ARMA modely
časť 2: moving average modely (MA)

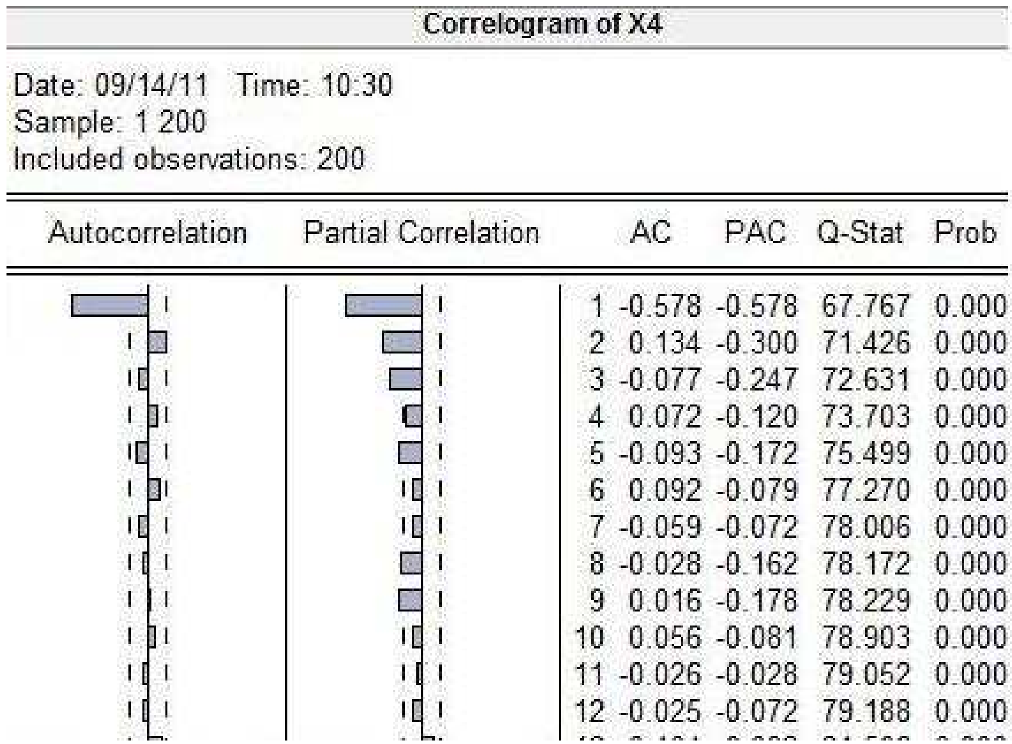
Beáta Stehlíková

Časové rady, FMFI UK, 2011/2012

V.

Moving average proces prvého rádu - MA(1)

Simulované dáta z predchádzajúcej kap.



Correlogram of X4

Date: 09/14/11 Time: 10:30
Sample: 1 200
Included observations: 200

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	-0.578	-0.578	67.767	0.000
		2	0.134	-0.300	71.426	0.000
		3	-0.077	-0.247	72.631	0.000
		4	0.072	-0.120	73.703	0.000
		5	-0.093	-0.172	75.499	0.000
		6	0.092	-0.079	77.270	0.000
		7	-0.059	-0.072	78.006	0.000
		8	-0.028	-0.162	78.172	0.000
		9	0.016	-0.178	78.229	0.000
		10	0.056	-0.081	78.903	0.000
		11	-0.026	-0.028	79.052	0.000
		12	-0.025	-0.072	79.188	0.000

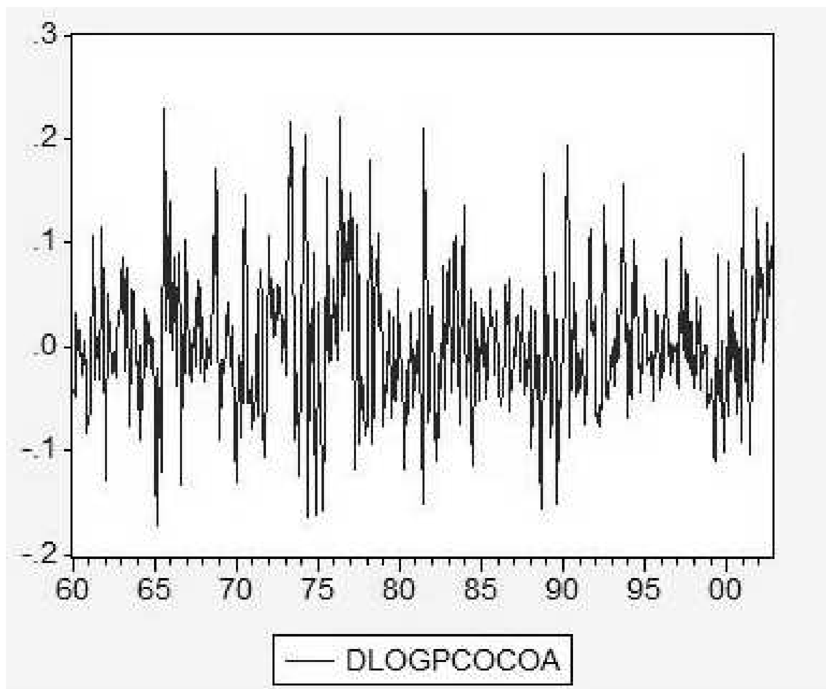
- AR(p) proces - ACF rýchlo klesá (monotónne alebo oscilujúco), PACF sa po p hodnotách rovná nule
- tu je to v podstate naopak → nebude to AR proces

Reálne dáta s podobnou ACF

Ben Vogelvang: **Econometrics. Theory and Applications with EViews.** Pearson Education Limited, 2005.

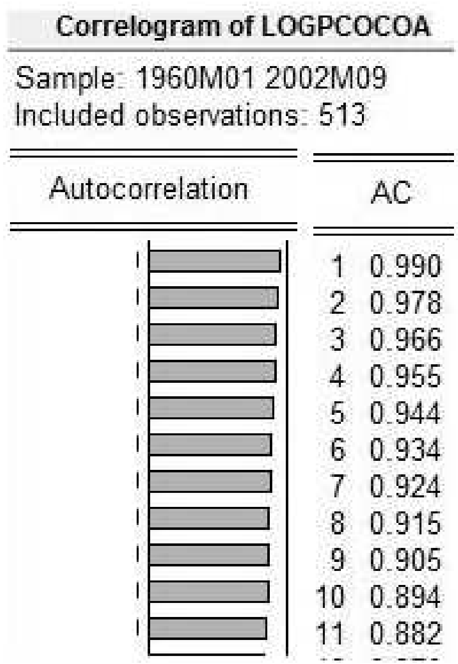
Chapter 14.7. - The Box-Jenkins Approach in Practice

- Mesačné dáta, január 1960 - september 2002
- $pcocoa_t$ - cena kakaa, zlogaritmujeme a kvôli stacionarite budeme pracovat' s diferenciami



Reálne dáta - pokračovanie

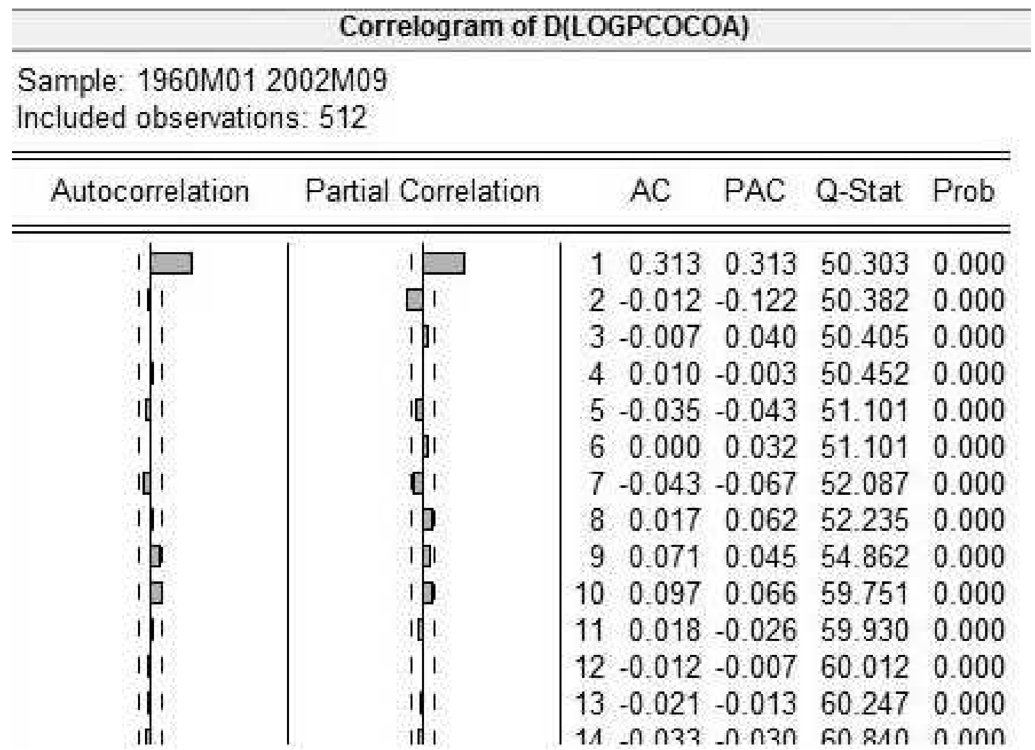
- Odhadnutá ACF:



