

Spektrálna analýza

Cvičenia z časových radov, FMFI UK
29. 11. / 6. 12. 2010

Spektrum

- Postupnosť $\{\gamma_j\}_{j=-\infty}^{\infty} \rightarrow$ vytvárajúca funkcia

$$g(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma_j z^j$$

- Stacionárny proces Y s autokovarianciami $\{\gamma_j\}_{j=-\infty}^{\infty} \rightarrow$ spektrum

$$s_Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} g(e^{-i\omega}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma_j e^{-i\omega j},$$

kde i je imaginárna jednotka.

Vlastnosti spektra

- Spektrum $s_Y(\omega)$:
 - ◇ nadobúda reálne hodnoty a platí

$$s_Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[\gamma_0 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \cos(\omega j) \right]$$

- ◇ je párna funkcia
 - ◇ je periodická funkcia s periódou 2π
- stačí nám poznať hodnoty spektra medzi 0 a π

- Dá sa dokázať, že $s_Y(\omega) \geq 0$

Spektrum a disperzia

- Výpočet autokovariancií zo spektra ([Hamilton, Proposition 6.1]):

$$\gamma_k = \int_{-\pi}^{\pi} s_Y(\omega) e^{i\omega k} d\omega$$

- Pre $k = 0$ dostaneme: $\gamma_0 = \int_{-\pi}^{\pi} s_Y(\omega) d\omega$, a keďže spektrum je párna funkcia:

$$\gamma_0 = 2 \int_0^{\pi} s_Y(\omega) d\omega,$$

čiže disperzia γ_0 je dvojnásobkom plochy pod spektrom na intervale $[0, \pi]$

- Z priebehu spektra teda vidíme, ktoré frekvencie najviac prispievajú k disperzii procesu - tie, kde má spektrum vysokú funkčnú hodnotu

Odhad spektra - výberové spektrum

- Máme dáta $y_1, \dots, y_T \rightarrow$ chceme z nich odhadnúť spektrum časového radu
- Prvá myšlienka: nahradíme autokovariancie v definícii spektra výberovými autokovarianciami, takto dostaneme výberové spektrum:

$$\hat{s}_y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-T+1}^{T-1} \hat{\gamma}_j e^{-i\omega j} = \frac{1}{2\pi} \left[\hat{\gamma}_0 + 2 \sum_{j=1}^{T-1} \hat{\gamma}_j \cos(\omega j) \right]$$

- Nevýhody:
 - ◇ odhady nie sú veľmi presné, majú veľké štandardné odchýlky
 - ◇ presnosť sa nezlepšuje so zvyšujúcim sa počtom dát (lebo odhadujeme stále viac autokovariancií) $\rightarrow$ potrebujeme iný odhad spektra

Odhad spektra - neparametrický odhad

- Idea: ak sú blízke hodnoty frekvencií, majú podobné hodnoty spektra → za odhad spektra pre danú frekvenciu zoberieme vážený **priemer hodnôt výberového spektra $\hat{s}_y$ z okolitých frekvencií**:

$$(1) \quad \hat{s}_Y(\omega_j) = \sum_{m=-h}^h \kappa(\omega_{j+m}, \omega_j) \hat{s}_y(\omega_{j+m})$$

kde

- ◇ konštanta h udáva počet okolitých frekvencií, ktoré berieme do úvahy pri výpočte odhadu (nazýva sa **bandwidth**)
- ◇ funkcia κ určuje **váhy**, s ktorými tieto frekvencie vstupujú do odhadu (v súčte dávajú 1)

Odhad spektra - neparametrický odhad

- Dosadenie výberového spektra s_y do (1) sa dá ekvivalentne zapísať v tvare

$$s_Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[\hat{\gamma}_0 + 2 \sum_{j=1}^{T-1} \kappa_j^* \hat{\gamma}_j \cos(\omega j) \right],$$

pričom postupnosť $\{\kappa_j^*\}$ sa nazýva **kernel**

Bartlettov odhad

- Kernel:

$$(2) \quad \kappa_j^* = \begin{cases} 1 - \frac{j}{q+1} & \text{pre } j = 1, \dots, q, \\ 0 & \text{pre } j > q. \end{cases}$$

čím dostaneme odhad

$$s_Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[\hat{\gamma}_0 + 2 \sum_{j=1}^q \left(1 - \frac{j}{q+1} \right) \hat{\gamma}_j \cos(\omega j) \right].$$

Bartlettov odhad

- Ako zvolit' parameter q vo vzťahu (2), resp. parameter h v (1)?

[Hamilton, str. 167]:

One practical guide is to plot an estimate of the spectrum using several different bandwidths and rely on subjective judgement to choose the bandwidth that produces the most plausible estimate.

