Jednotkový koreň (unit root), diferencovanie časového radu, unit root testy

Beáta Stehlíková

Časové rady, FMFI UK, 2011/2012

Obsah

- Čo je jednotkový koreň (unit root) a čo spôsobuje
- Ak má proces jednotkový koreň - ako dáta transformovat', aby sme s nimi mohli pracovat' a použit' ARMA metodológiu
- Ako z dát zistit', či má proces jednotkový koreň $\rightarrow$ unit root testy

Príklady

- Majme proces $y_t = y_{t-1} + u_t$:
  - je to nestacionárny AR(1) proces s jednotkovým koreňom
  - pre jeho diferencie $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$ platí $\Delta y_t = u_t$
  - teda Δy_t je stacionárny proces
- Majme nestacionárny proces s jednotkovým koreňom

$$(1 - \frac{1}{2}L)(1 - L)x_t = 1 + (1 - \frac{1}{3}L)u_t$$

Potom pre diferencie

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1} = (1 - L)y_t$$

platí

$$(1 - \frac{1}{2}L)\Delta y_t = 1 + (1 - \frac{1}{3}L)u_t,$$

teda Δy_t je stacionárny proces

Príklady

- Majme nestacionárny proces s dvojnásobným jednotkovým koreňom
$$(1-\frac{1}{2}L)(1-L)^2x_t = 1+(1-\frac{1}{3}L)u_t$$
Potom pre druhé diferencie
$$\Delta^2 y_t = \Delta(\Delta y_t) = (1-L)(1-L)y_t = (1-L)^2 y_t$$
platí
$$(1-\frac{1}{2}L)\Delta^2 y_t = 1+(1-\frac{1}{3}L)u_t,$$
teda $\Delta^2 y_t$ je stacionárny proces
- Vo všeobecnosti:
Ak má proces jednotkový koreň násobnosti k (a ostatné mimo jednotkového kruhu), tak jeho k-te diferencie sú stacionárne

ARIMA modely

- Ak treba proces k-krát diferencovať, aby sme dostali stacionárny proces, nazýva sa integrovaný proces rádu k, označujeme $I(k)$
- Ak tie k-te diferencie sú ARMA(p,q), tak o pôvodnom procese hovoríme, že je ARIMA(p,k,q).
- Napríklad x_t, ak

$$(1-\frac{1}{2}L)(1-L)^2 x_t = 1 + (1-\frac{1}{3}L)u_t,$$

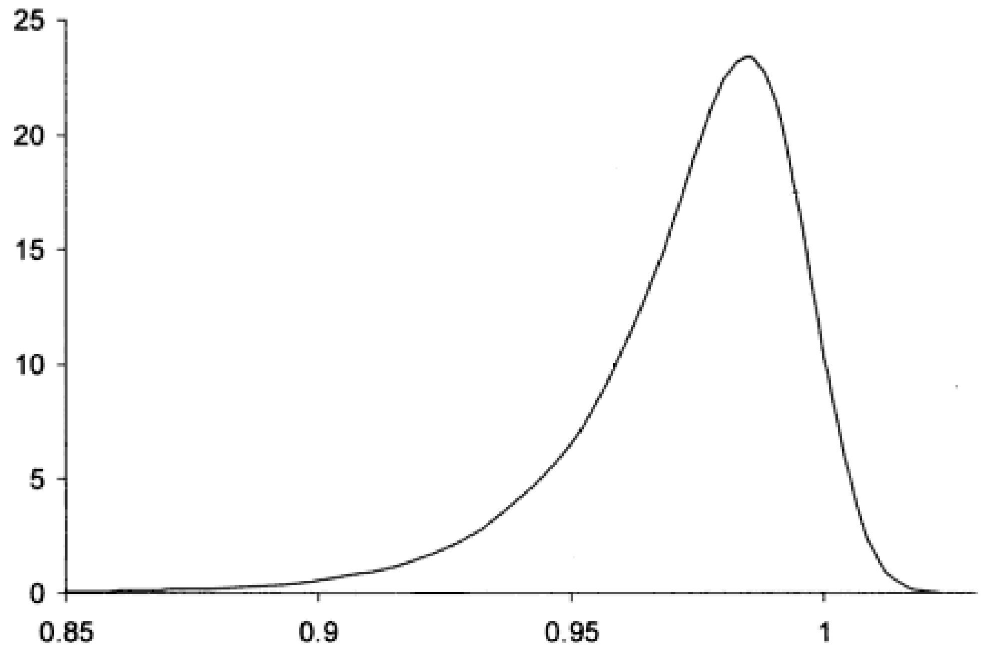
je proces ARIMA(1,2,1).

