Autoregresné (AR) procesy

Beáta Stehlíková
Cvičenia z časových radov, FMFI UK

Príklad 1

- AR(2) proces z prednášky: $x_t = 1.4x_{t-1} - 0.85x_{t-2} + u_t$
- Počítali sme:
  - diferenčnú rovnicu pre autokorelácie
  - korene charakteristického polynómu
  - explicitný predpis pre autokorelácie
  - parciálnu autokorelačnú funkciu
- Teraz to isté v R-ku:
  - korene charakteristického polynómu - overíme stacionaritu procesu
  - hodnoty ACF a PACF
- Potom:
  - vygenerujeme realizáciu procesu
  - odhadneme koeficienty (mali by byť blízke skutočným)

Príklad 1: Stacionarita AR procesu

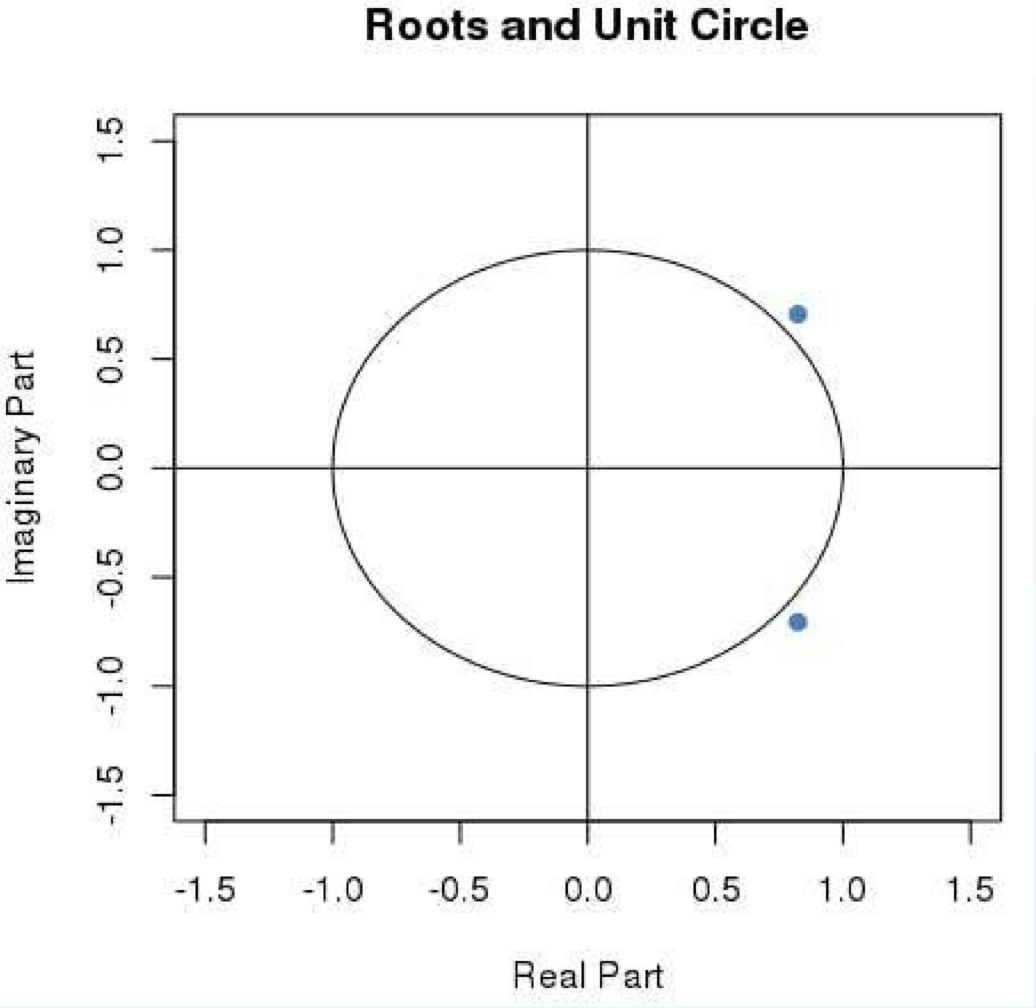
- Máme proces: $x_t = 1.4x_{t-1} - 0.85x_{t-2} + u_t$
- Prepíšeme: $(1 - 1.4L + 0.85L^2)x_t = u_t$
- Korene polynómu $1 - 1.4L + 0.85L^2 = 0$ majú byť mimo jednotkového kruhu
- V R-ku:
  - knižnica library(fArma) (ak treba, najprv nainštalovať)
  - potom (pozor na znamienka): armaRoots(c(1.4,-0.85))
- Prvý výstup: tabuľka s koreňmi

```
> armaRoots(c(1.4,-0.85))
      re      im   dist
1 0.8235  0.7059 1.0847
2 0.8235 -0.7059 1.0847
```

