

Aplikácia nelineárnej metódy najmenších štvorcov: Bassov model

Beáta Stehlíková
FMFI UK Bratislava

Bassov model

Bassov model

Frank Bass (1926-2006)

Priekopník matematických modelov v marketingu



Bassov model

F. Bass, A New Product Growth for Model Consumer Durables, Management Science, Vol. 15 (January 1969)

Jeden z desiatich článkov vo výbere *Top 10 Most Influential Papers published in the 50-year history of Management Science* (2004)

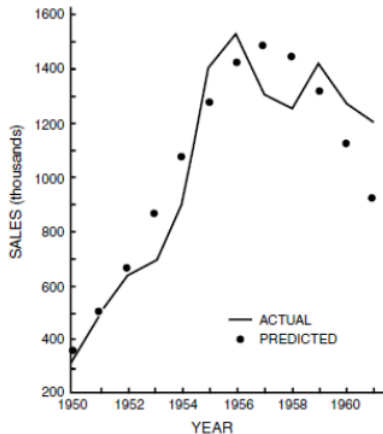
*Perhaps the first thing to notice. . . is the title. It contains a typo. The correct title should be **A New Product Growth Model for Consumer Durables**. I suppose that I was so excited about having the paper accepted for publication that I failed to carefully proofread the galley proofs. (Frank Bass, 2004)*

Matematický model pre **zavedenie nového produktu na trh**

Bassov model

Príklad z pôvodného Bassovho článku:

Figure 8 Actual Sales and Sales Predicted by Model (Clothes Dryers)



Bassov model: myšlienka

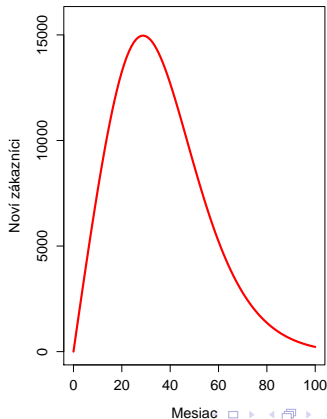
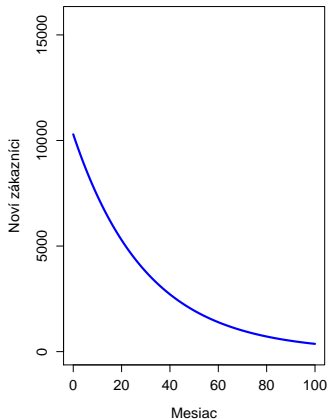
Inovátori a imitátori

Základná myšlienka modelu - na trhu sú *dva typy zákazníkov*:

- ▶ *inovátori (innovators)* - tovar si kúpia na základe informácií o novom produkte, reklamy a pod.
- ▶ *imitátori (imitators)* - rozhodujú sa podľa skúseností iných používateľov a ich hodnotenia

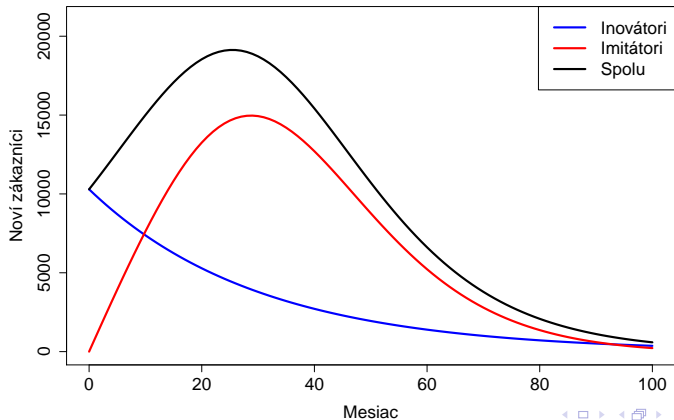
Bassov model: myšlienka

Inovátori a imitátori - počet nových zákazníkov:



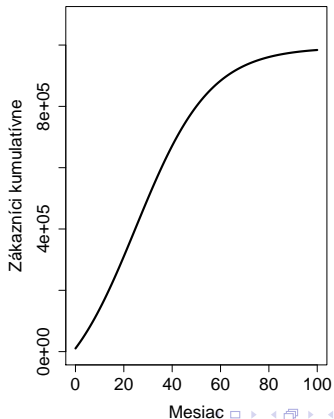
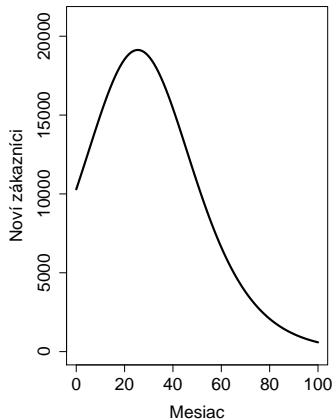
Bassov model: myšlienka

Počet nových zákazníkov spolu:



Bassov model: myšlienka

Počet nových zákazníkov a kumulatívny počet zákazníkov:



Bassov model: matematická formulácia

- ▶ Spojitý čas t
- ▶ $F(t)$ = podiel ľudí z celkového objemu trhu, ktorí si produkt zakúpili do času t
- ▶ $f(t)$ = podiel ľudí z celkového objemu trhu, ktorí si produkt zakúpili "v čase t ", platí $f(t) = F'(t)$
- ▶ **Základný predpoklad modelu:** Pravdepodobnosť toho, že si človek kúpi produkt v čase t , ak si ho doteraz nekúpil, je $p + qF(t)$
- ▶ **Parametre:** p vyjadruje vplyv inovátorov, q vyjadruje vplyv imitátorov
- ▶ Dostávame rovnicu:

$$\frac{f(t)}{1 - F(t)} = p + qF(t),$$

pričom $F(0) = 0$

Bassov model: riešenie

Máme teda obyčajnú diferenciálnu rovnicu pre funkciu $F(t)$:

$$\frac{F'(t)}{1 - F(t)} = p + qF(t), F(0) = 0,$$

ktorá sa dá vyriešiť separáciou premenných:

$$\frac{dF}{(1 - F)(p + qF)} = dt \Rightarrow F(t) = \frac{1 - e^{-(p+q)t}}{1 + \frac{q}{p}e^{-(p+q)t}}$$

