Predikcie v ARMA modeloch

Beáta Stehlíková

Časové rady, FMFI UK, 2013/2014

Predikcie

- Sme v čase t, chceme predikciu hodnoty $x_{t+\tau}$, t. j. hodnotu procesu o τ období.
- Označme túto predikciu $\hat{x}_t(\tau)$, teda
  - ◇ index t označuje čas, v ktorom konštruujeme predikciu
  - ◇ argument τ označuje, na koľko období dopredu tá predikcia je
- Predikciou bude očakávaná hodnota procesu v tom čase, pri danej informácii, ktorú máme k dispozícii:

$$\hat{x}_t(\tau) = E_t[x_{t+\tau}]$$

(index t vo výraze E_t znamená, že strednú hodnotu počítame v čase t)

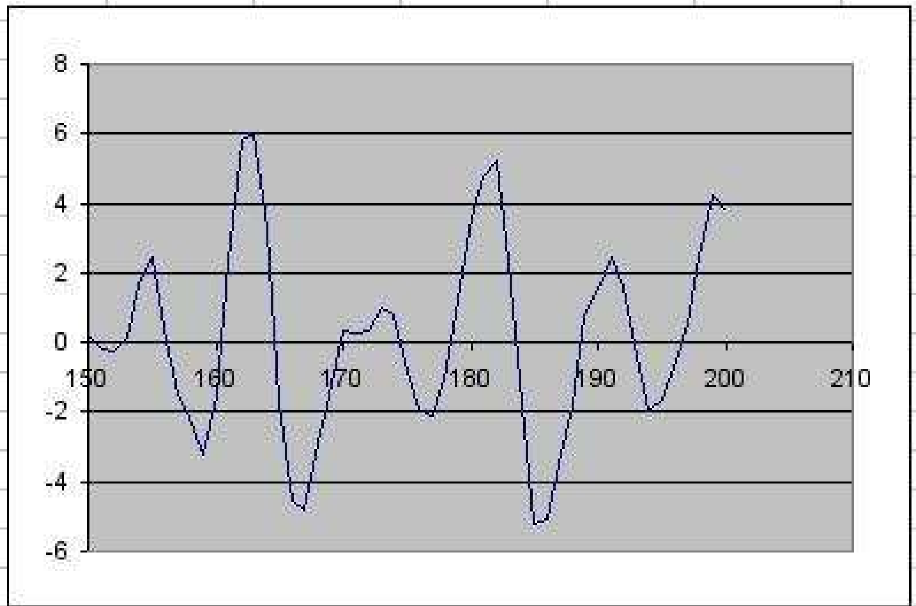
Predikcie pre AR proces

- Majme proces

$$x_t = 1.4x_{t-1} - 0.85x_{t-2} + u_t$$

a dáta:

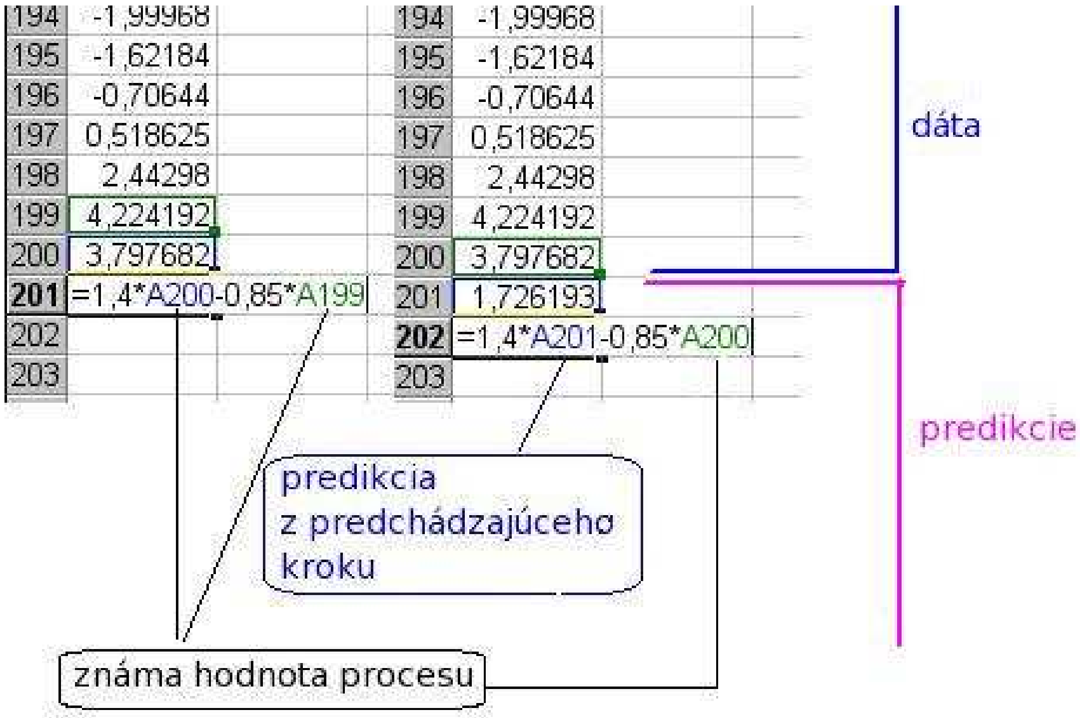
183	2,297308
184	-1,79321
185	-5,19365
186	-5,04636
187	-3,5133
188	-1,78753
189	0,706783
190	1,534983
191	2,447012
192	1,593168
193	-0,39105
194	-1,99968
195	-1,62184
196	-0,70644
197	0,518625
198	2,44298
199	4,224192
200	3,797682
201	
202	