v nej aj absolútna hodnota koreňov

Príklad 1: Stacionarita AR procesu

- Druhý výstup: grafické znázornenie koreňov



Príklad 1: Komplexné korene a perióda

- Komplexné korene $\rightarrow$ periodický charakter procesu $\rightarrow$ chceme vypočítať periódu
- Využívame pritom zápis komplexného čísla v tvare $a + ib = \rho(\cos\varphi + i\ \sin\varphi) = \rho\, e^{i\,\varphi}$ a z neho hodnotu φ
- Získame ju napr. takto:

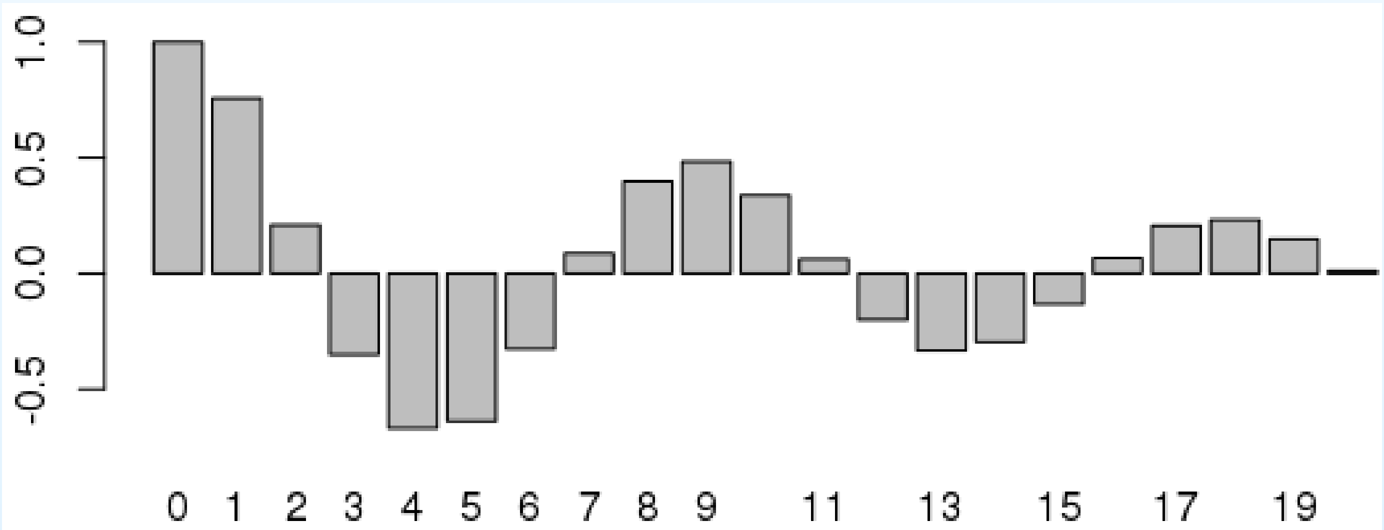
```
> x=complex(real=0.8235, imaginary=0.7059)
> Arg(x)
[1] 0.7086563
```

- *Opakovanie:* Ako z tohto vypočítame periódu?

