Jednotkový koreň (unit root), diferencovanie časového radu, unit root testy

Beáta Stehlíková

Časové rady, FMFI UK, 2013/2014

Obsah

- Čo je jednotkový koreň (unit root) a čo spôsobuje
- Ak má proces jednotkový koreň - ako dáta transformovať, aby sme s nimi mohli pracovať a použiť ARMA metodológiu
- Ako z dát zistiť, či má proces jednotkový koreň $\rightarrow$ unit root testy

Príklady

- Majme proces $y_t = y_{t-1} + u_t$:
  - je to nestacionárny AR(1) proces s jednotkovým koreňom
  - pre jeho diferencie $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$ platí $\Delta y_t = u_t$
  - teda Δy_t je stacionárny proces
- Majme nestacionárny proces s jednotkovým koreňom

$$(1 - \frac{1}{2}L)(1 - L)x_t = 1 + (1 - \frac{1}{3}L)u_t$$

Potom pre diferencie

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1} = (1 - L)y_t$$

platí

$$(1 - \frac{1}{2}L)\Delta y_t = 1 + (1 - \frac{1}{3}L)u_t,$$

teda Δy_t je stacionárny proces

Príklady

- Majme nestacionárny proces s dvojnásobným jednotkovým koreňom
$$(1-\frac{1}{2}L)(1-L)^2x_t = 1 + (1-\frac{1}{3}L)u_t$$
Potom pre druhé diferencie
$$\Delta^2 y_t = \Delta(\Delta y_t) = (1-L)(1-L)y_t = (1-L)^2 y_t$$
platí
$$(1-\frac{1}{2}L)\Delta^2 y_t = 1 + (1-\frac{1}{3}L)u_t,$$
teda $\Delta^2 y_t$ je stacionárny proces
- Vo všeobecnosti:
Ak má proces jednotkový koreň násobnosti k (a ostatné mimo jednotkového kruhu), tak jeho k-te diferencie sú stacionárne

ARIMA modely

- Ak treba proces k-krát diferencovat', aby sme dostali stacionárny proces, nazýva sa integrovaný proces rádu k, označujeme $I(k)$
- Ak tie k-te diferencie sú ARMA(p,q), tak o pôvodnom procese hovoríme, že je ARIMA(p,k,q).
- Napríklad x_t, ak

$$(1 - \frac{1}{2}L)(1 - L)^2 x_t = 1 + (1 - \frac{1}{3}L)u_t,$$

je proces ARIMA(1,2,1).

Cieľ

- Uvažujme najprv AR(1) model: $x_t = \delta + \alpha x_{t-1} + u_t$
- Chceme:
  - testovať hypotézu o jednotkovom koreni (vtedy je proces nestacionárny), teda $H_0 : \alpha = 1$
  - zistiť, či sa dá zamietnuť v prospech stacionarity - $H_1 : \rho < 1$

Jednotkový koreň a t-štatistika

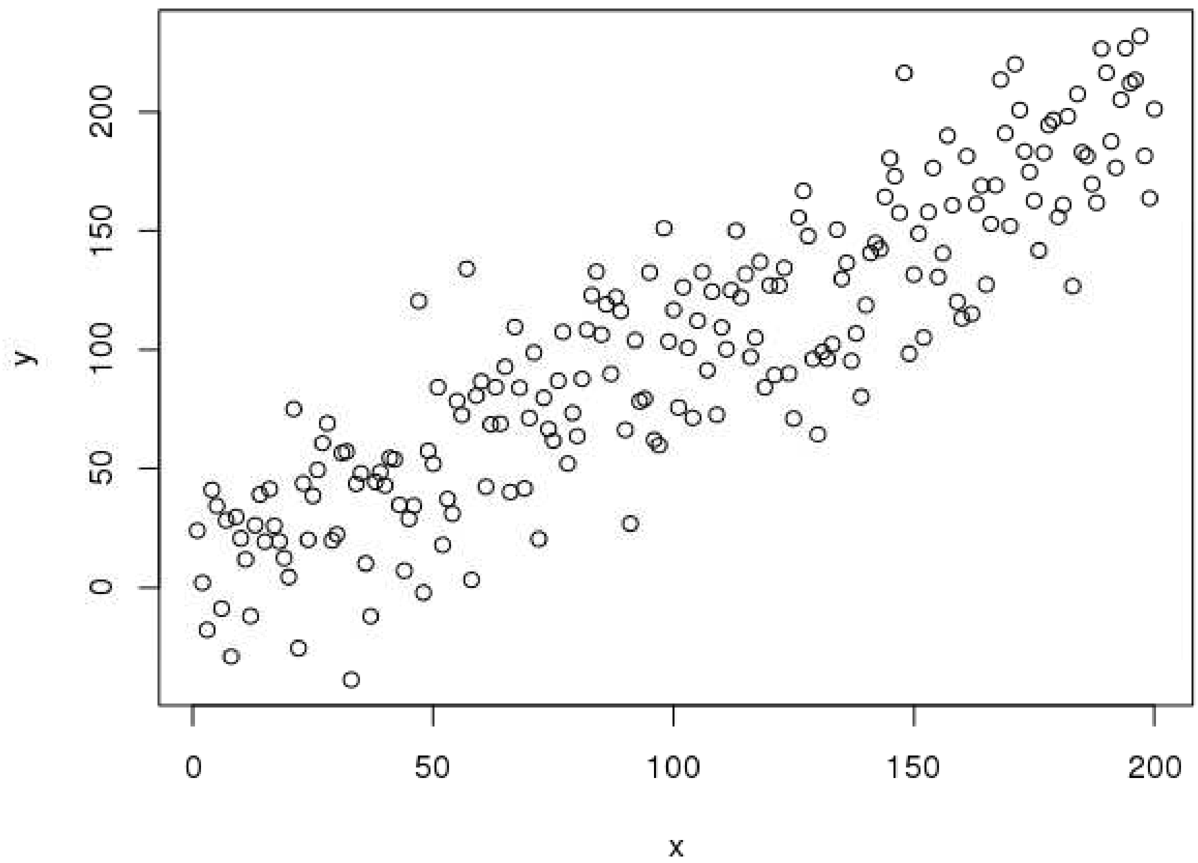
Skúsme použiť testovanie hypotéz o koeficientoch regresného modelu známe z ekonometrie.