Correlogram of LOGPCOCOA

Sample: 1960M01 2002M09
Included observations: 513

	AC
1	0.990
2	0.978
3	0.966
4	0.955
5	0.944
6	0.934
7	0.924
8	0.915
9	0.905
10	0.894
11	0.882



Correlogram of D(LOGPCOCOA)

Sample: 1960M01 2002M09
Included observations: 512

	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.313	0.313	50.303	0.000
2	-0.012	-0.122	50.382	0.000
3	-0.007	0.040	50.405	0.000
4	0.010	-0.003	50.452	0.000
5	-0.035	-0.043	51.101	0.000
6	0.000	0.032	51.101	0.000
7	-0.043	-0.067	52.087	0.000
8	0.017	0.062	52.235	0.000
9	0.071	0.045	54.862	0.000
10	0.097	0.066	59.751	0.000
11	0.018	-0.026	59.930	0.000
12	-0.012	-0.007	60.012	0.000
13	-0.021	-0.013	60.247	0.000
14	-0.033	-0.030	60.840	0.000

- Logaritmy - ACF klesá veľmi pomaly $\rightarrow$ typické pre dáta, ktoré treba zdiferencovať (presnejšie neskôr)
- Diferencie logaritmov - jedna výrazne nenulová autokorelácia, ostatné skoro nulové

Príklad z prvej prednášky

- Nech u_t je biely šum, definujeme

$$x_t = u_t + u_{t-1}$$

- Vypočítali sme:

$$E[x_t] = 0, \quad Var[x_t] = 2\sigma^2$$

$$Cov[x_t, x_{t+\tau}] = \begin{cases} \sigma^2 & \text{pre } \tau = 1 \\ 0 & \text{pre } \tau = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

$$Cor[x_t, x_{t+\tau}] = \begin{cases} 1/2 & \text{pre } \tau = 1 \\ 0 & \text{pre } \tau = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

- ACF je nulová pre $\tau = 2, 3, \ldots$ - presne tá vlastnosť, ktorú potrebujeme

Zovšeobecnenie - MA(1) proces

- Nech u_t je biely šum, potom

$$x_t = \mu + u_t - \beta u_{t-1}$$

sa nazýva moving average proces prvého rádu - MA(1)

- Woldova reprezentácia: $x_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j u_{t-j}$
MA(1) proces: $\psi_0 = 1, \psi_1 = -\beta, \psi_j = 0$ pre $j = 2, 3, \ldots$

- Momenty a ACF:

$$E[x_t] = \mu, \quad Var[x_t] = (1+\beta^2)\sigma^2$$

$$Cov[x_t, x_{t+\tau}] = \begin{cases} -\beta\sigma^2 & \text{pre } \tau = 1 \\ 0 & \text{pre } \tau = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

$$Cor[x_t, x_{t+\tau}] = \begin{cases} -\frac{\beta}{1+\beta^2} & \text{pre } \tau = 1 \\ 0 & \text{pre } \tau = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

MA(1) proces - príklady

1. Nech u_t je biely šum s rozdelením $N(0,4)$, definujme
$$x_t = u_t + \frac{1}{2}u_{t-1}$$
Potom: $E[x_t] = 0, \quad Var[x_t] = (1+(1/2)^2) \times 4 = 5$
$$Cor[x_t, x_{t+\tau}] = \begin{cases} \frac{1/2}{1+1/4} = 2/5 & \text{pre } \tau = 1 \\ 0 & \text{pre } \tau = 2,3,\dots \end{cases}$$
2. Nech u_t je biely šum s rozdelením $N(0,1)$, definujme
$$y_t = u_t + 2u_{t-1}$$
Potom: $E[y_t] = 0, \quad Var[y_t] = (1+4) \times 1 = 5$
$$Cor[y_t, y_{t+\tau}] = \begin{cases} \frac{2}{1+4} = 2/5 & \text{pre } \tau = 1 \\ 0 & \text{pre } \tau = 2,3,\dots \end{cases}$$

Procesy x_t a y_t majú rovnakú ACF $\rightarrow$ nedajú sa rozlíšiť

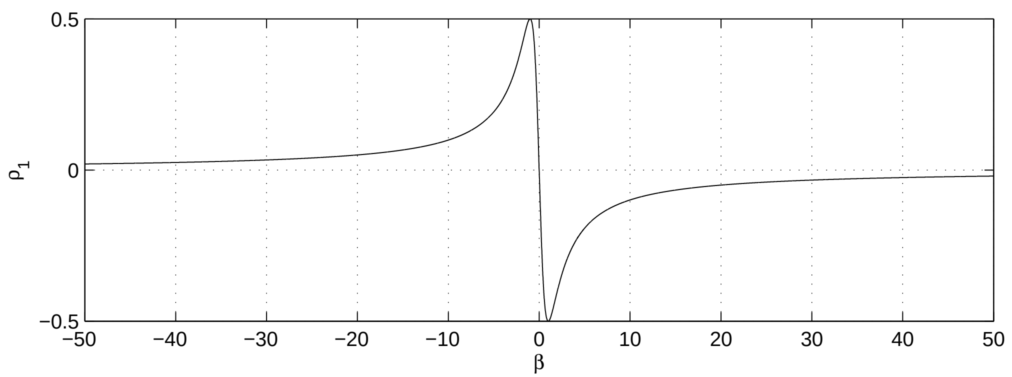
MA(1) proces - zovšeobecnenie príkladu

- Majme MA(1) proces, t.j. ACF tvaru

$$Cor[x_t, x_{t+\tau}] = \begin{cases} -\frac{\beta}{1+\beta^2} & \text{pre } \tau = 1 \\ 0 & \text{pre } \tau = 2, 3, \dots \end{cases}$$

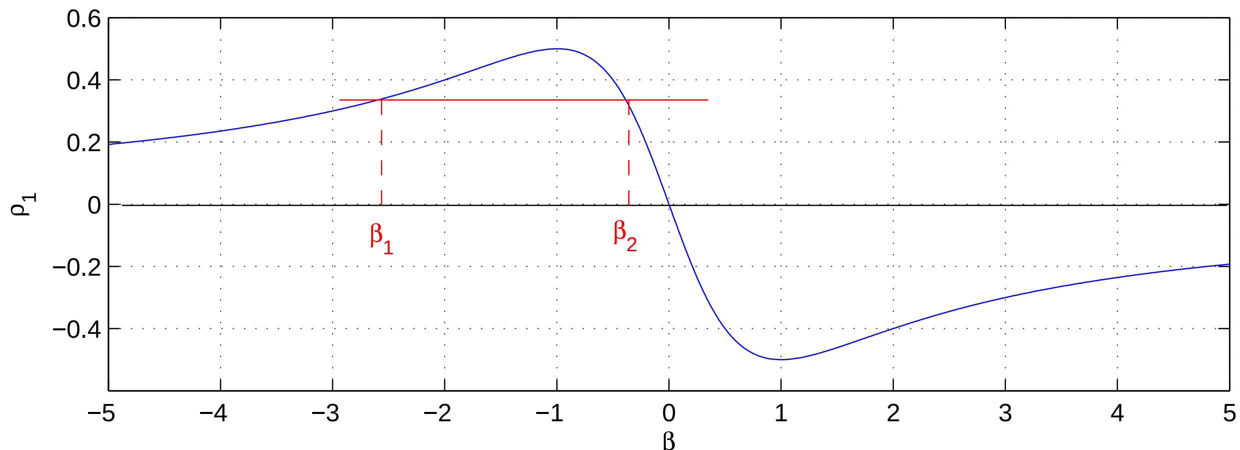
- Predpokladajme teraz, že máme danú hodnotu $\rho_1 = \rho(1)$ a chceme z nej spätne určiť koeficient β, t.j.

$$\rho_1 = -\frac{\beta}{1+\beta^2} \Rightarrow \beta = ?$$



MA(1) proces - zovšeobecnenie príkladu

- Máme teda rovnicu: $\rho_1 = -\frac{\beta}{1+\beta^2} \Rightarrow \beta^2 + \frac{1}{\rho_1}\beta + 1 = 0$



$\longrightarrow$ dve riešenia β_1, β_2, spĺňajú $\beta_1\beta_2 = 1.$

- Procesy

$$x_t = \mu + u_t - \beta u_{t-1}, \quad x_t = \mu + u_t - \frac{1}{\beta}u_{t-1}$$

majú rovnakú ACF

- Ak chceme jednoznačnú parametrizáciu, potrebujeme dodať ďalšiu podmienku.

