D, D)\})}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}, \tag{1.4}$$

a teda riešením príkladu 1.2 je $\frac{1}{3}$.

Uvažujme teraz udalosť E, ktorá označuje, že staršie z detí je dievča. Potom $E = \{(D, CH), (D, D)\}$. Pravdepodobnosť, že obe deti sú dievčatá, ak vieme, že staršie z detí je dievča, je rovná

$$P(C|E) = \frac{P(C \cap E)}{P(E)} = \frac{P(\{(D,D)\})}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}. \tag{1.5}$$

1.2 Duel v troch rohoch

Príklad 1.4. *Hráči A, B a C si idú zahrať hru s pištoľami, kde budú na seba strieľať v poradí A, B a C. Hráč prehrá vtedy, ak ho niekto trafí a hra skončí, keď zostane posledný netrafený hráč. Vieme, že pravdepodobnosť, že A trafí je 0,3, B nikdy neminie cieľ a C trafí s pravdepodobnosťou 0,5. Akú stratégiu zvolí A? [29]*

Riešenie: Uvažujme stratégie hráča A. Hráč A hru začína a rozhoduje sa, či bude strieľať na hráča B alebo na hráča C. Ak by strieľal na hráča C a trafil by ho, B by ho následne určite trafil a teda by prehral.

Ak bude strieľať na hráča B, trafí ho s pravdepodobnosťou 0,3. Predpokladajme, že hráč A netrafil hráča B. Hráč B bude teraz určite najprv strieľať na C, pretože ten ho môže s väčšou pravdepodobnosťou v ďalšom kole trafiť. Keďže B nikdy neminie cieľ, hráč C prehrá a pokračuje A, ktorý bude mať ďalšiu možnosť trafiť hráča B s pravdepodobnosťou 0,3. Ak netrafí, prehrá.

Teraz predpokladajme, že hráč A v prvom kole trafil hráča B. Hráči A a C sa budú v ďalších kolách striedať v strieľaní. Chceme vypočítať pravdepodobnosť výhry hráča A. To znamená, že hráč C netrafil hráča A a následne hráč A trafil hráča C. Pravdepodobnosť výhry v prvom kole prestrelky bude

$$P(\text{výhra } A \text{ v 1.kole}) = P(C \text{ netrafí} \cap A \text{ trafí}) = 0,5 \cdot 0,3$$

Ak by v tomto kole A netrafil, hra bude pokračovať ďalej, teda bude strieľať C. Na to aby A vyhral, by C opäť nemohol trafiť a teda pravdepodobnosť výhry v druhom kole prestrelky bude

$$\begin{aligned} P(\text{výhra } A \text{ v 2.kole}) &= P(C \text{ netrafí v 1.kole} \cap A \text{ netrafí v 1.kole} \cap \\ &\cap C \text{ netrafí v 2.kole} \cap A \text{ trafí v 2.kole}) = \\ &= 0,5 \cdot 0,7 \cdot 0,5 \cdot 0,3 = 0,5^2 \cdot 0,7 \cdot 0,3 \end{aligned}$$

A opäť, ak by A netrafil, pokračoval by C. Na to, aby A vyhral, by C opäť nemohol trafiť. Teda pravdepodobnosť výhry hráča A by bola

$$\begin{gathered}P(\text{výhra } A \text{ v 3.kole}) = P(C \text{ netrafí v 1. kole} \cap A \text{ netrafí v 1. kole} \cap \\ \cap C \text{ netrafí v 2. kole} \cap A \text{ netrafí v 2.kole} \cap \\ \cap C \text{ netrafí v 3. kole} \cap A \text{ trafí v 3. kole}) = \\ = 0,5 \cdot 0,7 \cdot 0,5 \cdot 0,7 \cdot 0,5 \cdot 0,3 = 0,5^3 \cdot 0,7^2 \cdot 0,3\end{gathered}$$

Rovnakým postupom dostaneme pravdepodobnosť výhry v n-tom kole prestrelky rovnú

$$P(\text{výhra } A \text{ v n-tom kole}) = 0,5^{n+1} \cdot 0,7^n \cdot 0,3.$$

Pravdepodobnosť výhry hráča A teraz vypočítame ako súčet pravdepodobností výhry A v jednotlivých kolách, teda

$$\begin{gathered}P(\text{výhra } A) = 0,5 \cdot 0,3 + 0,5^2 \cdot 0,7 \cdot 0,3 + 0,5^3 \cdot 0,7^2 \cdot 0,3 + ... \\ ... + 0,5^{n+1} \cdot 0,7^n \cdot 0,3 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} 0,5^{n+1} \cdot 0,7^n \cdot 0,3 = 0,3 \cdot 0,5 \sum_{n=0}^{\infty} (0,5 \cdot 0,7)^n\end{gathered}$$

Súčet geometrického vieme jednoducho vypočítať a teda pravdepodobnosť výhry A je

$$P(\text{výhra } A) = \frac{0,3 \cdot 0,5}{1 - 0,5 \cdot 0,7} = \frac{0,15}{0,65} = \frac{3}{13} < \frac{3}{10} = 0,3 \tag{1.6}$$

Z uvedeného vyplýva, že ak hráč A v prvom kole trafí hráča B a potom sa bude snažiť trafiť hráča C, vyhrá s nižšou pravdepodobnosťou, ako keby v prvom kole netrafil B. Hráč A preto v prvom kole trafí radšej do zeme, pretože v ďalšom kole má väčšiu pravdepodobnosť vyhrať proti B ako má proti C.

Príklad 1.5. *Pre aké kombinácie pravdepodobností trafenia cieľa by bol výsledok rovnaký?*

Riešenie: Predpokladajme, že hráč A trafí cieľ s pravdepodobnosťou x, $0 < x < 1$, hráč B nikdy neminie cieľ a hráč C trafí cieľ s pravdepodobnosťou y, $0 < y < 1$.

Uvažujme rovnaký priebeh duelu ako v predchádzajúcom prípade, teda že v prvom kole A trafí B a následne bude prestrelka medzi C a A. Chceme vypočítať pravdepodobnosť výhry hráča A. Tá bude rovná

$$\begin{aligned} P(\text{výhra } A) &= \sum_{n=0}^{\infty}(1-y)^{n+1}(1-x)^n x = \\ = x(1-y)\sum_{n=0}^{\infty}\left[(1-y)(1-x)\right]^n &= \frac{x(1-y)}{1-(1-y)(1-x)} \end{aligned} \tag{1.7}$$

Aby sme dostali rovnaký výsledok ako v predchádzajúcom v prípade, teda aby bolo pre hráča A výhodnejšie streliť prvú strelu do zeme (resp. netrafiť hráča B) musí platiť $x < y$. V prípade, ak $x > y$, tak B by v nasledujúcom kole trafil najprv A, pretože ten by ho trafil s vyššou pravdepodobnosťou ako C. Ak $x = y$, tak by hráč A mohol byť v nasledujúcom kole hráčom B trafený s rovnakou pravdepodobnosťou ako hráč C, pretože pre hráča B by obidvaja hráči predstavovali rovnaké ohrozenie. Zároveň musí platiť, že pravdepodobnosť výhry hráča A nad hráčom C po vzájomnej prestrelke, teda $\frac{x(1-y)}{1-(1-y)(1-x)}$, bude menšia ako pravdepodobnosť výhry hráča A, ak by zahodil prvú strelu, teda x.

Máme teda nasledovné nerovnosti, ktoré charakterizujú prípady, v ktorých je pre A najvýhodnejšie streliť do zeme.

$$\begin{gathered} x < y \\ 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \\ \frac{x(1-y)}{1-(1-y)(1-x)} < x \end{gathered}$$

Prvú z nerovníc ešte upravíme, pričom využijeme, že $x, y \in (0,1)$ a dostávame

$$\begin{gathered} 1-y < 1-(1-y)(1-x) \\ y(2-x) > 1-x \end{gathered}$$

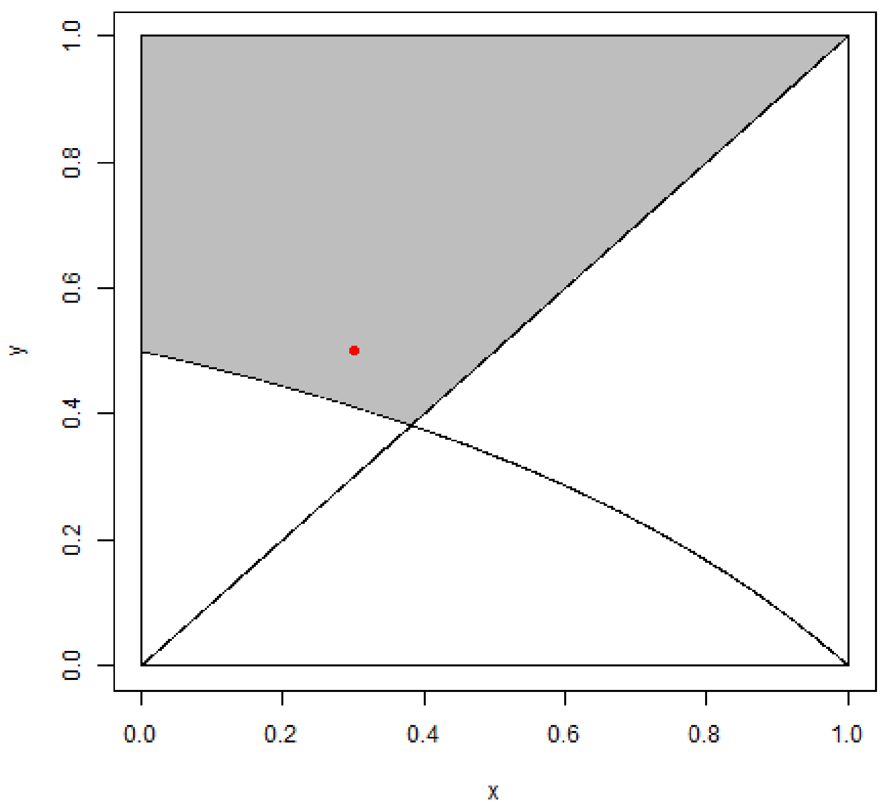
Znovu využijeme, že $x, y \in (0,1)$, a teda $2 - x > 0$, z čoho dostávame

$$y > \frac{1-x}{2-x}.$$

Dostávame teda, že na to, aby bol výsledok rovnaký ako v prvom prípade musia pravdepodobnosti splĺňať systém nerovníc

$$0 < x < 1$$
$$0 < y < 1$$
$$y > \frac{1-x}{2-x}$$
$$x < y$$

Graficky je množina vyhovujúcich dvojíc (x, y) znázornená na obrázku 1.1, kde červený bod predstavuje kombináciu (x, y) z pôvodného zadania, teda $(0,3; 0,5)$.



Obr. 1.1: Grafické znázornenie množiny možných riešení (sivou) a bodu z pôvodného zadania (červenou)

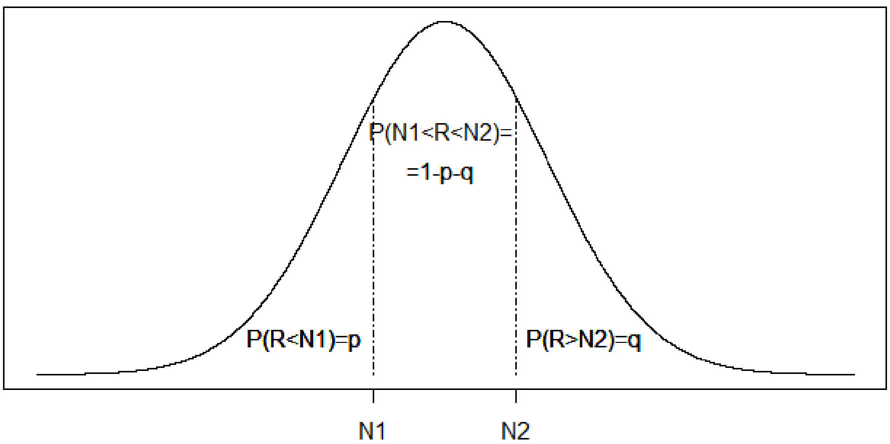
1.3 N = 2: Prekvapenie

Príklad 1.6. *Na dvoch papierikoch sú napísané čísla, o ktorých nemáme žiadnu vedomosť a sú otočené tak, že ich nevidíme. Otočíme jeden z papierikov, pozrieme sa na číslo a máme sa rozhodnúť, či otočíme aj druhý papierik. Vyhrávame, pokiaľ si vyberieme papierik s číslom, ktoré je väčšie. [23]*

Riešenie: Na prvý pohľad sa môže zdať, že pravdepodobnosť výhry je presne $\frac{1}{2}$, pretože si vyberáme z dvoch papierikov. Avšak dá sa nájsť stratégia, pri ktorej je pravdepodobnosť výhry väčšia ako $\frac{1}{2}$. Pri tejto stratégii použijeme generátor náhodných čísel, ktorý generuje číslo R z rozdelenia $\mathcal{N}(0,1)$.

Otočíme náhodne jeden z papierikov. Ak je vygenerované číslo R menšie ako číslo na papieriku, necháme si papierik s týmto číslom. Ak je číslo R väčšie ako číslo na otočenom papieriku, otočíme druhý z papierikov.

Označme si čísla na papierikoch ako $N_1 < N_2$, pravdepodobnosť, že vygenerované číslo R je menšie ako N_1 ako $0 < p < 1$ a pravdepodobnosť, že vygenerované číslo R je väčšie ako N_2 ako $0 < q < 1$. Pravdepodobnosť, že vygenerované číslo R sa nachádza medzi číslami N_1 a N_2, je rovná $0 < 1 - p - q < 1$.



Obr. 1.2: Grafické znázornenie pravdepodobností výhry

Ak je R menšie ako obe z čísel na papierikoch, vyhráme s pravdepodobnosťou $\frac{p}{2}$.

Naopak, ak je R väčšie ako obe z týchto čísel, vyhráme s pravdepodobnosťou $\frac{q}{2}$. Ak sa vygenerované číslo R nachádza medzi dvomi číslami na papierikoch, teda $N_1 < R < N_2$, vyhrávame vždy. Dôvodom je práve stratégia, ktorú sme si zvolili. Predpokladajme, že sme si vybrali papierik s číslom N_1. Keďže $N_1 < R < N_2$, tak podľa našej stratégie otočíme druhý papierik s číslom N_2 a vyhráme. Naopak, ak sme si vybrali papierik s číslom N_2, číslo R bude menšie ako N_2 a podľa našej stratégie si necháme papierik s týmto číslom a teda opäť vyhráme.

Celková pravdepodobnosť našej výhry je teda rovná

$$\begin{aligned} P(\text{výhra}) &= P(R < N_1)P(N_1) + P(N_1 < R < N_2) + P(R > N_2)P(N_2) = \\ &= \frac{p}{2} + (1 - p - q) + \frac{q}{2} \end{aligned} \tag{1.8}$$

Chceme dokázať, že táto pravdepodobnosť výhry je väčšia ako $\frac{1}{2}$, teda

$$\frac{p}{2} + (1 - p - q) + \frac{q}{2} > \frac{1}{2}$$

Po úprave dostaneme

$$p + q < 1,$$

čo platí z dôvodu, že $1 - p - q > 0$.

V softvéri R sme vygenerovali dve čísla z rôznych pravdepodobnostných rozdelení, ktoré predstavujú dve čísla na papierikoch. Aplikovali sme na ne našu stratégiu a skúmali, v koľkých prípadoch sme vyhrali a v koľkých nie. Výsledkom je tabuľka, kde

Tabuľka 1.1: Pravdepodobnosti výhry pri číslach generovaných z rôznych rozdelení

rozdelenie	aprox. pravd. výhry
t_1	0,70720
t_{100}	0,66871
$\mathcal{N}(0,1)$	0,66487
$R(0,1)$	0,55788
Exp(1)	0,59167
Exp(100)	0,50272
χ^2_5	0,51700

v prvom stĺpci uvádzame rozdelenie, z ktorého sme dve čísla generovali a v druhom stĺpci aproximovanú pravdepodobnosť výhry po opakovaní pokusu 10^5-krát.

Môžeme si všimnúť, že najvyššiu pravdepodobnosť výhry sme dostali, ak sme čísla na papierikoch generovali zo Studentovho rozdelenia s jedným stupňom voľnosti. Ak sme zvýšili počet stupňov voľnosti na 100, dostali sme pravdepodobnosť výhry podobnú ako v prípade, keď sme čísla na papierikoch generovali z $\mathcal{N}(0, 1)$. Pravdepodobnosť výhry blízku $0,5$ dostávame, ak sme generovali čísla na papierikoch z rozdelenia χ^2 s 5 stupňami voľnosti. S rastúcim parametrom λ exponenciálneho rozdelenia sa tiež blížime k pravdepodobnosti výhry blízkej $0,5$.

2 Diskusia o predpokladoch

V prípade riešenia príkladov z pravdepodobnosti je veľmi dôležité uvedomiť si, za akých predpokladov skúmame nastatie udalosti. Môžeme to vidieť aj na nasledujúcich príkladoch, ktorých riešenia uvedieme.

2.1 Príklad o pracovných dňoch

Príklad 2.1. *Aká je pravdepodobnosť, že štvrtý pracovný deň v mesiaci pripadne na štvrtok?*

Riešenie: Zo zadania sú dôležité slová - pracovný deň. Za pracovné dni považujeme dni od pondelka do piatku. Je teda dôležité uvedomiť si, že štvrtý pracovný deň v mesiaci pripadne na štvrtok, pokiaľ prvým dňom v mesiaci bola sobota, nedeľa alebo pondelok.

Ak by boli dni v mesiaci a v roku rovnomerne rozdelené, výsledok by bol $\frac{3}{7}$. Avšak pravdepodobnosť, že prvým dňom v mesiaci bude sobota, nedeľa alebo pondelok nie je rovnaká pre všetky mesiace v roku a ani pre jednotlivé roky kvôli prestupným rokom. Prestupné roky sa opakujú každé štyri roky. Neprestupný rok má 365 dní a dní v týždni je 7. Po predelení 365 číslom 7 dostaneme zvyšok 1. To znamená, že každý rok sa kalendár posunie o jeden deň. Teda, ak napríklad v roku A pripadol 1.január na pondelok, v roku $A+1$ pripadne 1.január na utorok. To znamená, že ak by neexistovali prestupné roky, kalendár by sa opakoval každých sedem rokov. Avšak kvôli prestupným rokom sa tento cyklus predlžuje na 400 rokov [24].

Prestupné roky sa zaviedli kvôli tomu, aby sme lepšie aproximovali otáčanie Zeme okolo Slnka. Zem sa okolo Slnka točí 365,2423... dní, čo je približne 365,25. Kvôli tomu pridávame každé štyri roky jeden deň navyše, čím sa snažíme „dobehnúť“ našu Zem. Avšak keďže Zem sa točí okolo Slnka o málo menej ako 365,25 dní, každé štyri roky vlastne Zem predbiehame. Preto sa zaviedla druhá úprava, a to, že v prípade, že je rok zároveň deliteľný 100 (napr. 2000, 2100, 2200,...), na to, aby bol prestupným rokom, musí byť deliteľný číslom 400. Touto úpravou v priebehu 400-ročného cyklu prídeme o 3 prestupné roky. Máme teda 303 neprestupných a 97 prestupných rokov, čo spolu predstavuje 146 097 dní. Toto číslo je deliteľné číslom 7 bezo zvyšku. V 400-ročnom cykle máme teda 20 871 týždňov. Z toho vyplýva, že dni v týždni sa tiež v tomto cykle opakujú.

V tabuľke 2.1 je uvedené, koľkokrát za 400 rokov pripadol prvý deň v mesiaci na jednotlivé dni v týždni: To znamená, že pravdepodobnosť, že 1.január pripadne na

Tabuľka 2.1: Početnosť zástupenia prvého dňa v mesiaci na jednotlivé dni v týždni

mesiac	pondelok	utorok	streda	štvrtok	piatok	sobota	nedeľa
1.január	56	58	57	57	58	56	58
1.február	58	56	58	56	58	57	57
1.marec	56	58	56	58	57	57	58
1.apríl	57	57	58	56	58	56	58
1.máj	56	58	57	57	58	56	58
1.jún	58	56	58	56	58	57	57
1.júl	57	57	58	56	58	56	58
1.august	58	56	58	57	57	58	56
1.september	57	58	56	58	56	58	57
1.október	58	57	57	58	56	58	56
1.november	56	58	56	58	57	57	58
1.december	57	58	56	58	56	58	57

sobotu bude $\frac{56}{400}$, keďže berieme do úvahy 400 rokov (podobne pre ostatné mesiace). Tieto relatívne početnosti sčítame a predelíme číslom 12 (počtom mesiacov v roku), keďže jednotlivé mesiace majú rovnakú pravdepodobnosť nastatia. Dostávame

$$P(1.\text{deň v mesiaci je sobota}) =$$
$$= \frac{56+57+57+56+56+57+56+58+58+58+57+58}{12 \cdot 400} =$$
$$= \frac{684}{4800} = \frac{57}{400} \doteq 0.1425$$

Podobne vypočítame tieto pravdepodobnosti pre nedeľu a pondelok.

$$P(1.\text{deň v mesiaci je nedeľa}) =$$
$$= \frac{58+57+58+58+58+57+58+56+57+56+58+57}{12 \cdot 400} =$$
$$= \frac{688}{4800} = \frac{43}{300} \doteq 0.1434$$

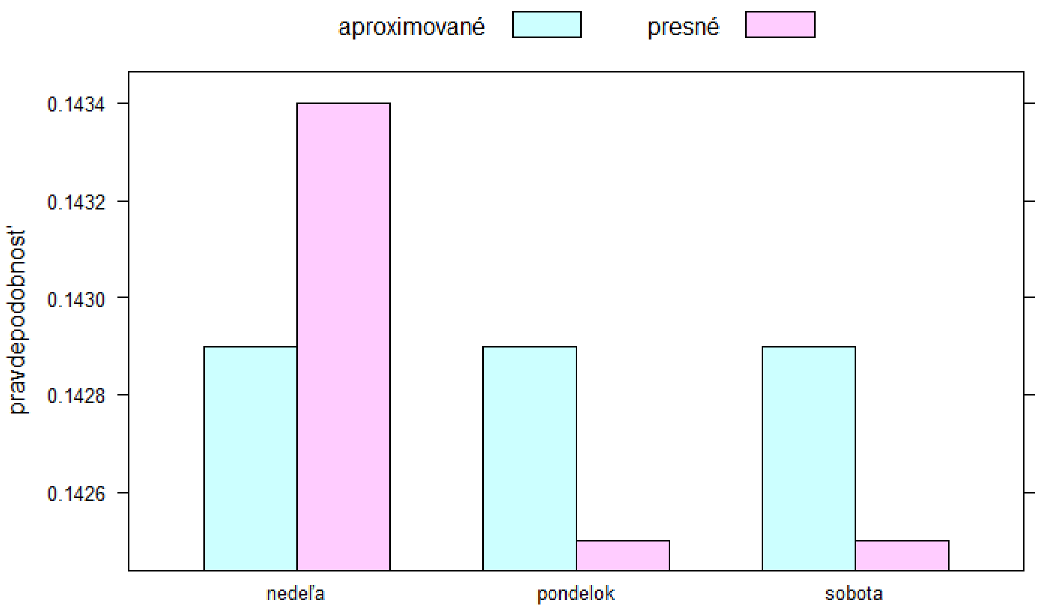
$$P(1.\text{deň v mesiaci je pondelok}) =$$
$$= \frac{56+58+56+57+56+58+57+58+57+58+56+57}{12 \cdot 400} =$$
$$= \frac{684}{4800} = \frac{57}{400} \doteq 0.1425$$

