

ARMA modely
časť 3: zmiešané modely (ARMA)

Beáta Stehlíková
Časové rady, FMFI UK, 2013/2014

ARMA modely - motivácia I.

- Odhadneme ACF a PACF pre dáta a nepodobajú sa ani na AR, ani na MA proces
- Chceli by sme skúsiť **skombinovať** AR a MA členy

ARMA modely - motivácia II.

Majme stacionárny a invertovateľný proces:

| | AR(p) | MA(q) |
|------------------------------|------------------|------------------|
| ACF(τ) | nenulová | 0 pre $\tau > q$ |
| PACF(τ) | 0 pre $\tau > p$ | nenulová |
| AR(∞) reprezentácia | konečný súčet | nekonečný súčet |
| MA(∞) repr. (Wold) | nekonečný súčet | konečný súčet |

- Žiadny z týchto modelov nepripúšťa **možnosť**, že sa ani ACF, ani PACF nevynuluje po konečnom počte členov
- Na to by sme potrebovali proces s nekonečnou AR aj MA reprezentáciou
- Túto vlastnosť majú **zmiešané ARMA modely** (zmiešané = AR aj MA členy)

VII.

Model ARMA(1,1)

ARMA(1,1) - definícia

- Nech u_t je biely šum, definujeme

$$x_t = \delta + \alpha x_{t-1} + u_t - \beta u_{t-1},$$

pričom $\alpha \neq \beta$. Proces x_t sa potom nazýva **ARMA(1,1) proces**.

- Zápis pomocou operátora posunu L :

$$\begin{aligned} (x_t - \alpha x_{t-1}) &= \delta + (u_t - \beta u_{t-1}) \\ (1) \quad (1 - \alpha L)x_t &= \delta + (1 - \beta L)u_t \end{aligned}$$

ARMA(1,1) - Woldova repr. a stacionarita

- Vyjadríme z (1) proces x_t :

$$(2) \quad x_t = (1 - \alpha L)^{-1} \delta + (1 - \alpha L)^{-1} (1 - \beta L) u_t$$

- Vieme, že $(1 - \alpha L)^{-1}$ existuje, ak $|\alpha| < 1$ a v tomto prípade platí:

$$(1 - \alpha L)^{-1} = 1 + \alpha L + \alpha^2 L^2 + \dots$$

- Dosadíme do (2):

$$\begin{aligned} x_t &= \delta / (1 - \alpha) + (1 + \alpha L + \alpha^2 L^2 + \dots) (1 - \beta L) u_t \\ &= \delta / (1 - \alpha) + u_t + (\alpha - \beta) u_{t-1} + \alpha(\alpha - \beta) u_{t-2} + \dots \end{aligned}$$

teda vo Woldovej reprezentácii

$$\psi_0 = 1, \psi_1 = \alpha(\alpha - \beta), \psi_2 = \alpha^2(\alpha - \beta), \dots, \psi_k = \alpha^k(\alpha - \beta), \dots$$

- Podmienka stacionarity $|\alpha| < 1$ sa dá zapísať aj tak, že koreň polynómu $1 - \alpha L$ musí byť mimo jednotkového kruhu

ARMA(1,1) - k podmienke $\alpha \neq \beta$

- Máme Woldovu reprezentáciu):

$$\begin{aligned}x_t &= \delta/(1 - \alpha) + (1 + \alpha L + \alpha^2 L^2 + \dots)(1 - \beta L)u_t \\ &= \delta/(1 - \alpha) + u_t + (\alpha - \beta)u_{t-1} + \alpha(\alpha - \beta)u_{t-2} + \dots\end{aligned}$$

- Ak by bolo $\alpha = \beta$, tak

$$x_t = \delta/(1 - \alpha) + u_t,$$

teda náš proces je iba konštanta + biely šum

ARMA(1,1) - invertovateľnosť

- Vyjadríme z (1) proces bieleho šumu u_t , aby sme dostali proces x_t vyjadrený pomocou jeho starších hodnôt + aktuálnej hodnoty bieleho šumu:

$$-\delta + (1 - \alpha L)x_t = (1 - \beta L)u_t$$

$$-(1 - \beta L)^{-1}\delta + (1 - \beta L)^{-1}(1 - \alpha L)x_t = u_t$$

- Vieme, že inverzný operátor $(1 - \beta L)^{-1}$ existuje, ak $|\beta| < 1$
- Táto podmienka invertovateľnosti sa dá zapísať aj tak, že koreň polynómu $1 - \beta L$ musí byť mimo jednotkového kruhu