Invertovateľnosť procesu

- Budeme sa snažiť zapísať proces v tvare AR(∞):

$$x_t = \hat{\mu} + u_t + \psi_1 x_{t-1} + \psi_2 x_{t-2} + \psi_3 x_{t-3} + \dots$$

  - ak sa to dá spraviť, proces sa nazýva invertovateľný
- Pre MA(1) proces:

$$\begin{aligned} x_t &= \mu + (1 - \beta L) u_t \\ (1 - \beta L)^{-1} x_t &= (1 - \beta L)^{-1} \mu + u_t \end{aligned}$$

  $(1 - \beta L)^{-1}$ existuje pre $|\beta| < 1$, vtedy

$$(1 + \beta L + \beta^2 L^2 + \dots) x_t = \mu / (1 - \beta) + u_t$$

$$x_t + \beta x_{t-1} + \beta^2 x_{t-2} + \dots = \mu / (1 - \beta) + u_t$$

MA(1) - invertovatel’nost’ procesu

- Dostali sme teda podmienku invertovatel’nosti MA(1) procesu: $|\beta| < 1$
- Iný zápis tejto podmienky:
  - máme proces $x_t = \mu + (1 - \beta L)u_t$
  - koreň polynómu $1 - \beta L$ je $1/\beta$
  - podmienka invertovatel’nosti teda hovorí, že koreň $1 - \beta L = 0$ musí byt’ v absolútnej hodnote väčší ako 1, teda mimo jednotkového kruhu

MA(1) - výpočet PACF

- Pripomeňme si všeobecný vzorec;

$$
\Phi_{kk} = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \dots & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 & \dots & \rho(2) \\ & \dots & \dots & \\ \rho(k-1) & \rho(k-2) & \dots & \rho(k) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \dots & \rho(k-1) \\ \rho(1) & 1 & \dots & \rho(k-2) \\ & \dots & \dots & \\ \rho(k-1) & \rho(k-2) & \dots & 1 \end{pmatrix}} \tag{1}
$$

- Pre MA(1) proces je $\rho(k) = 0$ pre $k = 2, 3, \dots$

MA(1) - výpočet PACF

- PACF sa (na rozdiel od AR procesu) nevynuluje:

$$
\begin{aligned}
\Phi_{11} &= \rho(1) \\
\Phi_{22} &= \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & \rho(2) \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 \end{pmatrix}} = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & 0 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 \end{pmatrix}} = \frac{-\rho(1)^2}{1-\rho(1)^2} \\
\Phi_{33} &= \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 & \rho(2) \\ \rho(2) & \rho(1) & \rho(3) \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(2) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) \\ \rho(2) & \rho(1) & 1 \end{pmatrix}} = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 & 0 \\ 0 & \rho(1) & 0 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & 0 \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) \\ 0 & \rho(1) & 1 \end{pmatrix}} = \frac{\rho(1)^3}{1-2\rho(1)^2} \\
\Phi_4 &= \frac{-\rho(1)^4}{(1-\rho(1)^2)^2-\rho(1)^2} \\
&\dots
\end{aligned}
$$

MA(1) - výpočet PACF - príklad

- Pre proces $x_t = u_t + \frac{1}{2}u_{t-1}$ sme vypočítali:

$$\rho(1) = 2/5, \quad \rho(k) = 0 \ (k = 2, 3, \dots)$$

- Počítajme teraz PACF:

$$\Phi_{11} = \rho(1) = 2/5$$

$$\Phi_{22} = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & \rho(2) \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 \end{pmatrix}} = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 2/5 \\ 2/5 & 0 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & 2/5 \\ 2/5 & 1 \end{pmatrix}} = \frac{-4/25}{21/25} = -4/21$$

$$\Phi_{33} = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 & \rho(2) \\ \rho(2) & \rho(1) & \rho(3) \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(2) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) \\ \rho(2) & \rho(1) & 1 \end{pmatrix}} = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 2/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & 2/5 & 0 \\ 2/5 & 1 & 2/5 \\ 0 & 2/5 & 1 \end{pmatrix}} = \frac{8/125}{17/25} = 8/85$$

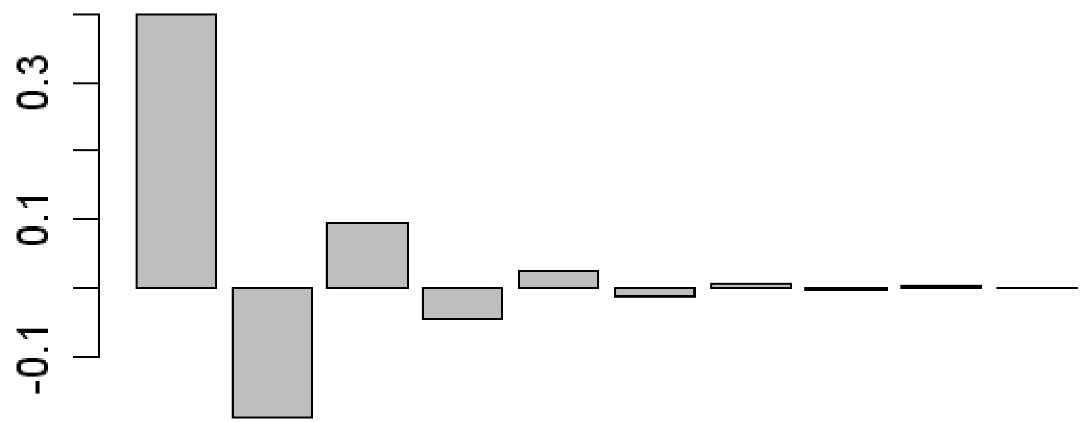
$\dots$

MA(1) - výpočet PACF - príklad

- Viac členov PACF v softvéri R:

```
R Console
> ARMAacf(ma=0.5,lag.max=10,pacf=TRUE)
 [1]  0.400000000 -0.190476190  0.094117647 -0.046920821  0.023443223
 [6] -0.011719465  0.005859464 -0.002929699  0.001464845 -0.000732422
```

Vo forme grafu:



- Zopakujme si - pre MA(2) proces:
  - ◇ ACF: od druhej hodnoty nulová
  - ◇ PACF: nevynuluje sa

Reálne dáta - ceny kakaa

- Dáta zo začiatku prednášky
- MA(1) model pre diferencie logaritmov cien:

Dependent Variable: D(LOG(PCOCOA))
Method: Least Squares
Date: 08/14/09 Time: 14:51
Sample (adjusted): 1960M02 2002M09
Included observations: 512 after adjustments
Convergence achieved after 6 iterations
MA Backcast: 1960M01

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.002454	0.003738	0.656614	0.5117
MA(1)	0.352651	0.041550	8.487292	0.0000

R-squared	0.112273	Mean dependent var	0.002398
Adjusted R-squared	0.110532	S.D. dependent var	0.066320
S.E. of regression	0.062548	Akaike info criterion	-2.701880
Sum squared resid	1.995221	Schwarz criterion	-2.685324
Log likelihood	693.6813	Hannan-Quinn criter.	-2.695390
F-statistic	64.50096	Durbin-Watson stat	1.987519
Prob(F-statistic)	0.000000		

Inverted MA Roots	-.35

Reálne dáta - ceny kakaa

- Invertovatel'nost':

MA Root(s)	Modulus	Cycle
-0.352651	0.352651	

No root lies outside the unit circle.
ARMA model is invertible.

- ACF rezíduí:

Correlogram of Residuals

Sample: 1960M02 2002M09
Included observations: 512
Q-statistic probabilities adjusted for 1 ARMA term(s)

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.003	0.003	0.0055	
		2	-0.008	-0.008	0.0371	0.847
		3	-0.014	-0.014	0.1382	0.933
		4	0.032	0.032	0.6730	0.880
		5	-0.057	-0.057	2.3587	0.670
		6	0.037	0.038	3.0731	0.689
		7	-0.062	-0.063	5.0529	0.537
		8	0.026	0.025	5.3941	0.612
		9	0.034	0.037	6.0032	0.647
		10	0.089	0.083	10.181	0.336
		11	-0.004	0.004	10.190	0.424
		12	-0.008	-0.015	10.224	0.510
		13	-0.015	-0.008	10.336	0.586
		14	-0.016	-0.024	10.471	0.655

VI.