Jednotkový koreň a t-štatistika

- Skúsme použiť testovanie hypotéz o koeficientoch regresného modelu známe z ekonometrie.
- [Kirchgässner, Wolters], example 5.1:
  - ◇ proces $y_t = y_{t-1} + u_t$, počet pozorovaní $T = 200$
  - ◇ vygenerujeme 100 000 realizácií
  - ◇ MNŠ odhadujeme model $y_t = \alpha + \rho y_{t-1} + u_t$ a zaznamenávame
    1. odhad $\hat{\rho}$
    2. hodnotu t-štatistiky zodpovedajúcej nulovej hypotéze $\rho = 1$ (ktorá platí)

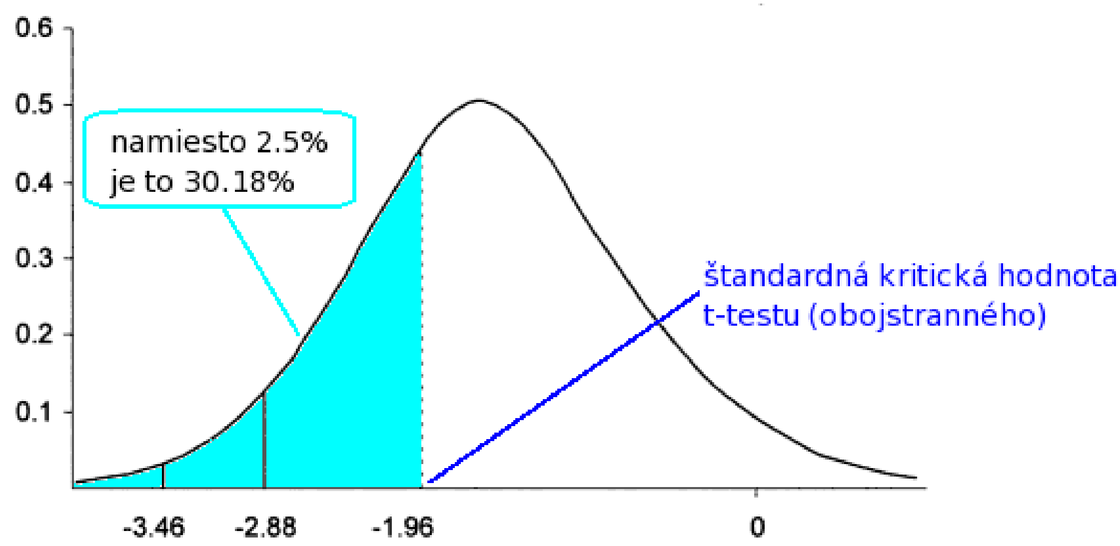
Jednotkový koreň a t-štatistika

- Odhad $\hat{\rho}$ - mal by mať normálne rozdelenie so strednou hodnotou rovnou jeho skutočnej hodnote $\rho = 1$
- Rozdelenie odhadu zo simulácií je však nasledovné:



Jednotkový koreň a t-štatistika

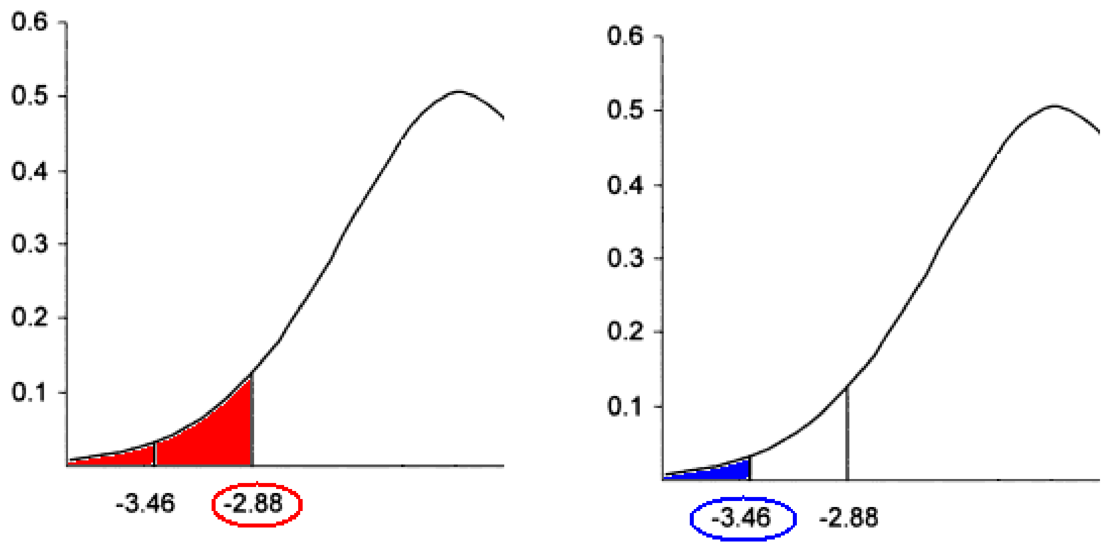
- Rozdelenie t-štatistiky zo simulácií:



- Štandardné kritické hodnoty sa nedajú použiť $\rightarrow$ použijeme t-štatistiku, ale s inými kritickými hodnotami

Jednotkový koreň a t-štatistika

However, if we use the critical values of J.G. MACKINNON (1991), which, in this situation, are -2.876 at the 5 percent level and -3.465 at the 1 percent level, with rejection rates of 4.99 percent and 0.99 percent, the significance levels are almost exactly realised in our simulations.



- Kritické hodnoty:
  - od čoho závisia
  - ako ich vypočítať
  - čo ak nemáme AR(1) proces, ale všeobecnejší

Testovanie jednotkového koreňa

- AR(1) proces:

  (1) $$y_t = \rho y_{t-1} + u_t$$

  jednotkový koreň znamená, že $\rho = 1$.
- Ekvivalentne:

  $$\Delta y_t = (\rho - 1) y_{t-1} + u_t$$

  a zaujíma nás t-štatistika zo signifikancie koeficienta pri y_{t-1} - ale s inou kritickou hodnotou
- Tá kritická hodnota
  - závisí od počtu dát
  - zmení sa, ak rovnica (1) obsahuje konštantu a/alebo lineárny trend
- Vo všeobecnosti: $\Delta y_t = \alpha + \beta t + (\rho - 1) y_{t-1} + u_t$

Testovanie jednotkového koreňa

- AR(p) proces: $y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \ldots \alpha_p y_{t-p} + u_t$
  jednotkový koreň $\rightarrow$ $\alpha_1 + \ldots \alpha_p = 1.$
- Upravíme do tvaru:

  $$y_t = \rho y_{t-1} + \theta_1 \Delta y_{t-1} + \theta_2 \Delta y_{t-2} + \ldots + \theta_{p-1} \Delta y_{t-p+1} + u_t,$$

  kde $\rho = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j$, $\theta_i = -\sum_{j=i+1}^{p} \alpha_j$ pre $i = 1, \ldots, p-1$
- Ekvivalentne:

  $$\Delta y_t = (\rho - 1) y_{t-1} + \theta_1 \Delta y_{t-1} + \theta_2 \Delta y_{t-2} + \ldots + \theta_{p-1} \Delta y_{t-p+1} + u_t$$

  a zaujíma nás t-štatistika z koeficienta pri y_{t-1}
- Vo všeobecnosti: môžeme mať trend a/alebo intercept
  $\Delta y_t = \alpha + \beta t + (\rho - 1) y_{t-1} + \theta_1 \Delta y_{t-1} + \theta_2 \Delta y_{t-2} + \ldots$
  $+\theta_{p-1} \Delta y_{t-p+1} + u_t$

Augmented Dickey-Fuller test (ADF)