Ak teda chceme vypočítať pravdepodobnosť, že prvý deň v mesiaci pripadne na sobotu, nedeľu alebo pondelok, budeme počítať

$$P(1.\text{deň - sobota} \vee 1.\text{deň - nedeľa} \vee 1.\text{deň - pondelok}) =$$
$$= P(1.\text{deň - sobota}) + P(1.\text{deň - nedeľa}) + P(1.\text{deň - pondelok}) = \qquad (2.1)$$
$$= \frac{57}{400} + \frac{43}{300} + \frac{57}{400} = \frac{257}{600} \doteq 0,42834$$

Tabuľka 2.2: Porovnanie vypočítaných hodnôt s aproximovanými hodnotami

	sobota	nedeľa	pondelok	celkovo
presné	0.1425	0.1434	0.1425	0.4284
aproximované	0.1429			0.4286



Obr. 2.1: Grafické porovnanie vypočítaných hodnôt s aproximovanými hodnotami (zoom)

2.2 Príklad o večierku

Príklad 2.2. *Večierok sa koná k-ty pracovný deň v mesiaci. Chceme minimalizovať počet krát, kedy sa večierok koná v pondelok. Aké k vyberieme? (Uprednostňujeme menšie k v prípade rovnakej pravdepodobnosti.) [21]*

Riešenie: Opäť uvedieme riešenie pre prípad, že by dni boli rovnomerne rozdelené a aj skutočné riešenie. Postupne uvedieme, aká je pravdepodobnosť, že večierok sa bude konať v pondelok, pre jednotlivé k. Ak by dni boli rovnomerne rozdelené, pravdepodobnosť, že prvý deň v mesiaci pripadne na nejaký deň v týždni by bola rovná $\frac{1}{7}$. Avšak v prípade, že uvažujeme, že dni v týždni nie sú rovnomerne rozdelené dostávame nasledujúce pravdepodobnosti. Ak $k = 1$, teda večierok sa bude konať prvý pracovný deň v mesiaci, znamená to, že na to, aby sa večierok konal v pondelok musí prvým dňom v mesiaci byť sobota, nedeľa alebo pondelok. Teda pravdepodobnosť, že v prípade $k = 1$ sa bude večierok konať v pondelok bude rovnaká ako v príklade o dňoch a teda

$$P(\text{večierok v pondelok}) = \frac{57}{400} + \frac{43}{300} + \frac{57}{400} = \frac{257}{600} \doteq 0.4284$$

Ak $k = 2$, znamená to, že na to, aby sa večierok konal v pondelok, musí prvým dňom v danom mesiaci byť piatok. Teda pravdepodobnosť, že v prípade $k = 2$ sa bude večierok konať v pondelok, bude

$$\begin{aligned} &P(1.\text{deň v mesiaci je piatok}) = \\ = \frac{58+58+57+58+58+58+58+57+56+56+57+56}{12 \cdot 400} &= \\ &= \frac{687}{4800} \doteq 0.1431 \end{aligned}$$

Podobne pre $k = 3$. Na to, aby tretí pracovný deň v mesiaci bol pondelok, musí prvým dňom v danom mesiaci byť štvrtok. Teda pravdepodobnosť, že v prípade $k = 3$ sa bude večierok konať v pondelok bude rovná

$$\begin{aligned} &P(1.\text{deň v mesiaci je štvrtok}) = \\ = \frac{57+56+58+56+57+56+56+57+58+58+58+58}{12 \cdot 400} &= \\ &= \frac{685}{4800} \doteq 0.1427 \end{aligned}$$

Pre $k = 4$, teda aby sa večierok konal štvrtý pracovný deň v mesiaci, musí prvý deň v mesiaci pripadnúť na stredu a teda dostávame

$$P(1.\text{deň v mesiaci je streda}) =$$
$$= \frac{57+58+56+58+57+58+58+58+56+57+56+56}{12 \cdot 400} =$$
$$= \frac{685}{4800} \doteq 0.1427$$

Na to, aby sa pre $k = 5$ večierok konal v piaty pracovný deň mesiaci, musí prvý deň v mesiaci pripadnúť na utorok. Dostávame

$$P(1.\text{deň v mesiaci je utorok}) =$$
$$= \frac{58+56+58+57+58+56+57+56+58+57+58+58}{12 \cdot 400} =$$
$$= \frac{687}{4800} \doteq 0.1431$$

Ak $k = 6$, teda večierok sa bude konať šiesty pracovný deň v mesiaci, máme pravdepodobnosť rovnakú ako pri $k = 1$, pretože opäť musí prvý deň v mesiaci pripadnúť na sobotu, nedeľu alebo pondelok.

Tabuľka 2.3: Porovnanie vypočítaných hodnôt s aproximovanými hodnotami

	k = 1	k = 2	k = 3	k = 4	k = 5	k = 6
presné	0.4284	0.1431	0.1427	0.1427	0.1431	0.4284
aproximované	0.4386	0.1429				0.4386

Z tabuľky vidíme, že ak uvažujeme rovnomerne rozdelené dni, tak pre $k = 5n + 1$, kde $n \in \{0, ..., 6\}$ dostávame pravdepodobnosť, že večierok sa bude konať v pondelok, rovnú $\frac{3}{7}$ a pre $k \neq 5n + 1$, kde $n \in \{0, ..., 6\}$ dostávame pravdepodobnosť, že večierok sa bude konať v pondelok, rovnú $\frac{1}{7}$. Zvolíme teda $k = 2$.

Avšak, v skutočnosti pri nerovnomernom rozdelení dní volíme $k = 3$, a teda ak chceme minimalizovať počet krát, kedy sa bude večierok konať v pondelok, večierok zorganizujeme tretí pracovný deň v mesiaci.

2.3 Lotr intelektuál a Craps

Hry s kockami patria medzi základné hazardné hry. Známou hrou s dvomi kockami je aj hra Craps.

2.3.1 Craps

Príklad 2.3. *Hádžeme dvomi kockami. Ak nám padne súčet rovný 2, 3 alebo 12, prehrávame. Ak dostaneme súčet rovný 7 alebo 11 vyhrávame. Inak hádžeme ďalej až pokiaľ nám nepadne rovnaký súčet ako v prvom kole - vtedy vyhrávame. Avšak, ak nám padne súčet 7, prehrávame. Aká je pravdepodobnosť výhry? [1]*

Riešenie: Vypočítame, aká je pravdepodobnosť výhry v 1. ťahu. V 1.ťahu vyhrávame, ak padne súčet 7 alebo 11. Súčet 7 dostávame, ak nám na jednotlivých kockách padnú nasledujúce čísla: {(1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3)}. Keďže máme klasické kocky, každá z možností nastáva s rovnakou pravdepodobnosťou $\frac{1}{36}$ a teda pravdepodobnosť, že nám na kockách padne súčet 7 je rovná $\frac{6}{36}$.

Súčet 11 dostávame, ak nám na kockách padnú nasledujúce čísla: {(5,6), (6,5)}, čo predstavuje pravdepodobnosť rovnú $\frac{2}{36}$. Pravdepodobnosť výhry v 1.ťahu je teda rovná

$$P(\text{výhra v 1.ťahu}) = \frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \frac{8}{36}. \tag{2.2}$$

Naopak, v 1.ťahu prehrávame, ak padne súčet 2, 3 alebo 12. Súčet 2 dostávame len v jednom prípade a to, ak nám na kockách padnú čísla {(1,1)}, čo je rovné pravdepodobnosti nastatia $\frac{1}{36}$. Súčet 3 dostávame, ak nám na kockách padnú 2 možnosti {(1,2), (2,1)} a teda takýto súčet dostávame s pravdepodobnosťou $\frac{2}{36}$ a súčet 12 dostávame opäť len v jedinom prípade a to, ak padnú čísla (6,6), čo predstavuje pravdepodobnosť $\frac{1}{36}$. Pravdepodobnosť prehry v 1.ťahu je teda rovná

$$P(\text{prehra v 1.ťahu}) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{4}{36}. \tag{2.3}$$

V ďalšom ťahu vyhráme, ak nám padne rovnaký súčet ako v prvom ťahu. Označme si teda pravdepodobnosť, že nám v 1.ťahu padol súčet s ako p_s, pričom $s \in \{4, 5, 6, 8, 9, 10\}$. V 2.ťahu opäť chceme, aby padol súčet s. Pravdepodobnosť výhry je teda rovná $P(\text{výhra}) = p_s^2$. Ak však v 2.ťahu nepadne súčet s, chceme, aby padol v 3.ťahu, pričom v 2.ťahu nemôže padnúť súčet 7. Pravdepodobnosť, že takáto udalosť nastane a vyhráme je rovná $P(\text{výhra}) = (1 - p_7 - p_s)p_s^2$. A podobne, ak v 2. ani 3.ťahu nepadne súčet s, chceme, aby padol v 4.ťahu, pričom v 2. a 3.ťahu nemôže padnúť súčet 7. Dostávame, že pravdepodobnosť, že takáto udalosť nastane a vyhráme je rovná $P(\text{výhra}) = (1 - p_7 - p_s)^2 p_s^2$.

Ak tieto pravdepodobnosti sčítame, dostávame

$$P(\text{výhra v ďalšom ťahu}) = \sum_{n=0}^{\infty}(1-p_7-p_s)^n p_s^2 = \left(\frac{1}{1-(1-p_7-p_s)}\right) p_s^2 = \frac{p_s^2}{p_7+p_s}. \tag{2.4}$$

Celková pravdepodobnosť výhry (bez ohľadu na to, v ktorom ťahu) je rovná

$$P(\text{výhra}) = \sum_{s\in\{4,5,6,8,9,10\}} \frac{p_s^2}{p_7+p_s} + \frac{8}{36} = \sum_{s=4}^{10} \frac{p_s^2}{p_7+p_s} + \frac{8}{36} - \frac{p_7^2}{2p_7}. \tag{2.5}$$

V tabuľke 2.4 uvádzame, aké čísla nám musia padnúť na kockách, aby sme dostali súčet s spolu s pravdepodobnosťou, s akou tieto súčty nastávajú.

Tabuľka 2.4: Kombinácie čísel, ktoré môžu padnúť na kocke a ich pravdepodobnosti

s	kombinácie	pravdepodobnosť
s = 4	{(1,3),(3,1),(2,2)}	$\frac{3}{36}$
s = 5	{(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)}	$\frac{4}{36}$
s = 6	{(1,4),(4,1),(2,4),(4,2),(3,3)}	$\frac{5}{36}$
s = 8	{(2,6),(6,2),(3,5),(5,3),(4,4)}	$\frac{5}{36}$
s = 9	{(3,6),(6,3),(4,5),(5,4),(4,5)}	$\frac{4}{36}$
s = 10	{(4,6),(6,4),(5,5)}	$\frac{3}{36}$

Dosadením do (2.5) dostávame, že pravdepodobnosť výhry v hre Craps je rovná

$$P(\text{výhra}) = 2\left(\frac{1}{36} + \frac{2}{45} + \frac{25}{296}\right) + \frac{8}{36} = \frac{244}{495} \doteq 0,4929, \tag{2.6}$$

teda málo menej ako 50%.

2.3.2 Dĺžka hry

Pomocou simulácií a aj teoretickým výpočtom vypočítame aká je dĺžka hry Craps - to znamená, koľko hodov kockami je potrebných, aby sa hra skončila, či už výhrou alebo prehrou.

Takýto výpočet dĺžky hry sa používa ako jeden z testov (diehard test), kedy zisťujeme, či je predpoklad o náhodnom charaktere generovaných čísel oprávnený [13].

Hra sa môže skončiť hneď po prvom hode - keď hráč hodí súčet 7 alebo 11 a vyhrá, alebo ak hodí súčet 2, 3 alebo 12 a prehrá. Ak hodí iný súčet, hra pokračuje pokiaľ nehodí rovnaký súčet ako v prvom kole alebo súčet 7.

Simuláciou sme spočítali v koľkých prípadoch hra skončila v jednotlivých kolách pri počte hier 200 000 [32]. Ak mala hra viac ako 21 kôl, započítali sme túto hru ako hru s 21 kolami. Dostali sme výsledky uvedené v tabuľke 2.5 v stĺpci *aprox. počet*. V stĺpci

Tabuľka 2.5: Početnosť ukončenia hry pre daný počet hodov k

počet hodov	aprox. počet	presný počet
1	66971	66666,7
2	37481	37654,3
3	27128	26954,7
4	19151	19313,5
5	13819	13851,4
6	9856	9943,5
7	7217	7145,0
8	5075	5139,1
9	3644	3699,9
10	2690	2666,3
11	1971	1923,3
12	1391	1388,7
13	1040	1003,7
14	704	726,1
15	513	525,8
16	370	381,2
17	272	276,5
18	194	200,8
19	118	146,0
20	92	106,2
21	303	287,1

presný počet sú uvedené presné početnosti ukončenia hry pre daný počet hodov k pri 200 000 hrách.

Tieto presné početnosti sme vypočítali jednoduchou aplikáciou vety o úplnej pravdepodobnosti. Najskôr vypočítame, aká je pravdepodobnosť, že hra skončí po prvom hode kockou.

$$P(1 \text{ hod kockou}) = P((s=2) \cap (s=3) \cap (s=7) \cap (s=11) \cap (s=12)) = \\ = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{6}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{3}$$

Teraz vypočítame, aká je pravdepodobnosť, že hra skončí po k-tom kole v prípade, že v prvom kole padol súčet s, kde $s \in \{4, 5, 6, 8, 9, 10\}$.

$$P(k \text{ hodov kockou}) = \sum_s P(k \text{ hodov kockou} \,|\, 1. \text{ padol súčet } s) P(1. \text{ padol súčet } s) = \\ = \sum_s \left(1 - p_s - \frac{1}{6}\right)^{k-2} \left(p_s + \frac{1}{6}\right) p_s, \tag{2.7}$$

kde p_s je pravdepodobnosť padnutia súčtu s. Túto pravdepodobnosť sčítame cez $s \in \{4, 5, 6, 8, 9, 10\}$ a dostaneme počet hodov, po ktorých hra skončí. Ak teraz výsledky prenásobíme počtom hier - 200 000, dostávame presný počet hier, ktoré skončili v k-tom kole.

2.3.3 Lotr intelektuál

Film Lotrando a Zubejda zobrazuje krásnu českú kotlinu, kde okrem čestných občanov žijú aj lúpežníci. Zbojník Lotrando si popri rabovaní čestných pocestných nevšimol, že z jeho syna, mladého Lotranda, vyrástol urastený, avšak nevzdelaný muž. Lotrando sa preto rozhodne poslať mladého Lotranda do kláštora, aby dostal poriadne vzdelanie. V jednej z piesní k filmu sa spieva, že bude z neho „lotr intelektuál“ [35], čo tvorilo námet pre názov našej kapitoly.

Príklad 2.4. *Lotrando, lotr intelektuál, je prešibaný a chce upraviť kocky tak, aby jedno z čísel padalo častejšie a iné menej často. Akými hodnotami z intervalu* $\left[-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right]$ *by mal upraviť jednotlivé kocky, aby vyhrával s vyššou pravdepodobnosťou? Aké kocky by mal podsunúť svojmu súperovi? [33]*

Keďže kocky sú robené tak, aby na protiľahlých stranách bol súčet 7, ak náš hráč upraví kocku napríklad tak, aby číslo 1 padalo častejšie, číslo 6 bude padať menej často. Pravdepodobnosť, že na klasickej neupravenej kocke padne nejaké číslo je $\frac{1}{6}$. Náš hráč má teda možnosť upraviť túto pravdepodobnosť číslom $x \in \left[-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right]$. Každú z kociek môže upraviť iným číslom. Našou úlohou je zistiť, pre aké x, y je pravdepodobnosť výhry maximálna či minimálna. Mohlo by sa zdať, že na každej kocke máme 6 možností, ktoré môžeme upraviť. Avšak, keďže na kockách vždy meníme dve protiľahlé strany, stačí nám uvažovať 3 možnosti. Ostatné možnosti získame výpočtom z pôvodných troch. Spolu budeme teda riešiť 9 minimalizačných a 9 maximalizačných úloh. Výpočet sme urobili v softvéri R a výsledky sme uviedli v tabuľkách 2.6 a 2.7. Napriek tomu, že sme v softvéri R riešili 9 optimalizačných úloh v tabuľkách 2.6 a 2.7 uvádzame len 6 možných zmien na kockách, keďže ostatné sú symetrické. V oboch tabuľkách sme vyznačili minimálnu, resp. maximálnu hodnotu výhry, ktorú môže zmenami dosiahnuť.

Tabuľka 2.6: Minimalizácia

zmeny na kocke	x	y	výhra(x,y)
(1,1)	0,1278	0,1278	0,4674
(1,2)	0,1667	0,1667	**0,4497**
(1,3)	0,1667	-0,0082	0,4714
(2,2)	0,0835	0,0835	0,4800
(2,3)	0,1667	-0,0196	0,4699
(3,3)	0	0	0,4929

Kocky, ktoré by mal Lotr intelektuál dať svojmu súperovi by mali mať upravené padanie strán 1 a 6 na prvej kockej a padanie strán 2 a 5 na druhej kocke.

Ak bude Lotr intelektuál upravovať kocky tak, aby maximalizoval svoju výhru, mal by upraviť čísla 2 a 5 na oboch kockách rovnako - teda že z týchto dvoch čísel, číslo 2 nebude padať vôbec.

V tabuľke 2.6 si môžeme pre kocky, na ktorých zmeníme pravdepodobnosť padania čísel $(1, 3)$, resp. $(3, 1)$ všimnúť hodnotu blízku 0 $(-0,0082)$. Mohlo by sa zdať, že optimalizácia sa v tomto bode zastavila a skutočná hodnota by mala byť naozaj 0. Avšak, pre hodnotu, ktorá nám vyšla je pravdepodobnosť výhry skutočne minimálna.

Analyticky sme spočítali korene funkcie výhry pomocou softvéru wxMaxima. Na

Tabuľka 2.7: Maximalizácia

zmeny na kocke	x	y	výhra(x,y)
(1,1)	-0,1667	-0,1667	0,5829
(1,2)	-0,1667	-0,1667	0,5608
(1,3)	-0,1667	-0,1667	0,5333
(2,2)	-0,1667	-0,1667	**0,6136**
(2,3)	-0,1667	-0,1667	0,5338
(3,3)	0	0	0,4929

prvej kocke meníme hodnotou x čísla 1 a 6, máme teda vektor pravdepodobností

$$p = \left[\frac{1}{6} + x, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} - x\right]^T. \tag{2.8}$$

Na druhej kocke zas meníme hodnotu y čísla 3 a 4 a máme teda vektor pravdepodobností

$$q = \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} + y, \frac{1}{6} - y, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right]^T. \tag{2.9}$$

Vektor pravdepodobností pre jednotlivé súčty bude potom v tvare

$$\begin{aligned} P = \Bigg[& \frac{6x+1}{36}, \frac{3x+1}{18}, \frac{12xy+2x+2y+1}{12}, -\frac{18xy-3x-2}{18}, \frac{6x+5}{36}, \\ & \frac{1}{6}, -\frac{18xy+3x-2}{18}, \frac{12xy-2x-2y+1}{12}, -\frac{3x-1}{18}, -\frac{6x-1}{36}\Bigg]^T. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Ak teraz dosadíme do funkcie výhry vektor s dosadenou hodnotou $x = \frac{1}{6}$, dostávame

$$\text{Výhra}(y) = \frac{4392y^3 - 17460y^2 - 122y + 28005}{25920y^3 - 64800y^2 - 720y + 59400}. \tag{2.11}$$

Vypočítame deriváciu funkcie výhry a dostávame

$$\text{Výhra}'(y) = \frac{3888y^4 - 32184y^2 + 36000y + 299}{3(2y-3)^2(6y-11)^2(6y+5)^2}. \tag{2.12}$$

Môžeme si všimnúť, že v bode $y = 0$ nebude derivácia nulová, ale kladná. Keďže menovateľ je vždy kladný, vypočítame korene čitateľa. Jeden z koreňov je rovný

```
3*sqrt(4500*sqrt(224*sqrt(434419)+446963)-sqrt((224*sqrt(434419)+
446963)^(2/3)+149*(224*sqrt(434419)+446963)^(1/3)+5625)*
```

```
(sqrt(3)*(224*sqrt(434419)+446963)^(2/3)-298*sqrt(3)*
(224*sqrt(434419)+446963)^(1/3)+625*3^(5/2)))-3^(5/4)*
((224*sqrt(434419)+446963)^(2/3)+149*(224*sqrt(434419)
+446963)^(1/3)+5625)^(3/4))/(2*3^(11/4)*(224*sqrt(434419)+446963)^
(1/6)*((224*sqrt(434419)+446963)^(2/3)+149*
(224*sqrt(434419)+446963)^(1/3)+5625)^(1/4))
```

čo je skutočne hodnota, ktorú sme vypočítali softvérom R.

Pre skutočného mladého Lotranda by však takýto príklad bol zrejme iba teoretickým cvičením (rovnako ako pre nás). Mladý Lotrando síce sľúbil svojmu otcovi, že bude pokračovať v jeho remesle, avšak vďaka výchove a vzdelaniu, ktoré dostal v kláštore nie je schopný splniť otcovu vôľu. Lotrando stretne drevorubača Drnca, ktorý ho vezme do ďalekej Solimánie, kde hľadajú vzdelaného doktora s hláskami Dr. pred menom. Jedine ten vraj dokáže vyliečiť ich stonavú princeznú Zubejdu. Drevorubač Drnec síce hlásky Dr. pred menom mal, ale o skutočnej medicíne nevedel nič ani jemu sa nepodarilo Zubejdu vyliečiť. Zubejde sa ale zapáčil práve mladý Lotrando a zrejme práve to bol pre ňu ten najlepší liek. [26]

3 Ruská ruleta

Ruská ruleta v skratke je hra s vlastným životom. Prvá zmienka o podobe tejto hry je v románe Michaila Lermontova s názvom Hrdina našich čias z roku 1840. Jedna z postáv si položila k hlave pištoľ s neznámym počtom nábojov a prežila. Keďže Lermontov bol ruským dôstojníkom na Kaukaze a román má autobiografický základ, predpokladá sa, že aj príbeh o Ruskej rulete môže mať reálne pozadie. Avšak, názov Ruská ruleta vznikol až neskôr. Prvýkrát sa spomína v príbehu od Georgesa Surdeza z roku 1937, kde sa opäť spomína dôstojník ruskej armády, ktorý vložil do zásobníka revolveru jeden náboj, zatočil ním, položil si ho k hlave a vystrelil. Celosvetovo sa Ruská roleta rozšírila až v roku 1978 po vydaní filmu Lovec jeleňov („The Deer Hunter“), ktorý zobrazoval túto brutálnu hru počas vojny vo Vietname.

Princíp hry spočíva v tom, že sa nábojom naplní štandardne jedna komora šesťkomorového revolveru, zatočí sa zásobníkom, hráč si otočí hlaveň smerom k hlave a vystrelí. Ak prežije, posúva sa revolver ďalej, avšak zásobníkom sa už netočí.