Moving average proces q-teho rádu - MA(q)

MA(q) proces - definícia a vlastnosti

- Nech u_t je biely šum, potom

$$x_t = \mu + u_t - \beta_1 u_{t-1} - \beta_2 u_{t-2} - \ldots - \beta_q u_{t-q}$$

  sa nazýva moving average proces q-teho rádu - MA(q)

- Woldova reprezentácia: $x_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j u_{t-j}$
  MA(q) proces: $\psi_0 = 1, \psi_1 = -\beta_1, \ldots \psi_q = -\beta_q, \psi_j = 0$ pre $j > q$ $\rightarrow$ MA(q) proces je vždy stacionárny

- Momenty, ACF, PACF:

$$E[x_t] = \mu, \;\; Var[x_t] = (1 + \beta_1^2 + \ldots \beta_q^2)\sigma^2$$

$$Cov[x_t, x_{t+\tau}] = 0 \;\text{ pre } \tau = q+1, q+2, \ldots$$

$$\Rightarrow Cor[x_t, x_{t+\tau}] = 0 \;\text{ pre } \tau = q+1, q+2, \ldots$$

MA(q) proces - definícia a vlastnosti

- Výpočet prvých q autokorelácií (môžeme uvažovať $\mu = 0$):

$$
\begin{aligned}
Cov[x_t, x_{t+\tau}] &= E[(u_t - \beta_1 u_{t-1} - \ldots - \beta_q u_{t-q}) \times \\
&\qquad (u_{t+\tau} - \beta_1 u_{t+\tau-1} - \ldots - \beta_q u_{t+\tau-q})]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \; & E[u_t(u_{t+\tau} - \beta_1 u_{t+\tau-1} - \ldots - \beta_q u_{t+\tau-q})] \\
& -\beta_1 E[u_{t-1}(u_{t+\tau} - \beta_1 u_{t+\tau-1} - \ldots - \beta_q u_{t+\tau-q})] \\
& \ldots \\
& -\beta_q E[u_{t-q}(u_{t+\tau} - \beta_1 u_{t+\tau-1} - \ldots - \beta_q u_{t+\tau-q})]
\end{aligned}
$$

MA(q) proces - definícia a vlastnosti

- Výpočet prvých q autokorelácií - pokračovanie:

$$
\begin{aligned}
\tau = 1 \quad &\Rightarrow \quad \gamma(1) = (-\beta_1 + \beta_1\beta_2 + \ldots + \beta_{q-1}\beta_q)\sigma^2 \\
\tau = 2 \quad &\Rightarrow \quad \gamma(2) = (-\beta_2 + \beta_1\beta_3 + \ldots + \beta_{q-2}\beta_q)\sigma^2 \\
& \quad\quad \ldots \\
\tau = q \quad &\Rightarrow \quad \gamma(q) = (-\beta_q)\sigma^2
\end{aligned}
$$

- PACF - dosadením vypočítaných autokorelácií do všeobecného vzorca (1)

MA(q) proces - definícia a vlastnosti

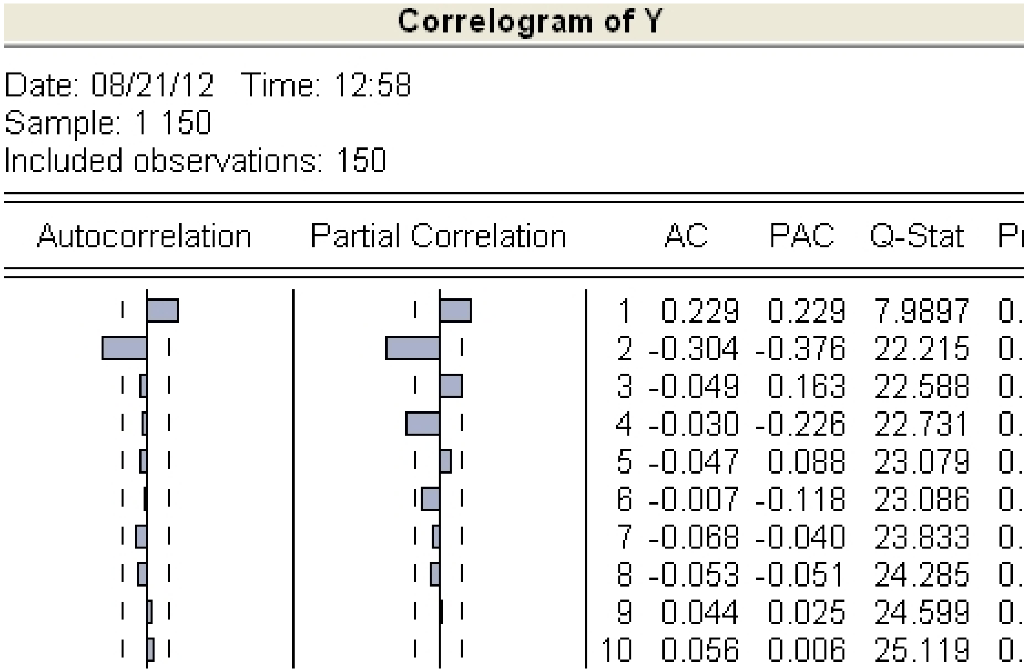
- Invertovateľnosť:

$$
\begin{aligned}
x_t &= \mu + u_t - \beta_1 u_{t-1} - \beta_2 u_{t-2} - \ldots - \beta_q u_{t-q} \\
x_t &= \mu + (1 - \beta_1 L - \ldots - \beta_q L^q) u_t
\end{aligned}
$$

- Existencia inverzného operátora $(1 - \beta_1 L - \ldots - \beta_q L^q)^{-1}$ - korene polynómu $1 - \beta_1 L - \ldots - \beta_q L^q = 0$ musia byť mimo jednotkového kruhu

Príklad 1: simulované dáta

- Výberová ACF a PACF z dát:



Correlogram of Y

Date: 08/21/12 Time: 12:58
Sample: 1 150
Included observations: 150

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Pr
		1	0.229	0.229	7.9897	0.
		2	-0.304	-0.376	22.215	0.
		3	-0.049	0.163	22.588	0.
		4	-0.030	-0.226	22.731	0.
		5	-0.047	0.088	23.079	0.
		6	-0.007	-0.118	23.086	0.
		7	-0.068	-0.040	23.833	0.
		8	-0.053	-0.051	24.285	0.
		9	0.044	0.025	24.599	0.
		10	0.056	0.006	25.119	0.

- PACF nie je po nejakom počte členov nulová → nebude to AR proces
- ACF má prvé dve hodnoty výraznejšie, ostatné skoro nulové → skúsime odhadnúť MA(2) proces

Príklad 1: simulované dáta

- Odhadnutý MA(2) proces:

Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Date: 08/21/12 Time: 12:59
Sample: 1 150
Included observations: 150
Convergence achieved after 9 iterations
MA Backcast: -1 0

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.659055	0.024362	27.05261	0.0000
MA(1)	0.457897	0.074472	6.148559	0.0000
MA(2)	-0.432538	0.074795	-5.782960	0.0000

R-squared	0.272208	Mean dependent var	0.658027
Adjusted R-squared	0.262306	S.D. dependent var	0.337583
S.E. of regression	0.289947	Akaike info criterion	0.381560
Sum squared resid	12.35818	Schwarz criterion	0.441772
Log likelihood	-25.61697	Hannan-Quinn criter.	0.406022
F-statistic	27.49037	Durbin-Watson stat	1.979532
Prob(F-statistic)	0.000000		

Inverted MA Roots	.47	-.93

- Stacionarita - MA proces je vždy stacionárny
- Invertovatel’nosť z koreňov - je invertovatel’ný

Príklad 1: simulované dáta

- ACF rezíduí, Q štatistika - v poriadku:

Correlogram of Residuals

Date: 08/21/12 Time: 12:59
Sample: 1 150
Included observations: 150
Q-statistic probabilities adjusted for 2 ARMA term(s)

