

Modelovanie volatility - ARCH a GARCH modely

Beáta Stehlíková

Časové rady, FMFI UK, 2014/2015

Ceny akcií

- Týždenné ceny akcií YHOO zo súboru [yhoo.txt](#) na stránke:

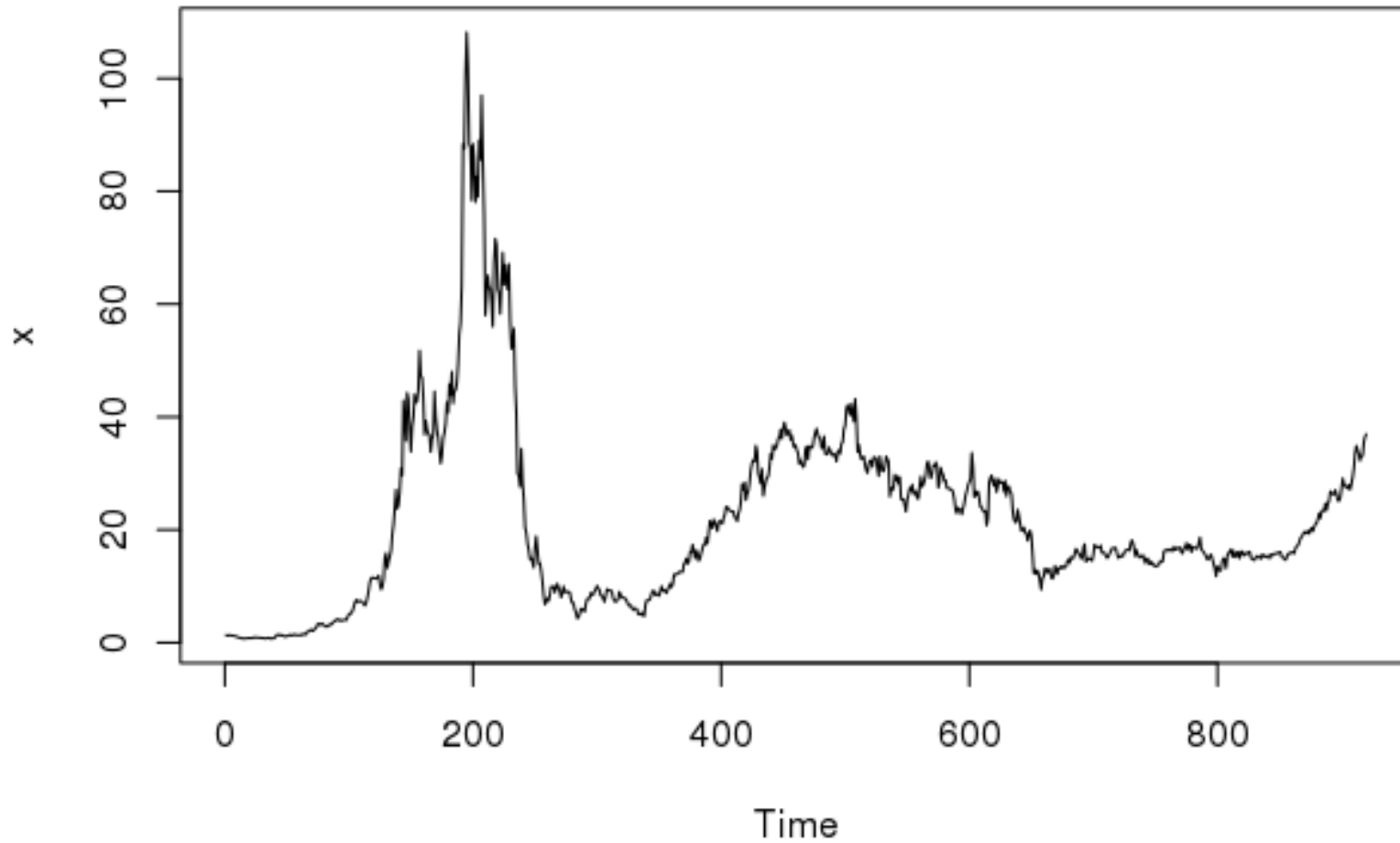
```
> yhoo=read.table("yhoo.txt")
> yhoo=ts(yhoo)
> n=length(yhoo)
> n
[1] 920
```

- Dáta sú zo stránky [finance.yahoo.com](#) → na začiatku sú najnovšie, treba ich otočiť:

```
> x=NA
> for (i in 1:n) x[i]=yhoo[n-i+1]
> x=ts(x)
> plot(x)
```

Ceny akcií

- Priebeh cien:



Výnosy akcií: Black-Scholesov model

- Black-Scholesov model (\rightarrow finančná mat., PDR):

$$dS = \mu S dt + \sigma S dw,$$

kde w je Wienerov proces.

- Existuje explicitné vyjadrenie pre cenu akcie v čase t :

$$S_t = S_0 e^{(\mu - 1/2 \sigma^2)t + \sigma w_t}$$

- Výnosy v Black-Scholesovom modeli:

$$vynost_t = \ln \left(\frac{S_t}{S_{t+\Delta t}} \right) = (\mu - 1/2 \sigma^2) \Delta t + \sigma \Delta w$$

\Rightarrow nezávislé s rozdelením $N((\mu - 1/2 \sigma^2) \Delta t, \sigma^2 \Delta t)$

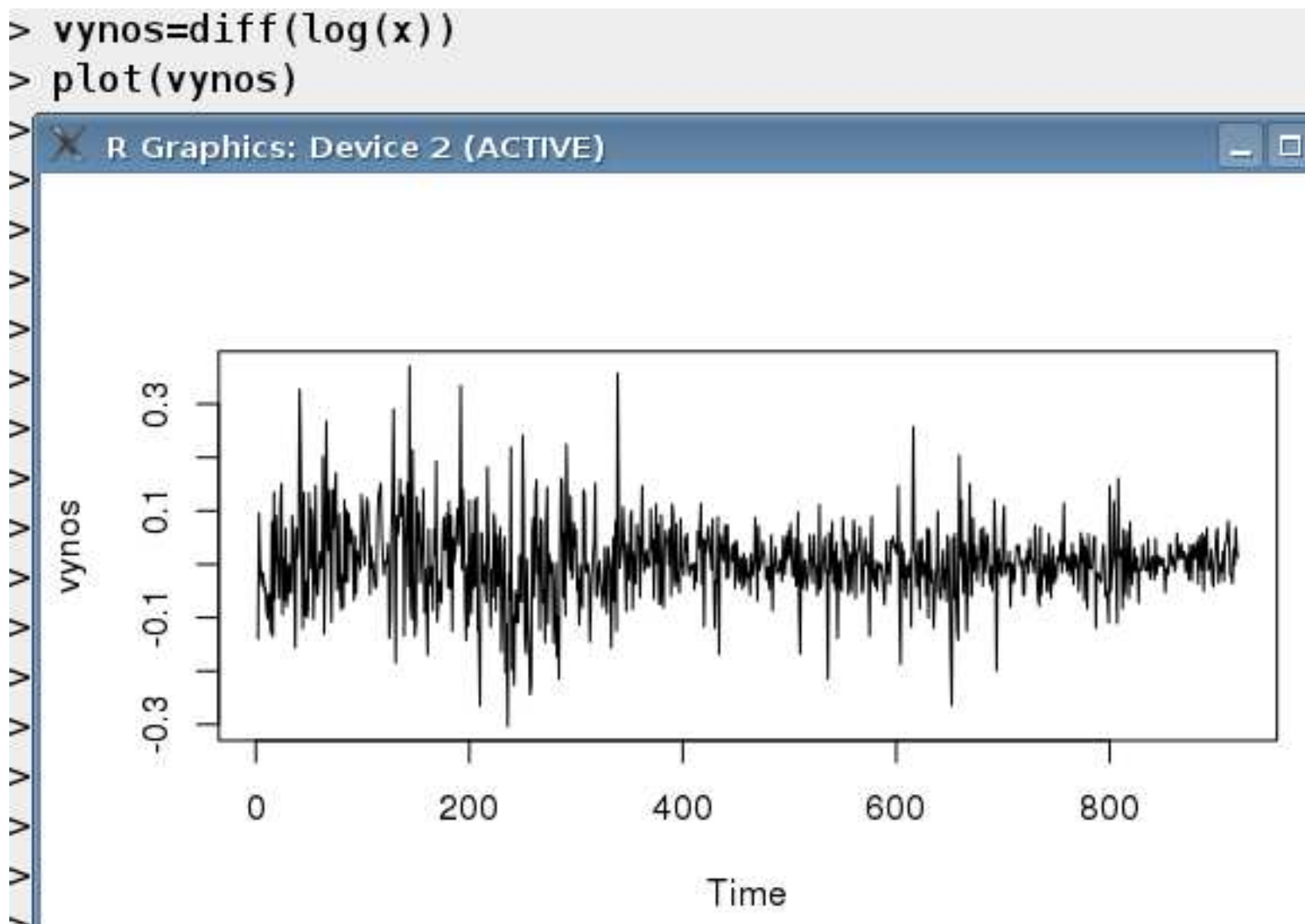
- Model pre časový rad výnosov:

$$vynost_t = c + u_t,$$

kde u je biely šum

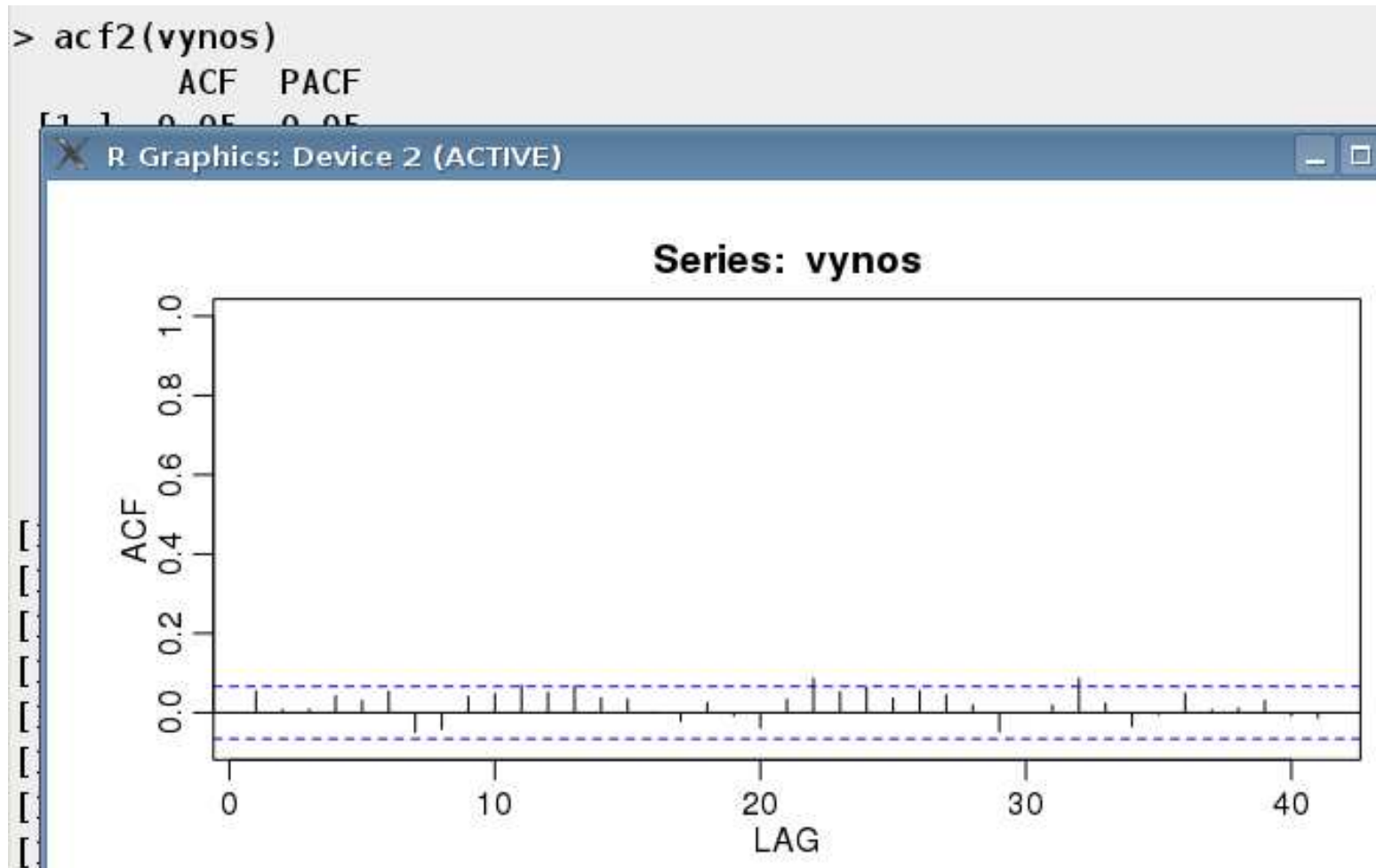
Výnosy akcií: naše dáta

- Priebeh výnosov



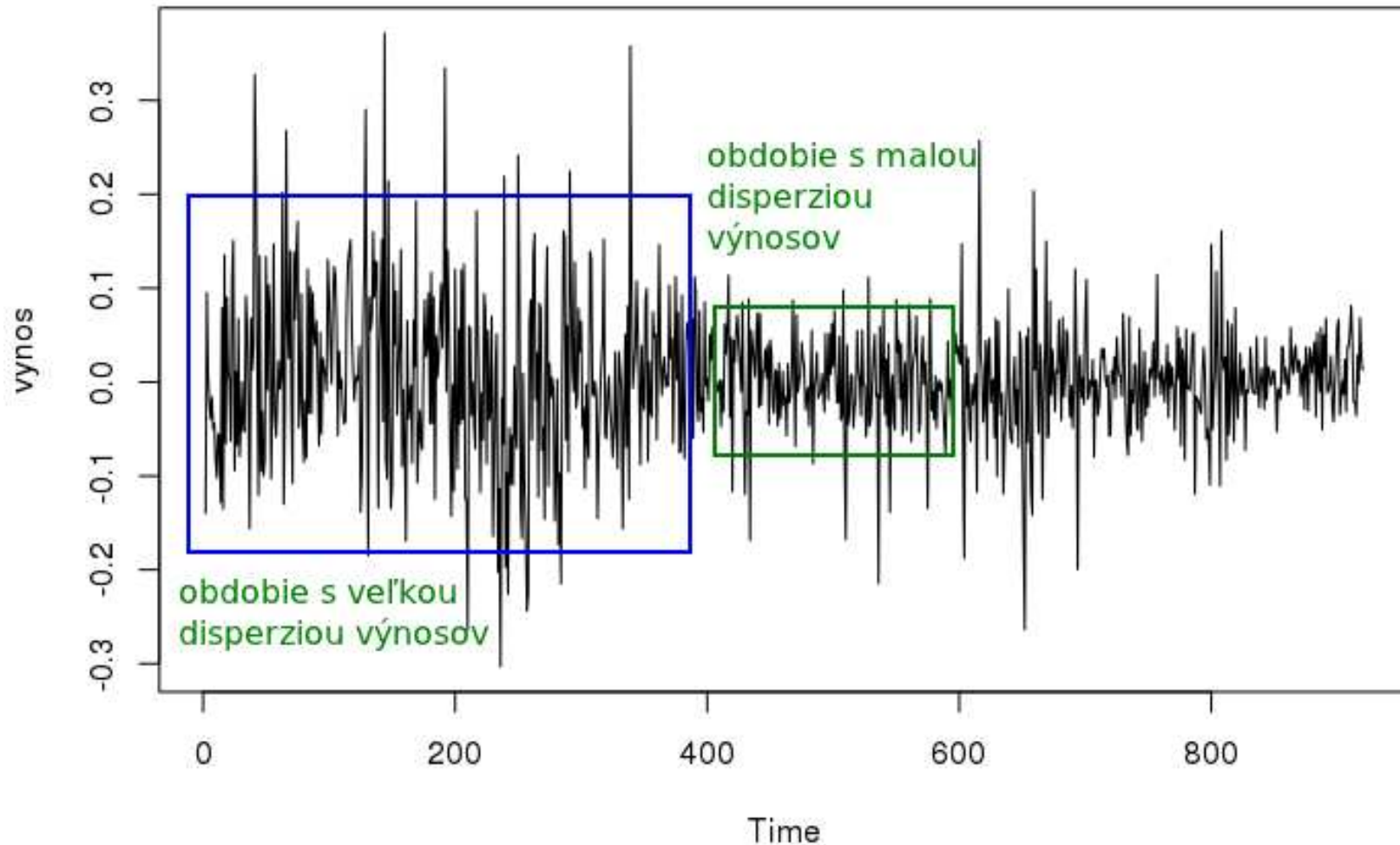
Výnosy akcií: naše dáta

- Podľa ACF by to mohol byť biely šum



Výnosy akcií: naše dáta

- Možný problém: **nekonštatná disperzia**

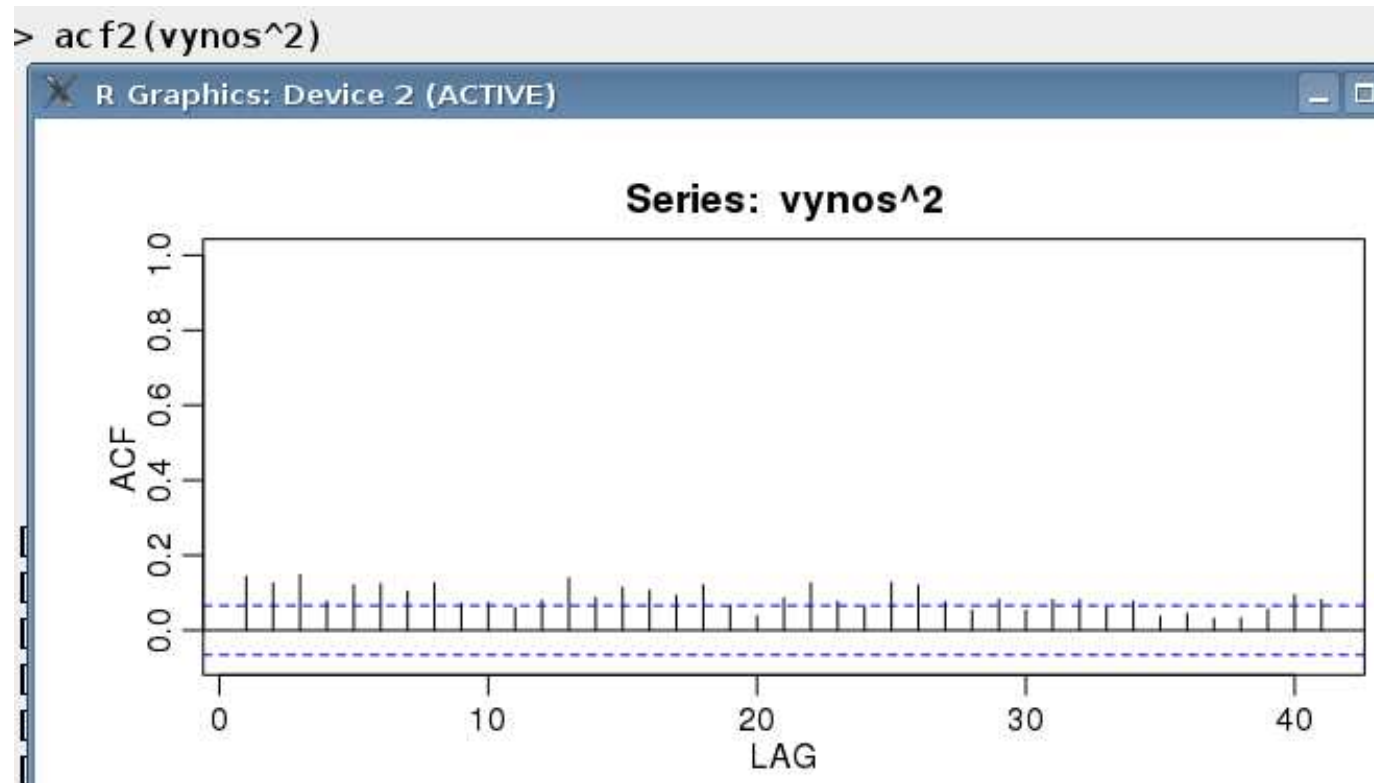


Výnosy akcií: naše dáta

- Ak je absolútna hodnota rezídua malá, tak väčšinou nasleduje rezíduum tiež s malou absolútnou hodnotou
- Podobne za rezíduom s veľkou absolútnou hodnotou nasleduje často rezíduum s veľkou absolútnou hodnotou - môže byť kladné aj záporné, preto sa táto vlastnosť na autokorelácii neprejavila
- **Druhé mocniny budú zrejme korelované** (pre biely šum to ale neplatí)

Príklad - výnosy akcií

- Autokorelácia druhých mocnín:



→ výrazná autokorelácia

- OTÁZKA:
Aký model dokáže zachytiť takúto vlastnosť?

ARCH a GARCH modely

- u nie je biely šum, ale

$$u_t = \sqrt{\sigma_t^2} \eta_t,$$

kde η je biely šum s jednotkovou disperziou; teda

$$u_t \sim N(0, \sigma_t^2)$$

- **ARCH model** (autoregressive conditional heteroskedasticity) - rovnica pre disperziu σ_t^2 :

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p u_{t-p}^2$$

- **Ohraničenia na parametre:**

- ◇ na zabezpečenie kladnosti disperzie:

$$\omega > 0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1} \geq 0, \alpha_p > 0$$

- ◇ kvôli stacionarite:

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_p < 1$$

ARCH a GARCH modely

- Nevýhody ARCH modelov:
 - ◇ malý počet členov u_{t-i}^2 často nestačí - vo štvorcoch rezíduí je stále autokorelácia
 - ◇ pri väčšom počte členov sú koeficienty často nesignifikantné alebo nespĺňajú uvedené ohraničenia na parametre
- Zovšeobecnenie: **GARCH modely** - odstraňujú tieto problémy

ARCH a GARCH modely