Napríklad:

- Majme vektor x=1:200
- Vygenerujeme y=x+rnorm(200)*sigma
- Odhadneme model $y = c + \rho x + \varepsilon$
- Zaznamenávame:
  - ◇ odhad parametra ρ
  - ◇ hodnotu t-štatistiky zodpovedajúcej hypotéze $H_0 : \rho = 1$ (ktorá platí)
- Zopakujeme 10^5 krát a vykreslíme histogram

Jednotkový koreň a t-štatistika

- Príklad vygenerovaných dát:



Jednotkový koreň a t-štatistika

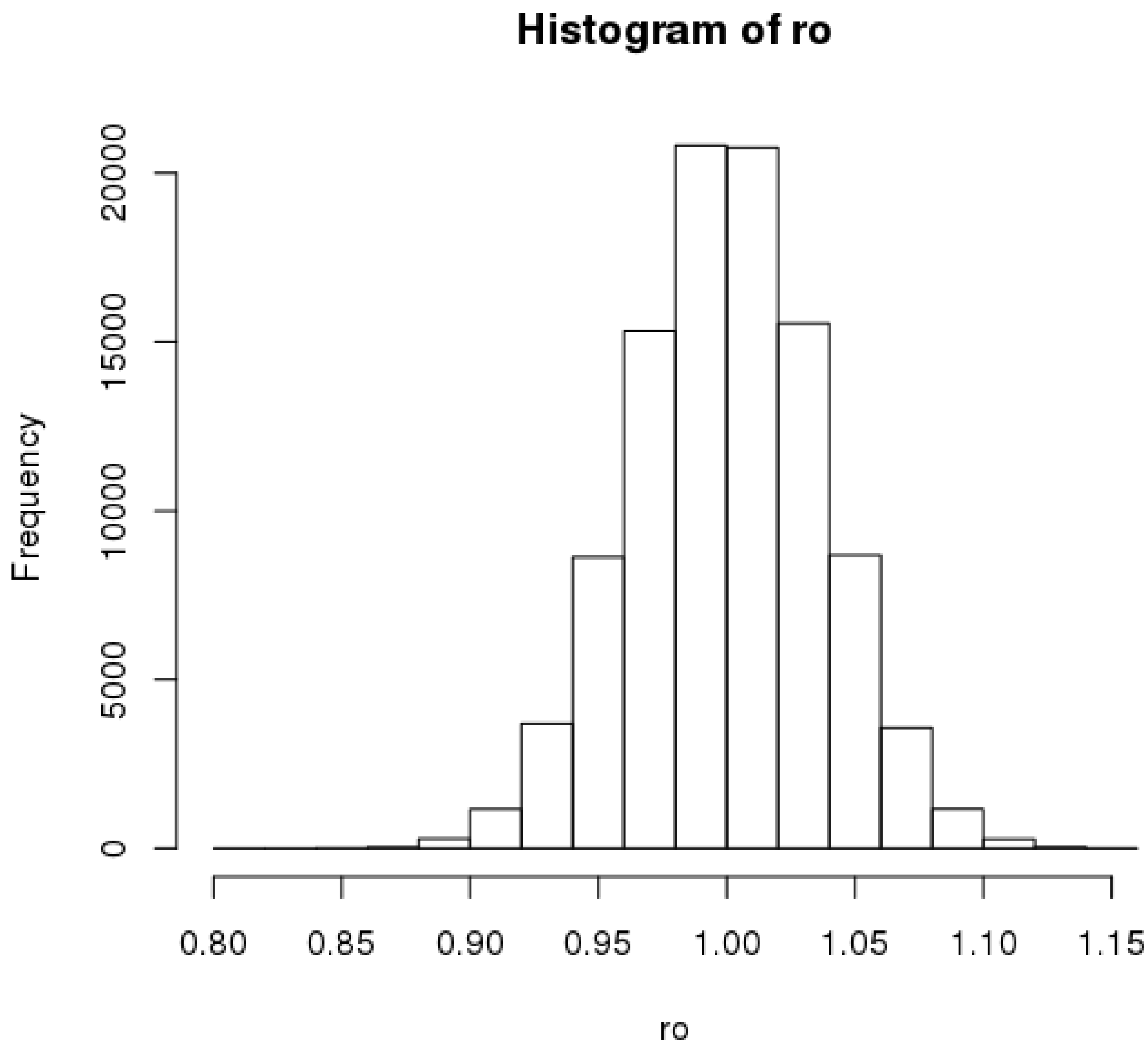
- Odhadnutá regresia:

```
Call:
lm(formula = y ~ x)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-75.067 -19.239   3.818  20.520  74.772

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  4.72079    4.00941   1.177     0.24
x            0.95689    0.03459  27.662   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 28.24 on 198 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.7944,     Adjusted R-squared: 0.7934
F-statistic: 765.2 on 1 and 198 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

- Odhadnutý koeficient ρ je 0.95689
- T-štatistika k hypotéze $\rho = 1$ je $\frac{0.95689-1}{0.03459}$

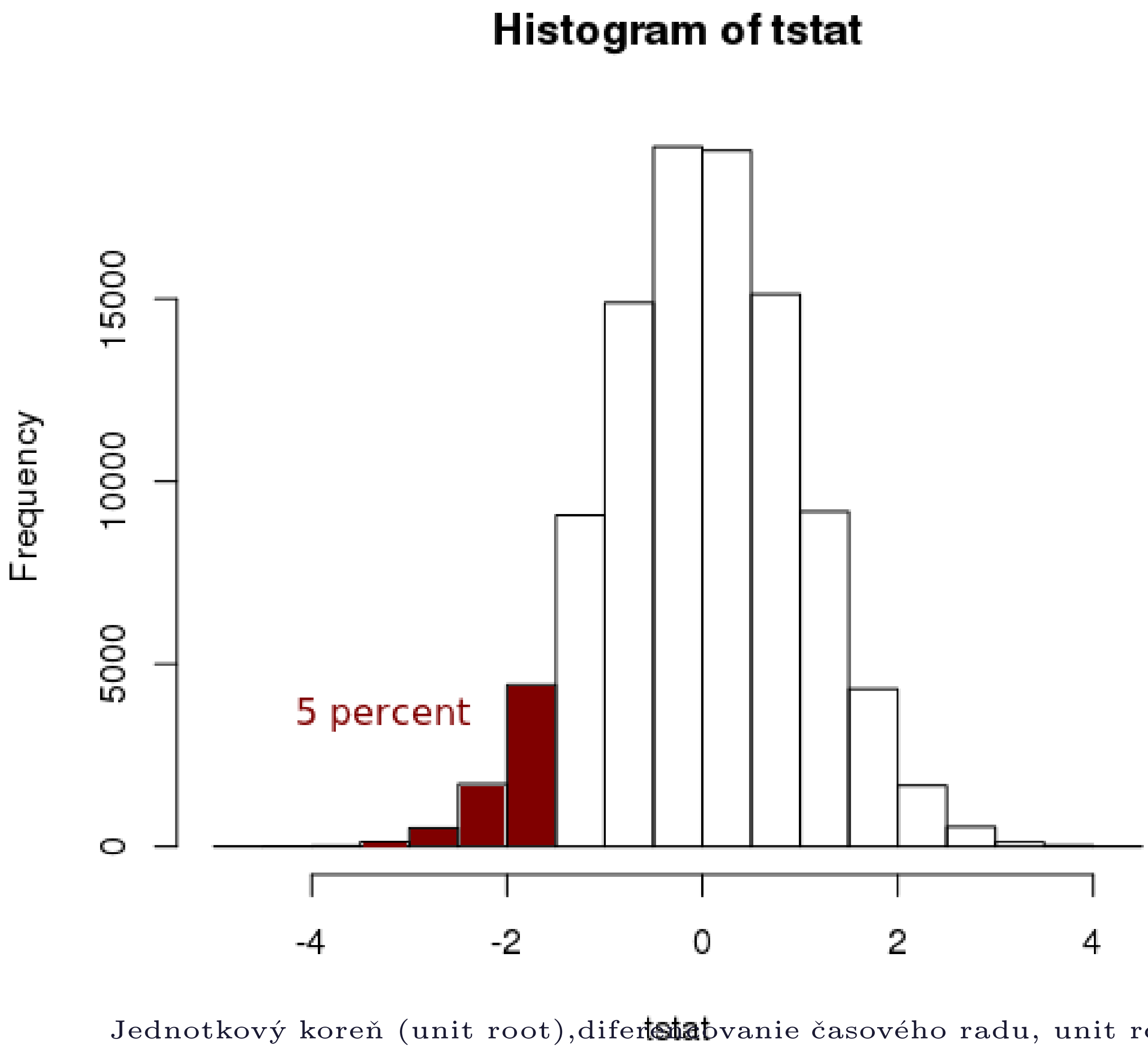
Jednotkový koreň a t-štatistika

- Odhad parametra ρ: normálne rozdelenie



Jednotkový koreň a t-štatistika

- t-štatistika k hypotéze $H_0 : \rho = 1$: t-rozdelenie



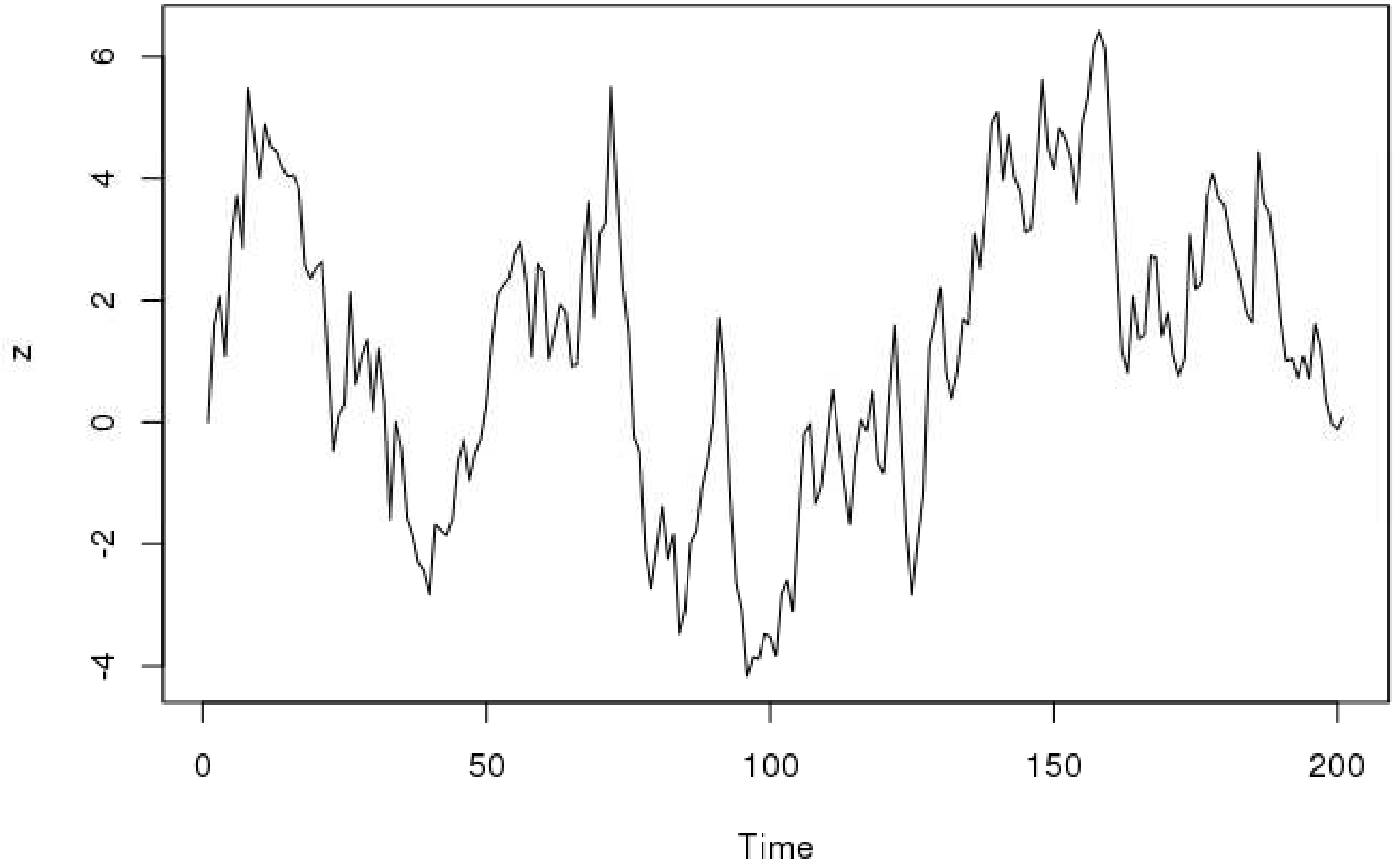
Jednotkový koreň a t-štatistika

Druhá simulácia:

- Majme vektor z vygenerovaný ako $z_t = z_{t-1} + \varepsilon_t$
- Zoberieme x=z[1:200], y=z[2:201], teda $y_t = z_t$, $x_t = z_{t-1}$
