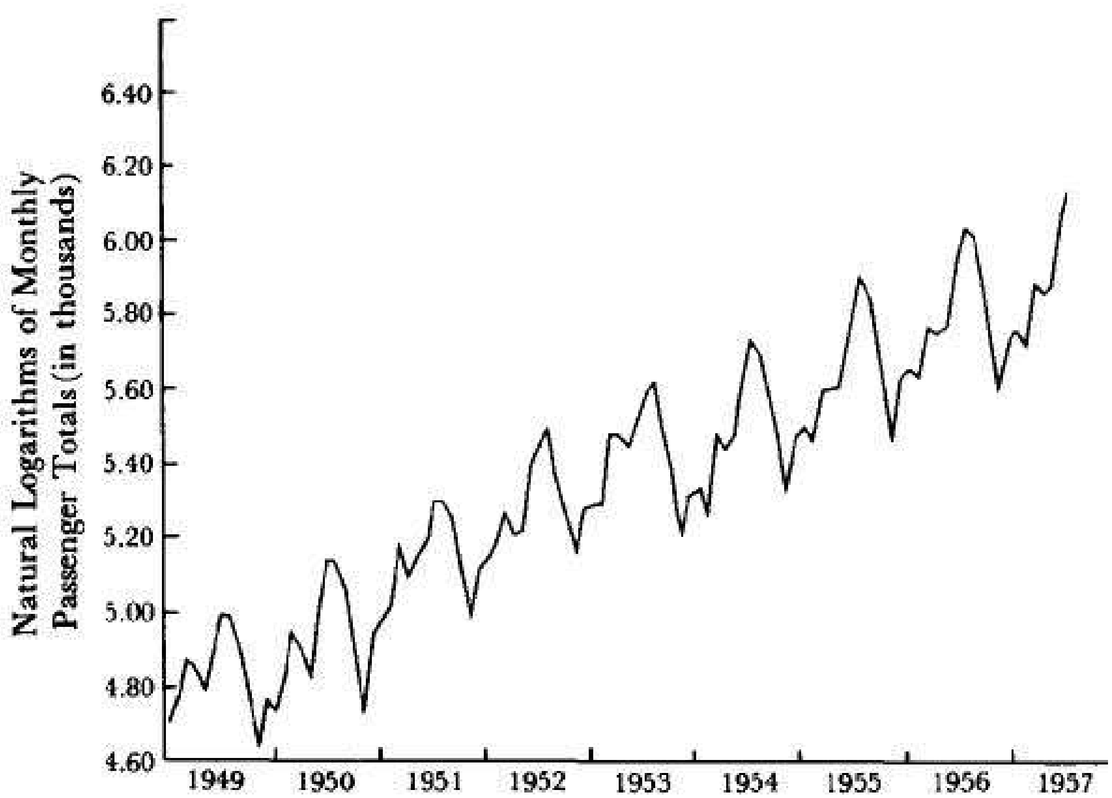
Časové rady - úvod

Beáta Stehlíková

Časové rady, FMFI UK, 2011/2012

Analýza časových radov

- Máme mesačné dáta - počty cestujúcich aerolinkami:

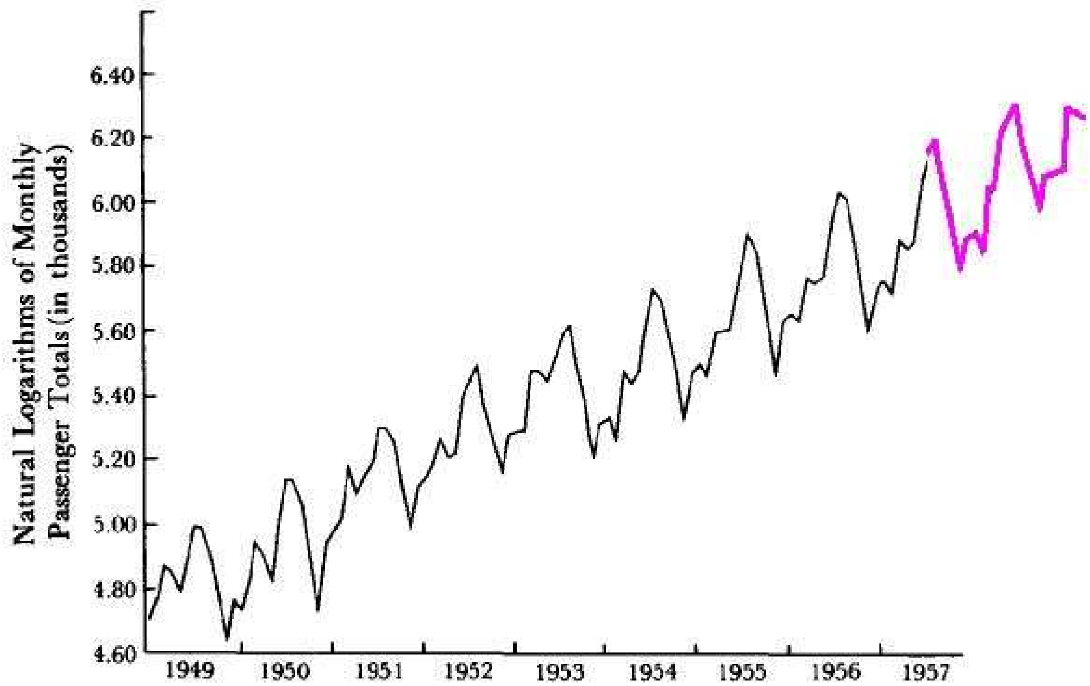


G. E. P. Box, G. M. Jenkins: **Time Series Analysis: Forecasting and Control**.

- Otázka: aký bude ďalší vývoj?

Analýza časových radov

- Intuitívne: zachová sa rastúci trend a sezónnosť (ak nenastane nejaký šok)

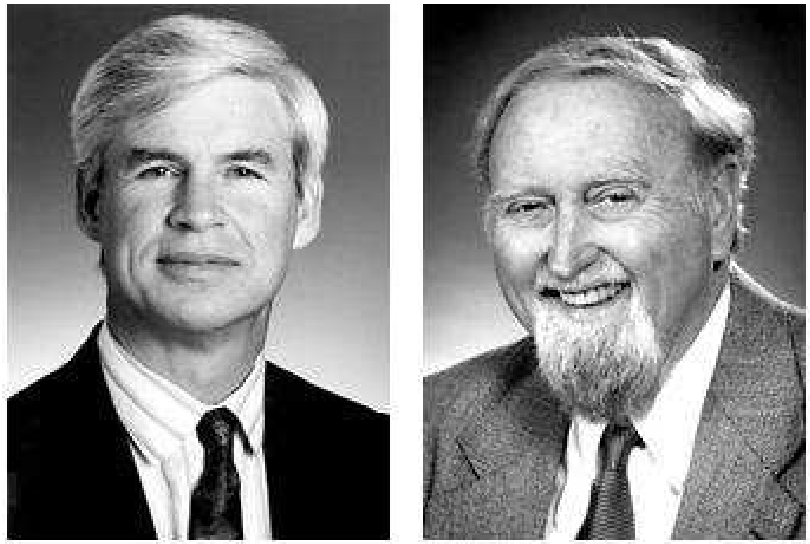


- Ako to vyjadriť kvantitatívne? Ako určiť presnosť odhadov, ako zostrojiť interval spoľahlivosti?

Historický vývoj

- Časové rady v ekonometrii, bez zohl'adnenia závislosti pozorovaní
- Cochrane & Orcutt (1949): dôsledok korelovaných rezíduí v regresii
- Durbin & Watson (1950-51): test na identifikáciu autokorelácie prvého rádu v rezíduách
- Box & Jenkins (1970) : jednorozmerné modely pre časové rady - prvá časť tohto kurzu časových radov
- Granger & Newbold (1975): tieto jednorozmerné modely dávali často lepšie predikcie ako vel'ké ekonometrické modely (niekol'ko stoviek rovníc)

Historický vývoj



Robert F. Engle III   Clive W.J. Granger

The Sveriges Riksbank Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel 2003 was divided equally between Robert F. Engle III "*for methods of analyzing economic time series with time-varying volatility (ARCH)*" and Clive W.J. Granger "*for methods of analyzing economic time series with common trends (cointegration)*".