3.1 Klasická Ruská ruleta

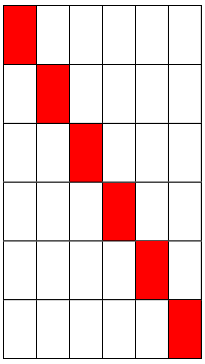
Príklad 3.1. *Vypočítajte, aké sú pravdepodobnosti zastrelenia sa pre jednotlivých hráčov pri štandardnej Ruskej rulete. [12]*

Riešenie: Keďže v zásobníku revolveru sa nachádza 6 komôr a práve v jednej z nich je náboj, pravdepodobnosť, že prvý hráč neprežije je $\frac{1}{6}$. Očakávame, že takúto pravdepodobnosť zastrelenia sa má aj každý ďalší hráč kvôli náhodnej polohe náboje. Avšak, nie je to tak. Rozanalyzujeme všetky možnosti, kde môže byť náboj uložený.

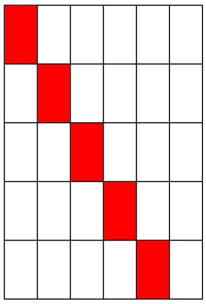
Pre prvého hráča je to skutočne šesť miest, na ktorých môže byť náboj uložený. V tabuľke 3.1 uvádzame, že ak je náboj na prvom mieste, hráč sa zastrelí, avšak, ak je inde, prežije. Máme teda pravdepodobnosť zastrelenia sa rovnú $\frac{1}{6}$. Po tom, čo vystrelí prvý hráč, zásobníkom netočíme.

V tabuľke 3.2 uvádzame polohy náboja pre druhého hráča. Ak bol v prvom kole náboj na prvej pozícii - teda sa prvý hráč zabil, druhý hráč sa už nemá čím zastreliť a teda hra skončí. Ak bol náboj v prvom kole na druhej pozícii, v druhom kole bude na prvej pozícii a teda sa druhý hráč zastrelí. Avšak, ak bol náboj na tretej až šiestej pozícii, druhý hráč prežije vďaka tomu, že zásobníkom netočíme. Máme teda jednu z piatich možností, kedy sa môžeme zastreliť a teda pravdepodobnosť zastrelenia sa pre druhého hráča je rovná $\frac{1}{5}$.

Tabuľka 3.1: Poloha náboja pre 1.hráča

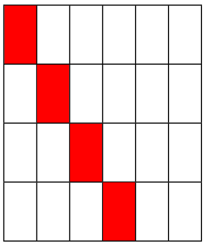


Tabuľka 3.2: Poloha náboja pre 2.hráča

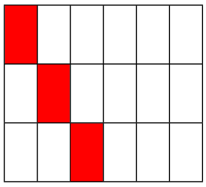


Iná interpretácia popisuje pravdepodobnosť zastrelenia sa pre druhého hráča takto: Druhý hráč sa môže zastreliť len v prípade, ak prežil prvý hráč. Prvý hráč mal päť prázdnych a jednu plnú komoru. Svojím prežitím „použije“ jednu z voľných komôr a teda celkový počet komôr pre druhého hráča bude 5, pričom v jednej z nich je stále náboj. Pravdepodobnosť, že druhý hráč neprežije je teda rovná $\frac{1}{5}$.

Tabuľka 3.3: Poloha náboja pre 3.hráča



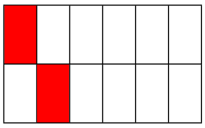
Tabuľka 3.4: Poloha náboja pre 4.hráča



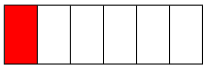
Podobne ako v predchádzajúcom prípade, aj tu platí, že ak bol v druhom kole náboj na prvej pozícii, tretí hráč už hrať nebude. Ak bol náboj v druhom kole na druhej pozícii, tretí hráč sa v tomto kole zastrelí a ak bol na tretej až piatej pozícii, hráč prežije. Máme teda jednu plnú komoru a tri prázdne komory na prvých miestach. Dostávame pravdepodobnosť zastrelenia sa pre tretieho hráča rovnú $\frac{1}{4}$.

Rovnako pokračujeme aj pre ostatných hráčov. Pre štvrtého hráča máme tri možnosti polohy náboja, pričom v jednej z možností sa nachádza náboj na prvom mieste. Dostávame pravdepodobnosť zastrelenia sa rovnú $\frac{1}{3}$. Analogicky pre piateho a šiesteho hráča, kde dostávame pravdepodobnosti zastrelenia sa rovné $\frac{1}{2}$, resp. 1. Možnosti polohy náboja pre piateho a šiesteho hráča sú uvedené v tabuľkách 3.5 a 3.6.

Tabuľka 3.5: Poloha náboja pre 4.hráča



Tabuľka 3.6: Poloha náboja pre 5.hráča



3.2 Viac nábojov a Ruská ruleta

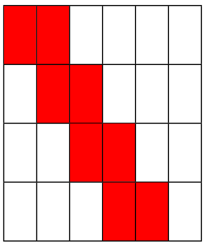
V mnohých modifikáciách sa táto hra vyskytuje aj na pracovných pohovoroch. Vyriešime nasledujúci príklad z [21]:

Príklad 3.2. *Ste hráčom Ruskej rulety. V dvoch susediacich komorách šesťkomorového revolveru sa nachádzajú dva náboje. Zatočíme zásobníkom a stlačíme spúšť. Zbraň nevystrelila. Vy ste ďalší v poradí. Čo urobíte? Zatočíte opäť zásobníkom alebo stlačíte spúšť?*

Riešenie: Vieme, že zásobník revolveru má 6 komôr, 2 z nich sú naplnené nábojmi. Teda podľa Laplaceovej definície pravdepodobnosti by v prípade, že znova zatočíme zásobníkom bola pravdepodobnosť, že zbraň vystrelí rovná $\frac{1}{3}$.

Pri počítaní pravdepodobnosti v prípade, ak nezatočíme zásobníkom si musíme uvedomiť, že po prvom stlačení spúšte sa nám „minula“ jedna z prázdnych komôr. Teraz môže nasledovať buď prázdna komora alebo plná komora. V tabuľke 3.7 je zobrazená poloha dvojice nábojov po prvom kole. Náboj sa nachádza na prvom mieste len v

Tabuľka 3.7: Poloha dvojice nábojov po 1.kole

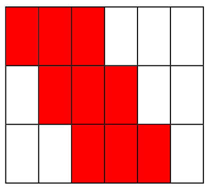


jednej zo štyroch možností. Teda pravdepodobnosť, že zbraň vystrelí, ak nezatočíme zásobníkom bude opäť podľa Laplaceovej definície pravdepodobnosti rovná $\frac{1}{4}$. Z uvedeného vyplýva, že by sme nemali zatočiť zásobníkom, pretože vtedy dostávame nižšiu pravdepodobnosť, že zbraň vystrelí.

Príklad 3.3. *Ako sa zmenia pravdepodobnosti výstrelu, ak sú v zásobníku naplnené tri po sebe idúce komory? Zatočíte zásobníkom alebo stlačíte spúšť? [31]*

Riešenie: V prípade, že zatočíme zásobníkom je podobne ako v predchádzajúcom prípade podľa Laplaceovej definície pravdepodobnosti, pravdepodobnosť, že zbraň vystrelí rovná $\frac{1}{2}$. V prípade, že nebudeme točiť zásobníkom sme si opäť „minuli“ jednu z 3 prázdnych komôr, pričom práve jedna z nich sa nachádza pred naplnenou komorou, teda pravdepodobnosť, že zbraň vystrelí bude rovná $\frac{1}{3}$. V tabuľke 3.8 sú uvedené polohy trojice nábojov po prvom kole. Opäť by sme si teda vybrali možnosť netočiť

Tabuľka 3.8: Poloha trojice nábojov po 1.kole



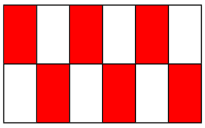
zásobníkom a rovno by sme stlačili spúšť.

Jednoduchou modifikáciou príkladu o Ruskej rulete je aj poloha nábojov, ktoré sa nenachádzajú v susediacich komorách.

Príklad 3.4. *Ako sa zmení pravdepodobnosť zastrelenia sa, ak naplníme každú druhú komoru šesťkomorového zásobníka? V prvom kole zbraň nevystrelila, zatočíme zásobníkom? [31]*

Riešenie: V prípade, že naplníme každú druhú komoru zo šesťkomorového zásobníka, teda zásobník bude obsahovať tri náboje si určite zvolíme možnosť zatočiť zásobníkom. V prípade že v prvom kole zbraň nevystrelila, môžeme si byť na 100% istí, že v našom kole vystrelí, keďže náboje sú v každej druhej komore. Bude pre nás teda lepšie zatočiť zásobníkom, pretože vtedy sa pravdepodobnosť, že zbraň vystrelí rovná $\frac{1}{2}$.

Tabuľka 3.9: Poloha trojice nábojov po 1.kole



3.3 Pridávanie nábojov po každom kole a Ruská ruleta

Zaujímavým rozšírením je aj upravený príklad Ruskej rulety, ktorý spočíva v pridávaní nábojov po každom kole, v ktorom nikto nezomrie.

Príklad 3.5. *Máme šesťkomorový revolver s jedným nábojom a zatočíme zásobníkom. Ak 1.hráč prežije, pridáme náboj a zatočíme zásobníkom. Podobne pre ostatných hráčov. Aká je pravdepodobnosť, že sa k hre dostane 6.hráč a zastrelí sa? [12]*

Riešenie: V tomto príklade sa nebudeme zaoberať polohou náboja, keďže v každom kole točíme zásobníkom. Pravdepodobnosť, že sa hráč dostane na rad a zastrelí sa, bude závisieť od toho, či sa zastrelil predchádzajúci hráč. Pre prvého hráča dostávame rovnakú pravdepodobnosť zastrelenia sa ako doteraz, rovnú $\frac{1}{6}$. Dôvodom je náhodná poloha jedného náboja.

Pri druhom hráčovi pridáme jeden náboj a zatočíme zásobníkom. Musíme uvažovať aj fakt, že druhý hráč sa dostane na rad len v prípade, ak prežije prvý hráč.Označme A udalosť, že sa prvý hráč zastrelí a B udalosť, že sa druhý hráč zastrelí. Pravdepodobnosť zastrelenia sa druhého hráča je rovná

$$P(B|A') = P(B)(1 - P(A)) = \frac{2}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{18}. \tag{3.1}$$

Podobne pokračujeme aj pre ostatných hráčov. Ak sa dostane na rad tretí hráč, v zásobníku budú náhodne uložené tri náboje. Označme C udalosť, že sa tretí hráč zastrelí. Potom

$$P(C|(A' \cap B')) = P(C)(1 - P(A))(1 - P(B)) = \frac{3}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{5}{18}. \tag{3.2}$$

Označme D udalosť, že sa zastrelí štvrtý hráč. V prípade, že bude hrať štvrtý hráč, v zásobníku budú náhodne uložené 4 náboje. Vypočítame pravdepodobnosť, že sa zastrelí štvrtý hráč nasledovne

$$\begin{aligned} P(D|(A' \cap B' \cap C')) &= P(D)(1 - P(A))(1 - P(B))(1 - P(C)) = \\ &= \frac{4}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{5}{27}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Piaty hráč bude mať v zásobníku päť náhodne uložených nábojov. Nech E označuje udalosť, že sa zastrelí piaty hráč. Pravdepodobnosť, že sa piaty hráč zastrelí a dostane na rad vypočítame ako

$$\begin{aligned} &P(E|(A' \cap B' \cap C' \cap D')) = \\ &= P(E)(1 - P(A))(1 - P(B))(1 - P(C))(1 - P(D)) = \\ &= \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{25}{324}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Pri šiestom hráčovi máme už úplne naplnený zásobník. Avšak pravdepodobnosť, že sa v takejto hre šiesty hráč zastrelí nie je rovná 1. Dôvodom je to, že na to, aby sa vôbec šiesty hráč dostal na rad, musia prežiť všetci piati hráči pred ním. Označme F udalosť, že sa zastrelí šiesty hráč. Dostávame

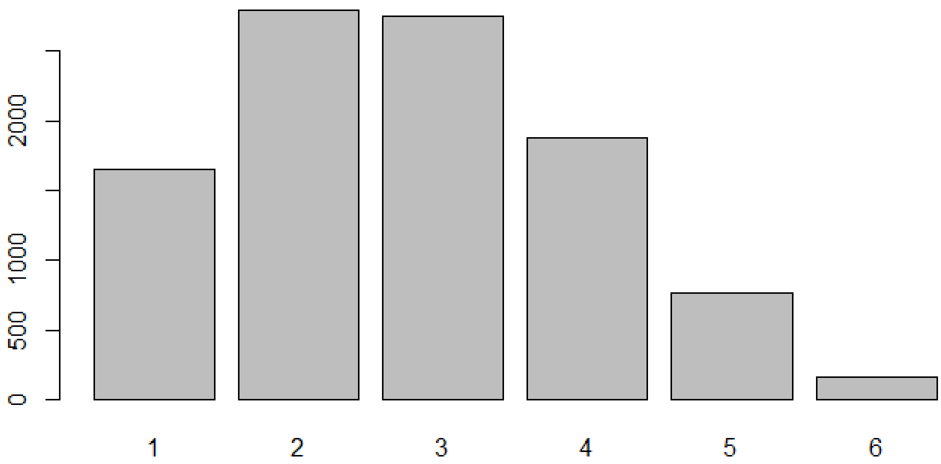
$$\begin{aligned} &P(F|(A' \cap B' \cap C' \cap D' \cap E')) = \\ &= P(F)(1 - P(A))(1-P(B))(1 - P(C))(1 - P(D))(1 - P(E)) = \\ &= \frac{6}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{324}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Na overenie vypočítaných pravdepodobností urobíme sériu simulácií v softvéri R. V každej iterácií vykonáme sériu krokov, ktoré nám zabezpečia pridávanie nábojov v jednotlivých kolách a miešanie zásobníkom. Zásobník nám reprezentuje vektor, pričom prvá zložka vektora reprezentuje komoru, z ktorej sa práve strieľa. To znamená, že ak je na prvej zložke vektora číslo 1, hráč sa zastrelí, ak číslo 0, tak prežije. Číslo hráča, ktorý sa zastrelí sa zapíše do vektora X a z tohoto vektora následne vytvoríme kontingenčnú tabuľku s početnosťami, koľkokrát sa zastrelil ktorý hráč. Ak predelíme tieto počty počtom simulácií, ktoré sme vykonali, dostaneme približné pravdepodobnosti, s akými sa jednotliví hráči dostanú na rad a následne zastrelia. V tabuľke 3.10

Tabuľka 3.10: Presné a aproximované pravdepodobnosti pre 10 000 simulácií

hráč	1	2	3	4	5	6
početnosť	1654	2793	2748	1881	766	158
približná pravdepodobnosť	0,1654	0,2793	0,2748	0,1881	0,0766	0,0158
presná pravdepodobnosť	0,1667	0,2778	0,2778	0,1852	0,0772	0,0154

vidíme, že vypočítané pravdepodobnosti a simuláciou aproximované pravdepodobnosti sa približne rovnajú.



Obr. 3.1: Graf výsledkov simulácii

Maximálnu pravdepodobnosť zastrelenia sa má druhý a tretí hráč. Logicky, najmenšiu pravdepodobnosť zastrelenia sa má šiesty hráč. Napriek tomu, že v šiestom kole by hráč hral s plným zásobníkom, pravdepodobnosť, že sa dostane na rad a teda sa nezastrelí žiaden hráč pred ním je nízka.

4 Úlohy o náhodných stretnutiach

4.1 Rómeo a Júlia

Príklady o tom, či sa dvaja kamaráti stretnú na dohodnutom mieste v dohodnutom čase sú veľmi obľúbené aj na hodinách pravdepodobnosti. Uvedieme klasický príklad o stretnutí a jeho riešenia aj zaujímavé rozšírenie tohoto príkladu, kde čas ich meškania nebude mať rovnomerné rozdelenie ale exponenciálne.

Príklad 4.1. *Rómeo a Júlia sa dohodli, že sa stretnú niekedy medzi 21:00 a 22:00. Každý z nich môže prísť na dohodnuté miesto hocikedy v tomto čase a počká 15 minút na toho druhého. Ak sa do 15 minút druhý z nich neukáže, prvý odíde domov. Aká je pravdepodobnosť, že sa naozaj stretnú? [21]*

Riešenie: Pri riešení tohoto problému by sme neuspeli s Laplaceovou definíciou pravdepodobnosti. Dôvodom je to, že Ω v tomto prípade netvorí spočítateľná množina, ale interval. Zavedieme teda definíciu geometrickej pravdepodobnosti podľa [20].

Nech $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ a $A \subset \Omega$, pričom poznáme plochy $S(A), S(\Omega), 0 < S(\Omega) < \infty$. Geometrickou pravdepodobnosťou udalosti A budeme rozumieť číslo

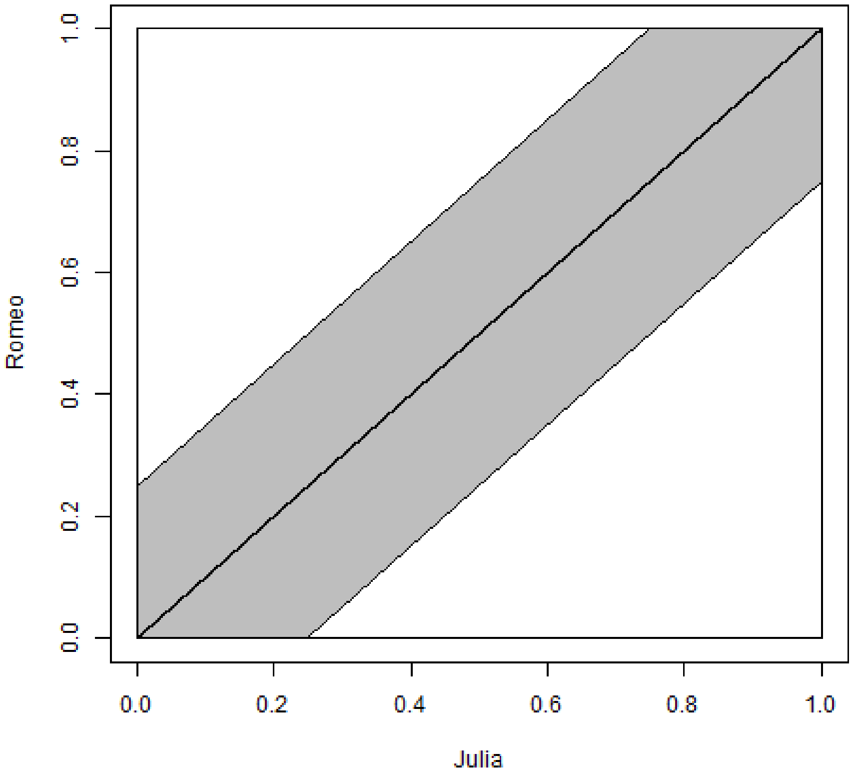
$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}. \tag{4.1}$$

Plochy $S(A)$ a $S(\Omega)$ vypočítame napríklad pomocou integrálov alebo v našom prípade pomocou obsahov trojuholníka. Rómeo a Júlia môžu prísť na dohodnuté miesto kedykoľvek medzi 21:00 a 22:00, teda sa môžu stretnúť hocikedy počas jednej hodiny. Vyberáme si teda náhodne jedno číslo v intervale $[0, 1]$, ktorý reprezentuje čas, kedy môže prísť na dohodnuté miesto Rómeo či Júlia. Množinu Ω teda bude tvoriť jednotkový štvorec $[0, 1] \times [0, 1]$. Množinu A v tomto prípade tvoria také (x, y), ktoré spĺňajú nerovnice.

$$-0,25 < x - y < 0,25 \quad \wedge \quad 0 < x < 1 \quad \wedge \quad 0 < y < 1 \tag{4.2}$$

Graficky sme túto množinu znázornili na obrázku 4.1.

Doplnok tejto množiny tvoria 2 rovnaké pravouhlé rovnoramenné trojuholníky, ktorých obsah vieme vypočítať. Dve zo strán trojuholníka, ktoré zvierajú pravý uhol majú



Obr. 4.1: Grafické znázornenie množiny A

dĺžku 0,75, teda súčet obsahov týchto dvoch trojuholníkov je $\frac{9}{16}$. Obsah množiny A teraz vypočítame ako rozdiel obsahu Ω, ktorý je rovný 1 a súčtu obsahov trojuholníkov, teda

$$1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}. \tag{4.3}$$

Príklad 4.2. *Ako sa zmení pravdepodobnosť, ak Rómeo i Júlia budú čakať na toho druhého k minút? [21]*

Riešenie: V tomto prípade množinu A tvoria také (x, y), ktoré spĺňajú

$$-\frac{k}{60} < x - y < \frac{k}{60} \quad \wedge \quad 0 < \frac{k}{60} < 1 \quad \wedge \quad 0 < x < 1 \quad \wedge \quad 0 < y < 1. \tag{4.4}$$

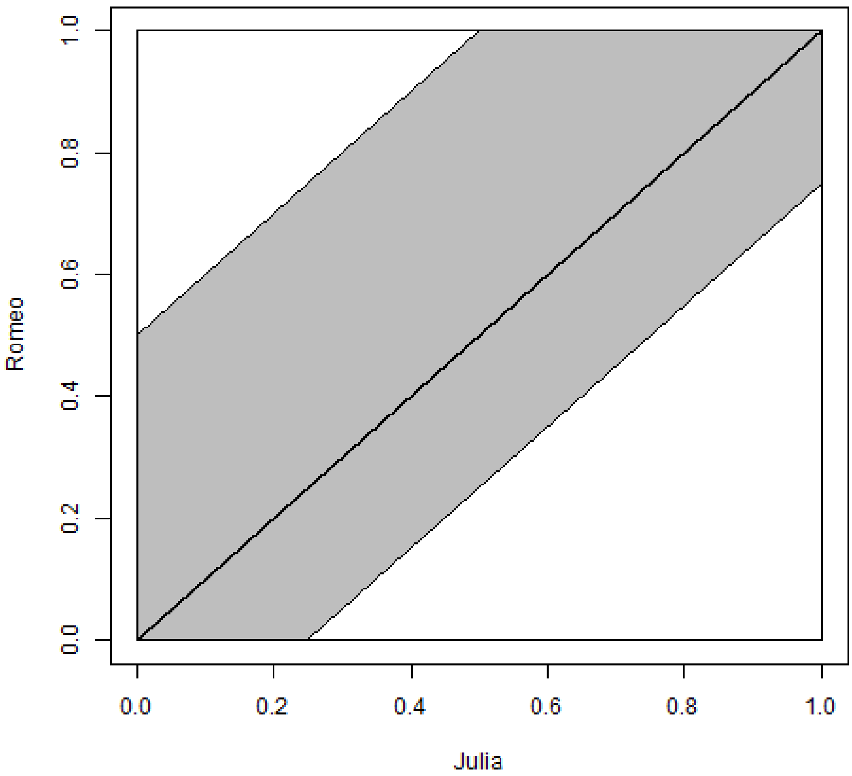
Doplnok tejto množiny tvoria opäť dva rovnaké pravouhlé rovnoramenné trojuholníky, pričom dve zo strán majú dĺžku $1 - \frac{k}{60}$. Ich obsah je $\frac{(1-\frac{k}{60})^2}{2}$ a súčet ich obsahov je rovný $(1 - \frac{k}{60})^2$. Podobne ako v predchádzajúcom prípade, aj tu je výsledná pravdepodobnosť rovná $S(\Omega) - S(A') = \frac{k}{60}(2 - \frac{k}{60})$.