- Chceme predikcie pre hodnoty v nasledujúcich časoch.

Predikcie pre AR proces

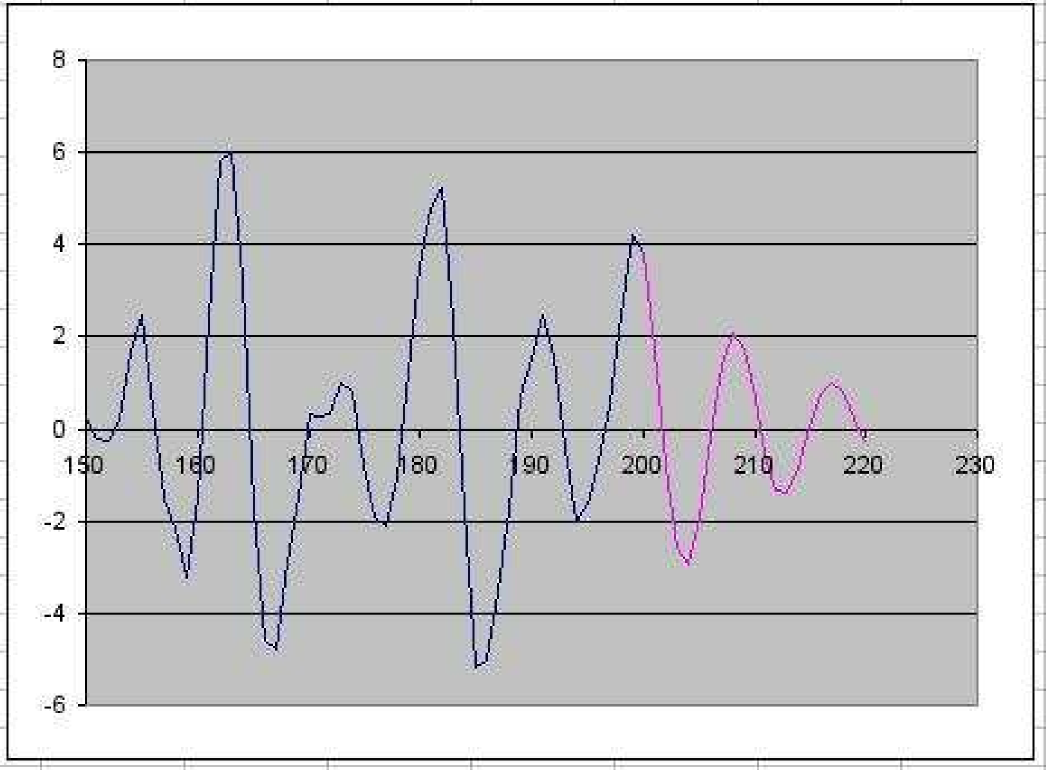
- Intuitívne:
  - ◇ do diferenčnej rovnice dosadzujeme známe hodnoty procesu a keď už k dispozícii nie sú, dosadzujeme predikcie
  - ◇ biely šum nahradíme nulou



Predikcie pre AR proces

- Výsledok:

189	0,706783
190	1,534983
191	2,447012
192	1,593168
193	-0,39105
194	-1,99968
195	-1,62184
196	-0,70644
197	0,518625
198	2,44298
199	4,224192
200	3,797682
201	1,726193
202	-0,81136
203	-2,60317
204	-2,95478
205	-1,924
206	-0,18203
207	1,38055
208	2,087499
209	1,749031
210	0,67427
211	-0,5427
212	-1,33291
213	-1,40478