ARMA(1,1) - zhrnutie

- Pripomeňme si proces (1):

$$(1 - \alpha L)x_t = \delta + (1 - \beta L)u_t$$

- Podmienka stacionarity:
 - ◇ koreň polynómu $1 - \alpha L$ je mimo jednotkového kruhu
 - ◇ závisí teda iba od AR časti procesu
- Podmienka invertovateľnosti:
 - ◇ koreň polynómu $1 - \beta L$ je mimo jednotkového kruhu
 - ◇ závisí teda iba od MA časti procesu

VIII.

Model ARMA(p, q)

ARMA(p,q) - definícia

- Nech u_t je biely šum, definujeme

$$x_t = \delta + \alpha_1 x_{t-1} + \dots + \alpha_p x_{t-p} + u_t - \beta_1 u_{t-1} - \dots - \beta_q u_{t-q},$$

tento proces sa potom nazýva **ARMA(p,q) proces**.

- Zápis pomocou operátora posunu L :

$$\begin{aligned} (1 - \alpha_1 L - \dots - \alpha_p L^p)x_t &= \delta + (1 - \beta_1 L - \dots - \beta_q L^q)u_t \\ (3) \quad \alpha(L)x_t &= \delta + \beta(L)u_t \end{aligned}$$

pričom požadujeme, aby polynómy $\alpha(L)$, $\beta(L)$ nemali spoločný koreň (podrobnejšie o tejto podmienke neskôr)

ARMA(p,q) - Woldova repr., stacionarita

- Z rovnice (3) vyjadríme x_t :

$$\alpha(L)x_t = \delta + \beta(L)u_t$$

$$x_t = \alpha(L)^{-1}\delta + \alpha(L)^{-1}\beta(L)u_t$$

- Potrebujeme $\alpha(L)^{-1}\beta(L)$:

$$\alpha(L)^{-1}\beta(L) = \psi_0 + \psi_1L + \psi_2L^2 + \dots$$

$$\beta(L) = \alpha(L)(\psi_0 + \psi_1L + \psi_2L^2 + \dots)$$

$$(1 - \beta_1L - \dots - \beta_qL^q) = (1 - \alpha_1L - \dots - \alpha_pL^p) \times \\ \times (\psi_0 + \psi_1L + \psi_2L^2 + \dots)$$

Roznásobíme a porovnáme koeficienty pri L^j

ARMA(p,q) - Woldova repr., stacionarita

- Pre koeficinity ψ_j Woldovej reprezentácie dostaneme:

- ◇ diferenčnú rovnicu

$$\psi_k - \alpha_1\psi_{k-1} - \dots - \alpha_p\psi_{k-p} = 0$$

- ◇ začiatkové podmienky

- Kvôli konvergencii radu $\sum \phi_j^2$ musia byť korene charakteristického polynómu $\lambda^p - \alpha_1\lambda^{p-1} - \dots - \alpha_p = 0$ vnútri, t.j. korene $\alpha(L) = 0$ mimo jednotkového kruhu

ARMA(p,q) - invertovateľnosť

- Z rovnice (3) vyjadríme u_t :

$$\alpha(L)x_t = \delta + \beta(L)u_t$$

$$\beta(L)u_t = -\delta + \alpha(L)x_t$$

$$u_t = -\beta(L)^{-1}\delta + \beta(L)^{-1}\alpha(L)x_t$$

- Toto sa dá spraviť, ak existuje inverzný operátor $\beta(L)^{-1}$, čo je vtedy, keď **korene $\beta(L) = 0$ sú mimo jednotkového kruhu**

ARMA(p,q) - momenty

- Stredná hodnota: μ :

$$x_t = \delta + \alpha_1 x_{t-1} + \dots + \alpha_p x_{t-p} + u_t - \beta_1 u_{t-1} - \dots - \beta_q u_{t-q}$$

$$\mu = \delta + \alpha_1 \mu + \dots + \alpha_p \mu \Rightarrow \mu = \frac{\delta}{1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_p}$$

