

ARMA modely
časť 4: Predikcie, odhadovanie parametrov

Beáta Stehlíková
Časové rady, FMFI UK, 2014/2015

IX.

Predikcie

Predikcie

- Sme v čase t , chceme **predikciu** hodnoty $x_{t+\tau}$, t. j. hodnotu procesu o τ období.
- Označme túto predikciu $\hat{x}_t(\tau)$, teda
 - ◇ index t označuje čas, v ktorom konštruujeme predikciu
 - ◇ argument τ označuje, na koľko období dopredu tá predikcia je
- Predikciou bude **očakávaná hodnota procesu** v tom čase, pri danej informácii, ktorú máme k dispozícii:

$$\hat{x}_t(\tau) = E_t[x_{t+\tau}]$$

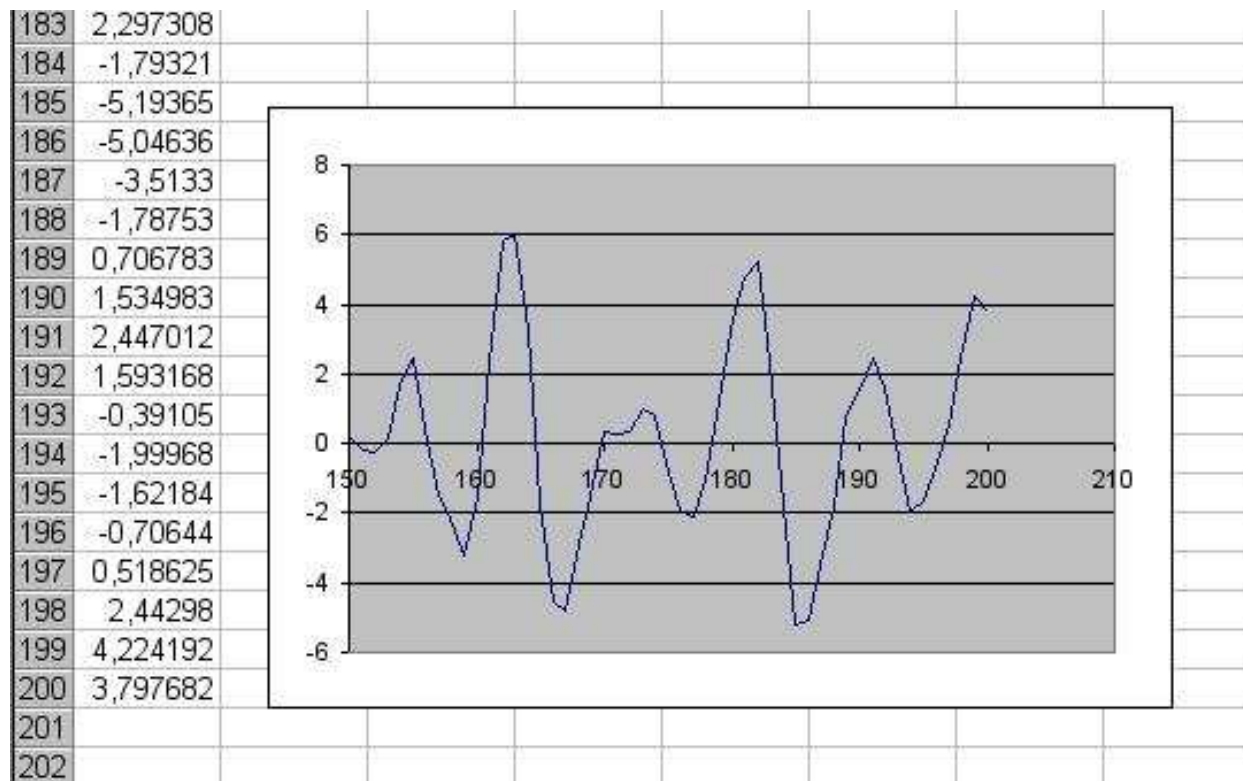
(index t vo výraze E_t znamená, že strednú hodnotu počítame v čase t)

Predikcie pre AR proces

- Majme proces

$$x_t = 1.4x_{t-1} - 0.85x_{t-2} + u_t$$

a dáta:



- Chceme predikcie pre hodnoty v nasledujúcich časoch.