- **GARCH model** (generalized autoregressive conditional heteroskedasticity) rovnica pre disperziu σ_t^2 :

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= \omega + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p u_{t-p}^2 \\ &\quad + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \dots + \beta_q \sigma_{t-q}^2\end{aligned}$$

- **Ohraničenia na parametre:**
 - ◇ na zabezpečenie kladnosti disperzie:

$$\omega > 0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1} \geq 0, \alpha_p > 0$$

$$\beta_1, \dots, \beta_{q-1} \geq 0, \beta_q > 0$$

- ◇ kvôli stacionarite:

$$(\alpha_1 + \dots + \alpha_p) + (\beta_1 + \dots + \beta_q) < 1$$

- Často sa používa GARCH(1,1).

GARCH modely v R-ku

- Modelovanie výnosov YHOO - pokračovanie
- V R-ku:
 - ◇ knižnica `fGarch`
 - ◇ funkcia `garchFit`, model sa píše v tvare napr.
`arma(1,1)+garch(1,1)`
 - ◇ parametrom `trace=FALSE` zrušíme vypisovanie podrobností ohľadom konvergenencie optimalizačného procesu
- Odhadujeme model **konštanta + šum**; na modelovanie šumu skúsime **populárny GARCH(1,1) model**

GARCH modely v R-ku

- Odhadovanie modelu:

```
> mod=garchFit(~garch(1,1), data=vynos, trace=FALSE)
> mod
```

Coefficient(s):

	mu	omega	alpha1	beta1
	4.6688e-03	4.1246e-05	9.7270e-02	9.0108e-01

Std. Errors:

based on Hessian

Error Analysis:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	
mu	4.669e-03	1.856e-03	2.516	0.011873	*
omega	4.125e-05	2.564e-05	1.609	0.107686	
alpha1	9.727e-02	2.520e-02	3.860	0.000114	***
beta1	9.011e-01	2.406e-02	37.457	< 2e-16	***

GARCH modely v R-ku

- Prístup k užitočným hodnotám:
 - ◇ `@fitted` - fitované hodnoty
 - ◇ `@residuals` - rezíduá
 - ◇ `@h.t` - odhadnutá variancia
 - ◇ `@sigma.t` - odhadnutá štandardná odchýlka
- Štandardizované rezíduá - rezíduá vydelené ich štandardnou odchýlkou - majú byť bielym šumom:

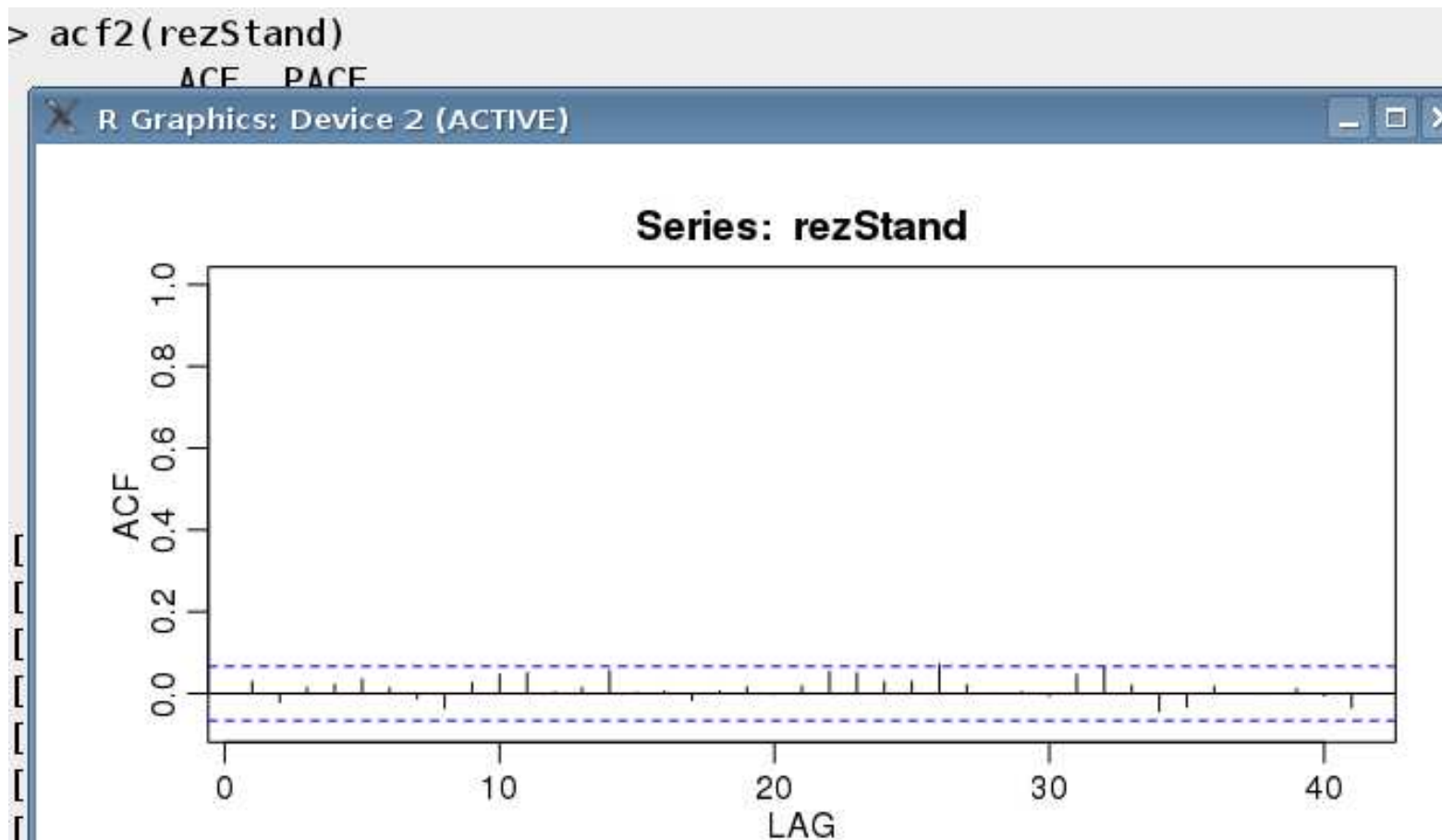
```
> rez=mod@residuals  
> rezStand=rez/mod@sigma.t
```

Skontrolujeme

- ◇ ich ACF - či v nich nie je autokorelácia
- ◇ ACF druhých mocnín - či sme dobre modelovali disperziu pôvodných dát