- Variancia, autokovariancie - nech $\delta = 0$:

$$x_t = \alpha_1 x_{t-1} + \dots + \alpha_p x_{t-p} + u_t - \beta_1 u_{t-1} - \dots - \beta_q u_{t-q}$$

$$/ \quad \times x_{t-s}, E[.]$$

$$\begin{aligned} \gamma(s) = & \alpha_1 \gamma(s-1) + \dots + \alpha_p \gamma(s-p) \\ & + E[u_t x_{t-s}] - \beta_1 E[u_{t-1} x_{t-s}] - \dots - \beta_q E[u_{t-q} x_{t-s}] \end{aligned}$$

ARMA(p, q) - momenty

- Pre $s > q$ sú všetky stredné hodnoty

$$E[u_t x_{t-s}], E[u_{t-1} x_{t-s}], \dots, E[u_{t-p} x_{t-s}]$$

nulové \Rightarrow pre $s > q \wedge s > p$ (lebo na použitie nasledujúcej diferenčnej rovnice potrebujeme aspoň p začiatkových hodnôt) máme diferenčnú rovnicu pre autokovariancie:

$$(4) \quad \gamma(s) = \alpha_1 \gamma(s-1) + \dots + \alpha_p \gamma(s-p)$$

- **ACF** - vydelením (4) varianciou $\gamma(0)$ dostaneme diferenčnú rovnicu pre autokorelácie $\rho(s)$,
 $s > \max(p, q)$:

$$(5) \quad \rho(s) = \alpha_1 \rho(s-1) + \dots + \alpha_p \rho(s-p)$$

- rovnaká diferenčná rovnica ako pre proces bez MA časti, začiatkové pomienky však MA koeficienty obsahujú

Príklad: ARMA(1,1)

- Podrobnejší výpočet pre ARMA(1,1)
- Stredná hodnota μ :

$$x_t = \delta + \alpha x_{t-1} + u_t - \beta u_{t-1} \quad / \quad E[.]$$

$$\mu = \delta + \alpha\mu + 0 \Rightarrow \mu = \frac{\delta}{1 - \alpha}$$

- Variancia, autokovariancie - pre $\delta = 0$:

$$x_t = \alpha x_{t-1} + u_t - \beta u_{t-1} \quad / \quad \times x_{t-s}, E[.]$$

$$E[x_t x_{t-s}] = \alpha E[x_{t-1} x_{t-s}] + E[u_t x_{t-s}] - \beta E[u_{t-1} x_{t-s}]$$

$$(6) \quad \gamma(s) = \alpha \gamma(s-1) + E[u_t x_{t-s}] - \beta E[u_{t-1} x_{t-s}]$$

Stredná hodnota $E[u_t x_{t-s}]$ je nenulová len pre $s = 0$,
 $E[u_{t-1} x_{t-s}]$ je nenulová len pre $s = 0$ a pre $s = 1$

Príklad: ARMA(1,1)

- Konkrétne hodnoty $E[u_t x_{t-s}]$ a $E[u_{t-1} x_{t-s}]$ vypočítame z Woldovej reprezentácie

$$x_{t-s} = u_{t-s} + (\alpha - \beta)u_{t-s-1} + \alpha(\alpha - \beta)u_{t-s-2} + \dots$$

Dostaneme:

$$E[u_t x_{t-s}] = \begin{cases} \sigma^2 & \text{pre } \tau = 0 \\ 0 & \text{pre } \tau = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

$$E[u_{t-1} x_{t-s}] = \begin{cases} (\alpha - \beta)\sigma^2 & \text{pre } \tau = 0 \\ \sigma^2 & \text{pre } \tau = 1 \\ 0 & \text{pre } \tau = 2, 3, \dots \end{cases}$$

a dosadíme do (6).