- Odhadneme model $y = c + \rho x + \varepsilon$
- Zaznamenávame:
  - odhad parametra ρ
  - hodnotu t-štatistiky zodpovedajúcej hypotéze $H_0 : \rho = 1$ (ktorá platí)
- Zopakujeme 10^5 krát a vykreslíme histogram

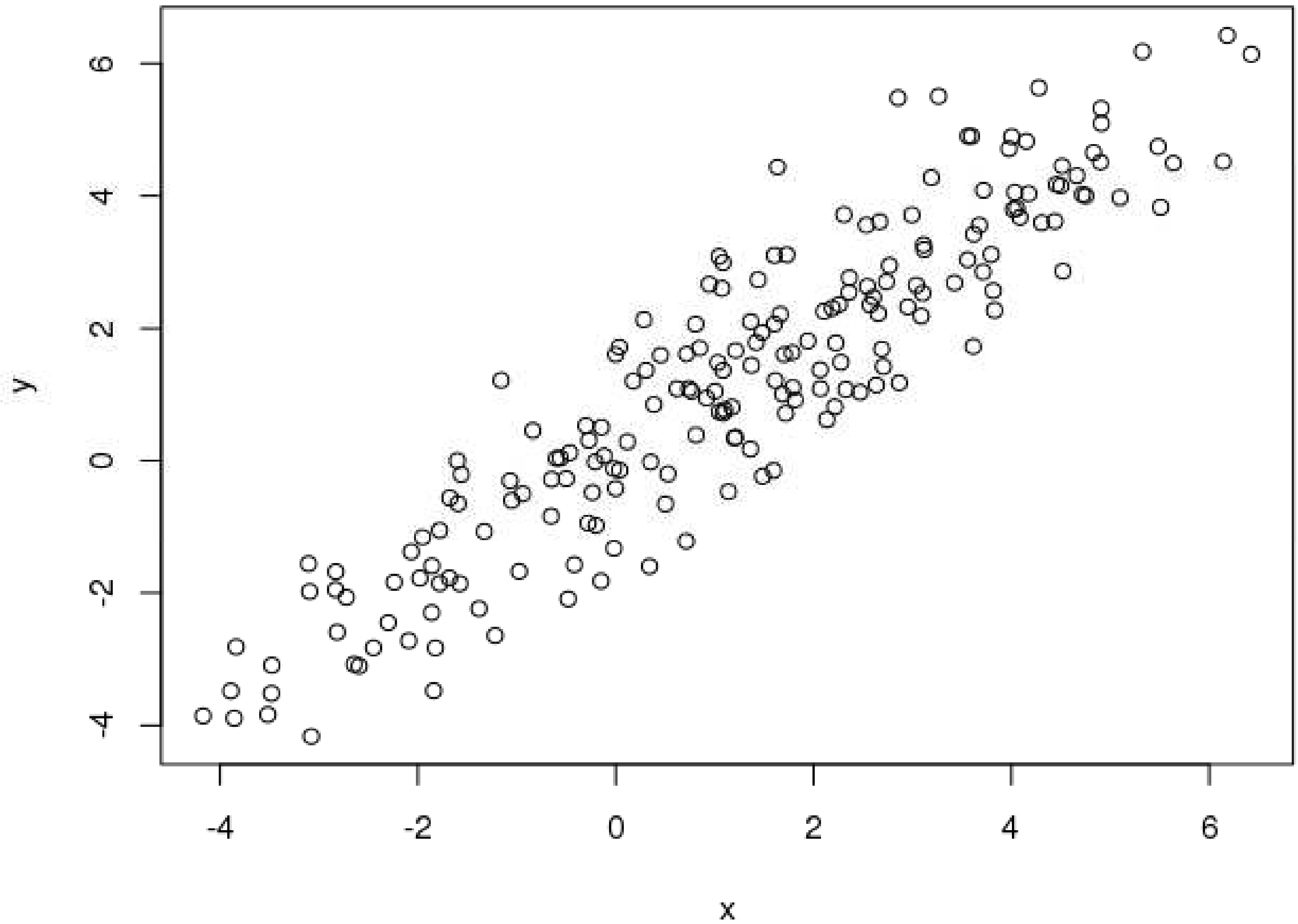
Jednotkový koreň a t-štatistika

- Príklad vygenerovaných dát - časový rad z:



Jednotkový koreň a t-štatistika

- Príklad vygenerovaných dát : dáta do regresie



Jednotkový koreň a t-štatistika

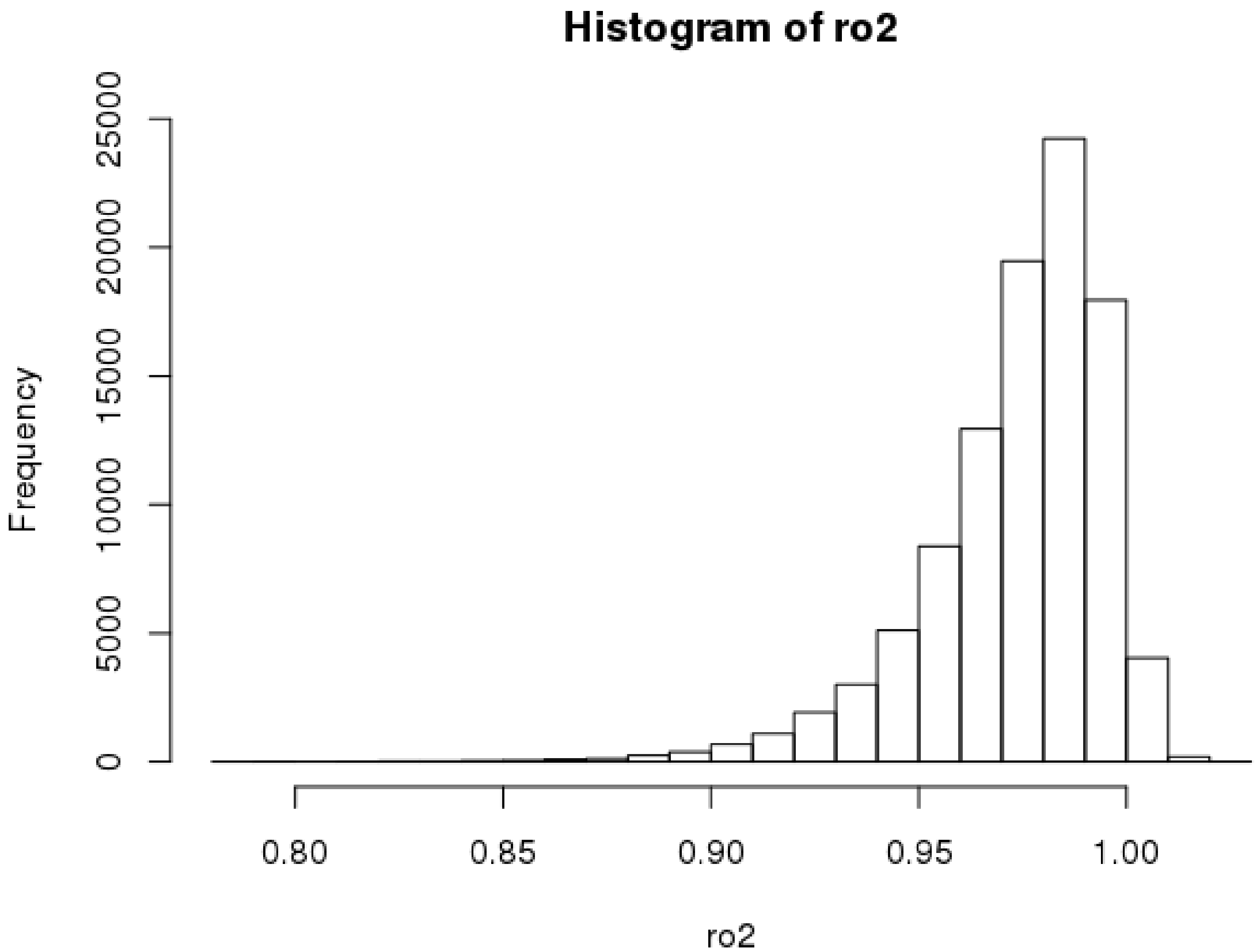
- Odhadnutá regresia:

```
Call:
lm(formula = y ~ x)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-2.01047 -0.64723  0.00159  0.53995  2.84017

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  0.09589    0.07489    1.28    0.202
x            0.91962    0.02790   32.96   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.9496 on 198 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.8458,     Adjusted R-squared: 0.845
F-statistic:  1086 on 1 and 198 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

- Odhadnutý koeficient ρ je 0.91962
- t-štatistika k hypotéze $\rho = 1$ je $\frac{0.91962-1}{0.02790} = -2.88$

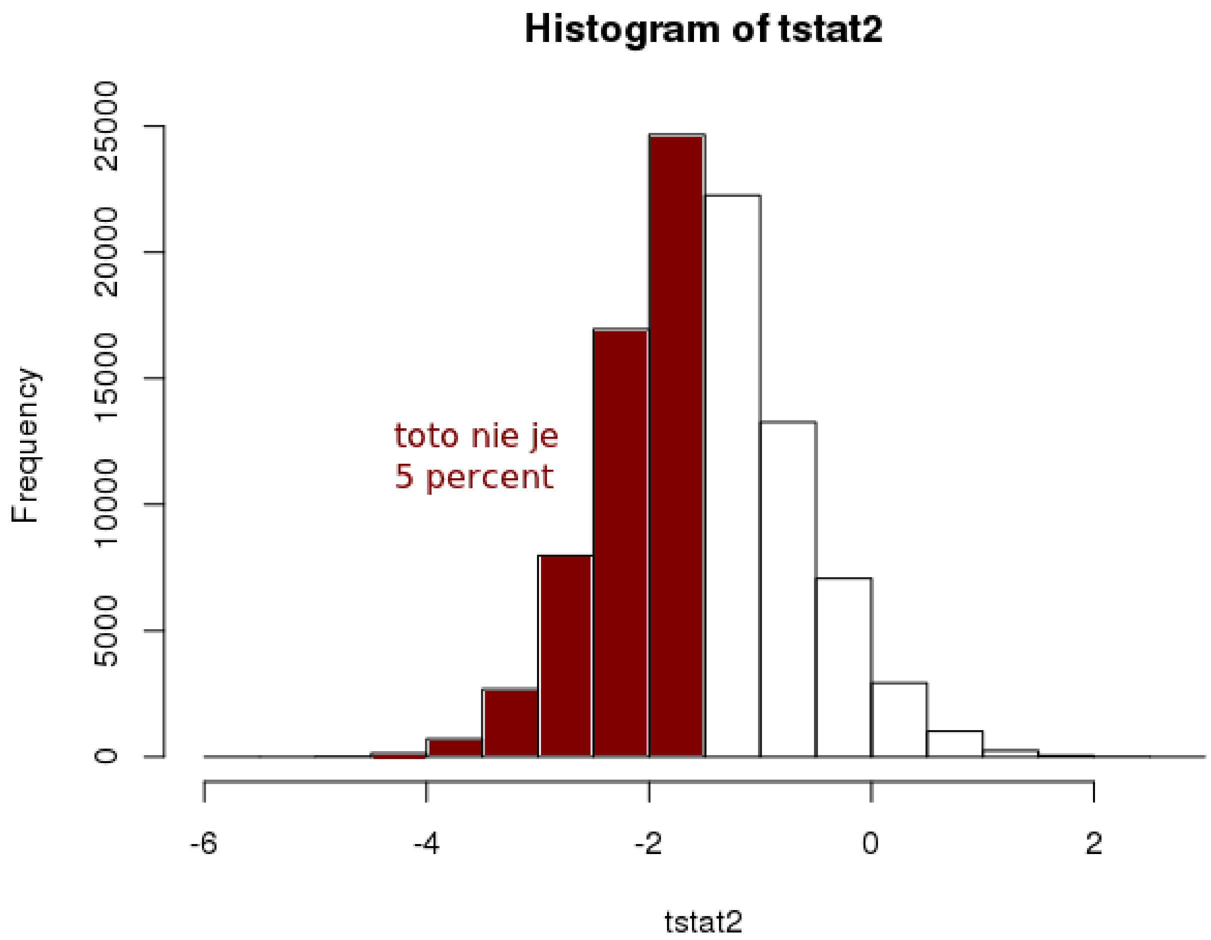
Jednotkový koreň a t-štatistika

- Odhady parametra ρ: nemá normálne rozdelenie



Jednotkový koreň a t-štatistika

- "t-štatistika" k hypotéze $H_0 : \rho = 1$: nemá t-rozdelenie



- Na testovanie hypotézy nemôžeme použiť kritické hodnoty t-rozdelenia

Jednotkový koreň a t-štatistika

- Riešenie - základná myšlienka:
  - ◇ ponecháme výpočet testovaciej štatistiky
  - ◇ ale budeme používať iné kritické hodnoty
- Kvantily z našej simulácie:

```
> quantile(tstat2,0.05)
       5%
-2.866481
> quantile(tstat2,0.01)
       1%
-3.462751
```

  - priblížne také by mali byť kritické hodnoty
- Otázka:
  - ◇ Čo ak nemáme AR(1) proces, ale všeobecnejší?

Testovanie jednotkového koreňa

- AR(1) proces:

  (1) $$y_t = \rho y_{t-1} + u_t$$

  jednotkový koreň znamená, že $\rho = 1.$

- Ekvivalentne:

  $$\Delta y_t = (\rho - 1)y_{t-1} + u_t$$

  a zaujíma nás t-štatistika zo signifikancie koeficienta pri y_{t-1} - ale s inou kritickou hodnotou

- Tá kritická hodnota
  - závisí od počtu dát
  - zmení sa, ak rovnica (1) obsahuje konštantu a/alebo lineárny trend