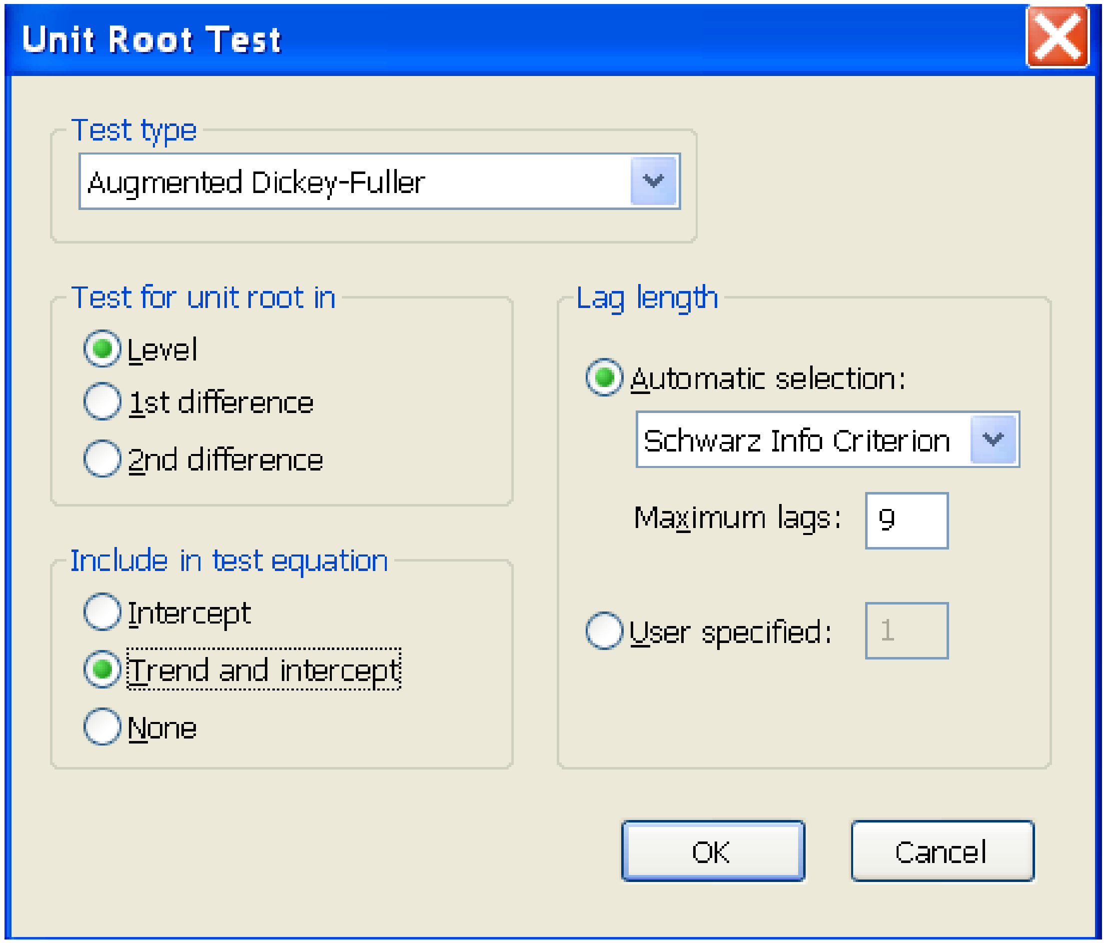
Wayne A. Fuller (1976)

David A. Dickey, Wayne A. Fuller (1979, 1981)

- Odhadujeme rovnicu
  $\Delta y_t = \alpha + \beta t + (\rho - 1) y_{t-1} + \theta_1 \Delta y_{t-1} + \ldots + \theta_k \Delta y_{t-k} + u_t$
  pričom musíme
  - rozhodnúť, či zahrnúť konštantu α a/alebo lineárny trend β
  - určiť k
- Zaujíma nás potom t-štatistika zo signifikancie koeficienta pri y_{t-1}, ale so správnymi kritickými hodnotami

Augmented Dickey-Fuller test (ADF)

- ADF test v EViews:



ADF test - kritické hodnoty

- James G. MacKinnon (1991) - dostupné ako súčasť doplnenej verzie z roku 2010:

  James G. MacKinnon: **Critical Values for Cointegration Tests**. Queen's Economics Department Working Paper No. 1227, 2010..