Príklad 4.3. *Rómeo sa chce s Júliou stretnúť viac ako ona s ním, preto na ňu počká dvakrát dlhšie ako ona na neho (Júlia počká k minút, Rómeo 2k minút). Aká je pravdepodobnosť, že sa stretnú? [21]*

Riešenie: Množinu A teraz tvoria také dvojice (x, y), ktoré vyhovujú nerovniciam

$$-\frac{2k}{60} < x - y < \frac{k}{60} \quad \wedge \quad 0 < \frac{k}{60} < \frac{1}{2} \quad \wedge \quad 0 < x < 1 \quad \wedge \quad 0 < y < 1. \tag{4.5}$$

Doplnok množiny A tentokrát netvoria dva rovnaké pravouhlé trojuholníky, jeden z



Obr. 4.2: Grafické znázornenie množiny A pre prípad, že Rómeo čaká 2-krát dlhšie

nich bude menší. Vieme však, že jeden z nich má dĺžky strán, ktoré zvierajú pravý uhol rovné $(1 - \frac{2k}{60})$, teda jeho obsah je $\frac{(1-\frac{2k}{60})^2}{2}$. Druhý z nich má dĺžky strán, ktoré zvierajú pravý uhol rovné $(1 - \frac{k}{60})$, teda jeho obsah je $\frac{(1-\frac{k}{60})^2}{2}$. Podobne ako v predchádzajúcich prípadoch, aj tu vypočítame pravdepodobnosť stretnutia sa ako

$$\begin{aligned} S(\Omega) - S(A') = 1 - \frac{(1-\frac{2k}{60})^2}{2} - \frac{(1-\frac{k}{60})^2}{2} = \\ = 1 - \frac{1 - \frac{4k}{60} + \frac{4k^2}{60^2}}{2} - \frac{1 - \frac{2k}{60} + \frac{k^2}{60}}{2} = \frac{k}{60}\left(6 - \frac{5k}{60}\right). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Príklad 4.4. *Rómeo a Júlia sa dohodli, že sa stretnú v dohodnutom čase. Každý z nich sa na dohodnutom mieste zdrží 15 minút a odíde, avšak obaja notoricky meškájú. Čas ich meškania má exponenciálne rozdelenie s parametrom λ_1, resp. λ_2. Časy ich meškania sú nezávislé. Aká je pravdepodobnosť, že sa stretnú? [33]*

Riešenie: Budeme počítať integrál funkcie $f(x, y) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}$ cez oblasť A znázornenú na obrázku 4.1, ktorá reprezentuje oblasť, kedy sa stretnú, ak by meškali rovnomerne.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{4}}\int_0^{x+\frac{1}{4}} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}dydx + \int_{\frac{1}{4}}^{\infty}\int_{x-\frac{1}{4}}^{x+\frac{1}{4}} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}dydx = \\
= \lambda_1\lambda_2\left(\int_0^{\frac{1}{4}}\left[-\frac{e^{-\lambda_1 x-\lambda_2 y}}{\lambda_2}\right]_0^{x+\frac{1}{4}}dx + \int_{\frac{1}{4}}^{\infty}\left[-\frac{e^{-\lambda_1 x-\lambda_2 y}}{\lambda_2}\right]_{x-\frac{1}{4}}^{x+\frac{1}{4}}dx\right) = \\
= -\lambda_1\left(\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x(\lambda_1+\lambda_2)-\frac{\lambda_2}{4}} - e^{-\lambda_1 x}dx + \int_{\frac{1}{4}}^{\infty} e^{-x(\lambda_1+\lambda_2)-\frac{\lambda_2}{4}} - e^{-x(\lambda_1+\lambda_2)+\frac{\lambda_2}{4}}dx\right) = \\
= \lambda_1\left(\left[\frac{e^{-x(\lambda_1+\lambda_2)-\frac{\lambda_2}{4}}}{\lambda_1+\lambda_2} - \frac{e^{-\lambda_1 x}}{\lambda_1}\right]_0^{\frac{1}{4}} + \left[\frac{e^{-x(\lambda_1+\lambda_2)-\frac{\lambda_2}{4}}}{\lambda_1+\lambda_2} - \frac{e^{-x(\lambda_1+\lambda_2)+\frac{\lambda_2}{4}}}{\lambda_1+\lambda_2}\right]_{\frac{1}{4}}^{\infty}\right) \\
= \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\left(e^{-\frac{\lambda_1}{4}} - e^{-\frac{\lambda_2}{4}}\right) + 1 - e^{-\frac{\lambda_1}{4}}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Príklad 4.5. *Rómeo v priemere mešká 10 minút a Júlia 5 minút. Aká je pravdepodobnosť, že sa stretnú, ak časy ich meškania majú exponenciálne rozdelenie?*

Riešenie: Pravdepodobnosť, že sa stretnú vypočítame pomocou vzťahu (4.7). Stredná hodnota exponenciálneho rozdelenia je rovná $\frac{1}{\lambda}$. Potom ak Júlia mešká v priemere 5 minút, čo predstavuje $\frac{1}{12}$ hodiny, $\lambda_1 = 12$. Podobne, ak Rómeo mešká v priemere 10 minút, čo predstavuje $\frac{1}{6}$ hodiny, $\lambda_2 = 6$.

Dostávame, že pravdepodobnosť, že sa stretnú, ak časy ich meškania majú exponenciálne rozdelenie je rovná približne 0,8347.

Príklady o stretnutí Rómea a Júlie sme riešili aj pomocou simulácií v softvéri R. Zaoberali sme sa prípadmi, kedy má čas meškania rovnomerné aj exponenciálne rozdelenie a skúmali sme prípad, kedy Rómeo aj Júlia počkajú na dohodnutom mieste 15 minút. Vygenerovali sme náhodné číslo z príslušného rozdelenia (s príslušným parametrom) a testovali sme, či sa nachádza v oblasti A znázornenej na obrázku 4.1.

Výsledkom je tabuľka 4.1, kde v prvom stĺpci uvádzame pravdepodobnostné rozdelenie časov ich meškania, v druhom stĺpci aproximovanú pravdepodobnosť pomocou simulácií a v treťom stĺpci presnú pravdepodobnosť.

Tabuľka 4.1: Pravdepodobnosti stretnutia pri rovnomernom a exponenciálnom rozdelení časov meškania

rozdelenie	aprox.pravd.	presná pravd.
R(0, 1), R(0, 1)	0,4383	0,4375
Exp(12), Exp(6)	0,8351	0,8347

Príklad 4.6. *Rómeo a Júlia chcú ísť na súťaž do baru, ktorá spočíva v tom, že musia vydržať 15 minút vkuse sŕkať limonádu cez slamku. Súťaž trvá od 11:00 do 12:00, pričom na to, aby sa mohli súťaže zúčastniť, musia stihnúť do konca súťaže aj odsúťažiť. Ak sa nebudú môcť súťaže zúčastniť, do baru neprídu vôbec. Aká je pravdepodobnosť, že sa Rómeo s Júliou v bare stretnú? [6]*

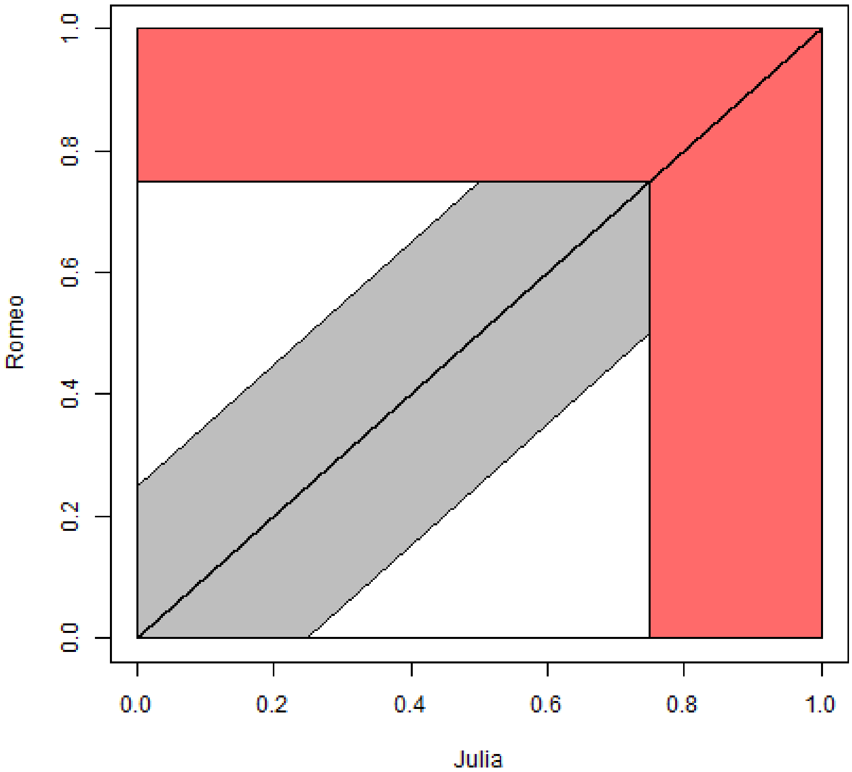
Riešenie: Je dôležité si uvedomiť, že obaja z nich odídu domov v momente, kedy už nebudú môcť stráviť v bare 15 minút a teda 11:45. Zmení sa teda množina A, ktorá predstavovala, kedy sa môžu obaja stretnúť a aj množina Ω. Množinu A teraz budú tvoriť také dvojice (x, y), ktoré budú vyhovovať nerovniciam

$$-0,25 < x - y < 0,25 \quad \wedge \quad 0 < x < 0,75 \quad \wedge \quad 0 < y < 0,75. \tag{4.8}$$

Na obrázku 4.3 môžeme vidieť červenou znázornenú časť, kedy sa určite Rómeo a Júlia nestretnú, pretože by nemohli súťažiť a teda by do baru ani neprišli. Zvyšnú časť tvorí podobne ako v predchádzajúcich prípadoch štvorec, avšak už nie jednotkový. Pravdepodobnosť, že sa stretnú vypočítame opäť podľa geometrickej pravdepodobnosti, pričom chceme vypočítať obsah množiny znázornený sivou.

Vidíme, že sivá časť je súčasťou štvorca so stranami dlhými 0,75. Označme si túto množinu ako B. Doplnok tejto množiny B tvoria 2 rovnaké pravouhlé rovnoramenné trojuholníky, podobne ako v prvom prípade. Dve zo strán trojuholníka, ktoré zvierajú pravý uhol majú dĺžku 0,5, teda súčet obsahov týchto dvoch trojuholníkov bude $\frac{1}{4}$.

Obsah množiny A teraz vypočítame ako rozdiel obsahu B, ktorý je rovný $\frac{9}{16}$ a súčtu obsahov trojuholníkov, predelený obsahom Ω.



Obr. 4.3: Grafické znázornenie množiny A

Budeme uvažovať dve možnosti zostrojenia množiny Ω. Prvou z nich je prípad, kedy do množiny Ω budeme rátať čas od 11:45 do 12:00 ako možný čas stretnutia - teda množinu Ω bude tvoriť jednotkový štvorec a dostávame

$$\frac{S(\Omega) - S(A')}{S(\Omega)} = \frac{\frac{9}{16} - \frac{1}{4}}{1} = \frac{5}{16}. \tag{4.9}$$

Druhá možnosť, ako môžeme voliť množinu Ω spočíva v tom, že nebudeme uvažovať čas od 11:45 do 12:00 ako možný čas stretnutia, keďže sa v tomto čase určite nestretnú, nakoľko do baru ani neprídu. Množinu Ω bude teda tvoriť štvorec so stranami 0,75 a obsahom $\frac{9}{16}$.

Dostávame

$$\frac{S(\Omega) - S(A')}{S(\Omega)} = \frac{\frac{9}{16} - \frac{1}{4}}{\frac{9}{16}} = \frac{5}{9}. \tag{4.10}$$

4.2 Stretnutie dvoch štamgastov

Príklad 4.7. *Dvaja kamaráti sa v krčme dohodli, že predtým ako si dajú ďalšie pivo, sa pôjdu prejsť, aby vytriezveli a potom sa opäť stretnú v krčme. Každý z nich môže isť len vpravo alebo vľavo, pričom vpravo každý z nich pôjde s pravdepodobnosťou* p *a vľavo s pravdepodobnosťou* $q = 1 - p$ *a tieto pravdepodobnosti sú rovnaké, teda* $p = q = \frac{1}{2}$. *Obaja z nich majú rovnako veľké kroky a kráčajú rovnakou rýchlosťou. Aká je pravdepodobnosť, že po* N *krokoch sa opäť stretnú v krčme? [30]*

Riešenie: Ukážeme všeobecné riešenie pre akýkoľvek celkový počet krokov a pravdepodobnosti a akékoľvek miesto stretnutia.

Ich prechádzku si môžeme predstaviť ako číselnú os, kde 0 bude predstavovať miesto odchodu a stretnutia zároveň - teda krčmu, vpravo pôjdu po kladných číslach a vľavo po záporných číslach. To, kam sa posunuli po N krokoch - teda bod na číselnej osi, v ktorom sa nachádzajú môžeme vypočítať ako $D = N_{\text{vpravo}} - N_{\text{vľavo}}$. Označme si ako x počet krokov, ktoré prejde štamgast vpravo. Keďže celkový počet krokov, ktoré prejde je N, počet krokov, ktoré štamgast prejde vľavo je $N - x$. Potom $D = x - (N - x) = 2x - N$, resp. $x = \frac{D+N}{2}$.

Náhodná premenná x popisujúca počet krokov vpravo z celkového počtu krokov N má binomické rozdelenie, keďže popisuje počet „úspechov“ (x) z celkového počtu možností (N) a teda

$$P_N(x) = \binom{N}{x} p^x q^{N-x} = \frac{N!}{x!(N-x)!} p^x q^{N-x} \tag{4.11}$$

Dosadíme do rovnice (4.11) $x = \frac{D+N}{2}$ a dostávame

$$\begin{aligned} P_N(x) &= \frac{N!}{\left(\frac{D+N}{2}\right)!\left(N - \frac{D+N}{2}\right)!} p^{\frac{D+N}{2}} q^{N-\frac{D+N}{2}} = \\ &= \frac{N!}{\left(\frac{D+N}{2}\right)!\left(\frac{N-D}{2}\right)!} p^{\frac{D+N}{2}} q^{\frac{N-D}{2}} \end{aligned} \tag{4.12}$$

V našom prípade je $D = 0$, z dôvodu, že sa štamgasti stretávajú na rovnakom mieste z akého odchádzajú a teda musia prejsť vpravo aj vľavo rovnaký počet krokov. Štamgasti idú vpravo aj vľavo s rovnakou pravdepodobnosťou $p = q = \frac{1}{2}$ a celkový počet krokov pre jedného štamgasta je N, teda spolu prejdú $2N$ krokov. Dosadíme tieto hodnoty do rovnice (4.12) a dostávame, že pravdepodobnosť, že sa po N krokoch opäť stretnú v krčme je rovná

$$P_{2N}\left(x=\frac{N}{2}\right)=\frac{(2N)!}{(N)!(N)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{N}=\frac{(2N)!}{(2^{N}(N)!)^{2}}. \tag{4.13}$$

Takýmito náhodnými prechádzkami sa zaoberal aj maďarský matematik George Pólya. Pólya dokázal, že pravdepodobnosť, že po konečnom počte krokov po po číselnej osi vychádzajúc z 0, je pravdepodobnosť, že sa prechádzajúci vráti späť do 0 rovná 1. Rovnako to platí aj v prípade, ak by sa prechádzajúci pohyboval po mriežke, teda už by mohol okrem vpravo a vľavo, chodiť aj hore a dole. Vieme teda, že ak by sme chlapíka z krčmy poslali poprechádzať sa po dlhej rovnej ulici, po N krokoch sa vráti do krčmy s pravdepodobnosťou 1. Rovnakú pravdepodobnosť dostaneme ak sa opitý chlapík nachádza v strede veľkého námestia. Po N krokoch sa určite opäť vráti do stredu, resp. na miesto z ktorého vyšiel. Avšak, ak sa už dostaneme do vyšších rozmerov, pravdepodobnosť bude menšia ako jedna. Opité vtáky majú teda kladnú pravdepodobnosť, že sa späť do hniezda nevrátia.

4.3 Janko, Marienka a Anička

Príklad 4.8. *Janko je v krčme a trochu to prehnal s alkoholom. Rozmýšľa, či pôjde navštíviť Aničku, jeho frajerku, alebo sa vráti domov k sestre Marienke najesť sa medovníkov. Vie, že ak pôjde kamkoľvek, určite sa v ten večer už nedostane k tej druhej. Nakoniec sa rozhodne, že sa nechá náhodne viesť, či pôjde vpravo alebo vľavo a na konci uvidí kam sa dostal. Aká je pravdepodobnosť, že Janko pôjde domov k Marienke? [4]*

Riešenie: Jankovu cestu si môžeme teraz predstaviť ako prechádzku po celých číslach, pričom v 0 ho čaká Anička a v N Marienka. Keďže sa určite od nich nedostane k tej druhej, tieto hranice budú tzv. *absorbujúce.* Janko sa rozhoduje náhodne a môže ísť len vpravo alebo vľavo - teda s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$. Chceme vypočítať pravdepodobnosť, že Janko bude absorbovaný stavom N, pričom vychádza zo stavu n - z krčmy.

Túto pravdepodobnosť vypočítame pomocou diferenčnej rovnice, ktorú si zostavíme nasledovne

$$P(n)=\frac{1}{2}P(n-1)+\frac{1}{2}P(n+1) \tag{4.14}$$

a upravíme

$$P(n+1) - 2P(n) + P(n-1) = 0. \tag{4.15}$$

Počiatočné podmienky sú v tvare

$$\begin{aligned} P(0) &= 0 && (4.16) \\ P(N) &= 1. && (4.17) \end{aligned}$$

Prvá počiatočná podmienka hovorí o tom, že ak Janko vychádza zo stavu 0, teda od Aničky, pravdepodobnosť, že skončí v stave N, teda doma u Marienky, je nulová z dôvodu, že Anička už Janka preč nepustí. Podobne, ak Janko vychádza od Marienky, určite u nej aj zostane, keďže sa bude napchávať medovníkmi, teda pravdepodobnosť, že skončí v stave N je 1.

Na výpočet všeobecného riešenia diferenčnej rovnice v tvare $P(n) = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$ zostavíme charakteristickú rovnicu

$$\lambda^2 - 2\lambda + \lambda = 0 \tag{4.18}$$

a vypočítame korene $\lambda_{1,2}$. Charakteristická rovnica má dvojnásobný koreň rovný $\lambda_{1,2} = 1$, všeobecné riešenie diferenčnej rovnice bude teda v tvare

$$P(n) = c_1 + c_2 n. \tag{4.19}$$

Aplikáciou počiatočných podmienok dostávame

$$\begin{aligned} P(0) = c_1 &= 0 && (4.20) \\ P(N) = c_1 + c_2 N = c_2 N = 1 &\Longrightarrow c_2 = \frac{1}{N}. && (4.21) \end{aligned}$$

Pravdepodobnosť, že Janko pôjde domov za Marienkou je teda rovná

$$P(n) = \frac{n}{N}. \tag{4.22}$$

Príklad 4.9. *Janka to ťahá k jednej z dievčat viac a nebude sa rozhodovať pri ceste vpravo či vľavo náhodne, ale s pravdepodobnosťou q, resp. $1-q$. Aká je pravdepodobnosť, že Janko pôjde domov k Marienke?*

Riešenie: Zostavíme diferenčnú rovnicu

$$P(n) = qP(n-1) + (1-q)P(n+1) \tag{4.23}$$

a upravíme

$$P(n+1) - \frac{1}{1-q}P(n) + \frac{q}{1-q}P(n-1). \tag{4.24}$$

Počiatočné podmienky sú v rovnakom tvare ako v predchádzajúcom prípade, keďže chceme vypočítať pravdepodobnosť, že Janko skončí doma u Marienky. Opäť vyriešime charakteristickú rovnicu a vypočítame korene $\lambda_{1,2}$.

$$\lambda^2 - \frac{1}{1-q}\lambda + \frac{q}{1-q} = 0. \tag{4.25}$$

Vypočítame diskriminant kvadratickej rovnice, ktorý je rovný

$$D = \frac{1}{(1-q)^2} - \frac{4q}{1-q} = \frac{1-4q(1-q)}{(1-q)^2} = \frac{(1-2q)^2}{(1-q)^2} > 0 \quad \text{pre} \quad 0 < q < 1 \tag{4.26}$$

Vďaka kladnému diskriminantu má charakteristická rovnica dva reálne korene

$$\lambda_{1,2} = \frac{\frac{1}{1-q} \pm \frac{1-2q}{1-q}}{2} = \frac{1 \pm (1-2q)}{2(1-q)}. \tag{4.27}$$

Dostávame teda všeobecné riešenie diferenčnej rovnice v tvare

$$P(n) = c_1 + c_2\left(\frac{q}{1-q}\right)^n. \tag{4.28}$$

Aplikáciou počiatočných podmienok a vyriešením sústavy rovníc dostávame

$$P(0) = c_1 + c_2 = 0 \tag{4.29}$$

$$P(N) = c_1 + c_2\left(\frac{q}{1-q}\right)^N = 1 \tag{4.30}$$

$$c_1 = -c_2 \tag{4.31}$$

$$c_2 = \frac{1}{\left(\frac{q}{1-q}\right)^N - 1} = \frac{(1-q)^N}{q^N - (1-q)^N} \tag{4.32}$$

$$c_1 = \frac{(1-q)^N}{q^N + (1-q)^N}. \tag{4.33}$$

Pravdepodobnosť, že Janko príde domov k Marienke je rovná

$$\begin{aligned} P(n) &= \frac{(1-q)^N}{q^N + (1-q)^N} + \frac{(1-q)^N}{q^N - (1-q)^N}\left(\frac{q}{1-q}\right)^N = \\ &= \frac{(1-q)^N}{q^N + (1-q)^N} + \frac{q^N}{q^N - (1-q)^N} \end{aligned} \tag{4.34}$$

5 Korelácia

Korelácia vo všeobecnosti nám hovorí, ako spolu súvisia dva javy, teda či sú závislé alebo nezávislé. Pojem korelácia prvýkrát použil anglický polyhistor Francis Galton v roku 1888. Korelácia vo všeobecnosti môže byť pozitívna alebo negatívna. Pod pozitívne korelovanými náhodnými premennými X, Y rozumieme také premenné, ktoré rastú s rastom druhej premennej, resp. klesajú s poklesom druhej premennej. Pod negatívne korelovanými premennými rozumieme také premenné, pri ktorých s rastom (resp. poklesom) jednej premennej klesá (resp. rastie) druhá premenná [34]. Ak sa korelácia rovná nule, znamená to, že dva javy spolu nesúvisia (teda sa neovplyvňujú).

Koreláciu medzi náhodnými premennými môžeme merať pomocou korelačného koeficientu. Najznámejším z nich je tzv. Pearsonov korelačný koeficient, ktorý budeme v tejto práci používať.