http://www.nobelprize.org

ARCH - tiež v tomto kurze
kointegrácia - na iných (voliteľných) predmetoch

Základné pojmy - obsah prednášky

- Časový rad, momenty
- Stacionarita, ergodicita
- Biely šum
- Woldova reprezentácia
- Autokorelačná funkcia, testy o autokorelačnej funkcii
- Operátor posunu

Časový rad, momenty

- Stochastický proces $x_1, \ldots, x_T$ - úplne je charakterizovaný T-rozmernou distribučnou funkciou
- Obvykle sa zameriavame len na prvé dva momenty:
  - stredná hodnota $E[x_t]$
  - variancia $Var[x_t]$
  - kovariancie $Cov[x_t, x_s]$, nazývajú sa <u>auto</u>kovariancie

Stacionarita a ergodicita

- Väčšinou máme len jeden časový rad - jednu realizáciu náhodného procesu $\rightarrow$ aby sa dala robiť štatistická inferencia, potrebujeme dodatočné predpoklady
- Napríklad: na to, aby sme odhadli strednú hodnotu, ... potrebujeme viac ako jednu realizáciu tejto náhodnej premennej
- Ergodický proces - výberové momenty počítané z časového radu s T pozorovaniami konvergujú pre $T \rightarrow \infty$ k zodpovedajúcim momentom
- Tento koncept má zmysel iba ak predpokladáme, že $E[x_t] = \mu,\ Var[x_t] = \sigma^2, \dots$ pre $\forall t$

Stacionarita a ergodicita

- Silná stacionarita : združená distribučná funkcia sa nemení pri posune v čase
- Obvykle sa pracuje so slabším predpokladom $\rightarrow$ slabá stacionarita :

$$E[x_t] = \mu \ \forall t \tag{1}$$
$$Cov[x_t, x_s] = \gamma(|t-s|) \ \forall t, s \tag{2}$$

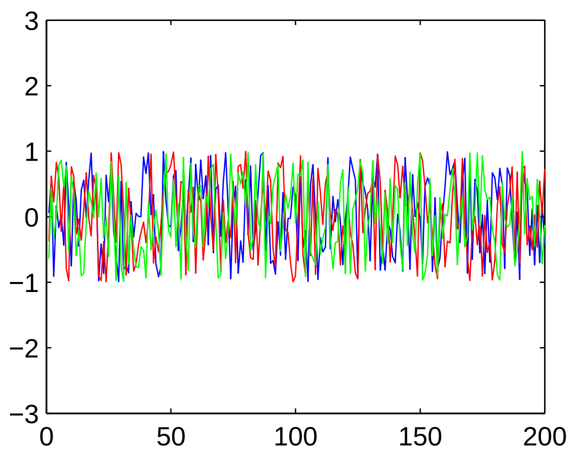
z (2) vyplýva: $Var[x_t] = const.$ pre $\forall t$

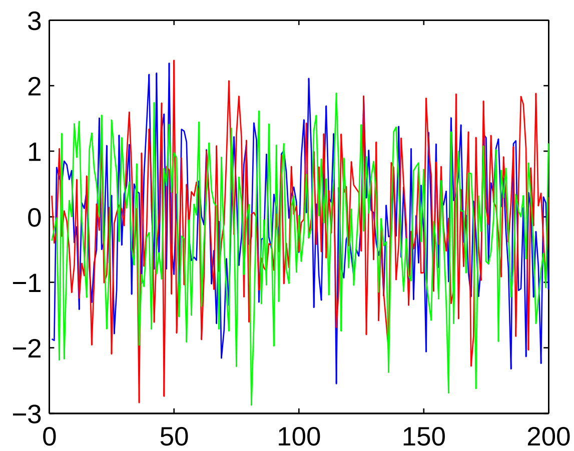
- Ďalej budeme pod stacionaritou rozumieť slabú stacionaritu

Biely šum

- Biely šum $\{u_t\}$ - dôležitý príklad stacionárneho procesu

$$
\begin{aligned}
E[u_t] &= 0 \qquad \forall t \\
Var[u_t] &= \sigma^2 \qquad \forall t \\
Cov[u_t, u_s] &= 0 \qquad \forall t \neq s
\end{aligned}
$$