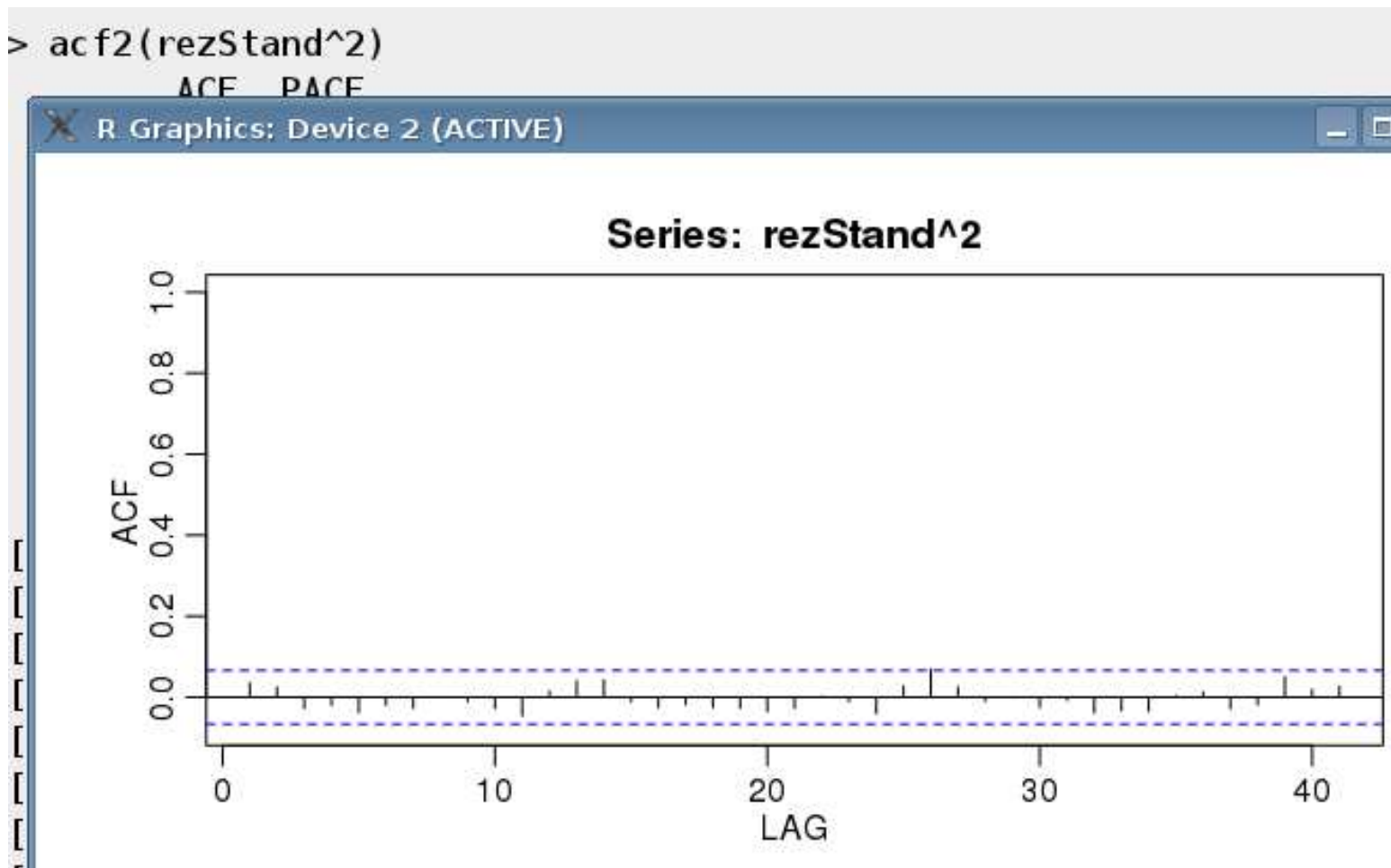
Testovanie rezíduí

- Rezíduá - OK



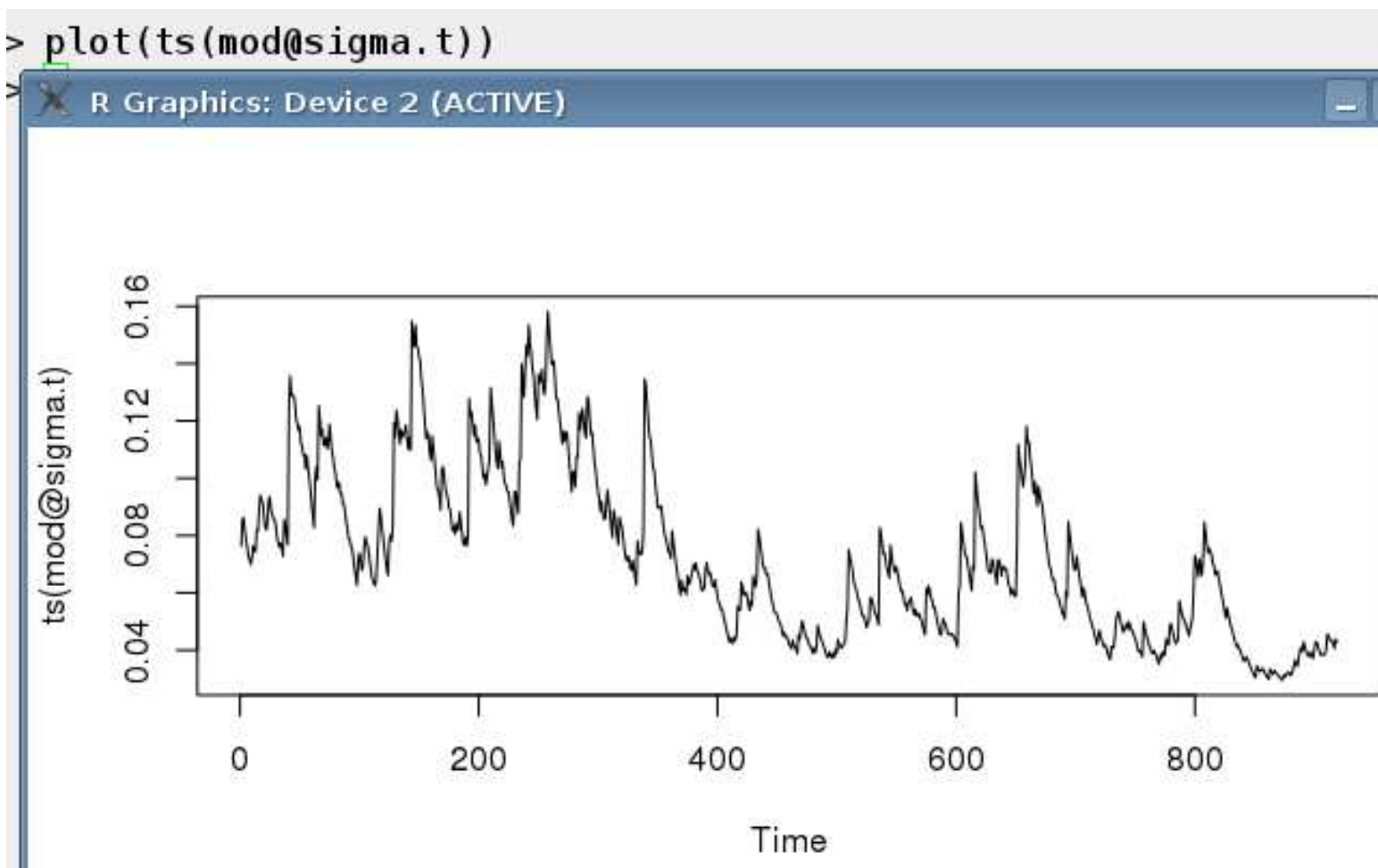
Testovanie rezíduí

- Druhé mocniny rezíduí - OK



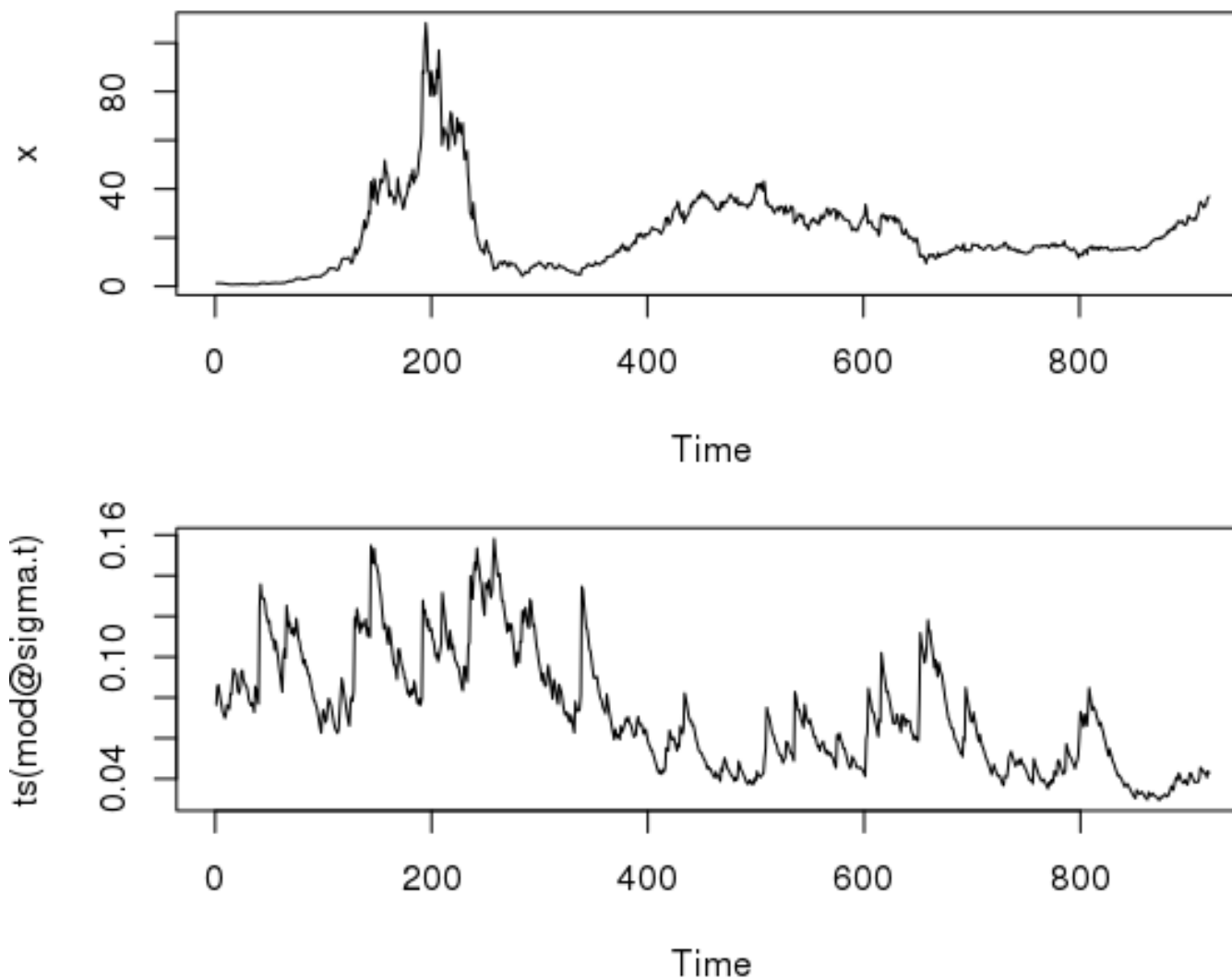
Odhadnutá štandardná odchýlka

- Priebeh odhadnutej štandardnej odchýlky:



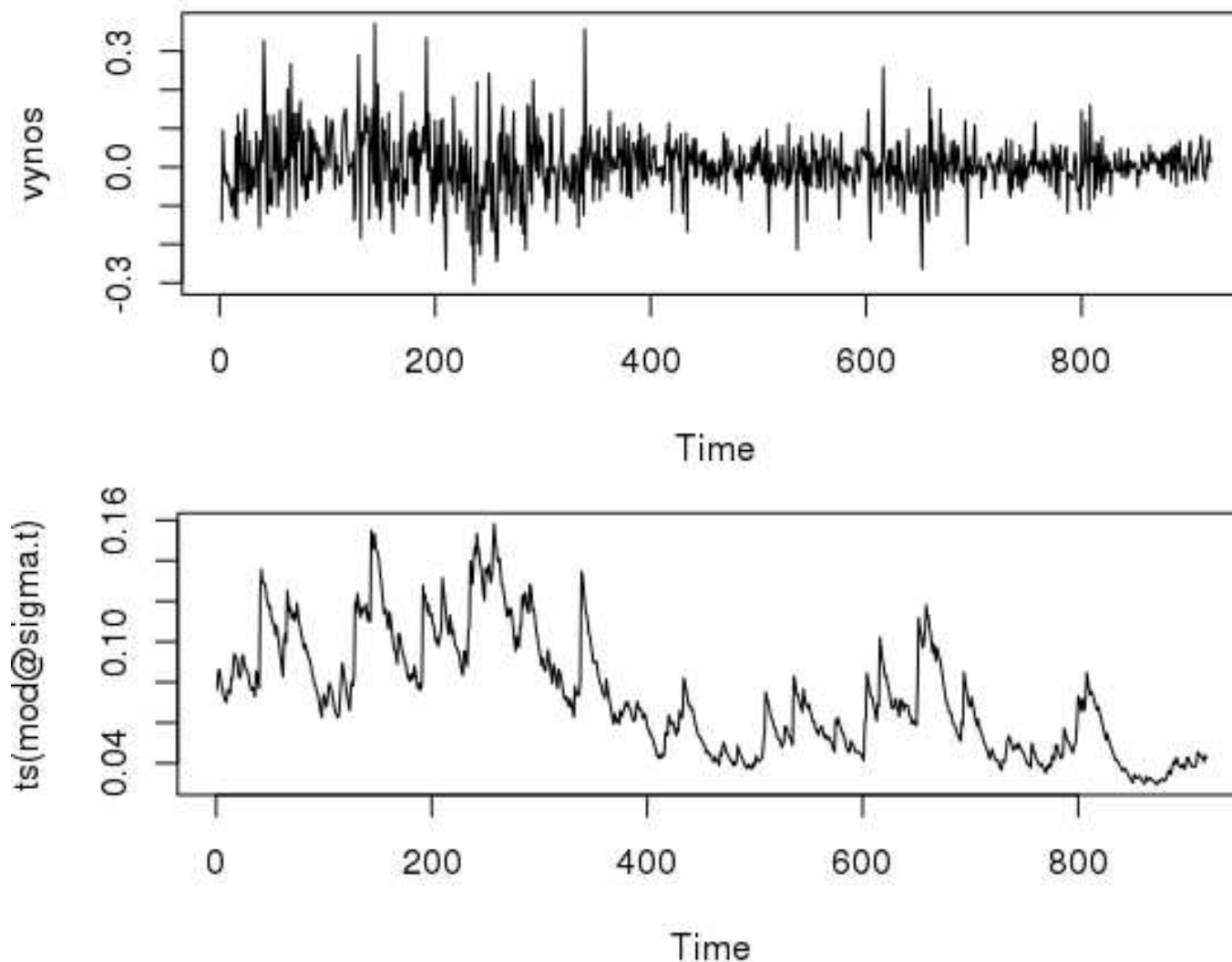
Odhadnutá štandardná odchýlka

- Porovnanie s priebehom cien akcie:



Odhadnutá štandardná odchýlka

- Porovnanie s priebehom výnosmi akcie:



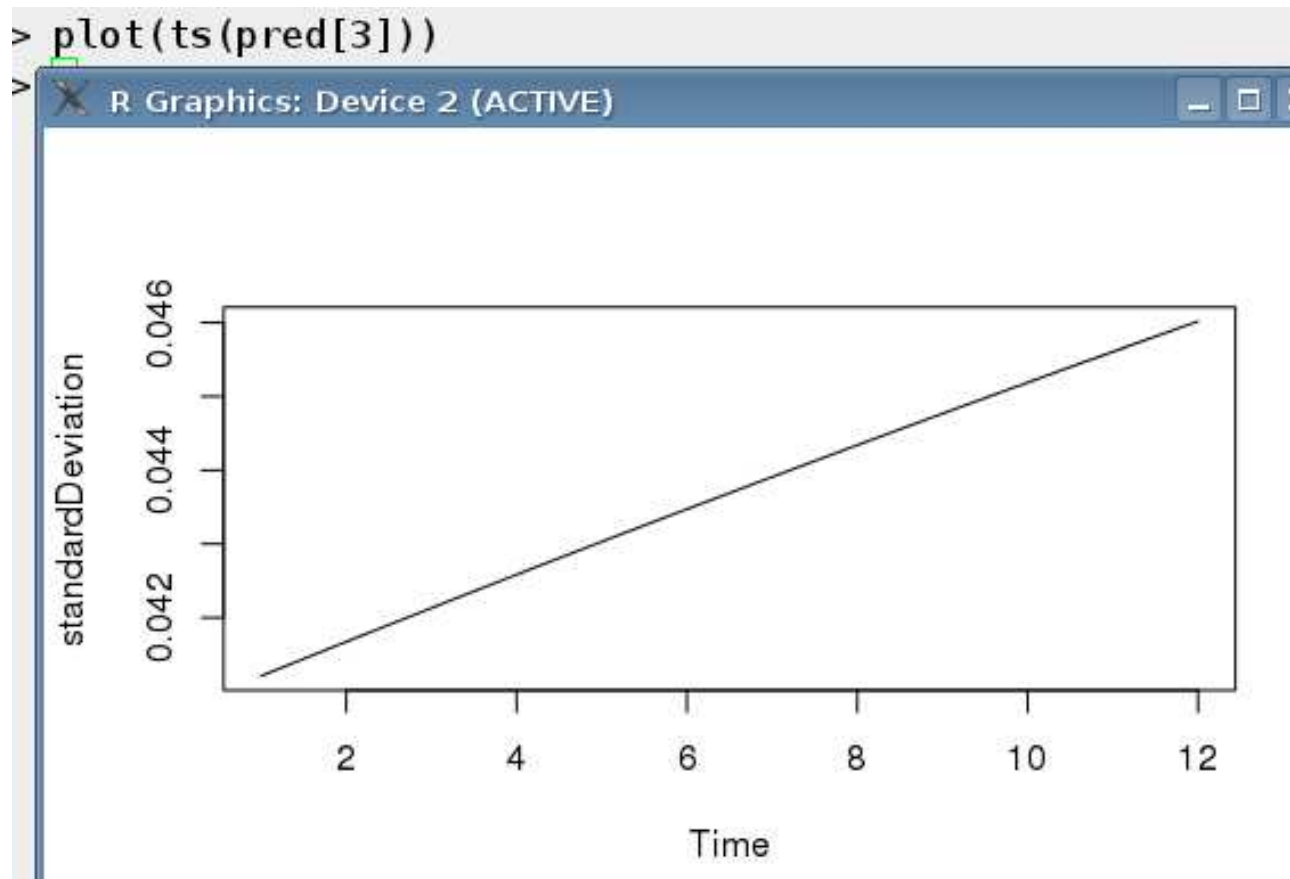
Predikcie

- V premennej `mod` máme náš GARCH model
- Predikcie pomocou funkcie `predict`; parameter `n.ahead` určuje počet períód

```
> pred=predict(mod,n.ahead=12);  
> pred  
      meanForecast  meanError standardDeviation  
1      0.00466879  0.04120920          0.04120920  
2      0.00466879  0.04167312          0.04167312  
3      0.00466879  0.04213118          0.04213118  
4      0.00466879  0.04258357          0.04258357  
5      0.00466879  0.04303048          0.04303048  
6      0.00466879  0.04347206          0.04347206  
7      0.00466879  0.04390849          0.04390849  
8      0.00466879  0.04433992          0.04433992  
9      0.00466879  0.04476649          0.04476649  
10     0.00466879  0.04518834          0.04518834  
11     0.00466879  0.04560560          0.04560560  
12     0.00466879  0.04601840          0.04601840
```