- Vo všeobecnosti: $\Delta y_t = \alpha + \beta t + (\rho - 1)y_{t-1} + u_t$

Testovanie jednotkového koreňa

- AR(p) proces: $y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \ldots \alpha_p y_{t-p} + u_t$
  jednotkový koreň $\rightarrow \alpha_1 + \ldots \alpha_p = 1.$
- Upravíme do tvaru:

  $$y_t = \rho y_{t-1} + \theta_1 \Delta y_{t-1} + \theta_2 \Delta y_{t-2} + \ldots + \theta_{p-1} \Delta y_{t-p+1} + u_t,$$

  kde $\rho = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j$, $\theta_i = -\sum_{j=i+1}^{p} \alpha_j$ pre $i = 1, \ldots, p-1$
- Ekvivalentne:

  $$\Delta y_t = (\rho - 1) y_{t-1} + \theta_1 \Delta y_{t-1} + \theta_2 \Delta y_{t-2} + \ldots + \theta_{p-1} \Delta y_{t-p+1} + u_t$$

  a zaujíma nás t-štatistika z koeficienta pri y_{t-1}
- Vo všeobecnosti: y môže mať trend a/alebo intercept
  $\Rightarrow \Delta y_t = \alpha + \beta t + (\rho - 1) y_{t-1} + \theta_1 \Delta y_{t-1} + \theta_2 \Delta y_{t-2} + \ldots$
  $+\theta_{p-1} \Delta y_{t-p+1} + u_t$

Augmented Dickey-Fuller test (ADF)

Wayne A. Fuller (1976)

David A. Dickey, Wayne A. Fuller (1979, 1981)

- Odhadujeme rovnicu
  $\Delta y_t = \alpha + \beta t + (\rho - 1) y_{t-1} + \theta_1 \Delta y_{t-1} + \ldots + \theta_k \Delta y_{t-k} + u_t$
  pričom musíme
  - rozhodnúť, či zahrnúť konštantu α a/alebo lineárny trend β (podľa toho, či ich obsahuje proces y)
  - určiť k
- Zaujíma nás potom t-štatistika zo signifikancie koeficienta pri y_{t-1}, ale so správnymi kritickými hodnotami

ADF test - kritické hodnoty

- James G. MacKinnon (1991) - dostupné ako súčasť doplnenej verzie z roku 2010:

  James G. MacKinnon: **Critical Values for Cointegration Tests**. Queen's Economics Department Working Paper No. 1227, 2010..