Príklad

- [Hamilton, kapitola 6.4]
- Index priemyselnej výroby, mesačné dáta, január 1947 - november 1989

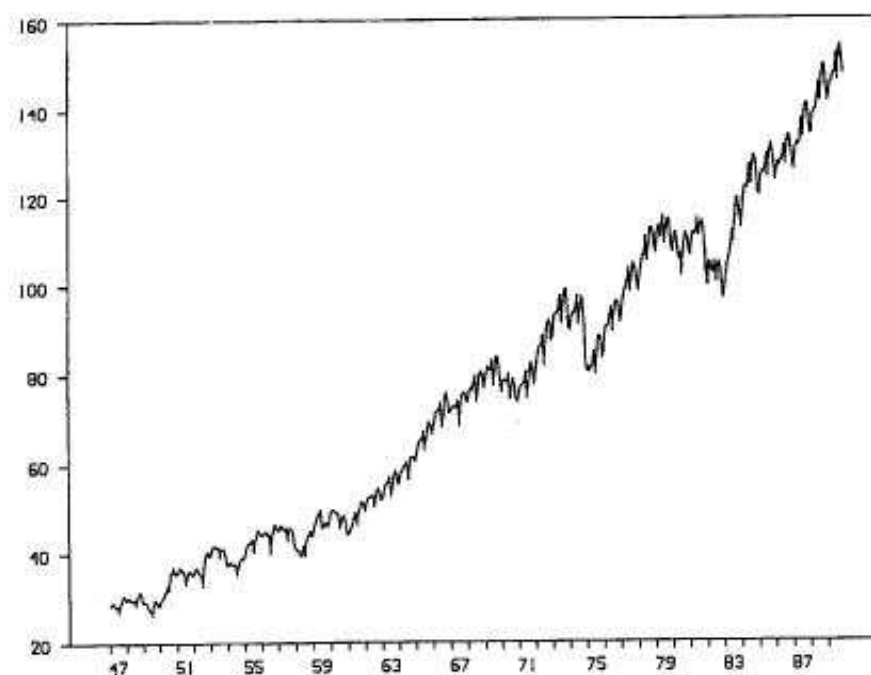


FIGURE 6.3 Federal Reserve Board's seasonally unadjusted index of industrial production for U.S. manufacturing, monthly 1947:1 to 1989:11.

- Budeme pracovať s logaritmami a kvôli stacionarite s ich diferenciami

Príklad

- Odhad spektra: použijeme odhad (1), t. j.

$$\hat{s}_Y(\omega_j) = \sum_{m=-h}^h \kappa(\omega_{j+m}, \omega_j) \hat{s}_y(\omega_{j+m})$$

pričom funkciu $\kappa(\omega_{j+m}, \omega_j)$ vezmeme úmernú $h + 1 - |m|$:

$$\kappa(\omega_{j+m}, \omega_j) = \frac{h + 1 - |m|}{(h + 1)^2}$$

Príklad

- Odhad spektra - výsledok:

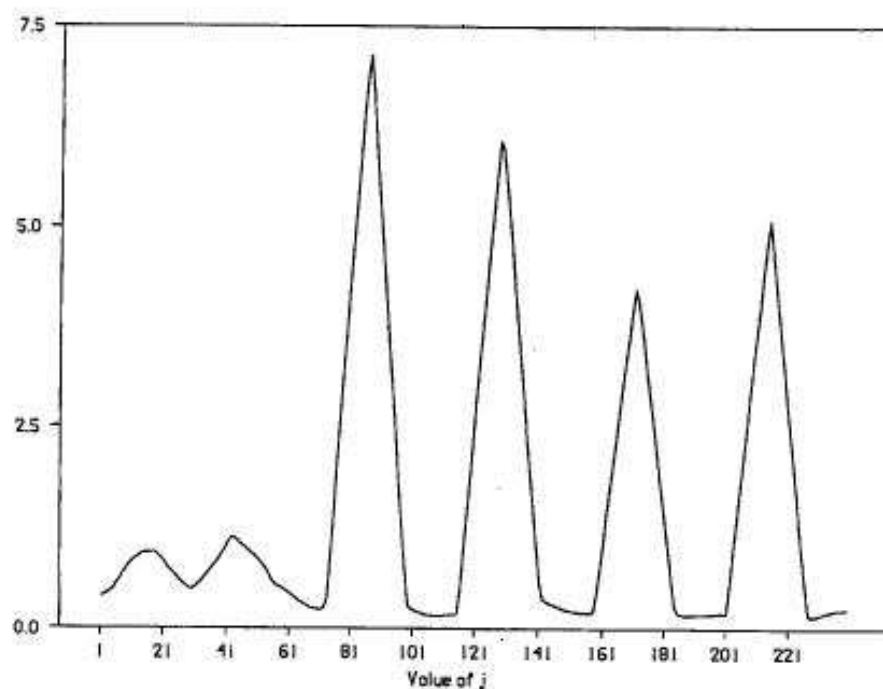
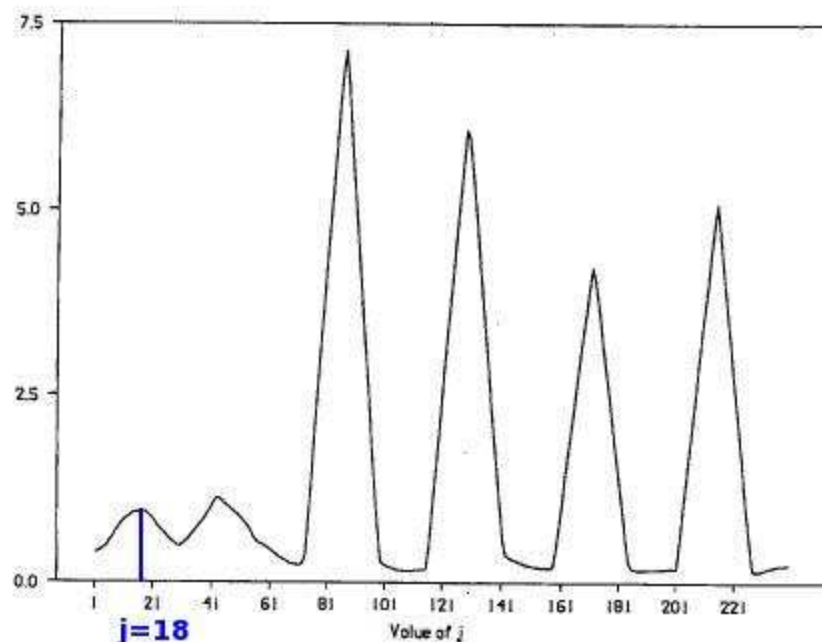