Príklad 1: ACF a PACF

- Vypísanie hodnôt:
  - ARMAacf(ar=c(1.4,-0.85),lag.max=10) (vratane nulového lagu)
  - ARMAacf(ar=c(1.4,-0.85),lag.max=10, partial="true")
- Graficky napríklad takto:

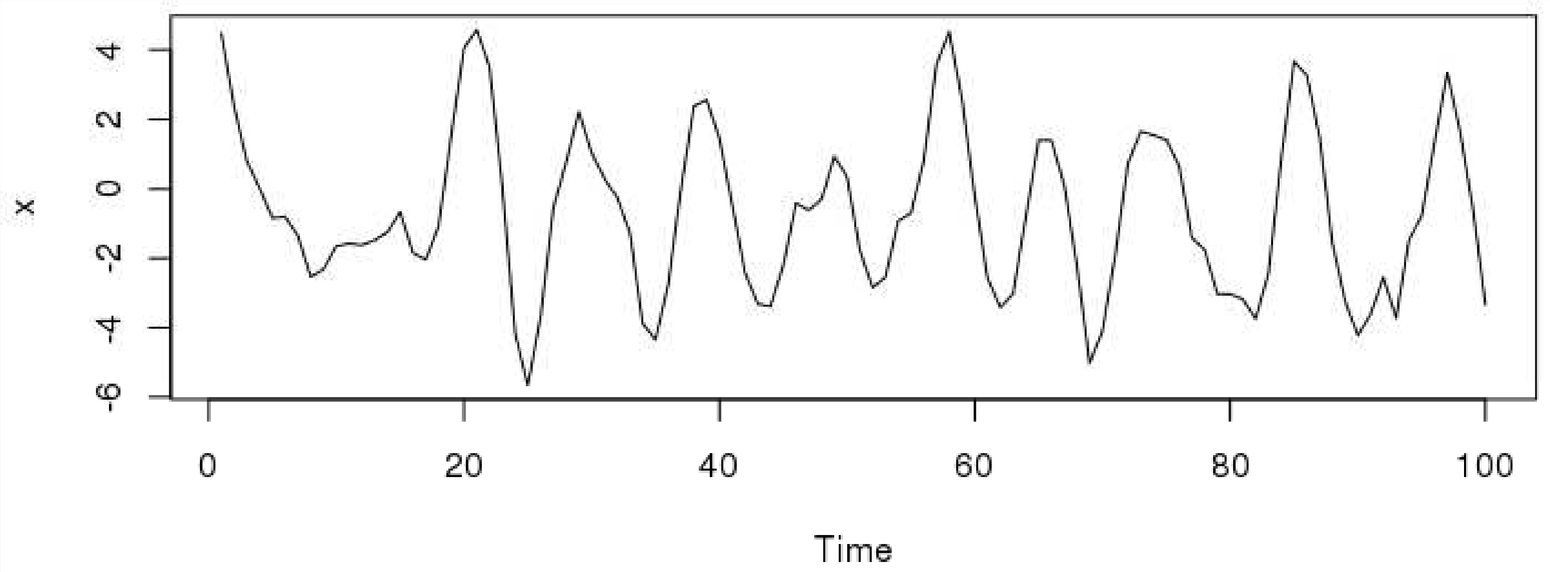
barplot(ARMAacf(ar=c(1.4,-0.85),lag.max=20))



Príklad 1: Realizácia, výberová (P)ACF

- Realizácia procesu:

  x=arima.sim(n=100, list(ar = c(1.4,-0.85)),sd=1)