  Dostupné online: http://ideas.repec.org/p/qed/wpaper/1227.html

- Simulačne získané hodnoty:

Table 1. Response Surface Estimates of Critical Values

N	Variant	Level	Obs.	β_∞	(s.e.)	β_1	β_2
1	no constant	1%	600	−2.5658	(0.0023)	−1.960	−10.04
		5%	600	−1.9393	(0.0008)	−0.398	
		10%	560	−1.6156	(0.0007)	−0.181	
1	no trend	1%	600	−3.4336	(0.0024)	−5.999	−29.25
		5%	600	−2.8621	(0.0011)	−2.738	−8.36
		10%	600	−2.5671	(0.0009)	−1.438	−4.48
1	with trend	1%	600	−3.9638	(0.0019)	−8.353	−47.44
		5%	600	−3.4126	(0.0012)	−4.039	−17.83
		10%	600	−3.1279	(0.0009)	−2.418	−7.58

ADF test - kritické hodnoty

- Ak v regresii používame T dát, kritická hodnota je $\beta_\infty + \beta_1/T + \beta_2/T^2$
- To sú tie hodnoty, ktoré sa spomínajú v príklade v knihe [Kirchgässner, Wolters]:

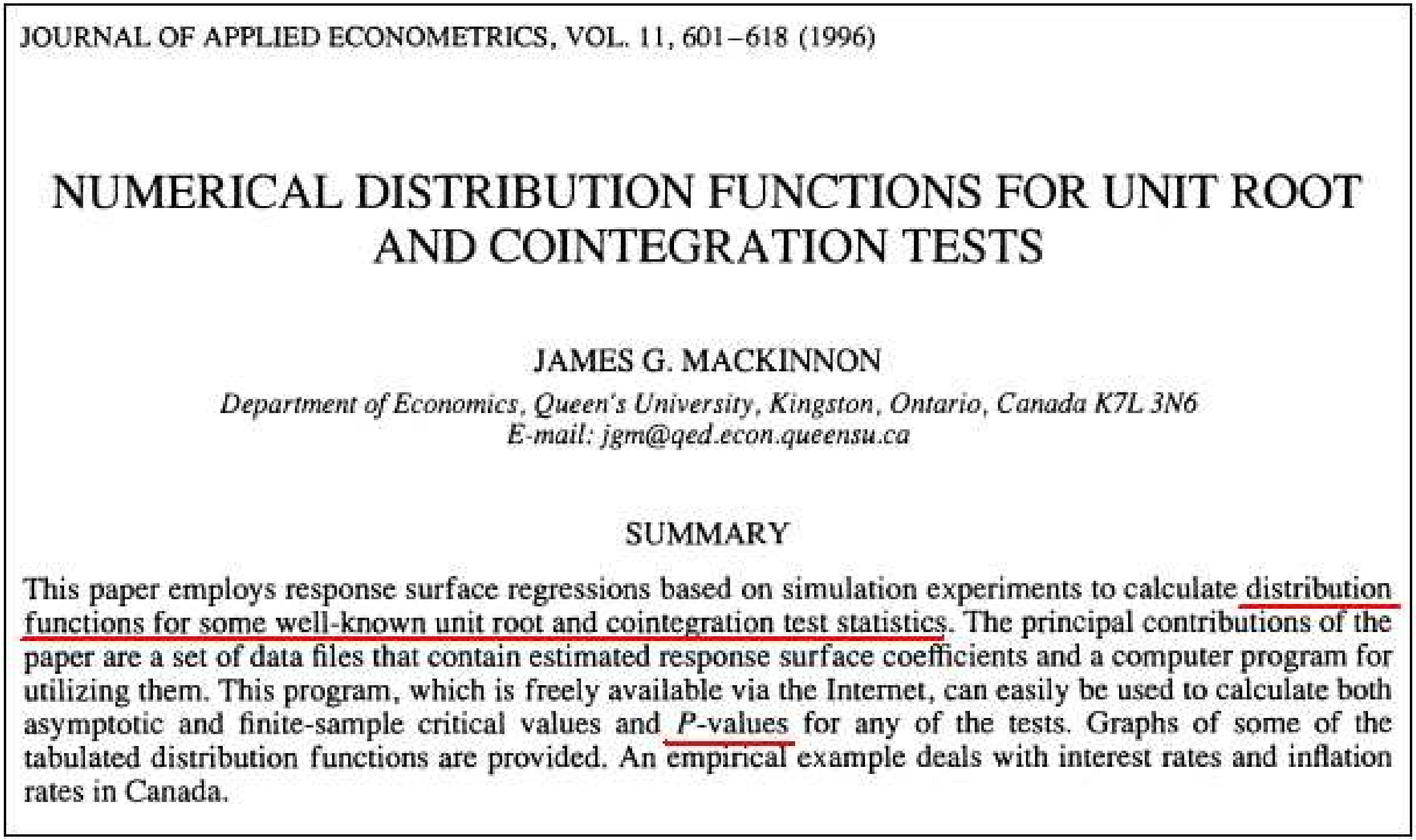
However, if we use the critical values of J.G. MACKINNON (1991) which, in this situation, are -2.876 at the 5 percent level and -3.465 at the 1 percent level, with rejection rates of 4.99 percent and 0.99 percent, the significance levels are almost exactly realised in our simulations.