FIGURE 6.5 Estimate of the spectrum for monthly growth rate of industrial production, or spectrum of 100 times the first difference of the log of the series in Figure 6.3.

- Hodnota j na x-ovej osi zodpovedá frekvencii $\omega_j = 2\pi j/T$, kde T je počet dát (v našom prípade $T = 513$)

Príklad



- Frekvencia $\omega_j = 2\pi j/T$, predstavuje periódu $2\pi/\omega_j = T/j$
- Prvé lokálne maximum je pre $j = 18 \rightarrow$ perióda $T/j = 513/18 = 28.5$ mesiacov (hospodársky cyklus)
- Podobne ostatné lokálne maximá

Príklad

- Veľa cyklov s krátkymi periódami; toto sa odstráni, ak namiesto diferencií $y_t - y_{t-1}$ použijeme ročné diferencie $y_t - y_{t-12}$:

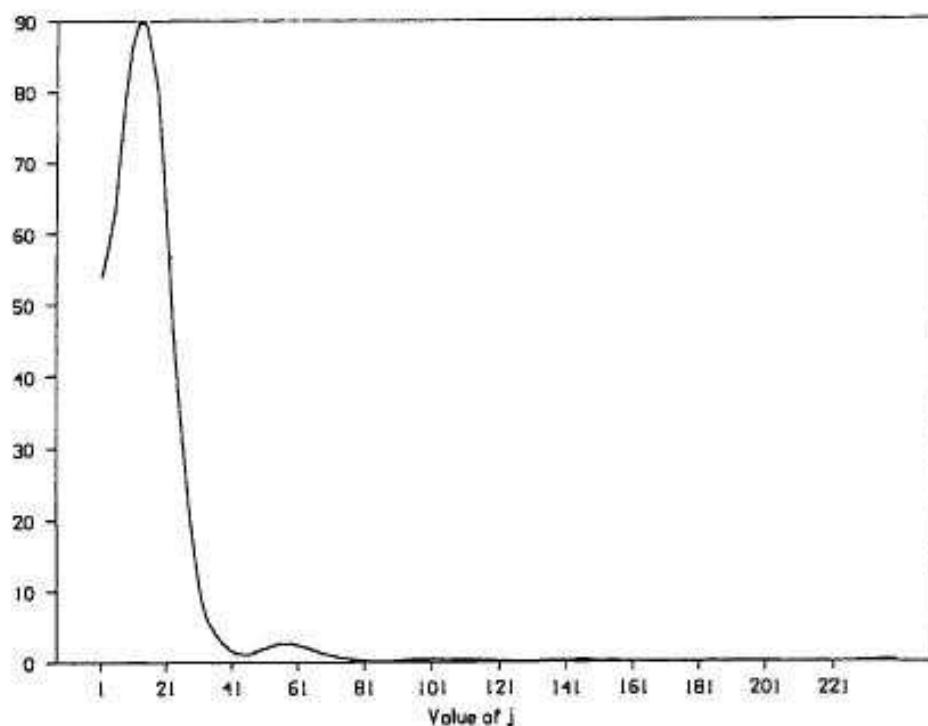


FIGURE 6.6 Estimate of the spectrum for year-to-year growth rate of monthly industrial production, or spectrum of 100 times the seasonal difference of the log of the series in Figure 6.3.