

Príklady na precvičenie 2

ARMA procesy: teoretické úlohy z minuloročných skúšok

Beáta Stehlíková
Časové rady 2013/2014

1. [SKÚŠKA 18.12.2012] Uvažujme ARMA proces

$$x_t = \frac{2}{3}x_{t-1} + u_t + \frac{1}{3}u_{t-1}, \quad (1)$$

kde u je biely šum.

- (a) [3 body] Ukážte, že proces (1) je stacionárny a invertovateľný.
(b) [12 bodov] Odvodte prvé tri autokorelácie procesu (1), teda $\rho(1), \rho(2), \rho(3)$.
(c) [12 bodov] Odvodte všeobecný vzorec pre druhý člen parciálnej autokorelačnej funkcie ľubovoľného stacionárneho procesu, t.j. $PACF(2)$. Použite ho na výpočet $PACF(2)$ pre daný proces (1).

2. [SKÚŠKA 15.1.2012] Uvažujme ARMA proces

$$\left(1 - \frac{2}{3}L\right)x_t = \left(1 - \frac{1}{2}L\right)\left(1 - \frac{1}{4}L\right)u_t, \quad (2)$$

kde u je biely šum.

- (a) [3 body] Ukážte, že proces (2) je stacionárny a invertovateľný.
(b) [12 bodov] Zo stacionarity vyplýva, že (2) sa dá zapísať v tvare Woldovej reprezentácie

$$x_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j u_{t-j}.$$

Vypočítajte μ a prvé štyri koeficienty¹ ψ_j (teda $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3$)

3. [SKÚŠKA 15.1.2012] Uvažujme invertovateľný MA proces

$$x_t = u_t - \beta_1 u_{t-1} - \beta_2 u_{t-2}$$

kde u je biely šum.

Rozhodnite, či sú nasledovné tvrdenia pravdivé. Odpoveď zakrúžkujte, zdôvodnenia/dôkazy nepíšte.

¹ich hodnoty nevyčísľujte, nechajte ich v tvare napr. $\frac{(2/3)^2}{1-(1/4)}$.

Korene polynómu $1 + \beta_1x + \beta_2x^2$ sú v absolútnej hodnote menšie ako 1.	áno/nie
Autokorelačná funkcia ρ má len konečne veľa nenulových členov.	áno/nie
Woldova reprezentácia $x_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j u_{t-j}$ obsahuje nekonečne veľa nenulových sčítancov.	áno/nie

Hodnotenie:

Správna odpoveď +2 body, nesprávna odpoveď -2 body, žiadna odpoveď 0 bodov.

4. [VZOROVÁ PÍ SOMKA] Uvažujme stacionárny AR proces

$$x_t = \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \alpha_3 x_{t-3} + u_t,$$

kde u je biely šum.

Rozhodnite, či sú nasledovné tvrdenia pravdivé. Odpoveď zakrúžkujte, zdôvodnenia/dôkazy nepíšte.

Korene polynómu $1 - \alpha_1x - \alpha_2x^2 - \alpha_3x^3$ sú v absolútnej hodnote menšie ako 1.	áno/nie
Korene polynómu $1 - \alpha_1x - \alpha_2x^2 - \alpha_3x^3$ sú v absolútnej hodnote väčšie ako 1.	áno/nie
Autokorelačná funkcia ρ spĺna pre $s \geq 3$ diferenčnú rovnicu $\rho(s) = \alpha_1\rho(s-1) + \alpha_2\rho(s-2) + \alpha_3\rho(s-3)$.	áno/nie
Woldova reprezentácia $x_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j u_{t-j}$ obsahuje len konečne veľa nenulových sčítancov.	áno/nie
Proces je invertovateľný.	áno/nie

Hodnotenie:

Správna odpoveď +2 body, nesprávna odpoveď -2 body, žiadna odpoveď 0 bodov.