5.1 Príklad o aktívach

Príklad 5.1. *Predpokladajme 3 aktíva A, B a C také, že korelačný koeficient A a B je 0,9 a korelačný koeficient B a C je 0,8. Je možné, aby korelačný koeficient A a C bol 0,1? [21]*

Riešenie: Korelačný koeficient ρ dvoch aktív nám dáva informáciu o tom, ako výnosy jedného aktíva ovplyvňujú výnosy druhého aktíva. Korelačný koeficient je špeciálnym prípadom kovariancie (normuje ju), teda môžeme zostaviť korelačnú maticu, ktorá bude mať rovnakú vlastnosť ako kovariančná matica a to je kladná semidefinitnosť.

Korelačná matica je symetrická, teda $\rho_{A,B} = \rho_{B,A}$ a korelačný koeficient $\rho_{A,A} = 1$. Tento fakt vyplýva z toho, ako je korelačný koeficient definovaný. Podľa [20] definujeme korelačný koeficient $\rho_{A,B}$ takto:

$$\rho_{A,B} = \frac{\operatorname{cov}(A,B)}{\sigma_A \sigma_B} \tag{5.1}$$

Keďže $\operatorname{cov}(A,A) = \sigma_A^2$, tak $\rho_{A,A} = \frac{\sigma_A^2}{\sigma_A \sigma_A} = 1$

Zostavíme teda korelačnú maticu a budeme skúmať jej definitnosť.

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0,9 & 0,1 \\ 0,9 & 1 & 0,8 \\ 0,1 & 0,8 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

Matica M je kladne semidefinitná, ak pre každé $x \in \mathbb{R}^n$ platí $x^T M x \geq 0$. Iná definícia hovorí o tom, že matica M je kladne semidefinitná ak platí, že všetky jej hlavné minory sú nezáporné.

Vidíme, že prvý minor, teda determinant vľavo hore je rovný 1, teda je kladný. Druhý 2x2 minor má determinant rovný 0,19, teda je opäť kladný. Determinant celej matice je rovný -0,316, teda nie je nezáporný a z tohoto dôvodu nemôže byť korelačný koeficient $\rho_{A,C} = 0.1$.

Príklad 5.2. *Z akého intervalu môže byť korelačný koeficient* $\rho_{A,C}$*? [21]*

Riešenie: Označme si $\rho_{A,C} = x$. Budeme skúmať definitnosť matice

$$K' = \begin{bmatrix} 1 & 0,9 & x \\ 0,9 & 1 & 0,8 \\ x & 0,8 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

Prvý minor tejto matice je kladný. Druhý 2x2 minor je rovný 0,19, teda je opäť kladný. Chceme, aby determinant celej matice bol nezáporný. Determinant 3x3 matice vypočítame pomocou Sarrusovho pravidla počítania determinantu matice. Budeme teda riešiť

$$|detK'| = 1 + 0,9 \cdot 0,8x + 0,9 \cdot 0,8x - x^2 - 0,8^2 - 0,9^2 \geq 0$$
$$-x^2 + \frac{36}{25}x - \frac{9}{20} \geq 0$$

Koreňmi tejto kvadratickej nerovnice sú $\frac{36-3\sqrt{19}}{50}$ a $\frac{36+3\sqrt{19}}{50}$, čo je približne 0,4585 a 0,9815. Korelačný koeficient medzi aktívami A a C by mal byť z intervalu $(0,4585; 0,9815)$.

5.2 Korelácia medzi náhodnými premennými

Príklady tohoto typu odzneli na pohovore do spoločnosti Citadel, ale aj do spoločnosti Goldman Sachs:

Príklad 5.3. *Predpokladajme tri náhodné premenné. Korelačný koeficient medzi A a B je 0,6 a medzi A a C 0,8. Aká je maximálna a aká minimálna hodnota korelačného koeficientu medzi B a C? [7, 15]*

Riešenie: Riešenie tohoto príkladu je veľmi podobné tomu o aktívach. Opäť si zostavíme korelačnú maticu, ktorej kladnú definitnosť budeme skúmať. Korelačná matica bude v tvare

$$K'' = \begin{bmatrix} 1 & 0,6 & 0,8 \\ 0,6 & 1 & x \\ 0,8 & x & 1 \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

Prvý minor tejto matice je rovný 1, a teda je kladný. Druhý 2x2 minor je rovný 0,64 a teda tiež kladný. Opäť chceme, aby determinant celej matice bol nezáporný. Determinant vypočítame pomocou Sarussovho pravidla a dostávame

$$\begin{aligned} |detK'| = 1 + 0,6 \cdot 0,8x + 0,8 \cdot 0,6x - 0,8^2 - x^2 - 0,6^2 \geq 0 \\ -x^2 + \frac{24}{25}x \geq 0 \\ x\left(\frac{24}{25} - x\right) \geq 0 \end{aligned}$$

Dostávame dva korene rovné $x_1 = 0$ a $x_2 = \frac{24}{25} = 0,96$.

Minimálna hodnota korelačného koeficientu náhodných premenných je 0, teda náhodné premenné môžu byť nekorelované, a maximálna hodnota korelačného koeficientu je rovná 0,96.

5.3 Pravdepodobnosť defaultu

Príklad 5.4. *Pravdepodobnosť defaultu firmy A je p_A a pravdepodobnosť defaultu firmy B je p_B. Nastanie defaultov má koreláciu ρ. Aká je pravdepodobnosť, že zdefaultujú obe firmy? [11]*

Riešenie: Zadefinujeme, čo to vlastne default je. Default firmy je jej neschopnosť platiť pohľadávky a dlhy [10]. Korelácia ρ medzi defaultami dvoch firiem znamená, že skrachovanie firmy A ovplyvňuje skrachovanie firmy B a teda defaulty firiem nie sú nezávislé.

Ak by boli defaulty firiem nezávislé, pravdepodobnosť, že firmy zdefaultujú je rovná

$$p_{AB} = p_A p_B. \tag{5.5}$$

Avšak, keďže defaulty nie sú nezávislé, pravdepodobnosť, že firmy zdefaultujú vypočítame ako

$$
\begin{aligned}
p_{AB} = p_A p_B + cov(A,B) = p_A p_B + \rho_{AB}\sqrt{D(A)D(B)} = \\
= p_A p_B + \rho_{AB}\sqrt{p_A(1-p_A)p_B(1-p_B)}.
\end{aligned} \tag{5.6}
$$

Príklad 5.5. *Predpokladajme, že $p_A = p_B = p \ll 1$. Koľkokrát zvýši korelácia $\rho > 0$ pravdepodobnosť súčasného defaultu oproti prípadu, že by boli nekorelované? [11]*

Riešenie: V prípade, že $p_A = p_B = p$ a defaulty oboch firiem sú nekorelované dostávame podľa rovnice (5.5)

$$p_{AB} = p^2. \tag{5.7}$$

Naopak, pre prípad korelovaných defaultov dostávame podľa rovnice (5.6)

$$p_{AB} = p^2 + \rho p(1-p). \tag{5.8}$$

Na zistenie, koľkokrát zvýši $\rho > 0$ pravdepodobnosť súčasného defaultu oproti prípadu, že by boli nekorelované vyjadríme podiel

$$\frac{p^2 + \rho p(1-p)}{p^2} = 1 + \rho\frac{1-p}{p} \tag{5.9}$$

a dostávame, že korelácia medzi defaultami zvýši pravdepodobnosť defaultu $1 + \rho\frac{1-p}{p}$ -krát.

5.4 Odhad pohybu indexu S&P 500

Na pohovore do spoločnosti Citadel odznel nasledujúci príklad:

Príklad 5.6. *Majme model, ktorý predpovedá pohyby cien indexu S&P 500. Korelácia medzi modelom a indexom je x. Aká je pravdepodobnosť, že sme správne odhadli pohyby indexu, ak investujeme iba podľa nášho modelu? Všimnite si, že ak $x = 1$, vieme dokonale predpovedať budúcnosť. [8]*

Riešenie: Označme si pravdepodobnosť, že porastie index ako p_I, resp. že poklesne ako $1 - p_I$ a pravdepodobnosť, že porastie náš model ako p_M, resp. že poklesne ako $1 - p_M$.

Označme

- A - udalosť, že index porastie

- B - udalosť, že model porastie
- C - udalosť, že index poklesne
- D - udalosť, že model poklesne.

Potom dostávame podobne ako v príklade o pravdepodobnosti defaultu

$$\begin{aligned} P_{AB} &= p_I p_M + x\sqrt{p_I(1-p_I)p_M(1-p_M)} \\ P_{AD} &= p_I(1-p_M) + x\sqrt{p_I(1-p_I)p_M(1-p_M)} \\ P_{CB} &= p_M(1-p_I) + x\sqrt{p_I(1-p_I)p_M(1-p_M)} \\ P_{CD} &= (1-p_M)(1-p_I) + x\sqrt{p_I(1-p_I)p_M(1-p_M)} \end{aligned} \tag{5.10}$$

Zo všetkých týchto vyjadrených pravdepodobností sú pre nás zaujímavé tie, pri ktorých sa „trafíme“ s naším modelom do pohybov indexu, teda P_{AB} a P_{CD}.

Dostávame teda pravdepodobnosť, že sme správne odhadli pohyby indexu rovnú ako

$$\begin{aligned} P = P_{AB} + P_{CD} = p_I p_M + x\sqrt{p_I(1-p_I)p_M(1-p_M)} + \\ +(1-p_M)(1-p_I) + x\sqrt{p_I(1-p_I)p_M(1-p_M)} = \\ = p_I p_M + (1-p_M)(1-p_I) + 2x\sqrt{p_I(1-p_I)p_M(1-p_M)} \end{aligned} \tag{5.11}$$

5.5 Trhy a korelačný koeficient

Korelačný koeficient sa objavuje aj na praktických príkladoch z finančnej matematiky, ktoré sa objavujú na pohovoroch do finančných spoločností, napr. Morgan Stanley [28].

Príklad 5.7. *Aktívum A má volatilitu rovnú 20%, aktívum B má volatilitu 30% a korelačný koeficient je 50%. Obe aktíva majú rovnaký očakávaný výnos. Predpokladajme, že investujeme x do A a $1-x$ do B. Aké x zvolíme, aby sme minimalizovali riziko? [28]*

Riešenie: Chceme minimalizovať riziko portfólia, do ktorého investujeme, teda chceme minimalizovať jeho volatilitu. Volatilitu portfólia predstavuje variančná matica portfólia, ktorú vyjadríme ako

$$\sigma_p^2 = \begin{pmatrix} w & 1-w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_A^2 & \mathrm{cov}(A,B) \\ \mathrm{cov}(A,B) & \sigma_B^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ 1-w \end{pmatrix}, \tag{5.12}$$

kde w a $1-w$ predstavujú váhy jednotlivých aktív v portfóliu, σ_A^2 a σ_B^2 sú variancie jednotlivých aktív (štandardné odchýlky = volatility umocnené na druhú) a $\mathrm{cov}(A,B)$ je kovariancia medzi aktívami. Dosadíme a dostávame

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 = \begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,2^2 & 0,5\cdot 0,2\cdot 0,3 \\ 0,5\cdot 0,2\cdot 0,3 & 0,3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix} = \\ = 0,07x^2 - 0,13x + 0,09\end{aligned} \tag{5.13}$$

Minimum tejto kvadratickej bude vďaka orientácii paraboly v jej vrchole. Vypočítame, v ktorom bode je vrchol paraboly a dostávame

$$\min_x\{ax^2+bx+c\} = -\frac{b}{2a} = \frac{0,13}{0,14} = \frac{13}{14} \tag{5.14}$$

Dostávame teda, že do aktíva A by sme mali investovať $\frac{13}{14}$ z našich prostriedkov a do aktíva B by sme mali investovať $\frac{1}{14}$ tak, aby sme minimalizovali riziko.

5.6 Dážď, kempovanie a korelácia

Na pohovore do spoločnosti Jane Street odznel aj takýto príklad súvisiaci s koreláciou:

Príklad 5.8. *Idete cez víkend kempovať. Pravdepodobnosť, že bude v sobotu pršať je 50% a pravdepodobnosť, že bude v pršať v nedeľu je 60%. Aká je pravdepodobnosť, že cez víkend nebude pršať? [19]*

Riešenie: V zadaní nemáme informáciu, či sú udalosti, že bude pršať v sobotu alebo v nedeľu nezávislé alebo nie. Preto musíme uvažovať oba prípady.

Nech A označuje udalosť, že v sobotu nebude pršať a B udalosť, že v nedeľu nebude pršať. Pravdepodobnosti týchto udalostí vypočítame ako doplnok pravdepodobností zo zadania, keďže predstavujú ich doplnok. Potom pravdepodobnosť, že cez víkend nebude pršať, ak sú udalosti A a B nezávislé, je rovná

$$P(A\cap B) = P(A)P(B) = 0,2. \tag{5.15}$$

V prípade, že sú udalosti závislé, teda majú koreláciu ρ, pravdepodobnosť, že cez víkend nebude pršať vypočítame ako

$$\begin{aligned}P(A\cap B) = P(A)P(B) + \mathrm{cov}(A,B) = \\ = P(A)P(B) + \rho\sqrt{P(A)(1-P(A))P(B)(1-P(B))} = \\ = 0,2 + \sqrt{0,06}\rho\end{aligned} \tag{5.16}$$

Príklad 5.9. *Predpokladajme, že udalosti, že bude pršať nie sú nezávislé a kladne korelované. Čo sa stane s pravdepodobnosťou, že cez víkend nebude pršať? Zvýši sa alebo sa zníži? [19]*

Riešenie: Využijeme informáciu z predchádzajúceho príkladu a teda pravdepodobnosti v prípade, že sú udalosti korelované a nekorelované.

- A a B nekorelované - $P(A \cap B) = 0,2$,
- A a B korelované - $P(A \cap B) = 0,2 + \sqrt{0,06}\rho$.

Je jasné, že v prípade, že sú udalosti kladne korelované, pravdepodobnosť, že zažijeme neupršaný víkend sa zvýši o $\sqrt{0,06}\rho$. Ľudskou rečou tento výsledok znamená, že ak v sobotu nebude pršať, pravdepodobnosť, že nebude pršať aj v nedeľu je vyššia oproti prípadu nezávislých udalostí.

5.7 Generovanie korelovaných náhodných premenných v R

V softvéri R na generovanie náhodných premenných s hodnotami 0, 1 s danou koreláciou existuje knižnica `bindata` [9]. Vďaka nej vieme vygenerovať akýkoľvek dlhý vektor jednotiek a núl, vieme definovať pravdepodobnosť, že vo vektori sa nachádza číslo 1 a koreláciu medzi nimi.

```
set.seed(2018)
library(bindata)
rho <- 0.75
x <- rmvbin(n=10^5, margprob=c(0.5,0.6), bincorr=matrix(c(1,rho,rho,1)
   , nrow=2))
```

Listing 1: Generovanie náhodných premenných s hodnotami 0, 1 a koreláciou

Príkazom `rmvbin` vygenerujeme vektory jednotiek a núl, dĺžky definovanej ako `n` $= 10^5$. Parameter `margprob` definuje pravdepodobnosť vygenerovania jednotky a parameter `bincorr` definuje korelačnú maticu týchto dvoch vektorov.

Otestujeme, či sú vektory skutočne korelované tak, ako sme chceli a dostávame

```
> cor(x)
          [,1]      [,2]
[1,] 1.0000000 0.7551223
```

```
[2,] 0.7551223 1.0000000
```

Výberová korelačná matica teda sedí s teoretickou korelačnou maticou zadanou v príkaze. Zobrazíme aj počty jednotiek a núl v jednotlivých vektoroch.

```
> table(x[,1], x[,2])

        0     1
  0 38146 11533
  1  1624 48697
```

6 Príklady súvisiace s trojuholníkmi

6.1 Príklad o vytvorení trojuholníka

Príklady, pri ktorých skúmame pravdepodobnosť vytvorenia trojuholníka z palice, ktorú zlomíme na tri časti sú veľmi populárne už z minulosti. Takéto problémy sa nazývajú aj „spaghetti problems“ a existujú rôzne modifikácie, pri ktorých je trojuholník inak definovaný. To znamená, že dĺžky zlomených úsekov môžu predstavovať nielen dĺžky strán trojuholníka, ale napríklad aj dĺžky ťažníc trojuholníka, či dĺžky osí jeho uhlov [18].

Príklad 6.1. *Majme dva body x, y rovnomerne rozdelené na intervale [0, 1], ktoré nám tento interval rozdeľujú na tri časti. Aká je pravdepodobnosť, že z týchto troch častí budeme vedieť zložiť trojuholník? [21]*

Riešenie: Pri konštrukcii trojuholníkov platí tzv. *trojuholníkova nerovnosť*. Nech *a, b,* a c sú dĺžky strán ľubovoľného trojuholníka. Potom platí

$$a + b > c \quad \wedge \quad a + c > b \quad \wedge \quad b + c > a. \tag{6.1}$$

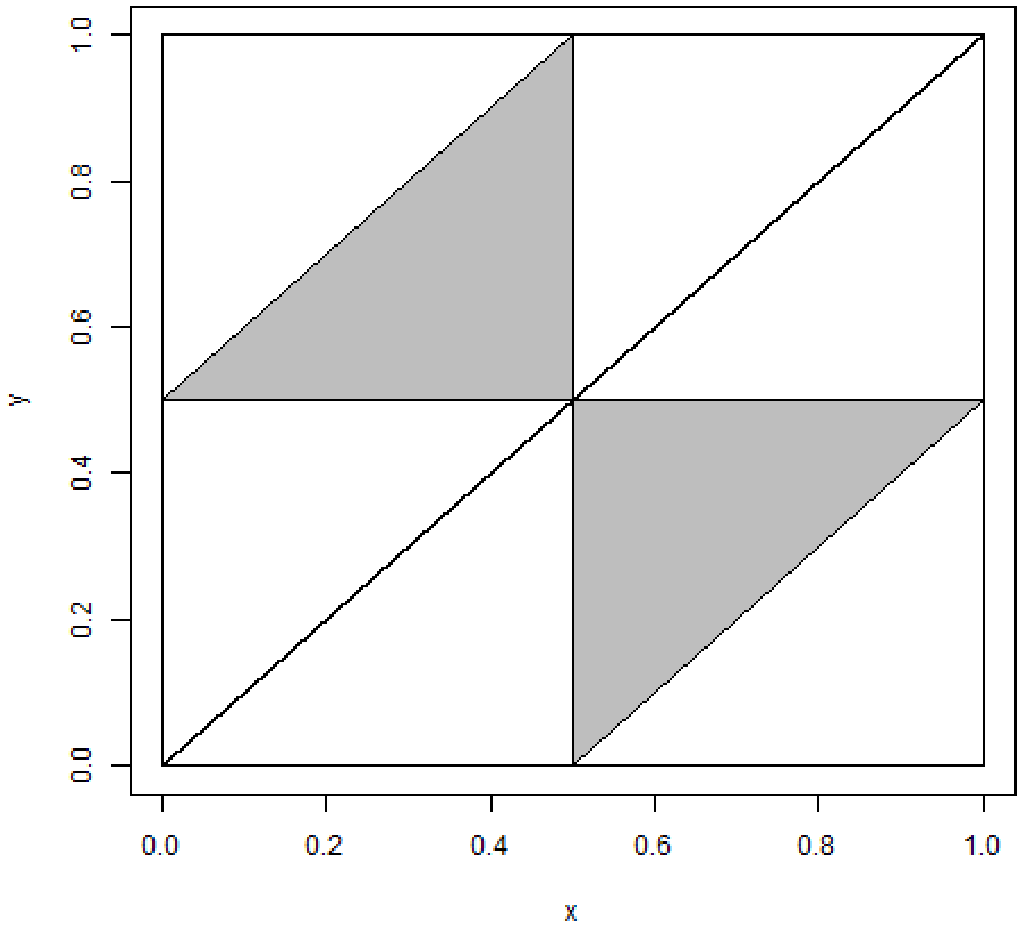
Body x a y nám interval $[0, 1]$ rozdeľujú na $[0, x], [x, y]$, a $[y, 1]$. Nech $x < y$. Potom musí podľa trojuholníkovej nerovnosti platiť

$$[x + (y - x) > 1 - y] \quad \wedge \quad [x + (1 - y) > (y - x)] \quad \wedge \quad [(y - x) + (1 - y) > x] \tag{6.2}$$

Body, ktoré vyhovujú týmto nerovnostiam vytvárajú množinu A, ktorú si už vieme znázorniť ako podmnožinu štvorca $[0, 1] \times [0, 1]$ a pravdepodobnosť, že zostrojíme z takýchto bodov trojuholník vypočítame pomocou geometrickej pravdepodobnosti. Plocha $S(A) = \frac{1}{4}$ a plocha jednotkového štvorca $S(\Omega)$ je rovná 1, teda pravdepodobnosť, že z daných bodov budeme vedieť zostrojiť trojuholník bude rovná $\frac{1}{4}$.

Príklad 6.2. *Ako sa zmení pravdepodobnosť, ak najprv rozdelíme interval* $[0, 1]$ *na 2 časti bodom x a bod y budeme voliť vo väčšej z častí, ktorú vytvoril bod x? [21]*

Riešenie: Bod x nám rozdelil interval na časti $[0, x]$ a $[x, 1]$. Predpokladajme, že $x > 1 - x$. To znamená, že bod y budeme voliť v intervale $[0, x]$.