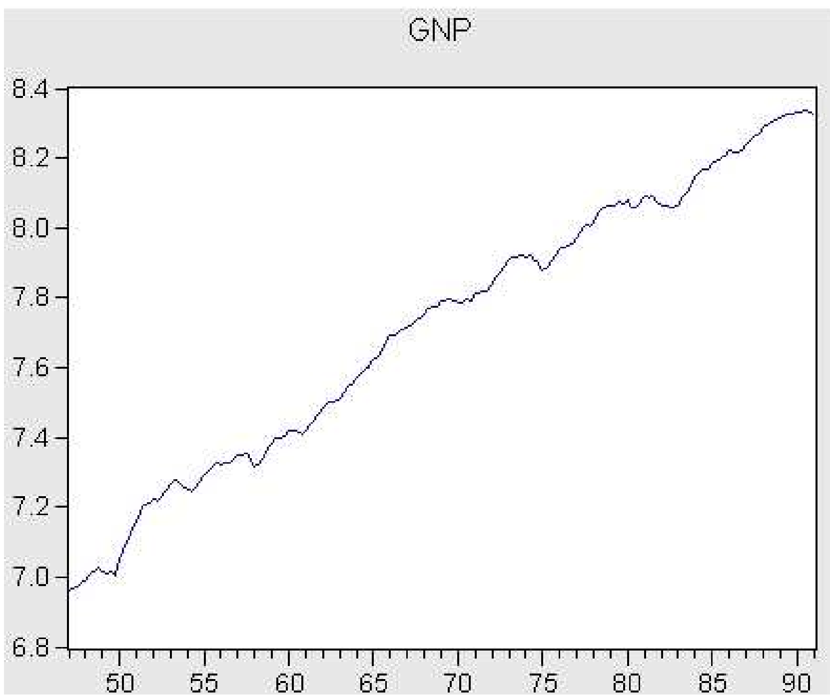
Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.008	0.008	0.0107	
		2	0.028	0.028	0.1357	
		3	-0.084	-0.085	1.2359	0.266
		4	0.023	0.024	1.3191	0.517
		5	-0.106	-0.103	3.1006	0.376
		6	0.023	0.017	3.1810	0.528
		7	-0.083	-0.076	4.2663	0.512
		8	-0.043	-0.061	4.5646	0.601
		9	0.054	0.068	5.0340	0.656
		10	-0.007	-0.033	5.0420	0.753
		11	0.081	0.082	6.1175	0.728

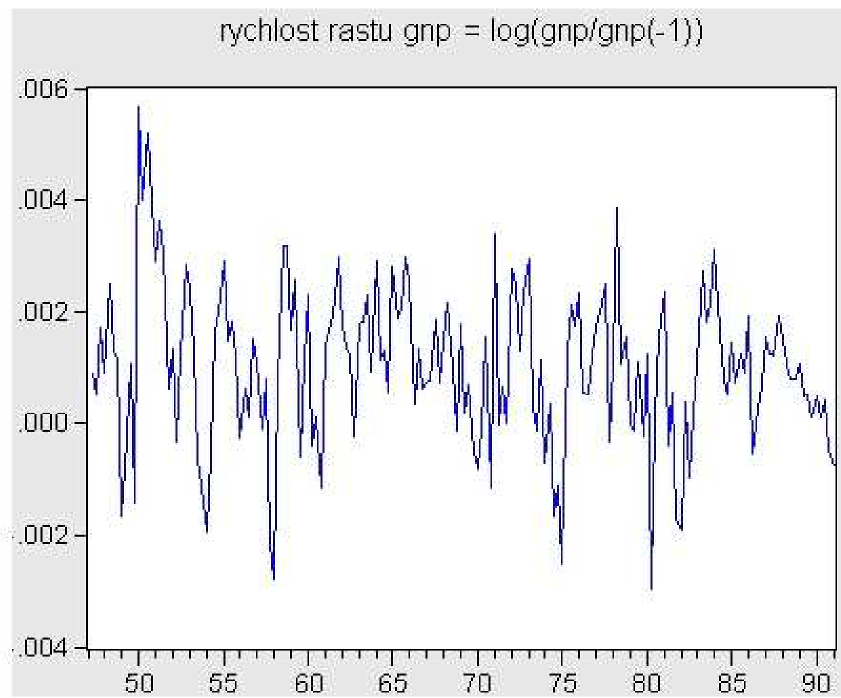
Príklad 2: rýchlosť rastu HDP

R.H. Shumway, D.S. Stoffer: **Time Series Analysis and Its Applicationss.** Springer, 2000.

Example 2.32, 2.33

- HNP USA, rýchlosť rastu: $y_t = \ln \left(gnp_t / gnp_{t-1} \right)$
- Štvrťročné dáta, 19747q1-1991q1, sezónne očitstené





Príklad 2: rýchlosť rastu HDP

- Výberová ACF a PACF:

Correlogram of Y

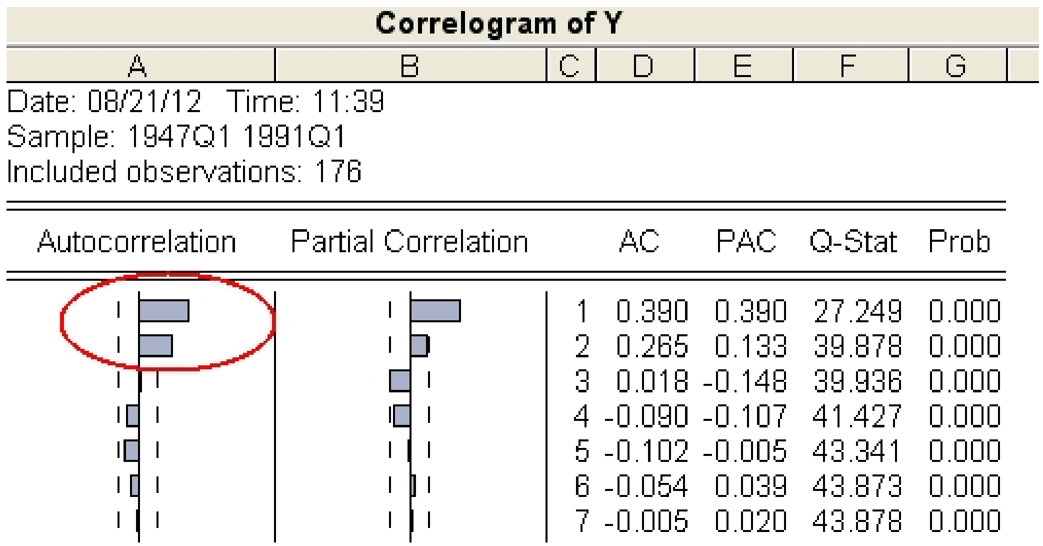
Date: 08/21/12 Time: 11:39
Sample: 1947Q1 1991Q1
Included observations: 176

	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.390	0.390	27.249	0.000
2	0.265	0.133	39.878	0.000
3	0.018	-0.148	39.936	0.000
4	-0.090	-0.107	41.427	0.000
5	-0.102	-0.005	43.341	0.000
6	-0.054	0.039	43.873	0.000
7	-0.005	0.020	43.878	0.000
8	-0.057	-0.100	44.480	0.000
9	-0.054	-0.039	45.025	0.000
10	0.025	0.108	45.143	0.000
11	-0.014	-0.034	45.179	0.000
12	-0.082	-0.145	46.473	0.000
13	-0.093	-0.046	48.137	0.000

- Nie je to také jednoznačné ako v predchádzajúcich príkladoch

Príklad 2: rýchlosť rastu HDP

- [Shumway, Stoffer; Example 2.32]:
  "Inspecting the sample ACF and PACF we might feel that the ACF is cutting off a lag 2 and the PACF is tailing off"


Correlogram of Y

A	B	C	D	E	F	G

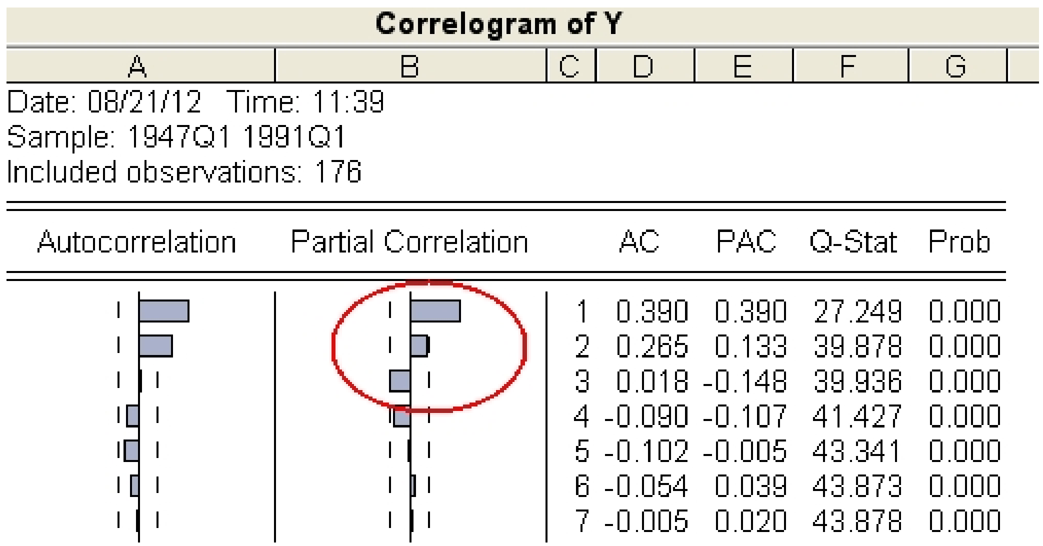
Date: 08/21/12 Time: 11:39
Sample: 1947Q1 1991Q1
Included observations: 176