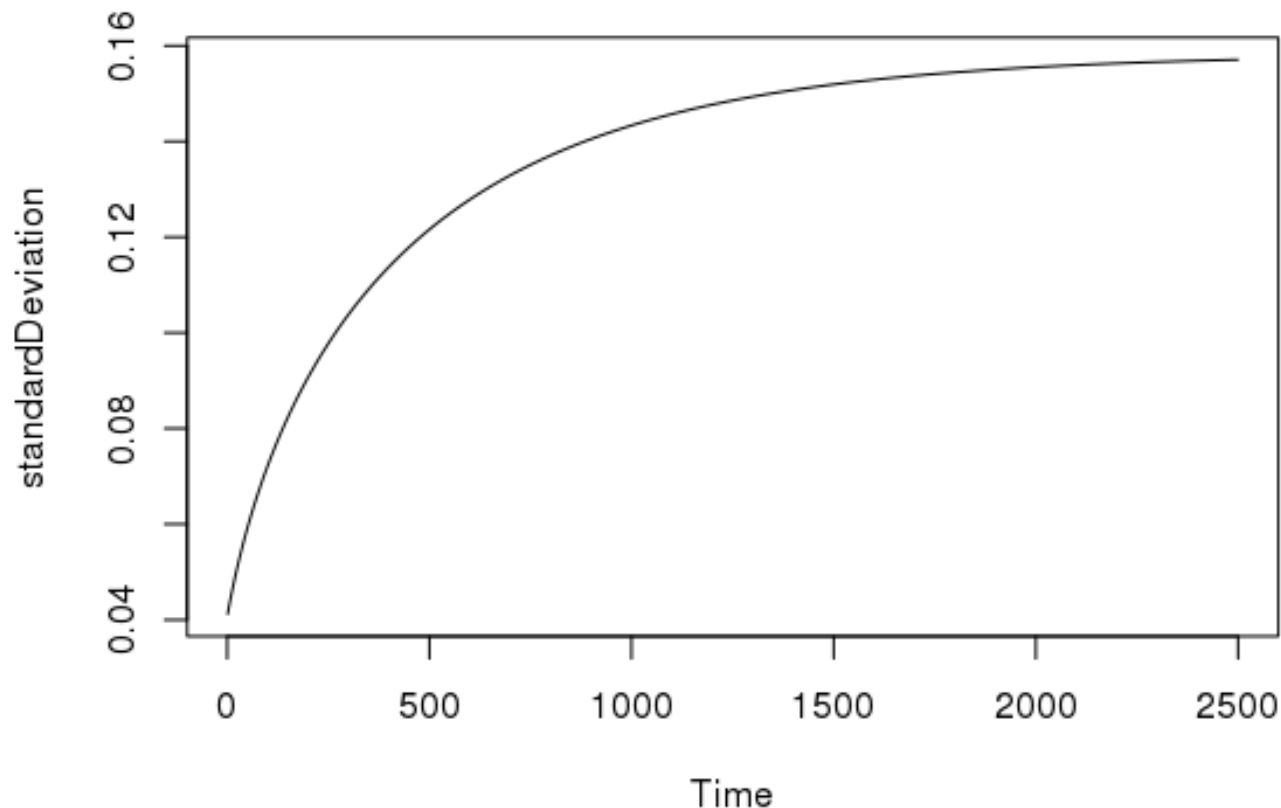
Predikcie

- Predikovaný vývoj štandardnej odchýlky:



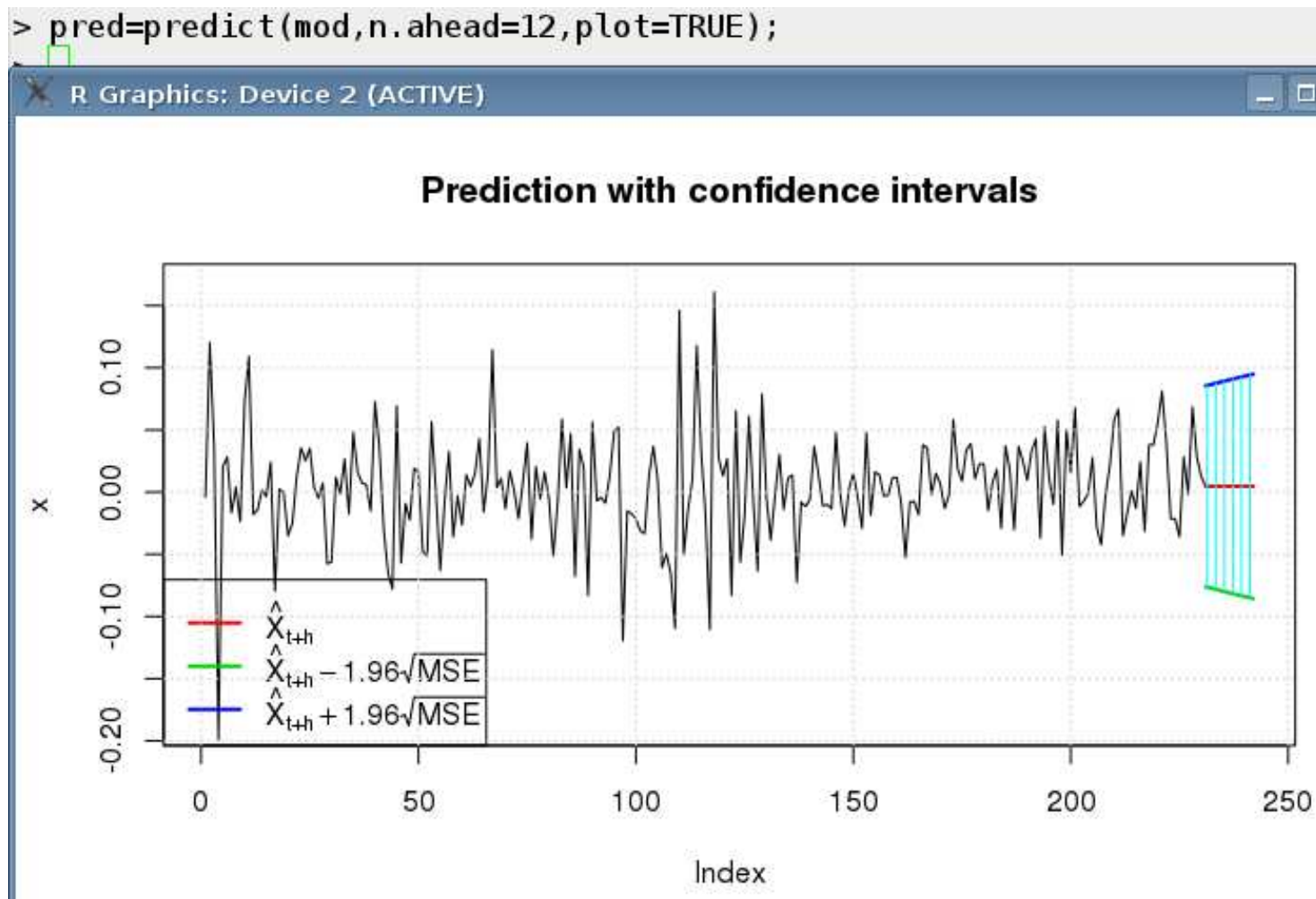
Predikcie

- Predikovaný vývoj štandardnej odchýlky - **konverguje k jej nepodmienenenej strednej hodnote**
- OTÁZKA: Čomu sa táto nepodmienená stredná hodnota rovná (na základe výstupu)?