Obr. 6.1: Grafické znázornenie množiny A

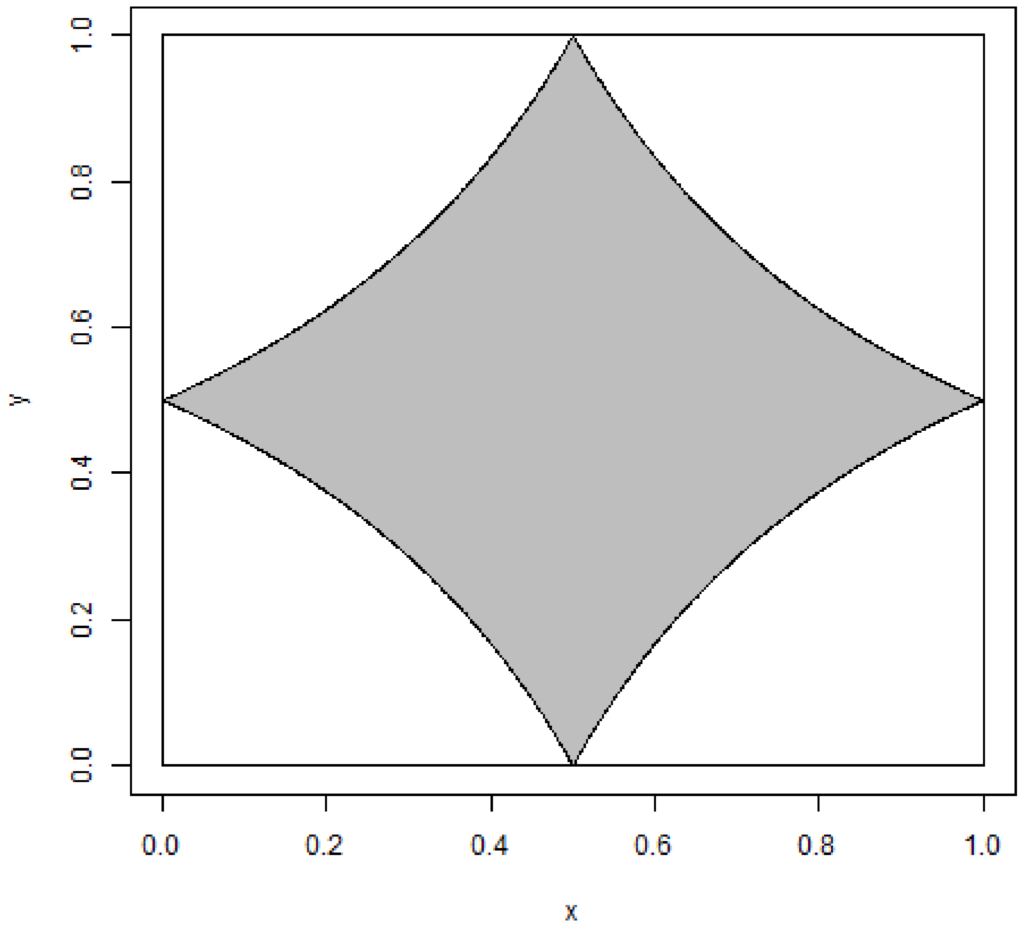
Rozdelíme teda interval $[0, x]$ bodom y na ďalšie dve časti, a to xy a $(1-y)x$. Opäť, na to, aby sme mohli skonštruovať trojuholník, musí byť splnená trojuholníková nerovnosť. Dostávame, že musí platiť

$$[xy+(1-y)x > 1-x] \quad \wedge \quad [xy+(1-x) > (1-y)x] \quad \wedge \quad [(1-y)x+(1-x) > xy] \tag{6.3}$$

Po úprave dostávame

$$\left[x \geq \frac{1}{2}\right] \quad \wedge \quad \left[y \geq 1 - \frac{1}{2x}\right] \quad \wedge \quad \left[y \leq \frac{1}{2x}\right] \tag{6.4}$$

a vypočítame obsah množiny ohraničenej danými nerovnosťami, ktorá je zobrazená na obrázku 6.2. Prvá nerovnosť je triviálne splnená, keďže úsek x volíme vo väčšom z dvoch úsekov. Počítaný obsah násobíme dvomi z dôvodu, že musíme uvažovať aj druhú



Obr. 6.2: Grafické znázornenie množiny A

z možností, a teda že väčší z úsekov je $1 - x$. Dostávame

$$2\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{1-\frac{1}{2x}}^{\frac{1}{2x}} dydx = 2\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{1}{x} - 1\right) dx = 2\ln 2 - 1 \doteq 0,3863 \tag{6.5}$$

Teda pravdepodobnosť, že vytvoríme trojuholník je približne rovná 0,3863.

Príklad 6.3. *Aká je pravdepodobnosť, že trojuholník je ostrouhlý?*

Riešenie: V tomto prípade nám pribudla podmienka, že každý z uhlov trojuholníka musí byť menší ako 90°. Na vyjadrenie podmienok na ostrý uhol použijeme kosínusovú vetu [25].

Nech a, b a c sú dĺžky strán trojuholníka ABC s uhlami α, β a γ. Potom platí:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma.$$

Uvažujme $a = x$, $b = y - x$ a $c = 1 - y$, α, β a γ sú príslušné uhly. Chceme, aby bol uhol α v intervale $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ a teda volíme $\cos\alpha > 0$. Upravíme a dostávame

$$\begin{aligned} \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} &> 0 \\ b^2 + c^2 &> a^2. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Odmocnením a upravením dostávame

$$a < \sqrt{b^2 + c^2} < \sqrt{b^2 + c^2 + 2bc} = \sqrt{(b + c)^2} = b + c, \tag{6.7}$$

čím sme dostali trojuholníkovú nerovnosť. Teda na to, aby sme vytvorili z troch úsekov trojuholník stačí splniť podmienku na základe kosínusovej vety. Podobné podmienky nám vzniknú aj pre ostatné uhly, pričom všetky musia platiť súčasne. Dostávame, že množina A bude definovaná nerovnosťami

$$\left[a^2 + b^2 > c^2\right] \quad \wedge \quad \left[a^2 + c^2 > b^2\right] \quad \wedge \quad \left[b^2 + c^2 > a^2\right]. \tag{6.8}$$

Dosadením pôvodných premenných a úpravou dostávame podmienky

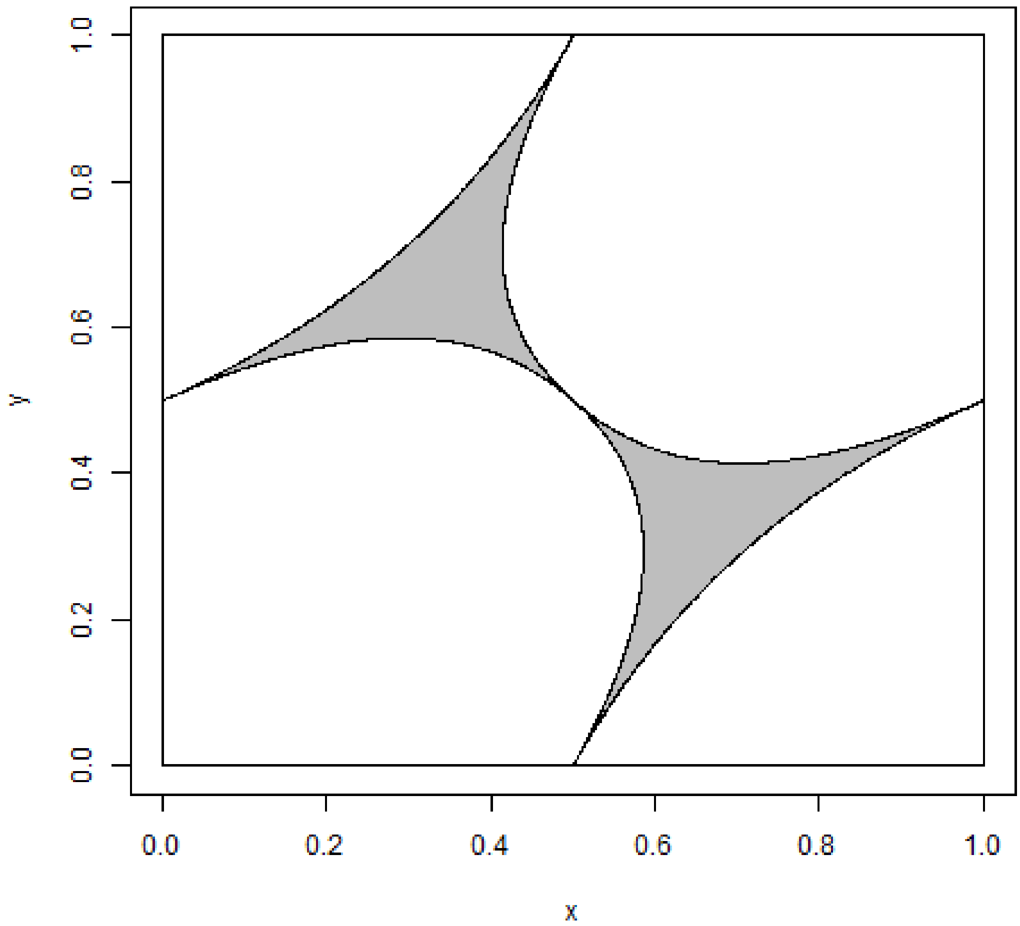
$$\left[y > \frac{1 - 2x^2}{2 - 2x}\right] \quad \wedge \quad \left[y < \frac{1}{2 - 2x}\right] \quad \wedge \quad \left[x < y + \frac{1}{2y} - 1\right]. \tag{6.9}$$

Množina A je znázornená na obrázku 6.3. Obsah množiny vypočítame pomocou jej doplnkov, ktoré sú znázornené na obrázku 6.4 červenou a zelenou farbou. Okrem zvýraznených častí, tvoria doplnok množiny aj dva štvorce, každý s obsahom $\frac{1}{4}$. Časti zvýraznené červenou farbou sú symetrické z pohľadu ich obsahu a jedna z nich spĺňa nasledovné nerovnosti (ostatné analogicky):

$$y \leq \frac{1 - 2x^2}{2 - 2x} \quad \wedge \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \quad \wedge \quad \frac{1}{2} \leq y \leq 1. \tag{6.10}$$

Jej obsah teda vypočítame ako

$$A'_{\text{červená}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1 - 2x^2}{2 - 2x} - \frac{1}{2}\right) dx = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\ln 2. \tag{6.11}$$



Obr. 6.3: Grafické znázornenie množiny A

Podobne vypočítame aj obsah časti ohraničenej zelenou farbou. Opäť sú obe časti symetrické z pohľadu obsahu a jedna z nich spĺňa nasledovné nerovnosti (druhá analogicky):

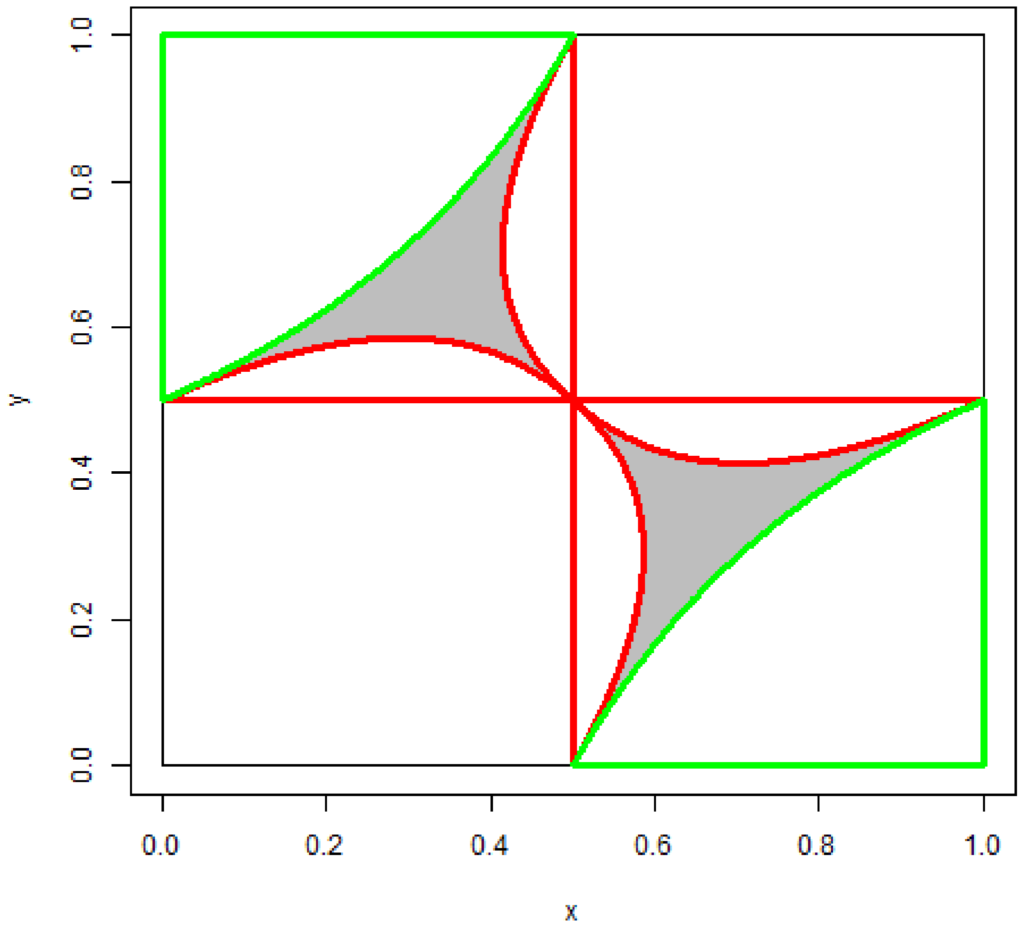
$$y \leq \frac{2x-1}{2x} \quad \wedge \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \quad \wedge \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{2}. \tag{6.12}$$

Jej obsah teda vypočítame ako

$$A'_{\text{zelená}} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{2x-1}{2x}\right) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2. \tag{6.13}$$

Vypočítame teda obsah množiny A ako rozdiel obsahu štvorca $[0,1] \times [0,1]$ a obsahu doplnku množiny A

$$A = 1 - 2\frac{1}{4} - 4\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\ln 2\right) - 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2\right) = \ln 8 - 2 \doteq 0,0794 \tag{6.14}$$



Obr. 6.4: Grafické znázornenie doplnkov množiny A

6.2 Gaussovský trojuholník

Príklad 6.4. *Nech* $A = (X_1, Y_1)$*,* $B = (X_2, Y_2)$ *a* $C = (X_3, Y_3)$*. Predpokladajme, že všetky veličiny* $X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3$ *sú nezávislé a každá z nich má normálne rozdelenie* $\mathcal{N}(0, 1)$*. Potom sa trojuholník ABC nazýva gaussovský. Aká je pravdepodobnosť, že trojuholník bude tupouhlý? [1]*

Riešenie: Trojuholník sa nazýva tupouhlý práve vtedy, keď práve jeden z jeho uhlov je tupý. Preto platí

$$\begin{aligned} P_t = P(\triangle ABC \quad \text{je tupouhlý}) = \\ = P(\angle ABC > 90^\circ \vee \angle BCA > 90^\circ \vee \angle CAB > 90^\circ) = \\ = 3P(\angle ABC > 90^\circ) \end{aligned} \tag{6.15}$$

Vieme, že platí, že uhol $\angle ABC$ je tupý práve vtedy, keď ťažnica t_b, spájajúca bod B so stredom S strany AC je menšia než polovica úsečky $|AC|$. Toto tvrdenie dokážeme pomocou kosínusovej vety a základnej vlastnosti tupouhlého trojuholníka, ktorá priamo vyplýva z kosínusovej vety.

Ak je trojuholník tupouhlý, znamená to, že jeden z jeho uhlov je z intervalu $(90^\circ, 180^\circ)$. Nech $\beta \in (90^\circ, 180^\circ)$. Kosínus tohoto uhla bude teda menší ako 0 a teda podľa kosínusovej vety dostávame, že platí

$$b^2 > a^2 + c^2. \tag{6.16}$$

Vyjadrime si pomocou kosínusovej vety dĺžku ťažnice t_b. Ťažnica je úsečka spájajúca vrchol trojuholníka so stredom S protiľahlej strany. Ťažnica t_b nám teda vytvorí dva trojuholníky ABS so stranami $\frac{b}{2}, c$ a t_b a BCS so stranami $\frac{b}{2}, t_b$ a a.

Dĺžku ťažnice teda podľa kosínusovej vety vypočítame nasledovne:

$$t_b^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - 2a\frac{b}{2}\cos\gamma. \tag{6.17}$$

Z kosínusovej vety pre trojuholník ABC vieme vyjadriť

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \tag{6.18}$$

Dosadením do (6.17) dostávame

$$t_b^2 = a^2 + \frac{b^2}{4} - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}. \tag{6.19}$$

Po úprave

$$t_b^2 = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4}. \tag{6.20}$$

Chceme teda dokázať, že platí $\frac{b}{2} > t_b$ za podmienok

$$\begin{aligned} t_b^2 = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4} \\ b^2 > a^2 + c^2 \end{aligned}$$

Dostávame

$$\begin{aligned} t_b^2 &< \frac{2b^2 - b^2}{4} \\ t_b &< \frac{b^2}{4}. \end{aligned}$$

Odmocnením dostávame požadovanú nerovnosť.

Bod S má súradnice $(\frac{X_1+X_3}{2}, \frac{Y_1+Y_3}{2})$, keďže je stredom strany AC. Potom platí

$$|SC|^2 = \left(\frac{X_1+X_3}{2} - X_3\right)^2 + \left(\frac{Y_1+Y_3}{2} - Y_3\right)^2 = \left(\frac{X_1-X_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{Y_1-Y_3}{2}\right)^2 \quad (6.21)$$

Pre ťažnicu t_b platí analogicky

$$t_b^2 = \left(X_2 - \frac{X_1+X_3}{2}\right)^2 + \left(Y_2 - \frac{Y_1+Y_3}{2}\right)^2 \quad (6.22)$$

Vidíme, že dĺžka t_b a dĺžka strany $|SC|$ sú vyjadrené ako lineárna kombinácia súradníc bodov A, B a C, ktorá vznikla prenásobením vektora súradníc nejakým vektorom a. Označme si preto pre zjednodušenie

$$\begin{aligned} U_1 &= \left(X_2 - \frac{X_1+X_3}{2}\right) \\ U_2 &= \left(Y_2 - \frac{Y_1+Y_3}{2}\right) \\ V_1 &= \left(\frac{X_1-X_3}{2}\right) \\ V_2 &= \left(\frac{Y_1-Y_3}{2}\right). \end{aligned}$$

a uložme si nové premenné do vektorov

$$\begin{aligned} \xi &= (X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3) \\ \eta &= (U_1, U_2, V_1, V_2). \end{aligned}$$

Môžeme si všimnúť, že vektor η je lineárnou transformáciou vektora ξ po prenásobení nejakou maticou. Zrejme teda platí $\eta = H\xi$, kde

$$H = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (6.23)$$

Keďže jednotlivé zložky vektora ξ majú $\mathcal{N}(0,1)$, potom vektor ξ má $\mathcal{N}_6(0,1)$. Podľa [2, veta 4.4] vieme, že platí:

Nech $X = (X_1, ...X_n)' \sim \mathcal{N}(\mu, V)$. Potom $Y = a_{m\times 1} + B_{m\times n}X \sim \mathcal{N}(a + B\mu, BVB')$.

Keďže vektor η je lineárnou transformáciou vektora ξ má normálne rozdelenie $\mathcal{N}_4(0, HH')$, kde

$$HH' = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \tag{6.24}$$

Matica HH' je diagonálna a teda nediagonálne prvky sú nulové. Z toho vyplýva, že kovariancie jednotlivých veličín, sú nulové. Podľa [2, veta 4.11] platí:

Nech $X = (Y', Z') \sim (\mu, V)$. Ak platí $\operatorname{cov}(Y, Z) = 0$, potom sú vektory Y, Z nezávislé.

Na základe uvedeného sú veličiny U_1, U_2, V_1, V_2 nezávislé, normálne rozdelené, s nulovou strednou hodnotou a disperziami uvedenými v matici HH'. Preto platí

$$U_1 \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{3}{2}\right) \Rightarrow U_1\sqrt{\frac{2}{3}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$
$$U_2 \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{3}{2}\right) \Rightarrow U_2\sqrt{\frac{2}{3}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$
$$V_1 \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow V_1\sqrt{2} \sim \mathcal{N}(0,1)$$
$$V_2 \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow V_2\sqrt{2} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Ak zapíšeme pravdepodobnosť, že trojuholník je tupouhlý v nových súradniciach, s využitím vlastnosti, že $t_b < \frac{b}{2}$ dostávame

$$\begin{aligned} P(\triangle ABC \quad \text{je tupouhlý}) = 3P(U_1^2 + U_2^2 < V_1^2 + V_2^2) = \\ = 3P\left(\frac{3}{2}\left[\left(U_1\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 + \left(U_2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2\right] < \frac{1}{2}\left[\left(V_1\sqrt{2}\right)^2 + \left(V_2\sqrt{2}\right)^2\right]\right). \end{aligned} \tag{6.25}$$

Vieme, že podľa [2, veta 4.13] platí:

Nech $X_1, X_2, ...X_n$ sú nezávislé náhodné veličiny, každá s rozdelením $\mathcal{N}(0,1)$. Potom náhodná veličina $Y = X_1^2 + X_2^2 + ...X_n^2$ má rozdelenie χ_n^2.

V našom výraze vidíme práve súčet druhých mocnín veličín s rozdelením $\mathcal{N}(0,1)$

prenásobený konštantou. Označme si preto

$$W = \left(U_1\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 + \left(U_2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2, \quad Z = \left(V_1\sqrt{2}\right)^2 + \left(V_2\sqrt{2}\right)^2. \tag{6.26}$$

Veličiny W a Z majú na základe vyššie uvedeného χ_2^2 rozdelenie. Opäť podľa [2, veta 4.28] platí:

Nech $X \sim \chi_m^2$ a $Y \sim \chi_n^2$ a nech X a Y sú nezávislé. Potom $\frac{X/m}{Y/n} \sim \mathcal{F}_{m,n}$

Teda aj podiel $\frac{W}{Z}$ bude mať $\mathcal{F}_{2,2}$. Hustota Fisherovho-Snedecorovho rozdelenia $\mathcal{F}_{m,n}$ má tvar

$$f(z) = \begin{cases} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} \frac{z^{\frac{m}{2}-1}}{B\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{m}{n}z\right)^{-\frac{m+n}{2}}, & \text{ak} \quad x > 0 \\ 0, \quad \text{ak} \quad x \leq 0. \end{cases} \tag{6.27}$$

Pre $m = 2$ a $n = 2$ je

$$f_{2,2}(z) = (1+z)^{-2}. \tag{6.28}$$

Integrovaním dostaneme

$$F_{2,2}(z) = \frac{z}{1+z}. \tag{6.29}$$

Ak si pravdepodobnosť, že trojuholník je tupouhlý prepíšeme v nových súradniciach a upravíme, dostaneme

$$P(\triangle ABC \quad \text{je tupouhlý}) = 3P\left(\frac{3}{2}W < \frac{1}{2}Z\right) = 3P\left(\frac{W}{Z} < \frac{1}{3}\right) \tag{6.30}$$

Distribučná funkcia je podľa [20] definovaná takto:

Distribučná funkcia náhodnej veličiny $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ je funkcia $F\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ definovaná predpisom $F(x) = P(X < x)$.

Pri výpočte našej pravdepodobnosti vidíme, že môžeme pravdepodobnosť nahradiť hodnotou distribučnej funkcie a teda dostávame

$$P(\triangle ABC \quad \text{je tupouhlý}) = 3P\left(\frac{W}{Z} < \frac{1}{3}\right) = 3\frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4} \tag{6.31}$$

Keďže trojuholník má tri uhly a každý z nich môže byť s rovnakou pravdepodobnosťou tupý, pričom tupý môže byť práve jeden z nich, stačilo nám vypočítať pravdepodobnosť, že práve jeden z nich bude tupý a následne túto pravdepodobnosť vynásobiť tromi.

Rovnaké výsledky sme dostali aj simuláciou v softvéri R. Vygenerovali sme si súradnice bodov A, B a C z $\mathcal{N}(0,1)$, vypočítali sme ťažnice a dĺžku polovice danej strany a testovali sme či platia podmienky na to, aby bol uhol tupý. Po opakovaní simulácie 10^5-krát sme dostali, že uhol je tupý s pravdepodobnosťou 0,75008.