Stacionarita - príklad 1

- Nech u_t je biely šum, definujme

$$x_t = u_t + u_{t-1}$$

- Vypočítame:

$$E[x_t] = 0, \quad Var[x_t] = 2\sigma^2$$

$$Cov[x_t, x_s] = \begin{cases} \sigma^2 & \text{pre } |t-s| = 1 \\ 0 & \text{pre } |t-s| = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

$\rightarrow$ proces je stacionárny

Stacionarita - príklad 2

- Nech u_t je biely šum; definujme

$$y_t = \begin{cases} u_1 & \text{pre } t = 1 \\ y_{t-1} + u_t & \text{pre } t = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

- y_t sa dá zapísať ako $y_t = \sum_{i=1}^{t} u_i$
- Vypočítame:

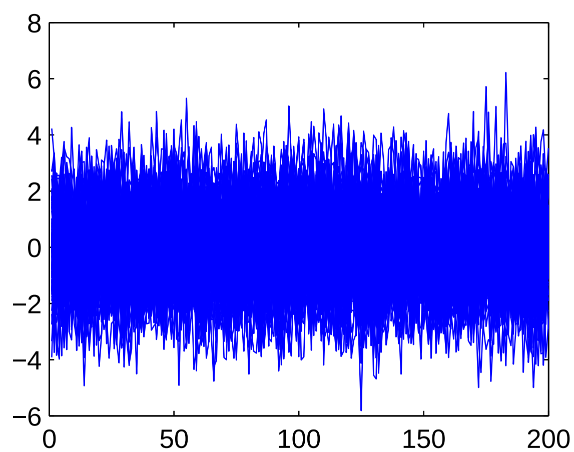
$$E[y_t] = 0, \quad Var[y_t] = t\,\sigma^2$$

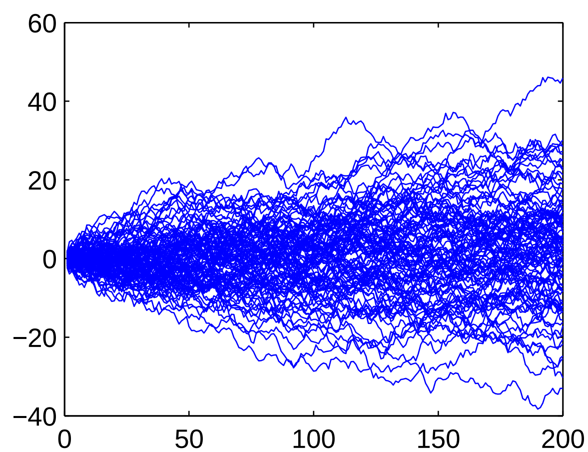
$$Cov[y_t, y_s] = \sigma^2 \ \min(t, s)$$

$\longrightarrow$ proces nie je stacionárny

Stacionarita - príklady 1, 2

- Porovnanie trajektórií procesov z predchádzajúcich dvoch príkladov:
  - ◇ vľavo - stacionárny proces (pr. 1)
  - ◇ vpravo - nestacionárny proces (pr. 2), vidíme rastúcu disperziu





- Cvičenie:
  Nájdite príklad procesu, ktorý nemá konštantnú strednú hodnotu.

Stacionarita - príklad 3

- Nech $\{u_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ je biely šum, definujme

$$x_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j u_{t-j}, \tag{3}$$

pričom koeficienty ψ_j spĺňajú $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty, \psi_0 = 1$

- Vypočítame:

$$E[x_t] = \mu, \;\; Var[x_t] = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2$$

$$Cov[x_t, x_{t+k}] = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{k+j}$$

$\rightarrow$ proces je stacionárny

Woldova reprezentácia

- Predchádzajúci príklad: proces x_t, ktorý má tvar (3), je stacionárny
- Dá sa dokázať:
  Každý stacionárny proces x_t sa dá zapísať v tvare (3), t. j.

  $$x_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j u_{t-j},$$

  pričom koeficienty ψ_j spĺňajú $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty, \psi_0 = 1$ a u_t je biely šum
- Toto vyjadrenie stacionárneho procesu sa nazýva Woldova reprezentácia (Wold, 1938)

Stacionarita - príklad 4

- Príklad procesu, ktorý je stacionárny, ale nie je ergodický:

$$w_t = \begin{cases} X & \text{pre } t = 1 \\ w_1 & \text{pre } t = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

kde X je náhodná premenná s N(0,1) rozdelením

- CVIČENIE: Ako vyzerá trajektória takéhoto procesu?
- Existujú podmienky, kedy je stacionárny proces ergodický, ale nebudeme sa nimi d'alej zaoberat'.