Table 1. Response Surface Estimates of Critical Values

N	Variant	Level	Obs.	β_∞	(s.e.)	β_1	β_2
1	no constant	1%	600	−2.5658	(0.0023)	−1.960	−10.04
		5%	600	−1.9393	(0.0008)	−0.398	
		10%	560	−1.6156	(0.0007)	−0.181	
1	no trend	1%	600	−3.4336	(0.0024)	−5.999	−29.25
		5%	600	−2.8621	(0.0011)	−2.738	−8.36
		10%	600	−2.5671	(0.0009)	−1.438	−4.48
1	with trend	1%	600	−3.9638	(0.0019)	−8.353	−47.44
		5%	600	−3.4126	(0.0012)	−4.039	−17.83
		10%	600	−3.1279	(0.0009)	−2.418	−7.58

ADF test - kritické hodnoty

- James G. MacKinnon (1996) - nielen kritické hodnoty, ale aj P hodnoty pre konkrétnu hodnotu testovacej štatistiky:


JOURNAL OF APPLIED ECONOMETRICS, VOL. 11, 601–618 (1996)

NUMERICAL DISTRIBUTION FUNCTIONS FOR UNIT ROOT AND COINTEGRATION TESTS

JAMES G. MACKINNON

Department of Economics, Queen's University, Kingston, Ontario, Canada K7L 3N6
E-mail: jgm@qed.econ.queensu.ca

SUMMARY

This paper employs response surface regressions based on simulation experiments to calculate distribution functions for some well-known unit root and cointegration test statistics. The principal contributions of the paper are a set of data files that contain estimated response surface coefficients and a computer program for utilizing them. This program, which is freely available via the Internet, can easily be used to calculate both asymptotic and finite-sample critical values and *P*-values for any of the tests. Graphs of some of the tabulated distribution functions are provided. An empirical example deals with interest rates and inflation rates in Canada.

Program: http://econ.queensu.ca/faculty/mackinnon/numdist/

ADF test - ukážka použitia

Null Hypothesis: LOGPCOCOA has a unit root
Exogenous: None
Lag Length: 2 (Automatic based on SIC, MAXLAG=18)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		0.481897	0.8188
Test critical values:	1% level	-2.569504	
	5% level	-1.941445	
	10% level	-1.616282	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(LOGPCOCOA)
Method: Least Squares
Date: 10/18/11 Time: 12:46
Sample (adjusted): 1960M04 2002M09
Included observations: 510 after adjustments

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
LOGPCOCOA(-1)	0.000332	0.000689	0.481897	0.6301
D(LOGPCOCOA(-1))	0.352113	0.044181	7.969833	0.0000
D(LOGPCOCOA(-2))	-0.117298	0.044191	-2.654332	0.0082

R-squared	0.110808	Mean dependent var	0.002585
Adjusted R-squared	0.107301	S.D. dependent var	0.066382
S.E. of regression	0.062719	Akaike info criterion	-2.694426
Sum squared resid	1.994400	Schwarz criterion	-2.669517
Log likelihood	690.0786	Hannan-Quinn criter.	-2.684660
Durbin-Watson stat	1.983803		

ADF test - ukážka použitia

- Otázky k výstupu:
  - Aká hypotéza sa testuje a aký je záver (na základe P hodnoty - zamietame nulovú hypotézu alebo nie?) Čo to znamená pre modelovanie premennej $LOGPCOCOA$?
  - Ako bola zostavená regresia uvedená vo výstupe? Kde sa v nej nachádza testovacia štatistika - vysvetlite, prečo nás zaujíma práve táto hodnota.