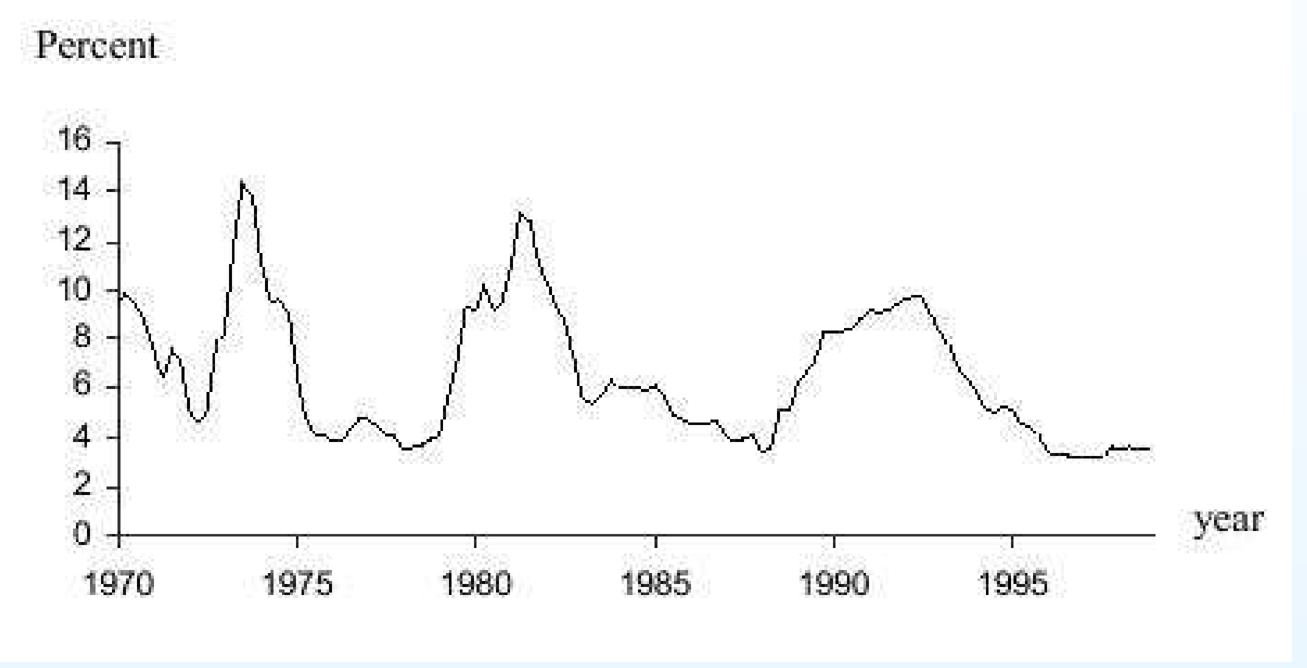
- Výberová ACF a PACF:
  - acf(x) (vrátane nulového lagu), acf(x,type="partial")
  - z knižnice library(astsa) funkcia acf2(x) (ACF aj PACF na jednom obrázku; ACF bez nulového lagu)

Príklad 1: Odhadovanie parametrov

- Budeme používať knižnicu astsa
- Odhadovnie AR(p) modelu: sarima(x,p,0,0,details="false")
- Dostaneme:
  - výstup: odhadnuté koeficienty, signifikantnosť, odhad štandardnej odchýlky náhodnej zložky, informačné kritériía
  - graficky: priebeh rezíudií, testovanie normality, ACF rezíduí, P-hodnota Ljung-Boxovej štatistiky

Príklad 2

- Model z prednášky, úroková miera v Nemecku:



- Odhadnutý model:

$$\begin{array}{llllllll} GSR_t & = & \underset{(2.82)}{0.577} & + & \underset{(17.49)}{1.407\, GSR_{t-1}} & - & \underset{(-6.16)}{0.498\, GSR_{t-2}} & + \; \hat{u}_t, \end{array}$$