Príklad: ARMA(1,1)

- Nakoniec z (6) dostaneme pre $s = 0, s = 1$:

$$s = 0 \Rightarrow \gamma(0) = \alpha\gamma(1) + \sigma^2 - \beta(\alpha - \beta)\sigma^2$$

$$s = 1 \Rightarrow \gamma(1) = \alpha\gamma(0) - \beta\sigma^2$$

→ sústava 2 rovníc s 2 neznámymi, jej riešením je

$$\gamma(0) = \frac{1 + \beta^2 - 2\alpha\beta}{1 - \alpha^2}\sigma^2, \gamma(1) = \frac{(\alpha - \beta)(1 - \alpha\beta)}{1 - \alpha^2}\sigma^2$$

(7)

- Pre $s = 2, 3, \dots$ dostaneme rekurentný predpis pre ďalšie $\gamma(s)$:

$$\gamma(s) = \alpha\gamma(s - 1)$$

Príklad: ARMA(1,1)

- Pre $s = 2, 3, \dots$ máme

$$\begin{aligned}\gamma(s) &= \alpha\gamma(s-1) & / & \frac{1}{\gamma(0)} \\ \rho(s) &= \alpha\rho(s-1)\end{aligned}$$

→ tá istá diferenčná rovnica pre ACF, ako by bola pre proces bez MA časti

- ale s inou začiatočnou podmienkou - zo vzťahu (7) máme

$$\rho(1) = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} = \frac{(\alpha - \beta)(1 - \alpha\beta)}{(1 + \beta^2 - 2\alpha\beta)}$$

- závisí aj od MA časti

PACF

- PACF počítame rovnako ako predtým pomocou determinantov:

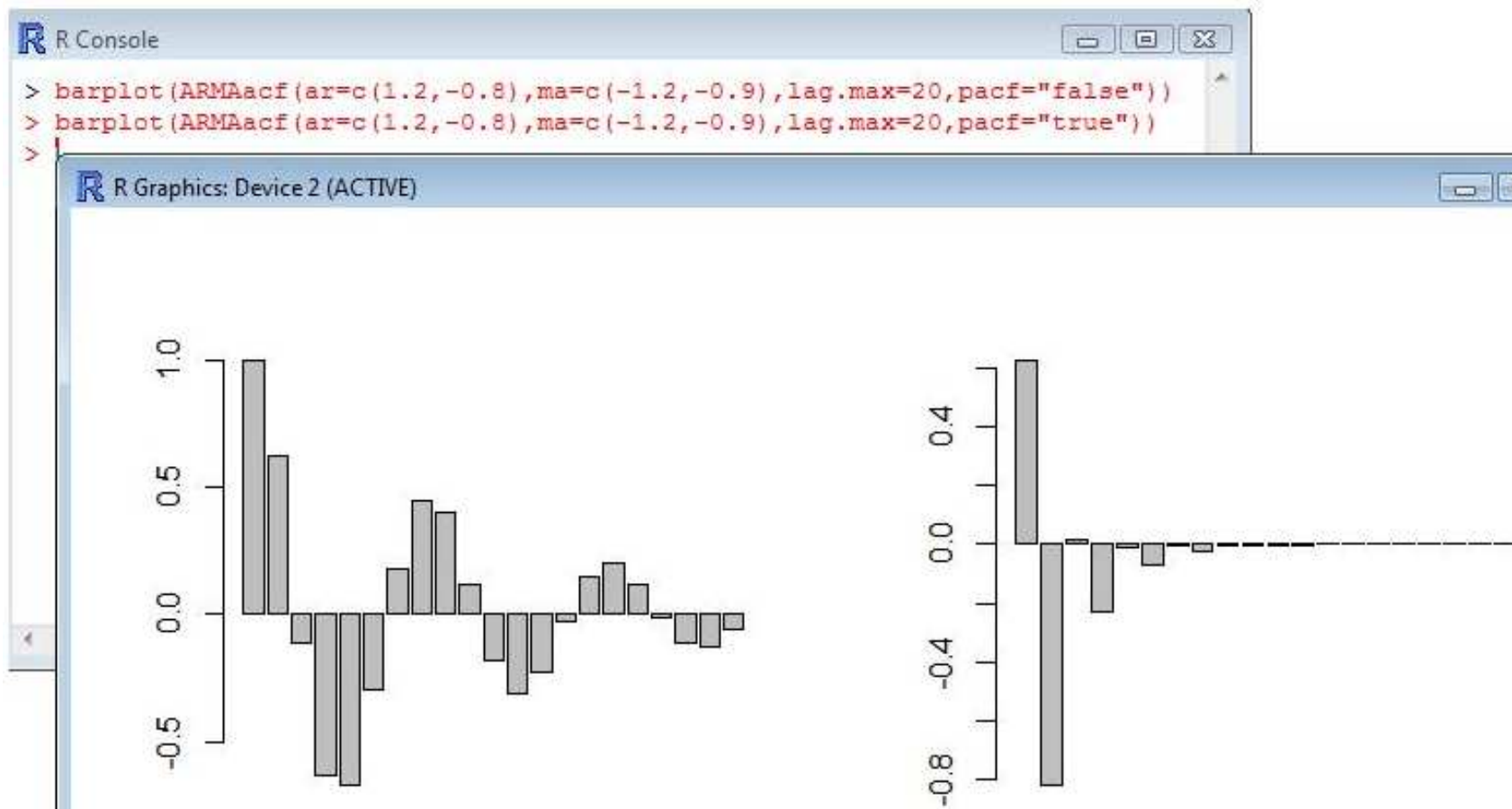
$$(8) \quad \Phi_{kk} = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \dots & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 & \dots & \rho(2) \\ & & \dots & \\ \rho(k-1) & \rho(k-2) & \dots & \rho(k) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \dots & \rho(k-1) \\ \rho(1) & 1 & \dots & \rho(k-2) \\ & & \dots & \\ \rho(k-1) & \rho(k-2) & \dots & 1 \end{pmatrix}}$$