LEN NA UKÁŽKU: [Hamilton]

Nech x_t je stacionárny proces. Označme $\rho(k) = Cor(x_t, x_{t+k})$. Ak $\sum_{k=1}^{\infty} |\rho(k)| < \infty$, tak priemer $\frac{1}{T} \sum_{i=1}^{T} x_i$ konverguje pre $T \to \infty$ k strednej hodnote procesu.

Autokorelačná funkcia

- Autokorelačná funkcia (ACF) stacionárneho procesu:

$$\rho(\tau) = \frac{\gamma(\tau)}{\gamma(0)}$$

t. j.

$$\rho(\tau) = Cor(x_t, x_{t+\tau}) = \frac{Cov(x_t, x_{t+\tau})}{\sqrt{Var(x_t)\,Var(x_{t+\tau})}}$$

- Platí:

$$\rho(0) = 1, \quad \rho(\tau) = \rho(-\tau)$$

$\rightarrow$ stačí nám počítať $\rho(\tau)$ pre $\tau = 1, 2, \ldots$

Autokorelačná funkcia

- Ergodický proces $\rightarrow$ stredná hodnota, disperzia a kovariancie sa dajú konzistentne odhadnúť z dát $x_1, \ldots, x_T$:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_t, \quad \hat{\gamma}(0) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(x_t - \hat{\mu})^2$$

$$\hat{\gamma}(\tau) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T-\tau}(x_t - \hat{\mu})(x_{t+\tau} - \hat{\mu})$$

$\rightarrow$ konzistetný odhad autokorelačnej funkcie:

$$\hat{\rho}(\tau) = \frac{\hat{\gamma}(\tau)}{\hat{\gamma}(0)}$$

- je asymptoticky nevychýlený

Autokorelačná funkcia - testy

- Odhad ACF v prípade bieleho šumu:
  - asymptoticky nevychýlený
  - variancia $\approx 1/T$
  - $\Rightarrow$ približný 95 % interval spoľahlivosti: $\pm 2/\sqrt{T}$, často sa zobrazuje spolu s odhadnutými autokoreláciami
- V prípade stochastického procesu, pre ktorý $\rho(\tau) = 0$ pre $\tau > k$, pre tieto τ platí

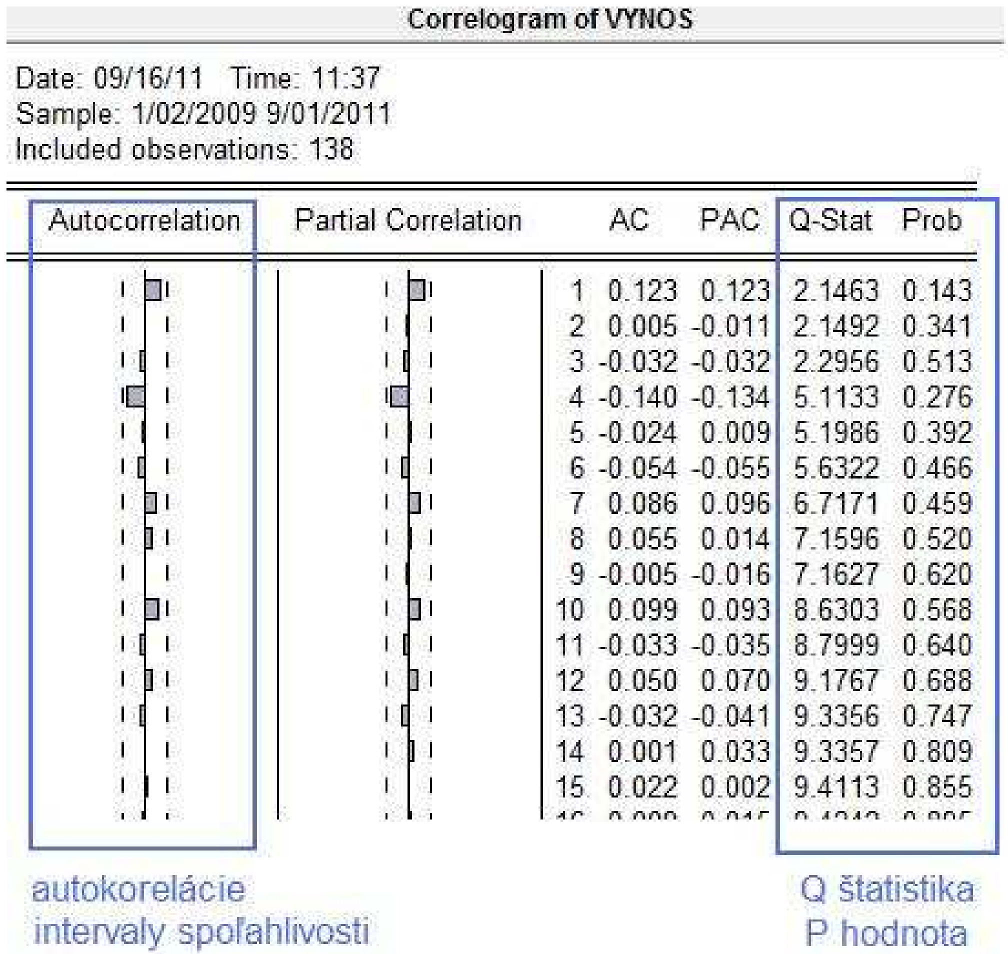
$$Var[\hat{\rho}(\tau)] \approx \frac{1}{T}\left(1 + 2\sum_{j=1}^{k} \hat{\rho}(j)^2\right)$$