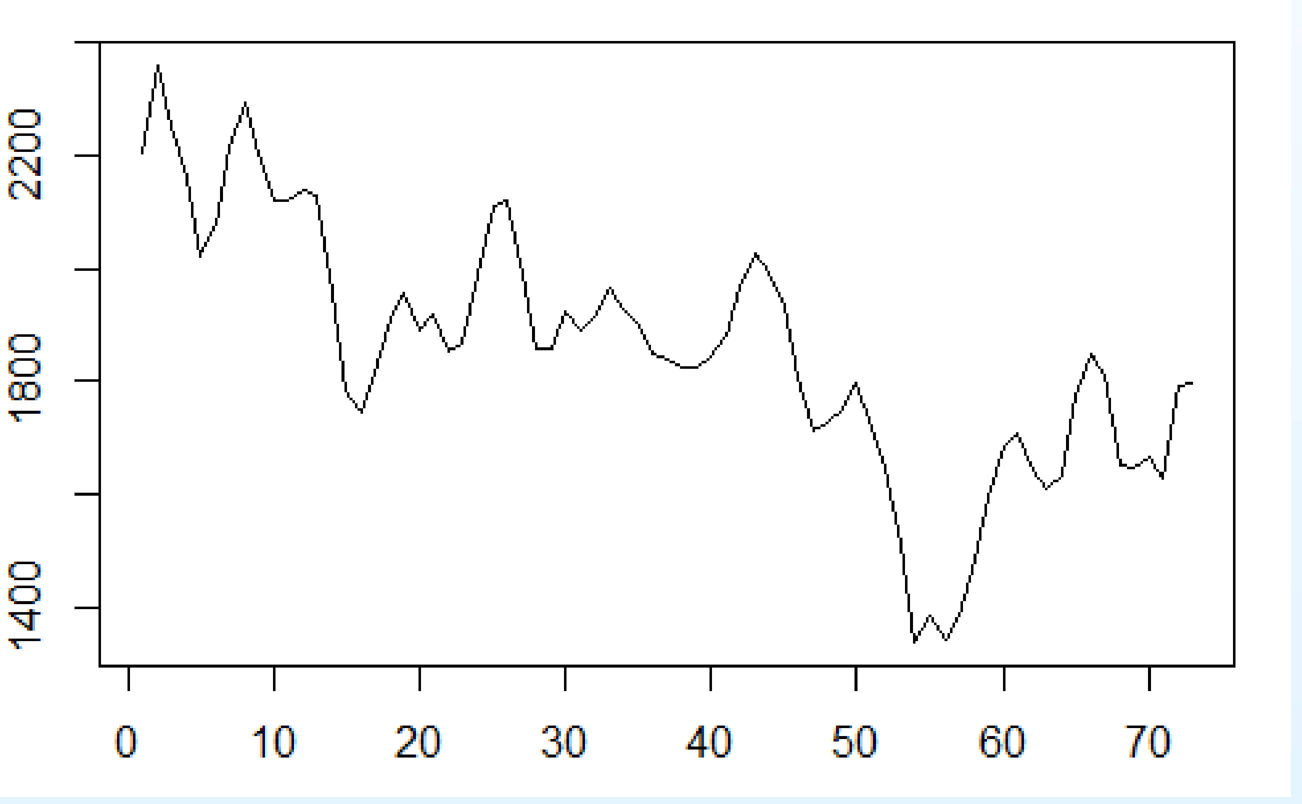
$$\bar{R}^2 = 0.910, \quad SE = 0.812, \quad Q(6) = 6.431 \;\; (p = 0.377)$$

Príklad 2

- Úlohy (niečo sme robili na prednáške ručne, teraz v R-ku):
  - Overte stacionaritu procesu a znázornite korene - kde majú ležať?
  - Interpretujte komplexné korene a ilustrujte ich na priebehu ACF
  - Vygenerujte dáta, ktoré zodpovedajú tomuto procesu. Znázornite ich priebeh a výberovú ACF a PACF. Spätne model odhadnite a porovnajte odhady s parametrami, z ktorých boli dáta generované.