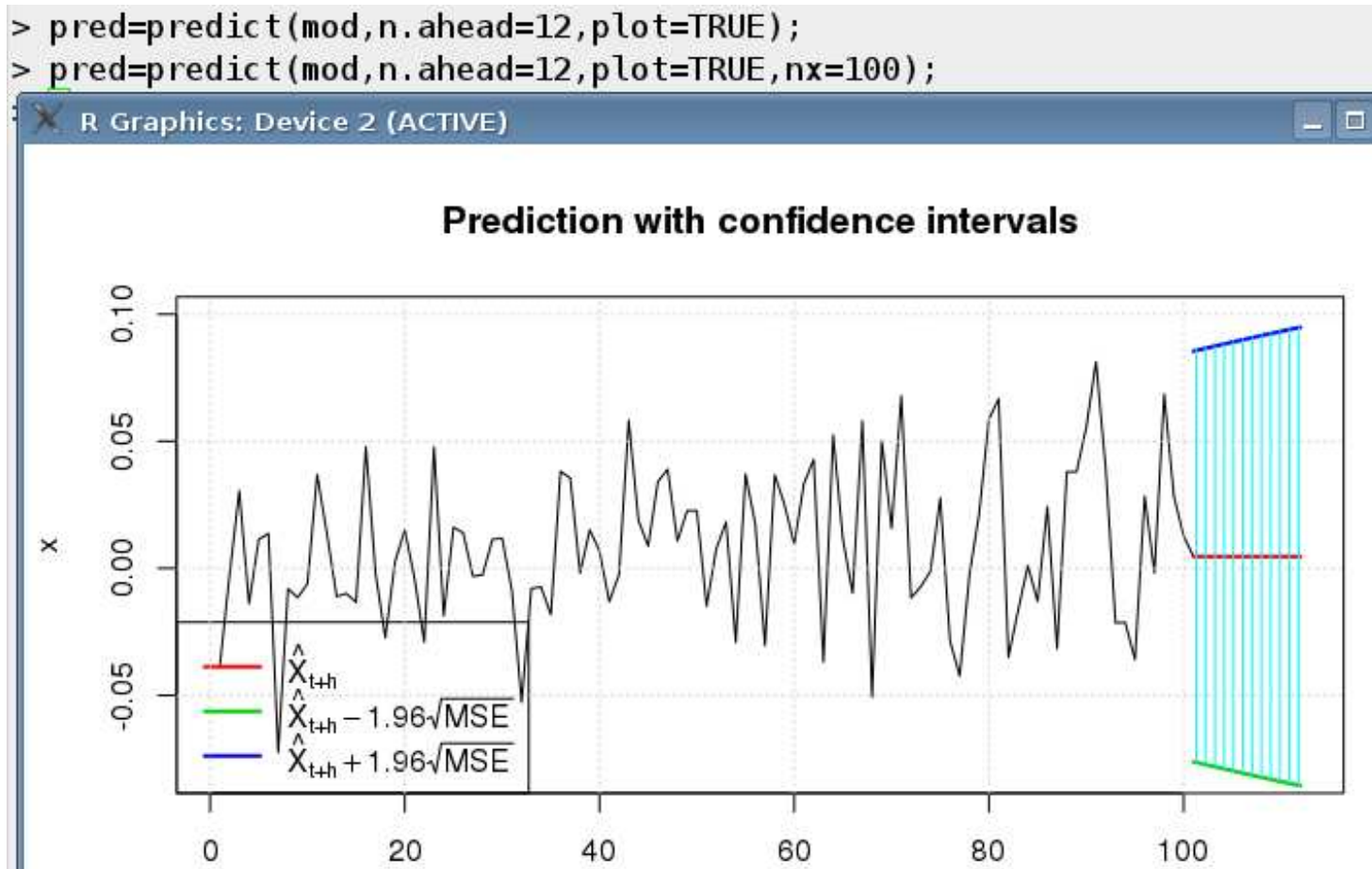
Predikcie

- Vykreslenie predikcií: parameter `plot=TRUE`



Predikcie

- Môžeme zmeniť počet dát, ktoré sa vykreslia pred predikciami - parameter `nx=...`



Aplikácia: Value at risk (VaR)

- Value at risk (VaR) je vlastne kvantil
- Nech X je hodnota portfólia; potom

$$\mathcal{P}(X \leq VaR) = \alpha,$$

napr. pre $\alpha = 0.05$

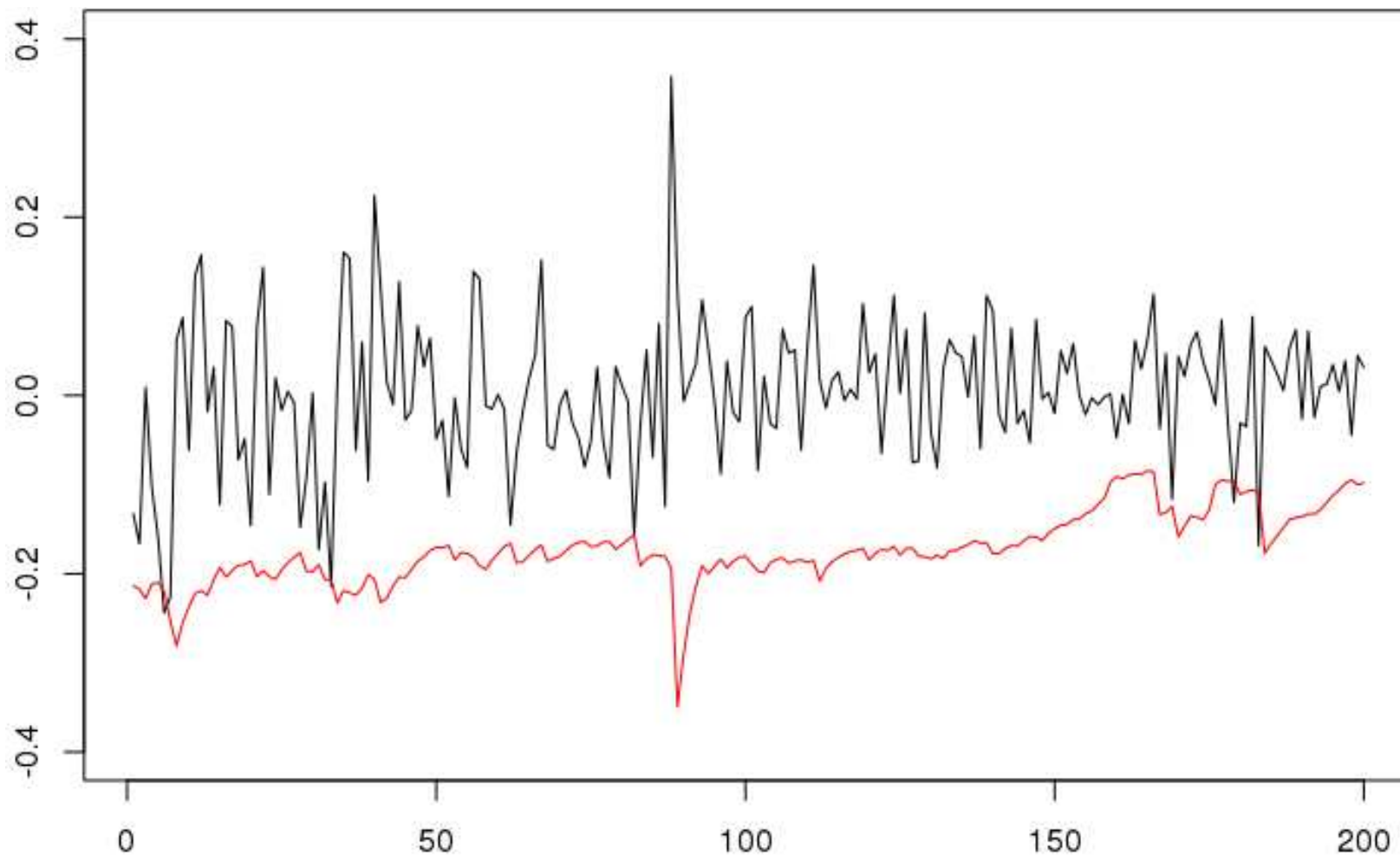
- Štandardne GARCH predpokladá normálne rozdelenie (dajú sa odhadovať aj iné rozdelenia) - vieme počítať kvantily

Aplikácia: Value at risk (VaR)

- NA NEPOVINNOM CVIČENÍ:
 - ◇ Začneme po N hodnotách výnosov
 - ◇ Odhadneme GARCH model.
 - ◇ Spravíme predikciu pre štandardnú odchýlku a pomocou nej zostrojíme VaR pre výnos na nasledujúci týždeň
 - ◇ Každý týždeň pridáme nové pozorovanie, odhadneme znovu GARCH a vypočítame nové VaR
- Teraz si ukážeme, čo takýmto postupom výjde

Aplikácia: Value at risk (VaR)

- Ukážka: výnosy a *value at risk*



Iné modely pre volatilitu

- **Threshold GARCH:**
 - ◇ $u_t > 0$ - "good news", $u_t < 0$ - "bad news"
 - ◇ TARARCH umožňuje, aby mali na volatilitu rôzny vplyv
 - ◇ *leverage effect*: väčší vplyv na volatilitu majú *bad news*
- Nemodelujeme disperziu (ako v ARCH/GARCH modeloch), ale
 - ◇ jej logaritmus → **exponential GARCH**
 - ◇ ľubovoľnú mocninu štandardnej odchýlky → **power GARCH**
- a ďalšie...