- Príklad: pre ARMA(1,1) proces dosadzujeme

$$\rho(k) = \alpha^{k-1} \rho(1), \quad \rho(1) = \frac{(\alpha - \beta)(1 - \alpha\beta)}{(1 + \beta^2 - 2\alpha\beta)}$$

Príklad - vypočítaná ACF a PACF

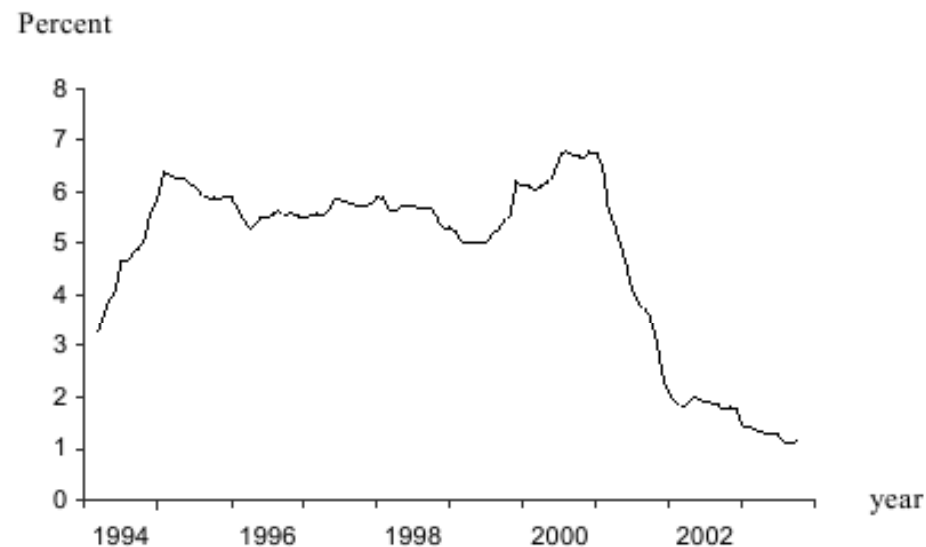
NEPLATÍ, že $ACF(k) = 0$ pre $k > q$ a $PACF(k) = 0$ pre $k > p$ (minulý rok častá chyba pri komentovaní ACF, PACF).