Autokorelačná funkcia - testy

- Testovanie, či daný časový rad je biely šum:
  1. interval spol'ahlivosti $\pm 2/\sqrt{T}$ pre každú autokoreláciu samostatne
  2. testovanie nulovosti $\rho(1), \ldots, \rho(m)$ súčasne:
     - Box & Pierce, 1970: za platnosti H_0 asymptoticky platí
       $$Q = T \sum_{j=1}^{m} \rho(j)^2 \sim \chi_m^2$$
     - Ljung & Box, 1978: modifikácia s lepšími vlastnosťami pri menšom počte dát:
       $$Q = T(T+2) \sum_{j=1}^{m} \frac{\rho(j)^2}{T-j} \sim \chi_m^2$$
     - počet stupňov vol'nosti sa zmení, ak ide o rezíduá z modelu

Autokorelačná funkcia - príklad

- S_t - cena akcie GOOG, $vynos_t = \log(S_t/S_{t-\Delta t})$
- týždenné výnosy, január 2009 - august 2011



Correlogram of VYNOS

Date: 09/16/11 Time: 11:37
Sample: 1/02/2009 9/01/2011
Included observations: 138

	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.123	0.123	2.1463	0.143
2	0.005	-0.011	2.1492	0.341
3	-0.032	-0.032	2.2956	0.513
4	-0.140	-0.134	5.1133	0.276
5	-0.024	0.009	5.1986	0.392
6	-0.054	-0.055	5.6322	0.466
7	0.086	0.096	6.7171	0.459
8	0.055	0.014	7.1596	0.520
9	-0.005	-0.016	7.1627	0.620
10	0.099	0.093	8.6303	0.568
11	-0.033	-0.035	8.7999	0.640
12	0.050	0.070	9.1767	0.688
13	-0.032	-0.041	9.3356	0.747
14	0.001	0.033	9.3357	0.809
15	0.022	0.002	9.4113	0.855

Operátor posunu

- Operátor posunu (lag operator) L - užitočný pri práci s časovými radmi
- Vráti hodnotu procesu posunutú o jedno obdobie dozadu:

$$Lx_t = x_{t-1}$$

- Vlastnosti:
  - mocniny: $L^2 x_t = L(Lx_t) = x_{t-2}$
  - $L^0 = 1$ je identita: $(1 - L)x_t = x_t - x_{t-1}$
  - počítanie s mocninami: $L^2(L^3) = L^5$
  - násobenie: $(1 - 0.5L)(1 - 0.3L) = 1 - 0.8L + 0.15L^2$
  - ak c je konštanta, tak napr. $(1 - 0.1L + 2L^2)c = (1 - 0.1 + 2)c = 2.9c$