

ČASOVÉ RADY, 2011/2012
PRÍKLADY NA PRECVIČENIE I.

Poznámky:

- Pod stacionaritou všade rozumieme slabú stacionaritu.
- u je všade biely šum
- Referencia [KW] je kniha *G. Kirchgässner, J. Wolters: Introduction to Modern Time Series Analysis. Springer, 2008.*

1. **Stacionarita, invertovateľnosť.**

- (a) Čo znamená, že náhodný proces je stacionárny? Čo znamená, že je invertovateľný? Čo je Woldova reprezentácia a ako súvisí so stacionaritou?
- (b) Ktoré z nasledujúcich procesov sú stacionárne? Ktoré sú invertovateľné?

$$\begin{aligned}(1 - \frac{1}{2}L)x_t &= 1 + u_t \\(1 - 2L)x_t &= 2 + u_t \\(1 - 2L)(1 - 3L)x_t &= u_t \\(1 - \frac{1}{2}L)(1 - \frac{1}{3}L)x_t &= 4 + u_t \\x_t &= 1 + \frac{3}{4}x_{t-1} - \frac{1}{8}x_{t-2} + u_t \\x_t &= -1 + (1 - \frac{1}{2}L)u_t \\x_t &= 2 + (1 - 2L)u_t \\x_t &= 1 + (1 - 2L)(1 - 3L)u_t \\x_t &= -3 + (1 - \frac{1}{2}L)(1 - \frac{1}{3}L)u_t \\x_t &= 2 + u_t - \frac{3}{4}u_{t-1} + \frac{1}{8}u_{t-2} \\(1 - \frac{1}{2}L)(1 - \frac{1}{3}L)x_t &= (1 - \frac{1}{4}L)(1 - \frac{1}{5}L)u_t \\x_t &= 1 + \frac{3}{4}x_{t-1} - \frac{1}{8}x_{t-2} + u_t - \frac{2}{5}u_{t-1}\end{aligned}$$

2. [KW], exercise 2.13. Uvažujme náhodný proces

$$x_t = u_t + 0.6u_{t-1} - 0.1u_{t-2}$$

a varianciu bieleho šumu $Var[u_t] = 1$.

- (a) Ukážte, že proces je stacionárny.
 - (b) Vypočítajte strednú hodnotu, varianciu a autokovariancie tohto procesu.
 - (c) Ukážte, že proces je invertovateľný.
 - (d) Nájdite prvé tri členy $AR(\infty)$ reprezentácie procesu.
3. Pres stacionárne AR a MA procesy z príkladu 1 vypočítajte strednú hodnotu a varianciu (výpočet - nie iba dosadenie do vzorca).

4. **Autokorelačná funkcia.**

- (a) Čo je autokorelačná funkcia stacionárneho procesu?
- (b) [KW], exercise 2.4; postup sme naznačili aj na prednáške. Ukážte, že proces je stacionárny a nájdite jeho ACF:

$$x_t = 1 + 1.5x_{t-1} - 0.56x_{t-2} + u_t.$$

- (c) [KW], exercise 2.5; postup sme naznačili aj na prednáške. Ukážte, že proces je stacionárny a nájdite jeho ACF:

$$x_t = 1 + 1.4x_{t-1} - 0.85x_{t-2} + u_t.$$

5. **Yule-Wolkerove rovnice.**

- (a) Čo sú Yule-Wolkerove rovnice a na čo slúžia?
- (b) Odvodte Yule-Wolkerove rovnice pre $AR(3)$ proces.

6. **Parciálna autokorelačná funkcia.**

- (a) Čo je parciálna autokorelačná funkcia stacionárneho procesu?
- (b) Vypočítajte PACF pre $AR(2)$ proces.
- (c) Ukážte, že pre $MA(1)$ proces platí

$$\Phi_{33} = \frac{\rho(1)^3}{1 - 2\rho(1)^2}.$$

7. Ukážte, že

$$x_t = 2 + \frac{11}{30}x_{t-1} + \frac{2}{15}x_{t-2} - \frac{1}{30}x_{t-3} + u_t - \frac{9}{20}u_{t-1} + \frac{1}{20}u_{t-2}$$

je stacionárny a invertovateľný $ARMA(2,1)$ proces.

8. **Jednotkový koreň.** Pre každý z nasledujúcich procesov určte, koľkokrát ho treba diferencovať, aby sme dostali stacionárny proces. Napíšte proces, ktorým sa riadia tieto diferencie a určte typ ARIMA modelu pre pôvodný časový rad.

$$\begin{aligned}(1 - \frac{1}{3}L)(1 - L)x_t &= 1 + (1 - \frac{1}{2}L)u_t \\(1 - \frac{1}{4}L)(1 - \frac{3}{4}L)(1 - L)^2x_t &= 2 + (1 - \frac{1}{2}L)u_t \\(1 - 2L + L^2)x_t &= -1 + (1 - \frac{3}{4}L + \frac{1}{8}L^2)u_t \\x_t &= 2 + \frac{5}{3}x_{t-1} - \frac{2}{3}x_{t-2} + u_t\end{aligned}$$