Príklad - reálne dáta

[Kirchgässner, Wolters], example 2.15

- USA, marec 1994 - august 2003
- $USR_t = 3$ -mesačná úroková miera



a) New York three months money market rate,
1994 – 2003

Príklad - reálne dáta

Odhadnutý model pre diferencie premennej USR :

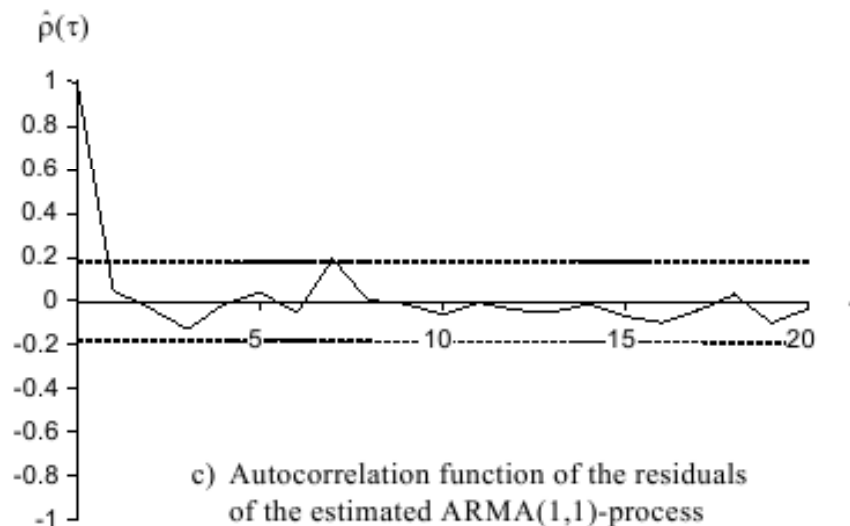
The following ARMA(1,1) model has been estimated for this time series:

$$\Delta USR_t = -0.006 + 0.831 \Delta USR_{t-1} + \hat{u}_t - 0.457 \hat{u}_{t-1},$$

(-0.73) (10.91) (-3.57)

$$\bar{R}^2 = 0.351, \text{ SE} = 0.166, \text{ Q}(10) = 7.897 \text{ (p} = 0.639\text{)}.$$

The AR(1) as well as the MA(1) terms are different from zero at the 0.1 percent significance level. The autocorrelogram of the estimated residuals, which is also given in *Figure 2.10*, as well as the Box-Ljung Q statistic, which is calculated for this model with 12 autocorrelation coefficients (i.e. with 10 degrees of freedom), do not provide any evidence of a higher order process.



c) Autocorrelation function of the residuals of the estimated ARMA(1,1)-process with confidence intervals

Príklad - reálne dáta

Otázky k výstupu:

- Je odhadnutý model stacionárny? Je invertovateľný?
- *"The autocorrelogram of the estimated residuals... not provide any evidence of a higher order process" - vysvetlite*
- *"...the Box-Ljung Q statistic, which is calculated for this model with 12 autocorrelation coefficients (i.e. with 10 degrees of freedom)..."*
 - ◇ sformulujte nulovú hypotézu, ktorá sa tu testuje
 - ◇ zdôvodnite počet stupňov voľnosti
 - ◇ aký je záver testu?

ARMA(p,q) - spoločné AR a MA korene

- Pripomeňme si definíciu ARMA(p,q) procesu:

$$(1 - \alpha_1 L - \dots - \alpha_p L^p)x_t = \delta + (1 - \beta_1 L - \dots - \beta_q L^q)u_t$$
$$\alpha(L)x_t = \delta + \beta(L)u_t$$

pričom požadujeme, aby polynómy $\alpha(L)$, $\beta(L)$ nemali spoločné korene

- Prečo nemôžu mať polynómy $\alpha(L)$, $\beta(L)$ spoločné korene?
- Zovšeobecnenie toho, že pre ARMA(1,1) musí byť $\alpha \neq \beta$, inak máme triviálny proces "konštanta + biely šum"

ARMA(p,q) - spoločné AR a MA korene

- Uvažujme "ARMA(2,2)" proces

$$(1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2)x_t = \delta + (1 - \beta_1 L - \beta_2 L^2)u_t,$$

kde $1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 = (1 - \gamma L)(1 - \gamma_1 L)$

$$1 - \beta_1 L - \beta_2 L^2 = (1 - \gamma L)(1 - \gamma_2 L)$$

t.j. AR a MA polynómy majú spoločný koreň γ

- Potom sa proces dá zapísať nasledovne:

$$(1 - \gamma L)(1 - \gamma_1 L)x_t = \delta + (1 - \gamma L)(1 - \gamma_2 L)u_t$$

$$(1 - \gamma_1 L)x_t = (1 - \gamma L)^{-1}\delta + (1 - \gamma_2 L)u_t$$

teda je to ARMA(1,1), a nie ARMA(2,2) model

- Prakticky - ak dostaneme veľmi blízky AR a MA koreň, treba namiesto ARMA(p,q) skúsiť ARMA(p-1,q-1) model