6.3 Príklad o mravcoch

Príklad 6.5. *Predpokladajme, že máme 3 mravce, každý z nich sa nachádza na inom vrchole trojuholníka. Každý z mravcov si náhodne vyberá smer, ktorým sa poberie a každý z nich sa pohybuje rovnakou rýchlosťou. Aká je pravdepodobnosť, že sa nezrazia? [21]*

Riešenie: Mravce sa nezrazia len v jedinom prípade a to vtedy, ak pôjdu všetky tri rovnakým smerom. Každý z mravcov má dva smery, ktorými sa môže vybrať. Ak sa prvý mravec vyberie napríklad doprava, zaujíma nás pravdepodobnosť, že zvyšné dva mravce sa vyberú tiež smerom doprava. Táto pravdepodobnosť, je rovná

$$P(\text{nezrazia sa}) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}. \tag{6.32}$$

Príklad 6.6. *Aký bude výsledok, ak máme n mravcov, ktoré sa nachádzajú vo vrcholoch n-uholníka? [21]*

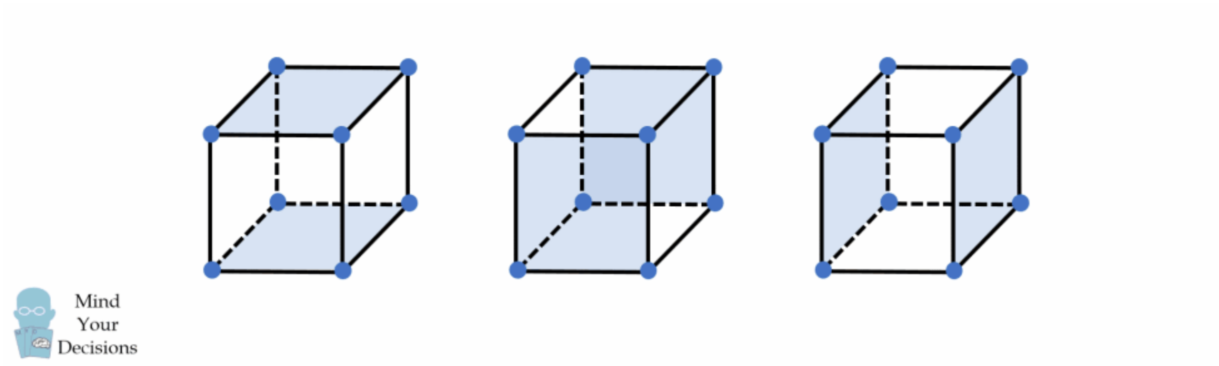
Riešenie: Podobne ako v prípade 3 mravcov, opäť si zvolíme jedného, ktorý pôjde napríklad doprava. Teraz nás zaujíma, aká je pravdepodobnosť, že sa $n-1$ mravcov vyberie tiež doprava. Analogicky bude táto pravdepodobnosť rovná

$$P(\text{nezrazia sa}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}. \tag{6.33}$$

Príklad 6.7. *Ako sa zmení pravdepodobnosť, ak máme 8 mravcov, ktoré sa pohybujú po hranách kocky? [21]*

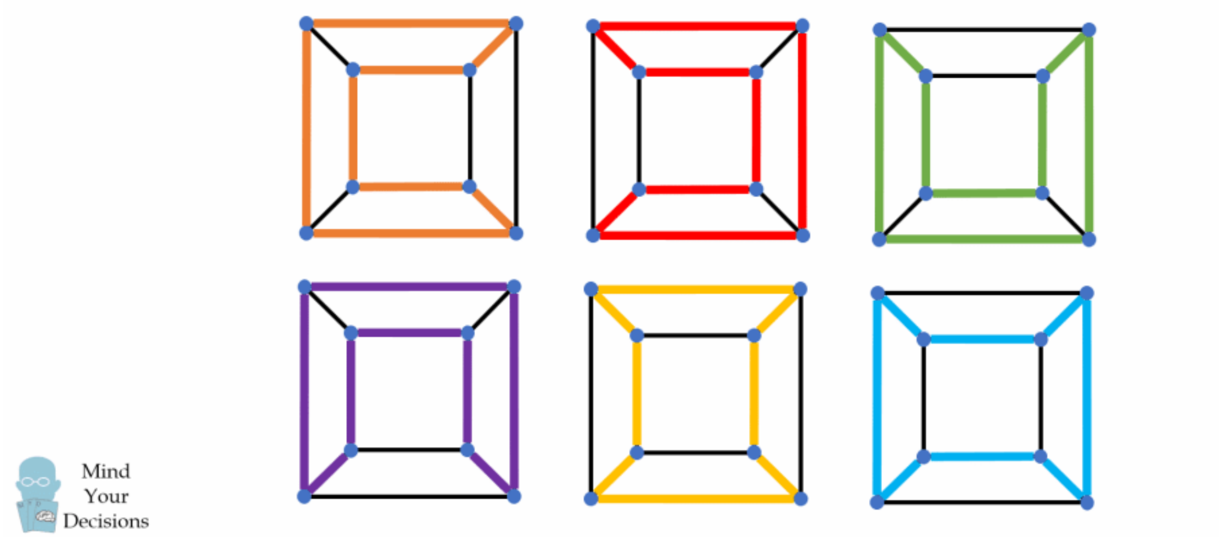
Riešenie: Mravce majú teraz na výber z troch smerov, ktorými sa môžu vybrať, čo predstavuje $3^8 = 6561$ možných ciest, ktorými sa môžu mravce vybrať. Tentokrát musia ísť mravce rovnakým spôsobom na to, aby sa nezrazili a vytvoriť takzvané uzavreté okruhy na kocke. Máme dve možnosti ako takéto uzavreté okruhy vytvoriť - mravce môžu chodiť po protiľahlých stenách, čím vytvoria dva uzavreté okruhy alebo môžu vytvoriť jeden uzavretý okruh z vrcholov celej kocky (Hamiltonský cyklus).

Protiľahlé steny: Vezmime si dve protiľahlé steny kocky, na každej sa budú pohybovať štyri mravce. Mravce sa môžu pohybovať v smere a proti smeru hodinových ručičiek, na každej stene inak, čo spolu vytvára štyri možnosti pohybu mravcov, aby sa nezrazili. Navyše, na kocke máme tri páry protiľahlých stien. Spolu máme teda 12 možností, ako sa môžu mravce pri tejto stratégii pohybovať po kocke bez toho, aby sa nezrazili.



Obr. 6.5: Mravce na protiľahlých stenách kocky [5]

Hamiltonský cyklus: Cesta, ktorá nám spája všetky vrcholy nejakého grafu sa nazýva Hamiltonský cyklus (Hamiltonský okruh). Takýchto cyklov na kocke je šesť. Vezmime si vrchol z ktorého vychádzame. Máme tri smery, ktorými sa môžeme vybrať.



Obr. 6.6: Hamiltonský cyklus na kocke [5]

V druhom vrchole máme už len dve možnosti, keďže sa nechceme vrátiť do vrcholu, z ktorého vychádzame. To spolu tvoriť šesť možných Hamiltonských cyklov. Okrem toho, každý Hamiltonský cyklus môžu mravce prejsť dvomi smermi - máme teda opäť 12 možností, ako sa môžu mravce pohybovať po kocke bez toho, aby sa nezrazili.

Spolu máme teda 24 možností, akými sa môžu mravce pohybovať bez zrazenia sa a 6851 možných smerov, ktorými by sa mohli mravce vybrať. Pravdepodobnosť, že sa nezrazia je rovná

$$P(\text{nezrazia sa}) = \frac{24}{6851} = 0,0035. \tag{6.34}$$

7 Podmienená pravdepodobnosť

7.1 Mince vo vrecúšku

Aj na pohovoroch do spoločností ako je Google sa objavujú príklady z pravdepodobnosti.

Príklad 7.1. *Vo vrecúšku sa nachádza 100 mincí. 99 z nich je klasických - každá minca má jednu hlavu a jeden znak a 1 neférová - má dve hlavy. Náhodne vyberieme z vrecúška jednu mincu a 10-krát ňou hodíme. 10-krát nám padla hlava. Aká je pravdepodobnosť, že hlava padne znova? [16]*

Riešenie: Na výpočet tohoto príkladu využijeme Bayesovu vetu a vetu o úplnej pravdepodobnosti [20].

Bayesova veta: *Nech* $A_j \in \mathcal{S}, P(A_j) > 0,\ j = 1, 2, \ldots,$ *pričom* $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \Omega$ *a* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *pre* $i \neq j$. *Potom pre ľubovoľné* $B \in \mathcal{S}, P(B) > 0$ *platí:*

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{P(B)} \tag{7.1}$$

Veta o úplnej pravdepodobnosti: *Nech* $A_j \in \mathcal{S}, P(A_j) > 0,\ j = 1, 2, \ldots,$ *pričom* $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \Omega$ *a* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *pre* $i \neq j$. *Potom pre ľubovoľné* $B \in \mathcal{S}$

$$P(B) = \sum_{j=1}^{\infty} P(B|A_j)P(A_j). \tag{7.2}$$

Označme A_1 udalosť, že hráme s klasickou kockou a A_2 udalosť, že hráme s neférovou kockou. A a B sú disjunktné udalosti a tvoria úplný systém udalostí. B označuje udalosť, že na kocke padlo 10 hláv.

Potom podľa vety o úplnej pravdepodobnosti dostávame

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\frac{99}{100} + 1^{10}\frac{1}{100} \doteq 0,0019668 \tag{7.3}$$

Aplikovaním Bayesovej vety dostávame pravdepodobnosť, že sme hrali s klasickou (alebo neférovou) kockou, ak padlo 10 hláv, teda

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B)} \doteq \frac{0,0009668}{0,0019668} \doteq 0,4916 \tag{7.4}$$

$$P(A_2|B) = \frac{P(B|A_2)P(A_2)}{P(B)} \doteq \frac{0,001}{0,0019668} \doteq 0,5084 \tag{7.5}$$

Dostávame teda len mierne vyššiu pravdepodobnosť, že sme hrali s neférovou kockou ak padlo 10 hláv. Nech C označuje pravdepodobnosť, že padne hlava. Pravdepodobnosť, že padne hlava aj v ďalšom kole vypočítame ako

$$P(A_1|B)P(C|A_1) + P(A_2|B)P(C|A_2) = 0,4916 \cdot 0,5 + 0,5084 \cdot 1 = 0,7542, \tag{7.6}$$

čo predstavuje žiadanú pravdepodobnosť.

7.2 Guľôčky v urne

Príklad 7.2. *V urne A sa nachádza 5 bielych a 2 červené guľôčky. V urne B sa nachádzajú 4 červené a 4 čierne guľôčky. Náhodne vyberieme jednu urnu a vytiahneme z nej guľôčku (bez návratu). Potom opäť náhodne vyberieme urnu a vyberieme z nej guľôčku. Aká je pravdepodobnosť, že sme z prvej urny vytiahli červenú guľôčku, ak vieme, že druhá vytiahnutá guľôčka bola čierna? [21]*

Riešenie: Označme si udalosť, že prvá vytiahnutá guľôčka bude z urny A ako U_A a udalosť, že prvá vytiahnutá guľôčka bude z urny B ako U_B. Keďže urnu vyberáme náhodne $P(U_A) = P(U_B) = \frac{1}{2}$.

Nech X predstavuje udalosť, že prvá vytiahnutá guľočka je červená a Y udalosť, že druhá vytiahnutá guľôčka je čierna. Potom $P(X|Y,U_A) = P(X|U_A) = \frac{2}{7}$. Vieme, že druhá vytiahnutá guľôčka bola čierna. Keďže urna A neobsahuje čierne guľôčky, musí byť druhá vytiahnutá guľôčka z urny B. V urne B nám teda ostali 4 červené a 3 čierne guľôčky a teda $P(X|Y,U_B) = \frac{4}{7}$.

Z uvedeného vyplýva, že pravdepodobnosť, že prvá vytiahnutá guľôčka je červená ak vieme, že druhá vytiahnutá guľôčka je čierna je rovná

$$\begin{aligned} P(X|Y) = P(X|Y,U_A)P(U_A|Y) + P(X|Y,U_B)P(U_B|Y) = \\ = P(X|Y,U_A)P(U_A) + P(X|Y,U_B)P(U_B) = \\ = P(X|U_A)P(U_A) + P(X|Y,U_B)P(U_B) = \\ = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{7} \end{aligned} \tag{7.7}$$

Príklad 7.3. *Aká je pravdepodobnosť, že prvá vytiahnutá guľôčka je biela, ak vieme, že druhá vytiahnutá guľôčka bola čierna? [21]*

Riešenie: Nech teraz X označuje udalosť, že prvá vytiahnutá guľôčka je biela a Y udalosť, že druhá vytiahnutá guľôčka je čierna. Urna B neobsahuje biele guľôčky, teda $P(X|Y, U_B) = 0$. Chceme teda vedieť pravdepodobnosť, že prvá vytiahnutá guľôčka je z urny A za podmienky, že druhá vytiahnutá guľôčka je čierna (tá musí byť vytiahnutá z urny B, keďže urna A neobsahuje čierne guľôčky).

Dostávame

$$\begin{aligned} P(X|Y) = P(X|Y, U_A)P(U_A|Y) + P(X|Y, U_B)P(U_B|Y) = \\ = P(X|Y, U_A)P(U_A) = \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{14} \end{aligned} \tag{7.8}$$

Príklad 7.4. *Aká je pravdepodobnosť, že prvá vytiahnutá guľôčka je čierna, ak vieme, že druhá vytiahnutá guľôčka bola čierna? [21]*

Riešenie: Nech teraz X predstavuje udalosť, že prvá vytiahnutá guľôčka je čierna. Keďže urna A neobsahuje čierne guľôčky, znamená to, že prvá vytiahnutá guľôčka bude z urny B, teda $P(X|Y, U_A) = 0$. Keďže vieme, že druhá guľôčka musí byť taktiež z urny B, zostane nám v nej v prvom ťahu len 3 čierne guľôčky. Dostávame

$$\begin{aligned} P(X|Y) = P(X|Y, U_A)P(U_A|Y) + P(X|Y, U_B)P(U_B|Y) = \\ = P(X|Y, U_B)P(U_B|Y) = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{14}. \end{aligned} \tag{7.9}$$

7.3 Hra s kockami

Príklad 7.5. *Dvaja hráči hádžu kockou. Zvíťazí ten, komu padne väčšie číslo. Aká je pravdepodobnosť, že zvíťazí druhý hráč, ak prvému hráčovi padla štvorka? [34]*

Riešenie: Výsledkami takéhoto náhodného pokusu sú usporiadané dvojice, kde prvá zložka predstavuje číslo, ktoré padlo prvému hráčovi a druhá zložka je číslo, ktoré padlo druhému hráčovi.

Označme udalosť, že prvému hráčovi padlo číslo štyri ako A a udalosť, že druhému hráčovi padne väčšie číslo ako B. Opäť využijeme vzorec na výpočet podmienenej pravdepodobnosti

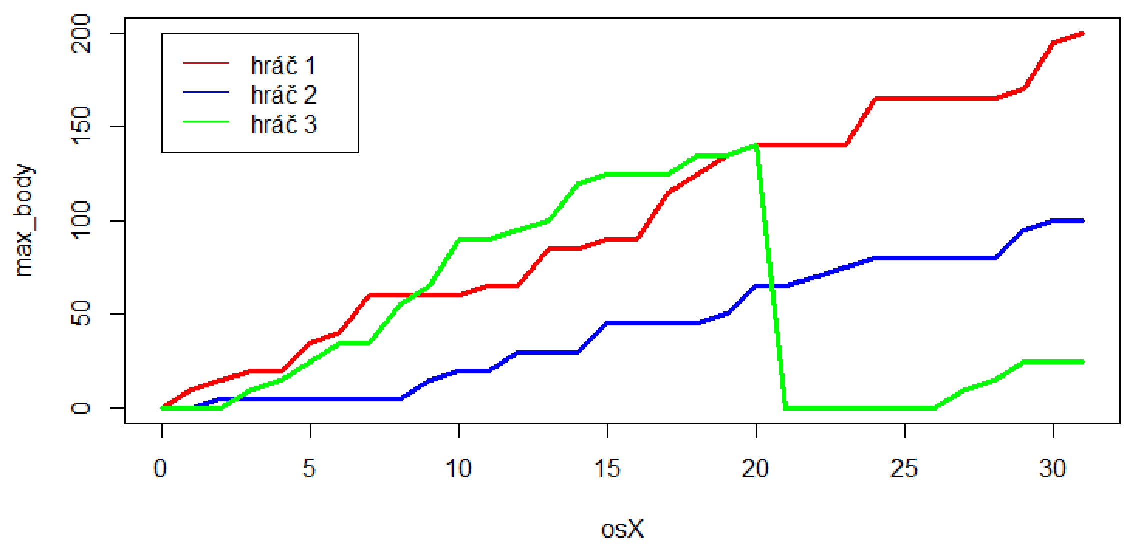
$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}. \tag{7.10}$$

$P(A)$ je pravdepodobnosť, že prvému hráčovi padla štvorka, teda jedno číslo z možných šiestich, čo predstavuje $\frac{1}{6}$. $P(A \cap B)$ je pravdepodobnosť, že prvému hráčovi padla štvorka a druhý hráč zvíťazí - čo znamená, že druhému hráčovi môže padnúť len číslo 5 alebo 6, teda $\frac{2}{36}$. Potom

$$P(B|A) = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{3}. \tag{7.11}$$

Príklad 7.6. *Hráči sa pravidelne striedajú v hádzaní šiestimi kockami. Bodové ohodnotenie hodov je nasledovné: za jednotku a dvojku 5 bodov, za jednotku, dvojku a trojku 10 bodov, za jednotku, dvojku, trojku a štvorku 15 bodov, za jednotku, dvojku, trojku, štvorku a päťku 20 bodov a za jednotku, dvojku, trojku, štvorku, päťku a šestku 25 bodov. Ak niekomu padnú súčasne práve 3 jednotky, stráca všetky body, začína od nuly. Vyhráva hráč, ktorý ako prvý dosiahne viac ako 200 bodov. Aké je rozdelenie dĺžky hry? Aká je jej stredná hodnota?*

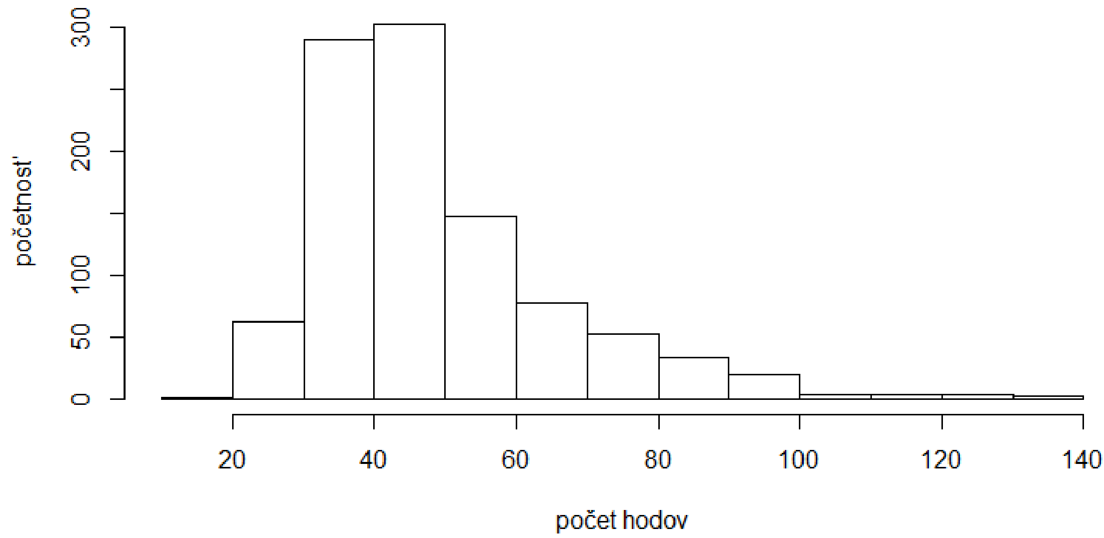
Riešenie: Tento príklad zo sady 150 spoločenských hier sme riešili pomocou simulácie v softvéri R. Simulovali sme hru pre 3 hráčov. Na grafe 7.1 môžeme vidieť vývoj hry pre spomínaných 3 hráčov.



Obr. 7.1: Vývoj hry pre 3 hráčov

Po opakovaní simulácie 10^3-krát sme zobrazili histogram dĺžky hry a vypočítali sme priemerný počet kôl v jednej hre.

Priemerný počet kôl v jednej hre, teda stredná hodnota dĺžky hry nám vyšla rovná 49,3 kôl.



Obr. 7.2: Histogram počtu kôl

7.4 Krvné skupiny

Príklad 7.7. *Nositeľov krvných skupín A, B, 0 a AB je v populácii 38, 34, 20 a 8 percent (čísla sú len hypotetické). Určite pravdepodobnosť, že človek, náhodne vybratý z populácie môže dostať krv druhého, náhodne vybratého človeka. Predpokladáme, že krv skupiny 0 môže dostať človek s akoukoľvek krvnou skupinou, krv skupiny A môžu dostať skupiny A a AB, B môžu dostať skupiny B a AB a AB môže dostať len krvná skupina AB.*

Riešenie: Pravdepodobnosti náhodného výberu človeka s konkrétnou krvnou skupinou vypočítame pomocou klasickej definície pravdepodobnosti a dostávame

$$P(A) = \frac{38}{100}$$
$$P(B) = \frac{34}{100}$$
$$P(0) = \frac{20}{100}$$
$$P(AB) = \frac{8}{200}.$$

Pravdepodobnosti že človek s konkrétnou krvnou skupinou môže dostať krv vypočítame podobne a dostávame

$$
\begin{aligned}
P(A^*) &= \frac{58}{100}, \quad \text{(A môže dostať len od A a 0)}\\
P(B^*) &= \frac{54}{100}, \quad \text{(B môže dostať len od B a 0)}\\
P(0^*) &= \frac{20}{100}, \quad \text{(0 môže dostať len od 0)}\\
P(AB^*) &= \frac{100}{200}, \quad \text{(AB môže dostať len od všetkých).}
\end{aligned}
$$

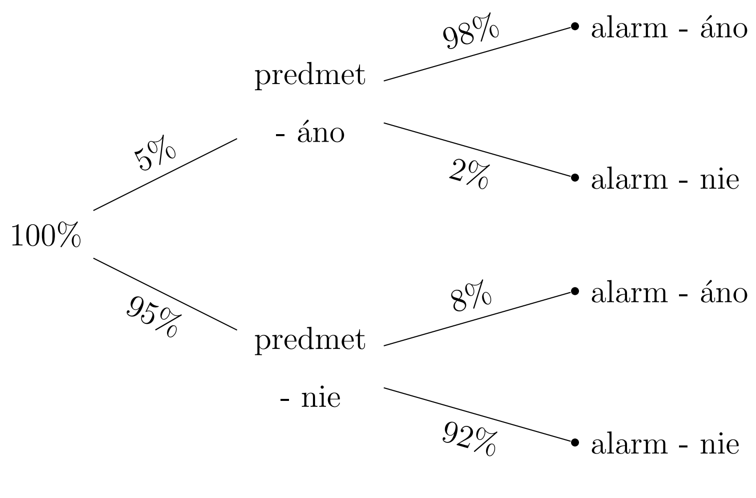
Nakoniec pomocou vety o úplnej pravdepodobnosti vypočítame pravdepodobnosť, že náhodne vybratý človek môže dostať krv od náhodne vybratého človeka ako

$$P = P(A^*)P(A) + P(B^*)P(B) + P(0^*)P(0) + P(AB^*)P(AB) = \frac{5240}{1000}. \tag{7.12}$$

7.5 Letisková kontrola

Príklad 7.8. *Alarm na letiskovej kontrole sa spustí, ak batožina prechádzajúca kontrolou obsahuje zakázané predmety. Avšak, ani letisková kontrola nie je stopercentná. Ak batožina obsahuje zakázané predmety, alarm sa spustí s* 98%*-nou pravdepodobnosťou. S pravdepodobnosťou* 8% *sa alarm spustí, aj keď batožina neobsahuje zakázané predmety. Predpokladajme, že* 5% *zo všetkých batožín obsahuje zakázané predmety. Aká je pravdepodobnosť, že náhodne vybratá batožina, ktorá spustila alarm, skutočne obsahuje zakázané predmety?*

Riešenie: Príklad vysvetlíme pomocou stromového diagramu.