  Dostupné online: http://ideas.repec.org/p/qed/wpaper/1227.html

- Simulačne získané hodnoty:

Table 1. Response Surface Estimates of Critical Values

N	Variant	Level	Obs.	β_∞	(s.e.)	β_1	β_2
1	no constant	1%	600	−2.5658	(0.0023)	−1.960	−10.04
		5%	600	−1.9393	(0.0008)	−0.398	
		10%	560	−1.6156	(0.0007)	−0.181	
1	no trend	1%	600	−3.4336	(0.0024)	−5.999	−29.25
		5%	600	−2.8621	(0.0011)	−2.738	−8.36
		10%	600	−2.5671	(0.0009)	−1.438	−4.48
1	with trend	1%	600	−3.9638	(0.0019)	−8.353	−47.44
		5%	600	−3.4126	(0.0012)	−4.039	−17.83
		10%	600	−3.1279	(0.0009)	−2.418	−7.58

ADF test - kritické hodnoty

- Ak v regresii používame T dát, kritická hodnota je $\beta_\infty + \beta_1/T + \beta_2/T^2$
- V našom príklade zo simuácií: konštanta bez trendu, $T = 200$:

N	Variant	Level	Obs.	β_∞	(s.e.)	β_1	β_2
1	no trend	1%	600	$\boxed{-3.4336}$	(0.0024)	$\boxed{-5.999}$	$\boxed{-29.25}$
		5%	600	$\boxed{-2.8621}$	(0.0011)	$\boxed{-2.738}$	$\boxed{-8.36}$
		10%	600	−2.5671	(0.0009)	−1.438	−4.48

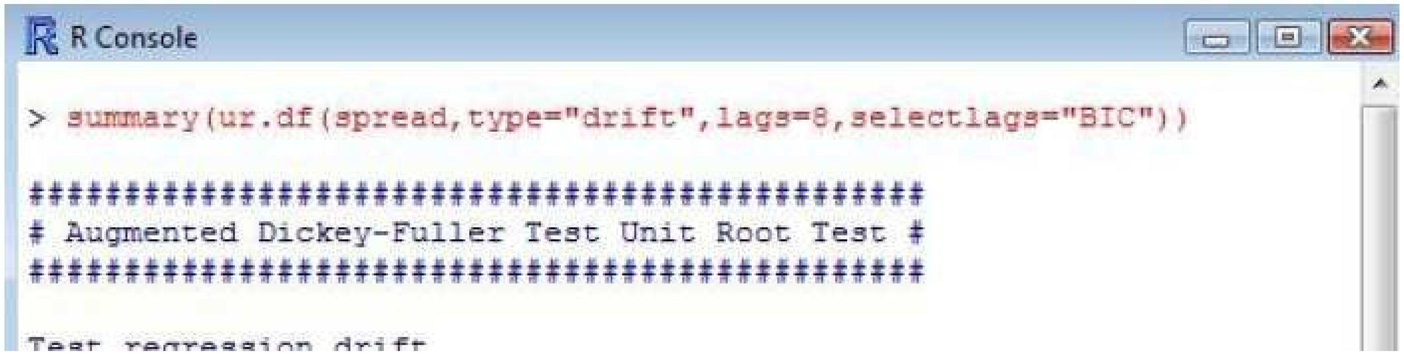
  - ◇ pre 1 percento: $-3.4336 - 5.999/200 - 29.25/200^2 = -3.451$
  - ◇ pre 5 percent: $-2.8621 - 2.738/200 - 8.36/200^2 = -2.879$
- Porovnajme s t-rozdelením (úplne iné) a s kvantilmi zo simulácií (ok)

ADF test v R-ku

- Knižnica urca
- Funkcia ur.df (ur - unit root, df - Dickey-Fuller) s parametrami:
  - type: možnosti sú drift (konštanta bez lineárneho trendu), trend (konštanta aj lineárny trend), none (nič)
  - lags: maximálny počet lagov
  - selectlags: kritérium, podl'a ktorého sa vyberá počet lagov (informačné kritériá: AIC, BIC)

ADF test v R-ku

- Príklad: **spread** z predchádzajúcich prednášok (rozdiel dlhodobej a krátkodobej úrokovej miery)
- Príkaz:
  summary(ur.df(spread,type="drift",lags=8,selectlags="BIC"))
- summary preto, aby sme dostali aj kritické hodnoty, nielen testovaciu štatistiku



ADF test v R-ku

- Výstup: odhadnutá regresia a z nej získaná hodnota testovacej štatistiky:

```
Call:
lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 + 1 + z.diff.lag)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-2.62148 -0.37475 -0.01138  0.35785  2.57280

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  0.10035    0.05592   1.794 0.074240 .
z.lag.1     -0.10720    0.02741  -3.911 0.000125 ***
z.diff.lag   0.29007    0.06706   4.326 2.38e-05 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.7006 on 204 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.1216,     Adjusted R-squared: 0.113
F-statistic: 14.12 on 2 and 204 DF,  p-value: 1.806e-06


Value of test-statistic is: -3.9112 7.6595
```

ADF test v R-ku

- Výstup: hodnota testovacej štatistiky a kritické hodnoty:

```
Value of test-statistic is: -3.9112 7.6595

Critical values for test statistics:
      1pct  5pct 10pct
tau2 -3.46 -2.88 -2.57
```

- Kritérium: Hypotézu o jednotkovom koreni zamietame, ak je štatistika menšia ako kritická hodnota.