ARMA(p,q) - príklad

- PRÍKLAD: ARMA(1,2) model pre diferencie zlogaritmovaných cien kakaa (dáta z predchádzajúcej kapitoly):

```
> p=read.table("pcocoa.txt")
> p=ts(p,frequency=12,start=c(1960,1))
> sarima(log(p),1,1,2,details=FALSE)
$fit

Call:
stats::arima(x = xdata, order = c(p, d, q), seasonal = list(order = c(P, D,
  Q), period = S), xreg = constant, optim.control = list(trace = trc, REPORT = $
  reltol = tol))

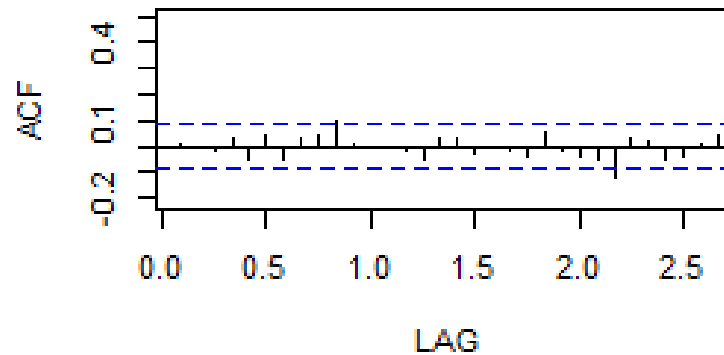
Coefficients:
          ar1          ma1          ma2  constant
          0.8708  -0.5174  -0.3030    0.0025
s.e.      0.3563   0.3622   0.1401    0.0038

sigma^2 estimated as 0.003897:  log likelihood = 693.62,  aic = -1377.24
```

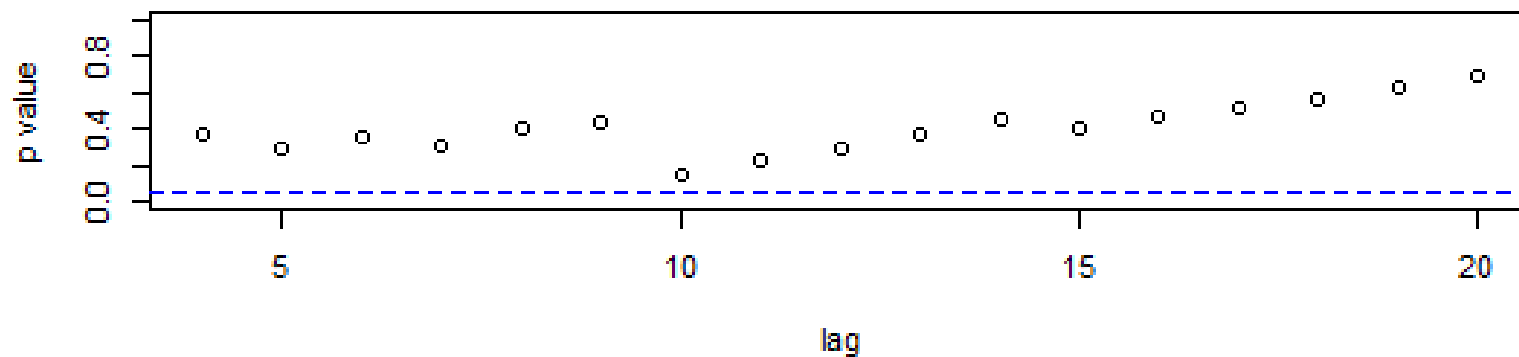
ARMA(p,q) - príklad

- Kontrola rezíduí:

ACF of Residuals



p values for Ljung-Box statistic



ARMA(p,q) - príklad

- CVIČENIE:
Vypočítajte korene AR a MA časti procesu
- Dostaneme: AR koreň je bízko jedného z MA koreňov
- Mali by sme teda namiesto ARMA(1,2) skúsiť
ARMA(0,1) = MA(1) model, a ten naozaj na minulej
prednáške vyšiel ako dobrý model pre tieto dáta