Príklad 3: Reálne dáta

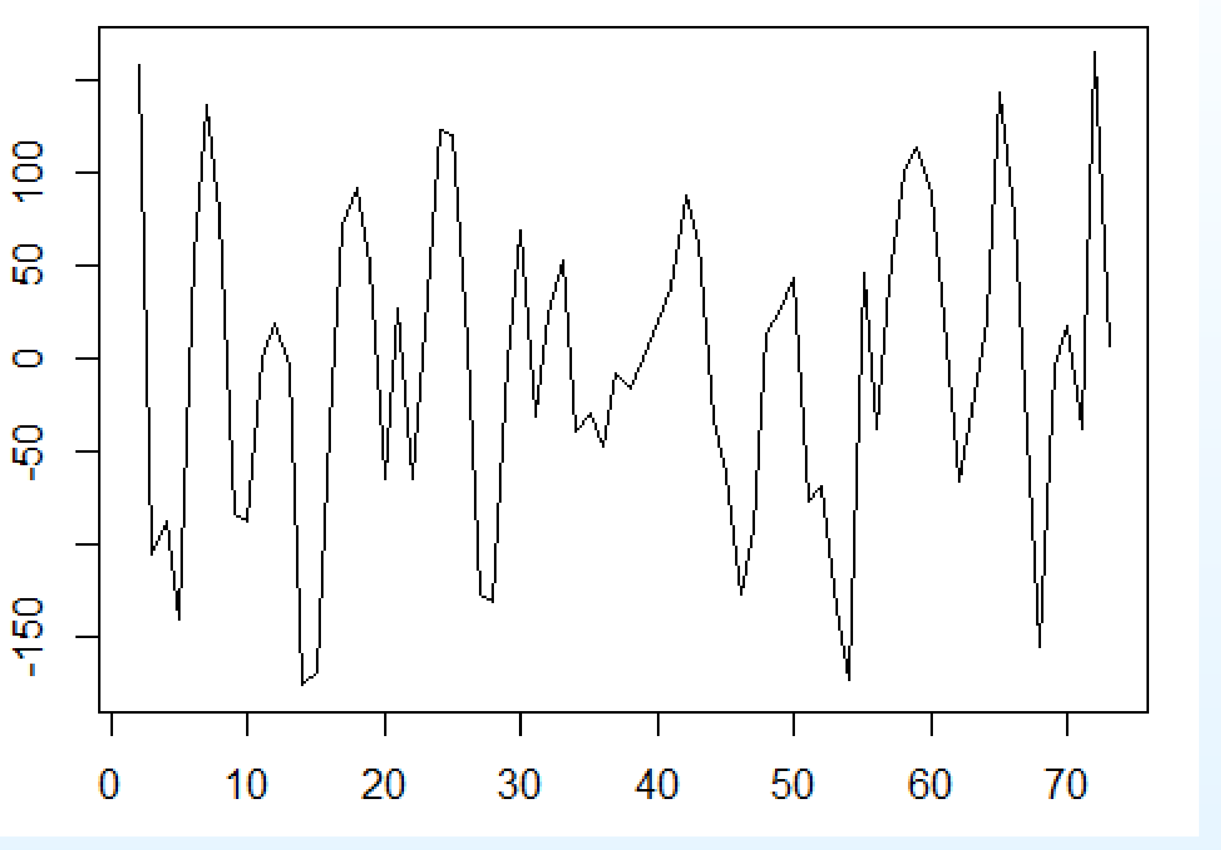
- Počet oviec v tisícoch v Anglicku a Walese,1867-1939
- Zdroj: http://datamarket.com/data/set/22px/
- Po načítaní dát x=ts(x) - spravíme z vektora časový rad



Zdá sa, že dáta nie sú stacionárne, ale majú klesajúci trend

Príklad 3: Reálne dáta

- Budeme pracovať s diferenciami:



- Ak o dhadujeme AR(p) model pre k-te diferencie: sarima(x,p,k,0) - užitočné pri predikciách (predikcie budú pre pôvodné dáta)

Príklad 3: Reálne dáta

- Úlohy:
  - Zobrazte výberovú ACF a PACF. Použite ich na nájdenie vhodného modelu.
  - Overte, že získaný model je stacionárny. Aké má korene?
  - Skomentujte rezíduá; vysvetlite, prečo sa model dá považovať za vyhovujúci.
  - Spravte predikcie. Predikcie pre M periód (ak pre k-te diferencie máme AR(p) model): sarima.for(x,M,p,k,0)

Príklady

Príklad 4

- Nájdite príklad iného stacionárneho AR(2) procesu, ktorého charakteristický polynóm má komplexné korene.
- Ukážte, ako sa tento fakt prejaví na priebehu procesu a na jeho ACF.

Príklad 5

- Najskôr: príklad 7 z príkladov na precvičenie k prednáške
- Vytvorte vlastný príklad typu *"priraďte k sebe proces, jeho realizáciu, ACF a PACF"* (pozri príklady na precvičenie k prednáške), pričom budete uvažovať dva AR(2) procesy. Vysvetlite jeho riešenie.