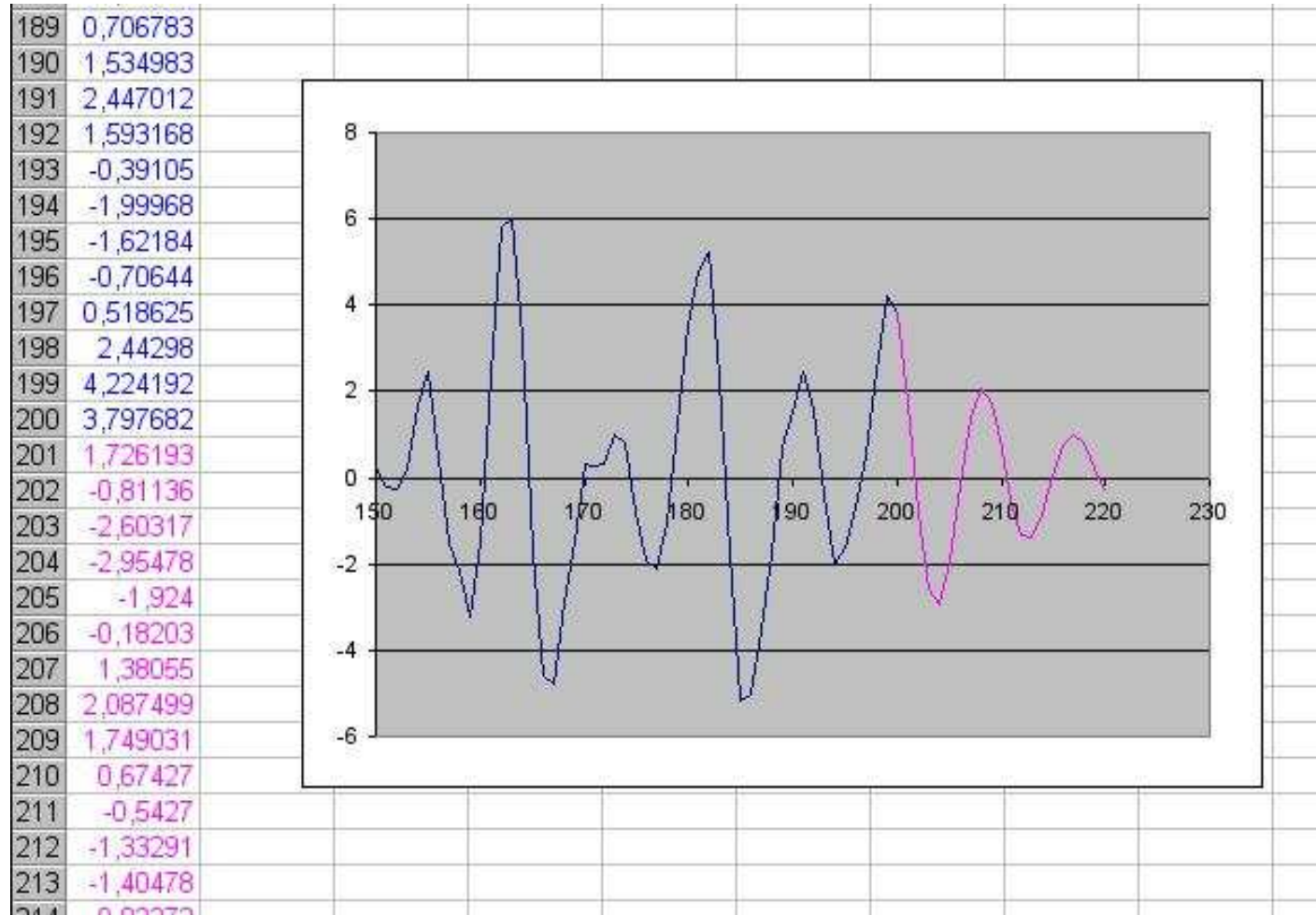
Predikcie pre AR proces

- Intuitívne:
 - ◇ do diferenčnej rovnice dosadzujeme známe hodnoty procesu a keď už k dispozícii nie sú, dosadzujeme predikcie
 - ◇ biely šum nahradíme nulou



Predikcie pre AR proces

- Výsledok:



Predikcie pre AR proces

- Vzt'ah $\hat{x}_t(\tau) = E_t[x_{t+\tau}]$ sa zhoduje s touto intuíciou.
- Majme AR(p) proces

$$x_t = \delta + \alpha_1 x_{t-1} + \dots + \alpha_p x_{t-p} + u_t.$$

Potom:

$$\begin{aligned} x_{t+\tau} &= \delta + \alpha_1 x_{t+\tau-1} + \dots + \alpha_p x_{t+\tau-p} + u_{t+\tau}, \\ \underbrace{E_t[x_{t+\tau}]}_{\hat{x}_t(\tau)} &= \delta + \alpha_1 E_t[x_{t+\tau-1}] + \dots + \alpha_p E_t[x_{t+\tau-p}] \\ &\quad + \underbrace{E_t[u_{t+\tau}]}_0 \end{aligned}$$

pričom

$$E_t[x_{t+s}] = \begin{cases} \hat{x}_t(s) & \text{pre } s > 0 \\ x_{t+s} & \text{pre } s \leq 0 \end{cases}$$