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.390	0.390	27.249	0.000
		2	0.265	0.133	39.878	0.000
		3	0.018	-0.148	39.936	0.000
		4	-0.090	-0.107	41.427	0.000
		5	-0.102	-0.005	43.341	0.000
		6	-0.054	0.039	43.873	0.000
		7	-0.005	0.020	43.878	0.000

- To by znamenalo MA(2) model

Príklad 2: rýchlosť rastu HDP

- Ale tiež [Shumway, Stoffer; Example 2.32]:
"We will also suggest that it appears that the ACF is tailing off and the PACF is cutting off at lag 3"



Correlogram of Y

Date: 08/21/12 Time: 11:39
Sample: 1947Q1 1991Q1
Included observations: 176

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.390	0.390	27.249	0.000
		2	0.265	0.133	39.878	0.000
		3	0.018	-0.148	39.936	0.000
		4	-0.090	-0.107	41.427	0.000
		5	-0.102	-0.005	43.341	0.000
		6	-0.054	0.039	43.873	0.000
		7	-0.005	0.020	43.878	0.000

- To by znamenalo AR(3) model
- Odhadneme oba modely.

Príklad 2: rýchlosť rastu HDP

- MA(2) model - výstup:

Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Date: 08/21/12 Time: 11:40
Sample (adjusted): 1947Q2 1991Q1
Included observations: 176 after adjustments
Convergence achieved after 10 iterations
MA Backcast: 1946Q4 1947Q1

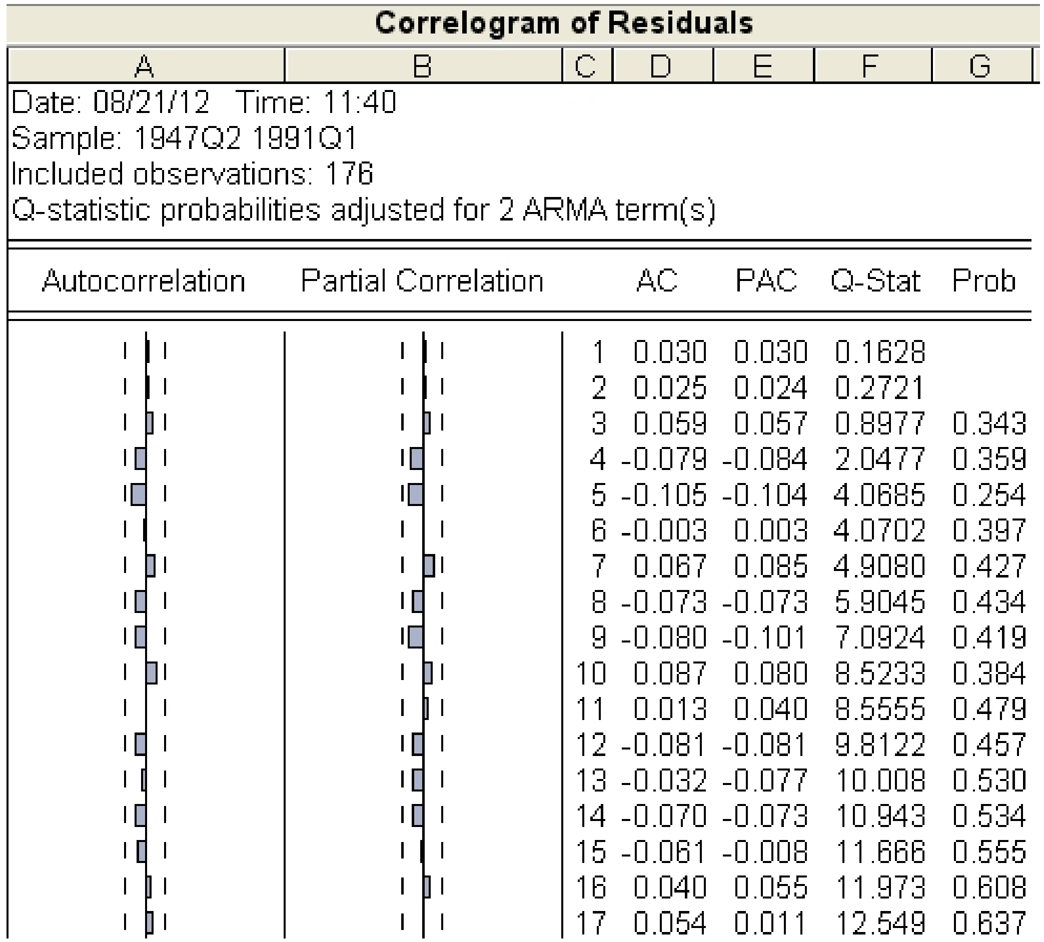
	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.001009	0.000157	6.443225	0.0000
MA(1)	0.319143	0.073009	4.371266	0.0000
MA(2)	0.286871	0.073115	3.923554	0.0001

R-squared	0.180811	Mean dependent var	0.001015
Adjusted R-squared	0.171341	S.D. dependent var	0.001424
S.E. of regression	0.001296	Akaike info criterion	-10.44236
Sum squared resid	0.000291	Schwarz criterion	-10.38832
Log likelihood	921.9276	Hannan-Quinn criter.	-10.42044
F-statistic	19.09224	Durbin-Watson stat	1.933744
Prob(F-statistic)	0.000000		

Inverted MA Roots	-.16+.51i	-.16-.51i

Príklad 2: rýchlosť rastu HDP

- MA(2) model - rezíduá:



Correlogram of Residuals

A	B	C	D	E	F	G

Date: 08/21/12 Time: 11:40
Sample: 1947Q2 1991Q1
Included observations: 176
Q-statistic probabilities adjusted for 2 ARMA term(s)

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.030	0.030	0.1628	
		2	0.025	0.024	0.2721	
		3	0.059	0.057	0.8977	0.343
		4	-0.079	-0.084	2.0477	0.359
		5	-0.105	-0.104	4.0685	0.254
		6	-0.003	0.003	4.0702	0.397
		7	0.067	0.085	4.9080	0.427
		8	-0.073	-0.073	5.9045	0.434
		9	-0.080	-0.101	7.0924	0.419
		10	0.087	0.080	8.5233	0.384
		11	0.013	0.040	8.5555	0.479
		12	-0.081	-0.081	9.8122	0.457
		13	-0.032	-0.077	10.008	0.530
		14	-0.070	-0.073	10.943	0.534
		15	-0.061	-0.008	11.666	0.555
		16	0.040	0.055	11.973	0.608
		17	0.054	0.011	12.549	0.637

- CVIČENIE: stacionarita, invertovateľnosť, autokorelácia rezíduí → je model vyhovujúci?

Príklad 2: rýchlosť rastu HDP

- AR(3) model - výstup:

Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Date: 08/21/12 Time: 11:41
Sample (adjusted): 1948Q1 1991Q1
Included observations: 173 after adjustments
Convergence achieved after 3 iterations

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.001006	0.000165	6.099658	0.0000
AR(1)	0.362642	0.076142	4.762707	0.0000
AR(2)	0.186458	0.079817	2.336061	0.0207
AR(3)	-0.150362	0.076362	-1.969069	0.0506

R-squared	0.188922	Mean dependent var	0.001015
Adjusted R-squared	0.174524	S.D. dependent var	0.001434
S.E. of regression	0.001303	Akaike info criterion	-10.42509
Sum squared resid	0.000287	Schwarz criterion	-10.35218
Log likelihood	905.7701	Hannan-Quinn criter.	-10.39551
F-statistic	13.12154	Durbin-Watson stat	2.024327
Prob(F-statistic)	0.000000		

Inverted AR Roots	.45+.29i	.45-.29i	-.53

Príklad 2: rýchlosť rastu HDP

- AR(3) model - rezíduá:

Correlogram of Residuals

Date: 08/21/12 Time: 11:41
Sample: 1948Q1 1991Q1
Included observations: 173
Q-statistic probabilities adjusted for 3 ARMA term(s)

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	-0.015	-0.015	0.0403	
		2	0.009	0.009	0.0556	
		3	0.049	0.050	0.4879	
		4	-0.089	-0.088	1.8968	0.168
		5	-0.050	-0.053	2.3387	0.311
		6	0.001	-0.001	2.3389	0.505
		7	0.066	0.077	3.1285	0.537
		8	-0.062	-0.064	3.8331	0.574
		9	-0.107	-0.123	5.9386	0.430
		10	0.088	0.080	7.3911	0.389
		11	0.016	0.045	7.4368	0.490
		12	-0.076	-0.077	8.5313	0.482
		13	-0.026	-0.072	8.6616	0.564
		14	-0.076	-0.078	9.7699	0.551
		15	-0.057	-0.024	10.395	0.581
		16	0.046	0.055	10.799	0.628
		17	0.047	0.013	11.227	0.668
		18	0.061	0.038	11.951	0.683

- CVIČENIE: stacionarita, invertovateľnosť, autokorelácia rezíduí → je model vyhovujúci?