Chceme vypočítať pravdepodobnosť, že batožina, ktorá spustila alarm, skutočne obsahuje zakázané predmety. Podľa diagramu vidíme, že percentuálny podiel tašiek, ktoré spustili alarm je rovný

$$P(\text{alarm áno}) = 0,05 \cdot 0,98 + 0,95 \cdot +0,08 = 0,125, \tag{7.13}$$

a percentuálny podiel tašiek, ktoré spustia alarm a skutočne obsahujú zakázané predmety rovný

$$P(\text{alarm áno} \cap \text{predmet áno}) = 0,05 \cdot 0,98 = 0,049. \tag{7.14}$$

Výslednú pravdepodobnosť vypočítame teraz podľa definície podmienej pravdepodobnosti ako

$$P(\text{alarm áno}|\text{predmet áno}) = \frac{0,049}{0,125} = 0,392 = 39,2\%. \tag{7.15}$$

Pomocou pravdepodobnostných stromových diagramov sa dajú prehľadne zapisovať a riešiť príklady z pravdepodobnosti, ktoré by inak mohli byť veľmi neprehľadné a pri ktorých by sa riešiteľ mohol ľahko zamotať.

Záver

Témou práce boli príklady z pravdepodobnosti z pracovných pohovoroch z [21]. Cieľom bolo uviesť riešenia týchto príkladov, doplniť ich ďalšími príkladmi rozšírujucími danú tému a ich zovšeobecnenia. Bakalárska práca obsahuje 7 kapitol, každá z nich sa venuje príkladom z inej oblasti teórie pravdepodobnosti.

V prvej kapitole sme riešili na prvý pohľad obyčajné príklady. Tieto príklady boli zaujímavé svojimi výsledkami. Tie boli iné, ako by sa na začiatku mohlo zdať. Rovnako sme riešili príklady, pri ktorých sme sa zaoberali tým, akú stratégiu pri danej hre zvoliť, aby sme maximalizovali pravdepodobnosť svojej výhry. V poslednom príklade kapitoly s názvom N=2: Prekvapenie sme popísali stratégiu hry, kde si vyberáme z dvoch papierikoch, na ktorých sú náhodné čísla, pričom naším cieľom je vybrať papierik s väčším číslom, pri ktorej máme pravdepodobnosť výhry vyššiu ako $\frac{1}{2}$. V softvéri R sme potom generovali dve čísla na papierikoch z rôznych pravdepodobnostných rozdelení, pričom sme počítali pravdepodobnosť výhry v súlade s našou stratégiou.

V druhej kapitole sme sa zaoberali tým, ako predpoklady, ktoré si stanovíme na začiatku vplývajú na výsledok, ktorý riešením za daných predpokladov získame. Riešili sme aj príklad s kockami Craps, kde sme zisťovali, ako upraviť kocky tak, aby sme vyhrali s vyššou pravdepodobnosťou a aké kocky podsunúť súperovi. Okrem toho sme počítali aj dĺžku hry - teda počet hodov kockou, kým hra skončí výhrou alebo prehrou.

Ruská ruleta bola témou tretej kapitoly. Klasickú Ruskú ruletu sme rozšírili na Ruskú ruletu s viac nábojmi. Okrem toho sme riešili pravdepodobnosť, že sa jednotliví hráči dostanú na rad a zastrelia sa, ak pridávame náboje po každom kole kedy hráč nezomrie a točíme zásobníkom. Toto rozšírenie sme riešili aj pomocou simulácií v softvéri R a výsledky porovnali s výsledkami získanými presným výpočtom.

V štvrtej kapitole sme sa venovali príkladom o náhodných stretnutiach a náhodným prechádzkam. Klasický príklad o stretnutí s rovnomerným rozdelením časov meškania riešený pomocou geometrickej pravdepodobnosti sme rozšírili o príklad s exponenciálnym rozdelením časov meškania. Opäť sme problém riešili aj simulačne a výsledky porovnali s výsledkami získanými presným výpočtom. Okrem toho sme riešili náhodnú prechádzku po celých (resp. prirodzených) číslach.

Koreláciu a príklady s ňou súvisiace sme riešili v piatej kapitole. Niektoré z týchto príkladov sme čerpali z reálnych pracovných pohovorov, resp. sme sa nimi inšpirovali. Okrem toho sme sa zaoberali tým, ako generovať náhodné čísla, ktoré sú korelované.

Príklady o vytvorení trojuholníka pomocou palice, ktorú zlomíme na tri časti (tzv. spaghetti problems) sme riešili v šiestej kapitole. Počítali sme pravdepodobnosť vytvorenia ostrouhlého trojuholníka, či tupouhlého Gaussovského trojuholníka. Doplnili sme ich príkladom o mravcoch pohybujúcich sa po stranách trojuholníka a následne sme sa zaoberali aj Hamiltonským cyklom, ktorý súvisí s pohybom mravcov po kocke.

V kapitole s témou Podmienená pravdepodobnosť sme opäť riešili príklady inšpirované reálnymi pohovormi. Pri výpočte jedného z príkladov sme využívali aj známe stromové diagramy, ktoré zjednodušili riešenie problému. V softvéri R sme riešili príklad s kockami s názvom Sekvencia, ktorý spočíval v hode 6 kockami. Po každom hode sa obodovali hodené hodnoty. Vyhral ten hráč, ktorý ako prvý získal 200 bodov. Zaujímavosťou je, že táto hra trvá relatívne dlho, kým jeden z hráčov vyhrá, keďže okrem získavania bodov za hodené hodnoty hráči môžu body aj stratiť.

Riešenia všetkých príkladov boli založené na základných princípoch pravdepodobnosti aplikovanými zaujímavým spôsobom. Simulácie v softvéri R, ktoré sú súčasťou príkladov z každej kapitoly slúžili na lepšie pochopenie riešenia a na porovnanie s výsledkami získanými teoretickým výpočtom.

Zoznam použitej literatúry

[1] Anděl J: *Matematika náhody*, MatfyzPress, Praha, 2000

[2] Anděl J: *Základy matematické statistiky*, Univerzita Karlova, Praha, 2002

[3] *Birthday problem*, dostupné na internete (13.05.2018): https://en.wikipedia.org/wiki/Birthday_problem

[4] Bokes P., príklad z cvičení k predmetu Diferenčné a diferenciálne rovnice, FMFI UK, 2018

[5] *Can You Solve Dave Carpenter's Ants On A Cube Puzzle?*, dostupné na internete (13.05.2018): https://mindyourdecisions.com/blog/2017/09/17/can-you-solve-dave-carpenters-ants-on-a-cube-puzzle/

[6] *Chance of meeting in a bar*, dostupné na internete (13.05.2018): https://math.stackexchange.com/questions/103015/chance-of-meeting-in-a-bar

[7] *Citadel Interview Question: Suppose you have three random variables*, dostupné na internete (13.05.2018): https://www.glassdoor.com/Interview/Suppose-you-have-three-random-variables-The-correlation-between-A-and-B-is-0-6-the-correlation-between-A-and-C-is-0-8-Wh-QTN_1253066.htm

[8] *Citadel Interview Question: You are asked to predict movements in S&P 500*, dostupné na internete (13.05.2018): https://www.glassdoor.com/Interview/You-are-asked-to-predict-movements-in-the-S-and-P-500-and-the-correlation-between-your-model-s-predictions-and-the-actual-inde-QTN_422115.htm

[9] *CRAN - Package Bindata*, dostupné na internete (13.05.2018): https://cran.r-project.org/web/packages/bindata/index.html

[10] *Default*, dostupné na internete (13.05.2018): https://www.investopedia.com/terms/d/default2.asp

[11] *Default correlation*, dostupné na internete (13.05.2018): https://www.math.ust.hk/~maykwok/courses/Dyn_Cred_Models/Topic2.pdf

[12] *Deset nejšílenějších herních nápadů*, dostupné na internete (13.05.2018): https://bonusweb.idnes.cz/deset-nejsilenejsich-hernich-napadu-d71-/Magazin.aspx?c=A090330_161217_bw-clanek_vdp

[13] *Diehard tests*, dostupné na internete (13.05.2018): https://en.wikipedia.org/wiki/Diehard_tests

[14] *Finding the number of Hamiltonian cycles for a cubical graph*, dostupné na internete (13.05.2018): https://math.stackexchange.com/questions/2396363/finding-the-number-of-hamiltonian-cycles-for-a-cubical-graph

[15] *Goldman Sachs Interview Question: Given the correlation between two pairs of random variables*, dostupné na internete (13.05.2018): https://www.glassdoor.com/Interview/Given-the-correlation-between-two-pairs-of-Random-variables-what-s-the-range-of-the-third-pair-correlation-QTN_1720474.htm

[16] *Google Interview Question: A Conditional Probability (Bayes Theorem Problem)*, dostupné na internete (13.05.2018): https://www.glassdoor.com/Interview/A-conditional-probability-Bayes-theorem-problem-About-jars-and-coins-QTN_857368.htm

[17] *Hamiltonian Cycle*, dostupné na internete (13.05.2018): http://mathworld.wolfram.com/HamiltonianCycle.html

[18] Ionascu E., Prajitura G.: *Things to do with broken stick*, 2013, dostupné na internete (13.05.2018): https://arxiv.org/pdf/1009.0890.pdf

[19] *Jane Street Interview: You are going camping over the weekend*, dostupné na internete (13.05.2018): https://www.glassdoor.com/Interview/You-are-going-camping-over-the-weekend-and-there-is-50-chance-of-rain-on-Saturday-and-60-on-Sunday-What-is-the-probabil-QTN_1239303.htm

[20] Janková, K., Pázman, A.: *Pravdepodobnosť a štatistika*, učebné texty, Univerzita Komenského, Bratislava 2013

[21] Joshi, M., Denson, N., Downes, A.: *Quant Job Interview: Questions and Answers*, Pilot Whale Press, Melbourne, 2008

[22] Harman, R., Hönschová, E., Somorčík, J.: *Zbierka úloh zo základov teórie pravdepodobnosti*, PACI, Bratislava, 2009

[23] Hill, T: *Knowing When To Stop*, American Scientist, dostupné na internete (13.05.2018): `http://people.math.gatech.edu/~hill/publications/PAPER%20PDFS/AmSciKnowingWhenToStop_Online2009.pdf`

[24] Larson, H. J.: *Introduction to Probability*, Addison-Wesley Publishing Company, 1995

[25] *Law of cosines*, dostupné na internete (13.05.2018): `http://mathworld.wolfram.com/LawofCosines.html`

[26] *Lotrando a Zubejda*, dostupné na internete (14.05.2018): `https://www.csfd.cz/film/8550-lotrando-a-zubejda/prehled/`

[27] Moore Ch.: *Random walk*, Department of Mathematics, Kansas State University Manhattan, dostupné na internete (13:05.2018): `https://www.math.ksu.edu/~cnmoore/randomwalk.pdf`

[28] *Morgan Stanley Interview Question: Stock A has a volatility of 20*, dostupné na internete (13.05.2018): `https://www.glassdoor.com/Interview/3-Stock-A-has-a-volatility-of-20-B-has-a-volatility-of-30-and-their-correlation-coefficient-is-50-They-have-the-same-QTN_151826.htm`

[29] Mosteller, F.: *Fifty Challenging Problems in Probability with Solutions*, Courier Corporation, 2012

[30] *Random walk of two drunks*, dostupné na internete (13.05.2018): `http://mtdevans.com/projects/physics-problems/random-walk-of-two-drunks/`

[31] *Russian Roulette (with additional rounds)*, dostupné na internete (13.05.2018): `http://datagenetics.com/blog/february22016/index.html`

[32] *SHAZAM DIEHARD tests*, dostupné na internete (13.05.2018): http://www.econometrics.com/intro/diehard.htm

[33] Stehlíkova B.: osobná komunikácia, FMFI UK 2018

[34] Somorčík J., Teplička I.: *Štatistika zrozumiteľne*, Enigma, 2015

[35] *Zdeněk Svěrák & Jaroslav Uhlíř: Lotr intelektuál*, dostupné na internete (14.05.2018): https://www.supermusic.cz/skupina.php?idpiesne=96773&sid=

Príloha

```
set.seed(2018)
pokus <- function()
{
  cisla <- rexp(2, rate=1) # Exp(1)
  #cisla <- rexp(2, rate=100) # Exp(100)
  #cisla <- rt(2, df=1) #t(df=1)
  #cisla <- rt(2, df=100) #t(df=100)
  #cisla <- rnorm(2, 0, 1) #N(0,1)
  #cisla <- rchisq(2, df=5) #Chi2(df=5)
  #cisla <- runif(2, 0, 1) #R(0,1)
  vacsie <- max(cisla)
  vybrany.index <- sample(1, size=1)
  R <- rnorm(1)
  if (R < cisla[vybrany.index])
  {
    vybrane <- cisla[vybrany.index]
  }
  else
  {
    vybrane <- cisla[-vybrany.index]
  }
  return(vybrane==vacsie)  # TRUE = vyhrali sme
}
vysledky<-replicate(10^5, pokus())
prop.table(table(vysledky))
```

Listing 2: N=2:Prekvapenie

```
dni <- data.frame(date=seq(as.Date("2000-01-01"), as.Date("2399-12-31"
  ), by="days"))
dni$day <- weekdays(as.Date(dni$date))
dni$date <- format(dni$date, format="%m-%d")
table(dni)
```

Listing 3: Výpočet početnosti zástupenia prvého dňa v mesiaci na jednotlivé dni v týždni

```
set.seed(2018)
```

```
craps <- function()
{
  #vektor suctov na prehru v prvom kole
  prehra <- c(2,3,12)
  #vektor suctov na vyhru v prvom kole
  vyhra <- c(7,11)
  #pocitadlo tahov
  k <- 0
  #sucet, ktory padne v prvom hode
  prvyhod <- sum(sample(1:6, 2, replace=TRUE))
  #test, ci sme prehrali v prvom kole
  if (prvyhod %in% prehra)
  {
    k <- k + 1
  }
  #test, ci sme vyhrali v prvom kole
  else if (prvyhod %in% vyhra)
  {
    k <- k + 1
  }
  #ak nam padol sucet (4,5,6,8,9,10)
  else
  {
    #sucet v dalsom kole
    hod <- 0
    #do pocitadla priradime jednotku, kedze po prvom kole hra
       neskoncila
    k <- 1
    #cyklus sa bude vykonavat pokial nehodime rovnake cislo ako v
       prvom kole alebo sucet 7
    while(hod!= prvyhod && hod!=7)
    {
      #sucet, ktory padne v dalsom kole
      hod <- sum(sample(1:6, 2, replace=TRUE))
      k <- k + 1

      if (k > 21)
      {
```

```
        k <- 21
      }
    }
  }
  return(k)
}

vysledky <- replicate(200000, craps())
table(vysledky)
```

Listing 4: Craps

```
#Vypocet optimalizacie k hre Craps a Lotr intelektual
#matica na ulozenie vysledkov
optimalne <- matrix(ncol=3, nrow=9)

#pocitadlo na naplnenie matice vysledok
z <- 0
#for cykly na opakovanie funkcie kocky, zmena jednotlivych riadkov a
    stlpcov
for (k in 1:3)
{
  for (l in 1:3)
  {
    kocky <- function(xy)
    {
      x <- xy[1]
      y <- xy[2]
      #matica pravdepodobnosti pre kocku 1
      M <- matrix(ncol = 6, nrow = 6)
      #matica pravdepodobnosti pre kocku 2
      N <- matrix(ncol = 6, nrow = 6)
      #naplnenie matice 1/6
      for (i in 1:6)
      {
        for(j in 1:6)
        {
          M[i,j] <- 1/6
          N[i,j] <- 1/6
```

```
      }
    }
    #matica, ktora obsahuje pravdepodobnosti vysledkov padnutia
       suctu na kockach
    K <- matrix(ncol = 6, nrow = 6)
    #pravdepodobnost suctu 7
    p_7 <- 0
    #pravdepodobnost suctu 11
    p_11 <- 0
    sucet <- 0
    p <- rep(0, 7)
    #zmena riadku matice pre kocku 1
    M[k, ] <- 1/6 + x
    M[7-k, ] <- 1/6 - x
    #zmena stlpca matice pre kocku 2
    N[ ,l] <- 1/6 + y
    N[ ,7-l] <- 1/6 - y
    #naplnenie matice pravdepodobnosti vysledkov padnutia suctu
    K <- M * N
    #vyjadrenie funkcie vyhry
    for (i in 1:6)
    {
      for (j in 1:6)
      {
        if (i+j == 7)
        {
          p_7 <- p_7 + K[i, j]
        }
        if (i+j == 11)
        {
          p_11 <- p_11 + K[i, j]
        }
        for (s in 4:10)
        {
          if (i+j == s)
          {
            p[s-3] <- p[s-3] + K[i, j]
          }
```

```
          }
        }
      }
      for (s in 4:10)
      {
        sucet <- sucet + ((p[s-3])^2)/(p_7 + p[s-3])
      }
      vyhra <- (p_7)/2 + p_11 + sucet
      #funkcia kocky nam vrati funkciu vyhra(x, y), ktoru nasledne
         optimalizujeme
      #ak chceme funkciu minimalizovat, kocky vratia vyhra, pre
         maximalizaciu vratia -vyhra
      return(vyhra)
    }
    #optimalizacia pre jednotlive zmeny na kockach
    vysledok <- optim(par=c(0,0), fn=kocky, method="L-BFGS-B", lower=c
       (-1/6,-1/6), upper=c(1/6,1/6), control=list(factr=1e-50))
    z <- z+1
    #naplnenie matice optimalnych vysledkov
    optimalne[z, ] <- c(vysledok$par, vysledok$value)
  }
}
optimalne
```

Listing 5: Výpočet optimalizácie k hre Craps a Lotr intelektuál

```
ruska_ruleta <- function()
{
  #premenna na ulozenie vysledkov
  X <- 0
  #premenna, ktora po kazdej iteracii doplni naboj
  naboj <- 1
  #premenna, ktora ma hodnotu 1, ak sa hrac nezastreli a -1, ak zomrie
  strela <- 1
  #premenna, ktora na konci vrati cislo hraca, pri ktorom hra skoncila
  hrac <- 1
  while (strela != -1)
  {
    #premenna, ktora reprezentuje zasobnik - 1 su naboje, 0 su prazdne
```

```
      komory
    #funkcia sample nam ulozi naboj nahodne (zatoci zasobnikom)
    zasobnik <- sample(c(rep(1,naboj), rep(0, 6-naboj)))
    #pridanie naboja
    naboj <- naboj+1
    #hrac zomrie ak je v zasobniku na prvom mieste naboj
    if (zasobnik[1]==1)
    {
      strela <- -1
      X <- hrac
    }
    #posun hraca
    hrac <- hrac+1
  }
  #funkcia vrati cislo hraca po kazdom opakovani simulacii
  return(X)
}

vysledky <- table(replicate(10^5, ruska_ruleta()))
prop.table(vysledky)
barplot(vysledky)
```

Listing 6: Ruská ruleta

```
stretnutie <- function()
{
  #vygenerujeme nahodny cas prichodu z konkretneho rozdelenia
  x <- rexp(1, rate=12) #runif(1, 0, 1)
  y <- rexp(1, rate=6) #runif(1, 0, 1)
  #test, ci sa stretnu
  return(abs(x-y)<=1/4)
}

vysledky <- replicate(10^5, stretnutie())
prop.table(table(vysledky))
```

Listing 7: Stretnutie s exponenciálnych časom meškania

```
set.seed(2018)
```

```
gausstrojuholnik <- function()
{
  tupy <- 0
  #vygenerujeme si suradnice X, Y bodov A, B, a C
  X <- c(rnorm(1, 0, 1),rnorm(1, 0, 1),rnorm(1, 0, 1))
  Y <- c(rnorm(1, 0, 1),rnorm(1, 0, 1),rnorm(1, 0, 1))
  for (i in 1:3)
  {
    #vypocitame dlzku taznice a 1/2 dlzky prislusnej strany a testujeme ci je prislusny uhol tupy
    if (i == 1)
    {
      t <- sqrt((X[1] - (X[2]+X[3])/2)^2 + (Y[1] - (Y[2]+Y[3])/2)^2 )
      s <- sqrt(((X[3] - X[2])/2)^2 + ((Y[3] - Y[2])/2)^2)
      if (length(t[t < s]))
      {
        tupy <- 1
      }
    }
    if (i == 2)
    {
      t <- sqrt((X[2] - (X[1]+X[3])/2)^2 + (Y[2] - (Y[1]+Y[3])/2)^2 )
      s <- sqrt(((X[3] - X[1])/2)^2 + ((Y[3] - Y[1])/2)^2)
      if (length(t[t < s]))
      {
        tupy <- 1
      }
    }
    if (i == 3)
    {
      t <- sqrt((X[3] - (X[1]+X[2])/2)^2 + (Y[3] - (Y[1]+Y[2])/2)^2 )
      s <- sqrt(((X[2] - X[1])/2)^2 + ((Y[2] - Y[1])/2)^2)
      if (length(t[t < s]))
      {
        tupy <- 1
      }
    }
  }
```

```
  #funkcia vrati 1 alebo 0 podla toho, ci bol uhol v trojuholniku tupy
      alebo nie
  return (tupy)
}

vysledky <- replicate(10^5, gausstrojuholnik())
prop.table(table(vysledky))
```

Listing 8: Gaussovský trojuholník

```
set.seed(2018)
sekvencia <- function()
{
  #pociatocny stav bodov
  body <- c(0,0,0)
  #pociatocne kolo
  kolo <- 0
  #data frame na ukladanie vysledkov
  priebeh <- data.frame(kolo, body[1], body[2], body[3])

  #simulacia bude prebiehat pokial ani jeden z hracov nepresiahne
     hranicu 200 bodov
  while(sum(body < 200) == 3)
  {
    kolo <- kolo + 1
    #hod kockami pre kazdeho hraca
    for(i in 1:3)
    {
      kocky <- sample(x=1:6, size=6, replace=TRUE)
      #testy, ake cisla hodil, nasledne sa pripocita k bodom
         konkretneho hraca dany pocet bodov
      if (all(c(1:6) %in% kocky))
      {
        body[i] <- body[i]+25
      }
      else if (all(c(1:5) %in% kocky) & !(6 %in% kocky))
      {
        body[i] <- body[i]+20
      }
```

```
      else if (all(c(1:4) %in% kocky) & !(5 %in% kocky))
      {
        body[i] <- body[i]+15
      }
      else if (all(c(1:3) %in% kocky) & !(4 %in% kocky))
      {
        body[i] <- body[i]+10
      }
      else if (all(c(1:2) %in% kocky) & !(3 %in% kocky))
      {
        body[i] <- body[i]+5
      }
      else if (sum(kocky==1)==3)
      {
        body[i] <- 0
      }
      else
      {
        body[i] <- body[i]
      }
    }
    priebeh <- rbind(priebeh, c(kolo, body[1], body[2], body[3]))
  }
  #funkcia vrati tabulku s priebehom hry
  return(priebeh)
}
```

Listing 9: Sekvencia