Príklady

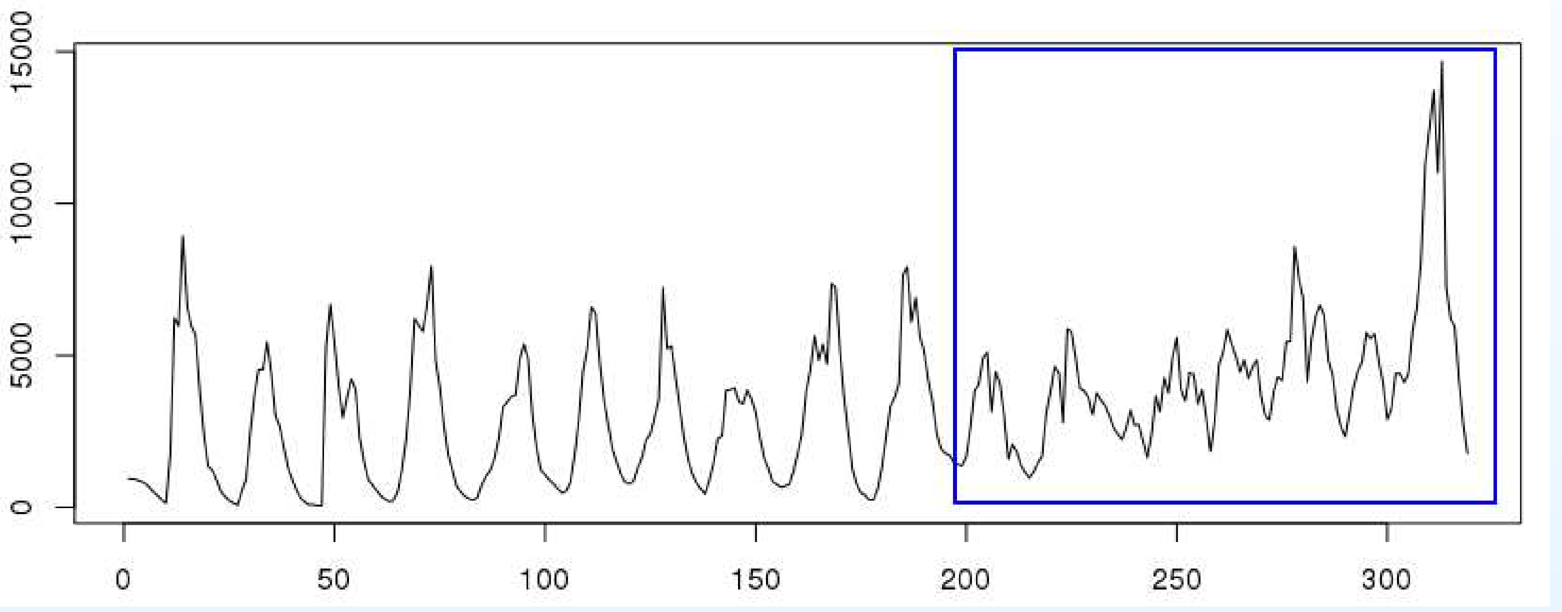
PRÍKLAD 5

- Budeme analyzovať dáta vyjadrujúce veľkosť populácie múch druhu *Lucilia cuprina* v určitých podmienkach: http://robjhyndman.com/tsdldata/blowfly/readme.txt
- Dáta: http://robjhyndman.com/tsdldata/blowfly/total.dat

http://en.wikipedia.org/wiki/File:Australian_sheep_blowfly.jpg

Príklady

- Zoberme na konštrukciu predikcí druhú časť dát, zdá sa, že sa zmenil ich charakter (menej pravidelná periodickosť):



- Nájdite vhodný AR model a spravte predikcie.
- Skúste pracovať aj s logaritmami a vyberte si vhodnejší model (upozornenie: rôzne dáta $\rightarrow$ nedajú sa porovnávať AIC, BIC).

Príklady

PRÍKLAD 6

- Nájdite prvé členy Woldovej reprezentácie zvoleného stacionárneho AR procesu.
- Ide vlastne o hľadanie MA(∞) reprezentácie procesu
- V R-ku: `ARMAtoMA(ar=c(...),lag.max=...)` - skontrolujte si váš výpočet