Príklad 2: rýchlosť rastu HDP

- Otázky k odhadnutým modelom:
  1. *Ako môžeme mať pre dáta dva rôzne modely - MA(2) a AR(3)?*
     Nie sú "až tak rôzne" - čiastočne ukážeme teraz, čiastočne na teoretickom cvičení.
  2. *Nedajú sa AR a MA členy skombinovať?*
     Dajú, dostaneme tak ARMA modely → ďalšia téma prednášok.
  3. *Ako si teda vybrať model?*
     Týmto sa budeme zaoberať na praktickom cvičení pri počítači.

Príklad 2: rýchlosť rastu HDP

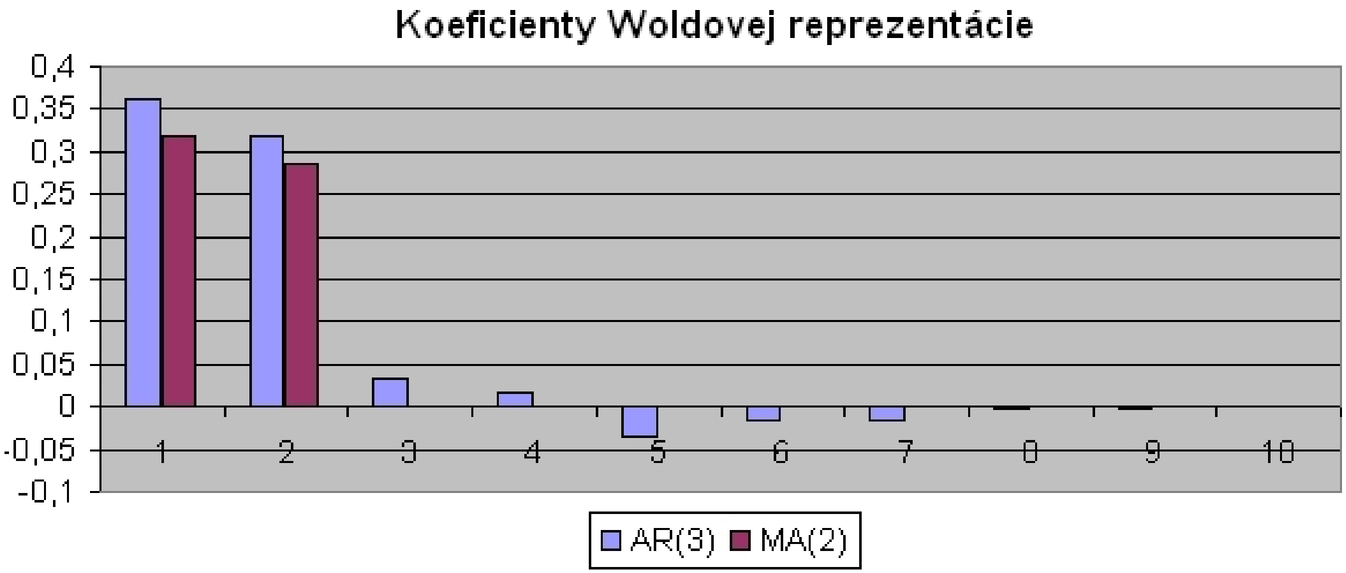
- K otázke "podobnosti získaných AR(3) a MA(2) procesov":
  - oba procesy sú stacionárne $\rightarrow$ dajú sa napísať v tvare Woldovej reprezentácie $x_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j u_{t-j}$
  - MA(2) proces v tom tvare už je: $\psi_0 = 1$, $\psi_1 = 0.319143$, $\psi_2 = 0.286871$, ostatné $\psi_k = 0$
  - AR(3) proces sa dá transformovať
- Nájdenie Woldovej reprezentácie procesu:
  - výpočet na teoretickom cvičnení
  - teraz výsledok získaný pomocou R-ka: príkaz **ARMAtoMA** z balíka **stats**

Príklad 2: rýchlosť rastu HDP

- AR(3) model - koeficienty Woldovej reprezentácie:

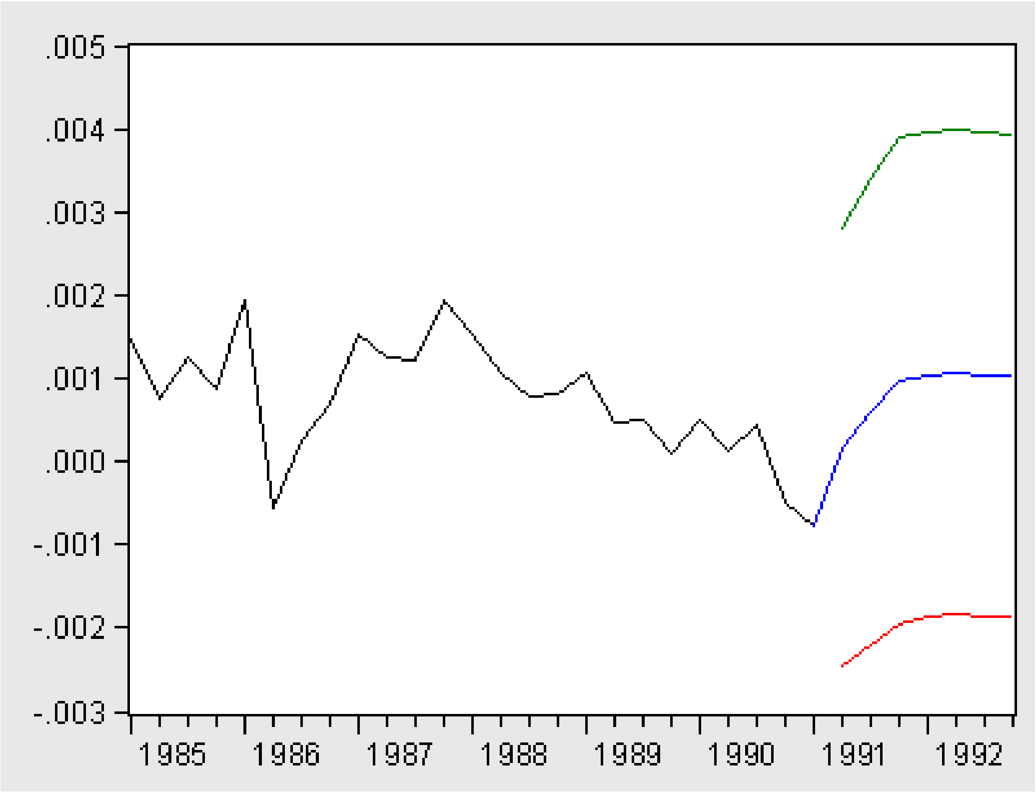
```
> ARMAtoMA(ar=c(0.362642,0.186458,-0.150362),lag.max=10)
 [1]  0.362642000  0.317967220  0.032563771  0.016568946 -0.035729816
 [6] -0.014764073 -0.014507523 -0.002641510 -0.001443011  0.001165553
```

- Porovnanie MA(2) a AR(3) modelu:



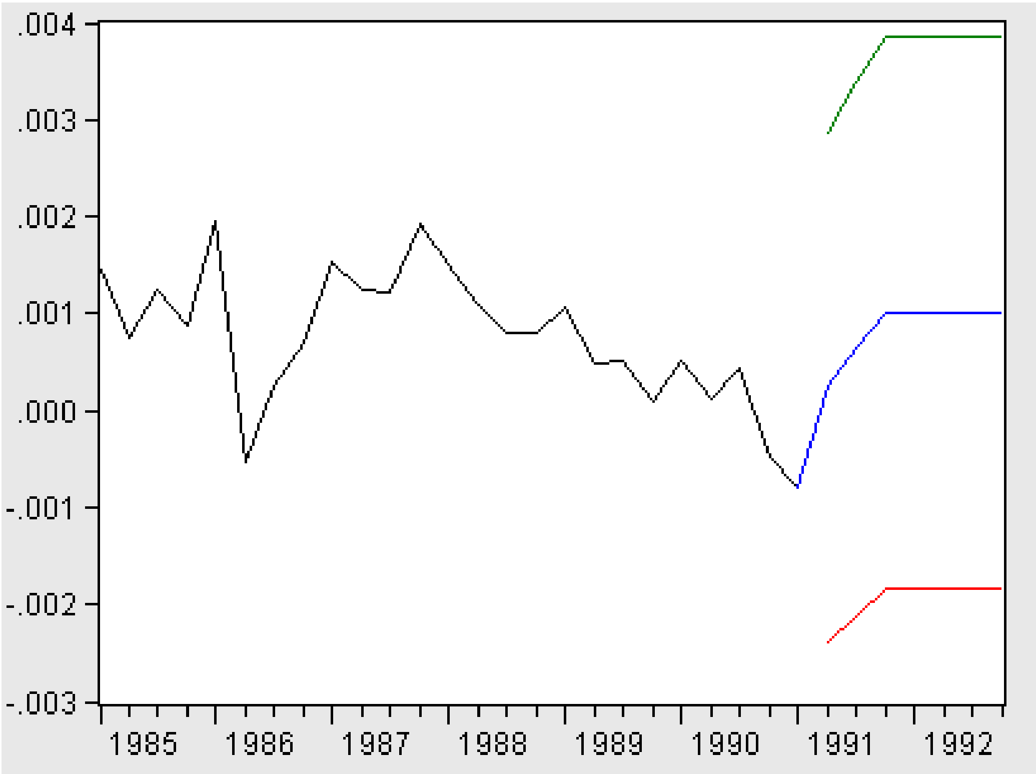
Príklad 2: rýchlosť rastu HDP

- Predikcie v AR(3) modeli:



Príklad 2: rýchlosť rastu HDP

- Predikcie v MA(2) modeli:



Predikcie v MA modeli

- MA(q) model:

$$x_t = \mu + u_t - \beta_1 u_{t-1} - \beta_2 u_{t-2} - \ldots - \beta_q u_{t-q}$$

- Ak by sme predikcie robili tak, že hodnoty bieleho šumu u by sme nahradili nulou, tak predikcie
  - ◇ by nezáviseli od MA koeficientov $\beta_1, \beta_2, \ldots$
  - ◇ by boli konštantné
- Z predchádzajúceho obrázku → takto sa to nerobí
- Ako teda: už realizované hodnoty u nenahradíme nulou, ale ich odhadneme z pozorovaných dát x

Predikcie - všeobecne

- Sme v čase t, chceme predikciu hodnoty $x_{t+\tau}$, t. j. hodnotu procesu o τ období.
- Označme túto predikciu $\hat{x}_t(\tau)$, teda
  - ◇ index t označuje čas, v ktorom konštruujeme predikciu
  - ◇ argument τ označuje, na koľko období dopredu tá predikcia je
- Predikciou bude očakávaná hodnota procesu v tom čase, pri danej informácii, ktorú máme k dispozícii:

$$\hat{x}_t(\tau) = E_t[x_{t+\tau}]$$

(index t vo výraze E_t znamená, že strednú hodnotu počítame v čase t)

Predikcie pre AR proces

- AR proces: takto počítané predikcie sa zhodujú s intuíciou.
- Majme AR(p) proces
$$x_t = \delta + \alpha_1 x_{t-1} + \ldots + \alpha_p x_{t-p} + u_t.$$
Potom:
$$\begin{aligned} x_{t+\tau} &= \delta + \alpha_1 x_{t+\tau-1} + \ldots + \alpha_p x_{t+\tau-p} + u_{t+\tau}, \\ \underbrace{E_t[x_{t+\tau}]}_{\hat{x}_t(\tau)} &= \delta + \alpha_1 E_t[x_{t+\tau-1}] + \ldots + \alpha_p E_t[x_{t+\tau-p}] \\ &\quad + \underbrace{E_t[u_{t+\tau}]}_{0} \end{aligned}$$
pričom
$$E_t[x_{t+s}] = \begin{cases} \hat{x}_t(s) & \text{pre } s > 0 \\ x_{t+s} & \text{pre } s \leq 0 \end{cases}$$

Predikcie pre MA proces

- Majme MA(1) proces

$$x_t = \mu + u_t - \beta u_{t-1}$$

a počítajme predikcie $\hat{x}_t(\tau)$:

$$\begin{aligned} x_{t+s} &= \mu + u_{t+s} - \beta u_{t+s-1}, \\ \underbrace{E_t[x_{t+s}]}_{\hat{x}_t(s)} &= \mu + \underbrace{E_t[u_{t+s}]}_{0} - \beta \underbrace{E_t[u_{t+s-1}]}_{u_t \text{ pre } s=1, \text{ inak } 0} \end{aligned}$$

Teda:

$$\hat{x}_t(s) = \begin{cases} \mu - \beta u_t & \text{pre } s = 1 \\ \mu & \text{pre } s = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

- CVIČENIE: Dokážte, že pre MA(q) proces platí $\hat{x}_t(s) = \mu$ pre $s > q$ a že pre $s \leq q$ predikcie obsahujú realizované hodnoty bieleho šumu u

Predikcie pre MA proces

- Predikcie pre MA(1) proces $x_t = \mu + u_t - \beta u_{t-1}$ sú

$$\hat{x}_t(s) = \begin{cases} \mu - \beta u_t & \text{pre } s = 1 \\ \mu & \text{pre } s = 2, 3, \dots \end{cases}$$

  - obsahujú hodnotu bieleho šumu u_t. Táto hodnota už bola v čase konštrukcie predikcií realizovaná, nie sme však schopní ju pozorovať.
- Cvičenie z predch. slajdu $\Rightarrow$ podobná situácia nastáva pre ľubovoľný MA(q) proces
- Ako prakticky počítať predikcie?
  Myšlienka: vyjadríme u_t pomocou hodnôt procesu x
- Tento výpočet si ukážeme na MA(1) procese

Predikcie pre MA(1) proces

- Vyjadrujeme teda u_t pomocou $x_1, x_2, \ldots, x_t$
- Využijeme pritom:
  - Pre MA(1) sme odvodili

$$\hat{x}_t(1) = \mu - \beta u_t \tag{2}$$

  - Pre predikčnú chybu platí

$$x_t - \hat{x}_{t-1}(1) = u_t \tag{3}$$

- Budeme postupne počítať $\hat{x}_t(1)$ pre $t = 0, 1, 2, \ldots$

$$\hat{x}_0(1) \overset{(2)}{=} \mu - \beta u_0 \tag{4}$$

Predikcie pre MA(1) proces

- Pre $t = 1$:

$$\begin{aligned}
\hat{x}_1(1) &\overset{(2)}{=} \mu - \beta u_1 \\
&\overset{(3)}{=} \mu - \beta[x_1 - \hat{x}_0(1)] \\
&\overset{(4)}{=} \mu - \beta[x_1 - (\mu - \beta u_0)] \\
&= \mu(1+\beta) - \beta x_1 - \beta^2 u_0 \qquad (5)
\end{aligned}$$

- Pre $t = 2$:

$$\begin{aligned}
\hat{x}_2(1) &\overset{(2)}{=} \mu - \beta u_2 \\
&\overset{(3)}{=} \mu - \beta[x_2 - \hat{x}_1(1)] \\
&\overset{(5)}{=} \mu - \beta[x_2 - (\mu(1+\beta) - \beta x_1 - \beta^2 u_0)] \\
&= \mu(1+\beta+\beta^2) - \beta x_2 - \beta^2 x_1 - \beta^3 u_0 \qquad (6)
\end{aligned}$$

Predikcie pre MA(1) proces

- Pre všeobecné t:

$$\begin{aligned}\hat{x}_t(1) &= \mu(1+\beta+\beta^2+\ldots\beta^t) \\ &\quad -\beta x_t - \beta^2 x_{t-1} - \ldots - \beta^t x_1 - \beta^{t+1} u_0\end{aligned}$$

- Aj tu vystupuje nepozorovateľná hodnota u_0, ale vplyv člena $\beta^{t+1} u_0$ ide k nule pre $t \to \infty$ (kde t je počet dát) $\Rightarrow$ môžeme ho zanedbať
- Dostaneme:

$$\begin{aligned}\hat{x}_t(1) &= \mu(1+\beta+\beta^2+\ldots\beta^t) \\ &\quad -\beta x_t - \beta^2 x_{t-1} - \ldots - \beta^t x_1\end{aligned}$$

- Ako sme už povedali, $\hat{x}_t(s) = \mu$ pre $s = 2, 3, \ldots$