Predikcie pre AR proces

- Vzt'ah $\hat{x}_t(\tau) = E_t[x_{t+\tau}]$ sa zhoduje s touto intuíciou.
- Majme AR(p) proces

$$x_t = \delta + \alpha_1 x_{t-1} + \ldots + \alpha_p x_{t-p} + u_t.$$

Potom:

$$\begin{aligned} x_{t+\tau} &= \delta + \alpha_1 x_{t+\tau-1} + \ldots + \alpha_p x_{t+\tau-p} + u_{t+\tau}, \\ \underbrace{E_t[x_{t+\tau}]}_{\hat{x}_t(\tau)} &= \delta + \alpha_1 E_t[x_{t+\tau-1}] + \ldots + \alpha_p E_t[x_{t+\tau-p}] \\ &\quad + \underbrace{E_t[u_{t+\tau}]}_{0} \end{aligned}$$

pričom

$$E_t[x_{t+s}] = \begin{cases} \hat{x}_t(s) & \text{pre } s > 0 \\ x_{t+s} & \text{pre } s \leq 0 \end{cases}$$

Predikcie pre MA proces

- Majme MA(1) proces

$$x_t = \mu + u_t - \beta u_{t-1}$$

a počítajme predikcie $\hat{x}_t(\tau)$:

$$\begin{aligned} x_{t+s} &= \mu + u_{t+s} - \beta u_{t+s-1}, \\ \underbrace{E_t[x_{t+s}]}_{\hat{x}_t(s)} &= \mu + \underbrace{E_t[u_{t+s}]}_{0} - \beta \underbrace{E_t[u_{t+s-1}]}_{u_t \text{ pre } s=1, \text{ inak } 0} \end{aligned}$$

Teda:

$$\hat{x}_t(s) = \begin{cases} \mu - \beta u_t & \text{pre } s = 1 \\ \mu & \text{pre } s = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

- CVIČENIE: Dokážte, že pre MA(q) proces platí $\hat{x}_t(s) = \mu$ pre $s > q$ a že pre $s \leq q$ predikcie obsahujú realizované hodnoty bieleho šumu u

Predikcie pre MA proces

- Predikcie pre MA(1) proces $x_t = \mu + u_t - \beta u_{t-1}$ sú

$$\hat{x}_t(s) = \begin{cases} \mu - \beta u_t & \text{pre } s = 1 \\ \mu & \text{pre } s = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

  - obsahujú hodnotu bieleho šumu u_t. Táto hodnota už bola v čase konštrukcie predikcií realizovaná, nie sme však schopní ju pozorovať.

- Cvičenie z predch. slajdu $\Rightarrow$ podobná situácia nastáva pre ľubovoľný MA(q) proces
- Ako prakticky počítať predikcie?
  Myšlienka: vyjadríme u_t pomocou hodnôt procesu x
- Tento výpočet si ukážeme na MA(1) procese

Predikcie pre MA proces

- Vyjadrujeme teda u_t pomocou $x_1, x_2, \ldots, x_t$
- Využijeme pritom:
  - ◇ Pre MA(1) sme odvodili

$$\hat{x}_t(1) = \mu - \beta u_t \tag{1}$$

  - ◇ Pre predikčnú chybu platí

$$x_t - \hat{x}_{t-1}(1) = u_t \tag{2}$$

- Budeme postupne počítať $\hat{x}_t(1)$ pre $t = 0, 1, 2, \ldots$

$$\hat{x}_0(1) \overset{(1)}{=} \mu - \beta u_0 \tag{3}$$

Predikcie pre MA proces

- Pre $t = 1$:

$$\begin{aligned} \hat{x}_1(1) &\overset{(1)}{=} \mu - \beta u_1 \\ &\overset{(2)}{=} \mu - \beta[x_1 - \hat{x}_0(1)] \\ &\overset{(3)}{=} \mu - \beta[x_1 - (\mu - \beta u_0)] \\ &= \mu(1+\beta) - \beta x_1 - \beta^2 u_0 \qquad (4) \end{aligned}$$

- Pre $t = 2$:

$$\begin{aligned} \hat{x}_2(1) &\overset{(1)}{=} \mu - \beta u_2 \\ &\overset{(2)}{=} \mu - \beta[x_2 - \hat{x}_1(1)] \\ &\overset{(4)}{=} \mu - \beta[x_2 - (\mu(1+\beta) - \beta x_1 - \beta^2 u_0)] \\ &= \mu(1+\beta+\beta^2) - \beta x_2 - \beta^2 x_1 - \beta^3 u_0 \qquad (5) \end{aligned}$$

Predikcie pre MA proces

- Pre všeobecné t:

$$\begin{aligned}\hat{x}_t(1) &= \mu(1+\beta+\beta^2+\ldots\beta^t) \\ &\quad -\beta x_t - \beta^2 x_{t-1} - \ldots - \beta^t x_1 - \beta^{t+1} u_0\end{aligned}$$

- Aj tu vystupuje nepozorovateľná hodnota u_0, ale vplyv člena $\beta^{t+1} u_0$ ide k nule pre $t \to \infty$ (kde t je počet dát) $\Rightarrow$ môžeme ho zanedbať