Predikcie pre MA proces

- Majme MA(1) proces

$$x_t = \mu + u_t - \beta u_{t-1}$$

a počítajme predikcie $\hat{x}_t(\tau)$:

$$\begin{aligned} x_{t+s} &= \mu + u_{t+s} - \beta u_{t+s-1}, \\ \underbrace{E_t[x_{t+s}]}_{\hat{x}_t(s)} &= \mu + \underbrace{E_t[u_{t+s}]}_0 - \beta \underbrace{E_t[u_{t+s-1}]}_{u_t \text{ pre } s=1, \text{ inak } 0} \end{aligned}$$

Teda:

$$\hat{x}_t(s) = \begin{cases} \mu - \beta u_t & \text{pre } s = 1 \\ \mu & \text{pre } s = 2, 3, \dots \end{cases}$$

- CVIČENIE: Dokážte, že pre MA(q) proces platí $\hat{x}_t(s) = \mu$ pre $s > q$ a že pre $s \leq q$ predikcie obsahujú realizované hodnoty bieleho šumu u

Predikcie pre MA proces

- Predikcie pre MA(1) proces $x_t = \mu + u_t - \beta u_{t-1}$ sú

$$\hat{x}_t(s) = \begin{cases} \mu - \beta u_t & \text{pre } s = 1 \\ \mu & \text{pre } s = 2, 3, \dots \end{cases}$$

- obsahujú hodnotu bieleho šumu u_t . Táto hodnota už bola v čase konštrukcie predikcií realizovaná, **nie sme však schopní ju pozorovať**.

- Cvičenie z predch. slajdu \Rightarrow podobná situácia nastáva pre ľubovoľný MA(q) proces
- **Ako prakticky počítat' predikcie?**
Myšlienka: **vyjadríme u_t pomocou hodnôt procesu x**
- Tento výpočet si ukážeme na MA(1) procese

Predikcie pre MA proces

- Vyjadrujeme teda u_t pomocou x_1, x_2, \dots, x_t
- Využijeme pritom:

- ◇ Pre MA(1) sme odvodili

$$(1) \quad \hat{x}_t(1) = \mu - \beta u_t$$

- ◇ Pre predikčnú chybu platí

$$(2) \quad x_t - \hat{x}_{t-1}(1) = u_t$$

- Budeme postupne počítat' $\hat{x}_t(1)$ pre $t = 0, 1, 2, \dots$

$$(3) \quad \hat{x}_0(1) \stackrel{(1)}{=} \mu - \beta u_0$$

Predikcie pre MA proces

- Pre $t = 1$:

$$\begin{aligned} \hat{x}_1(1) &\stackrel{(1)}{=} \mu - \beta u_1 \\ &\stackrel{(2)}{=} \mu - \beta[x_1 - \hat{x}_0(1)] \\ &\stackrel{(3)}{=} \mu - \beta[x_1 - (\mu - \beta u_0)] \\ (4) \quad &= \mu(1 + \beta) - \beta x_1 - \beta^2 u_0 \end{aligned}$$

- Pre $t = 2$:

$$\begin{aligned} \hat{x}_2(1) &\stackrel{(1)}{=} \mu - \beta u_2 \\ &\stackrel{(2)}{=} \mu - \beta[x_2 - \hat{x}_1(1)] \\ &\stackrel{(4)}{=} \mu - \beta[x_2 - (\mu(1 + \beta) - \beta x_1 - \beta^2 u_0)] \\ (5) \quad &= \mu(1 + \beta + \beta^2) - \beta x_2 - \beta^2 x_1 - \beta^3 u_0 \end{aligned}$$

Predikcie pre MA proces

- Pre všeobecné t :

$$\hat{x}_t(1) = \mu(1 + \beta + \beta^2 + \dots + \beta^t) - \beta x_t - \beta^2 x_{t-1} - \dots - \beta^t x_1 - \beta^{t+1} u_0$$

- Aj tu vystupuje nepozorovateľná hodnota u_0 , ale vplyv člena $\beta^{t+1} u_0$ ide k nule pre $t \rightarrow \infty$ (kde t je počet dát)
 \Rightarrow môžeme ho zanedbať