Bassov model: riešenie

Príslušná funkcia $f(t) = F'(t)$:

$$f(t) = \frac{(p+q)^2 e^{-(p+q)t}}{p \left[1 + \frac{q}{p} e^{-(p+q)t} \right]^2}$$

a jej maximum - voľne povedané: v ktorom čase sa predá najviac výrobkov - pre $q > p > 0$:

$$t_{peak} = \frac{\ln(q/p)}{p+q}$$

Bassov model: riešenie

Cvičenia:

- ▶ Odvoďte uvedené vzťahy pre $f(t)$ a $F(t)$
- ▶ Odvoďte vzťah pre t_{peak} z predchádzajúceho slajdu, teda pre prípad $q > p > 0$.
- ▶ Odvoďte vzťah pre t_{peak} pre prípad $p > q > 0$. Čo intuitívne očakávame v tomto prípade, keď majú veľký vplyv inovátori (veľké p)?

Bassov model: parametre

Ako prvý odhad: vľavo p , vpravo q

Baseline case:		
US, consumer, durable, launch in '76 ...	0.016	0.409
For other cases, multiply by the following factors ...		
Cellular telephone	0.226	0.635
Non durable product	0.689	0.931
Industrial	1.058	1.149
Non commercial innovation	0.365	2.406
Western Europe	0.464	0.949
Asia	0.595	0.743
Other regions	0.796	0.699
For each year after 1976, multiply by ...	1.021	1.028

Christophe Van den Bulte: *Want to know how diffusion speed varies across countries and products? Try using a Bass model.* PDMA Visions 26(4) 2002, pp. 12-15

Bassov model: parametre

Definujme funkciu:

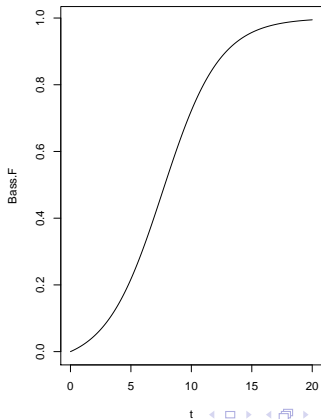
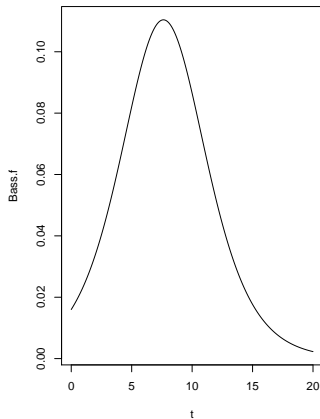
```
grafy <- function(p,q,t.max) {
  t <- seq(from=0,to=t.max,by=0.01)
  Bass.f <- ((p+q)^2/p)*exp(-(p+q)*t)/
              (1+(q/p)*exp(-(p+q)*t))^2
  Bass.F <- (1-exp(-(p+q)*t))/(1+(q/p)*exp(-(p+q)*t))
  par(mfrow=c(1,2))
  plot(t, Bass.f, type="l"); plot(t, Bass.F, type="l")
}
```

Teraz vieme kresliť, napríklad:

```
grafy(0.016, 0.409, 20) # baseline z tabulky
```

Bassov model: parametre

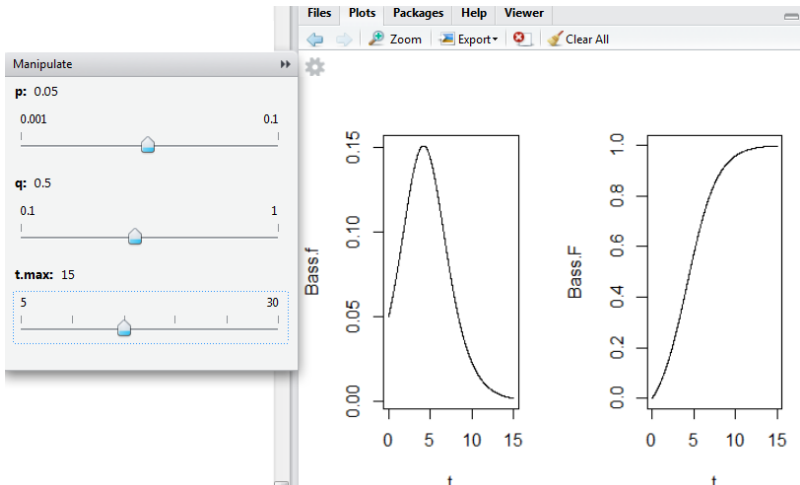
Výstup:



Interaktívne grafy

Bassov model: parametre interaktívne

Ukážeme si, ak robiť takéto interaktívne grafy:



Knižnica manipulate pre R-studio

Načítajte (ak treba, aj nainštalujte) knižnicu manipulate:

```
library(manipulate)
```

Použitie funkcie manipulate najlepšie vidieť na príklade (dostaneme graf z predchádzajúceho slajdu):

```
manipulate(grafy(p,q,t.max),  
           p=slider(min=0.001, max=0.1, step=0.001),  
           q=slider(min=0.1, max=1, step=0.01),  
           t.max=slider(min=5, max=30, step=5))
```

V parametroch slider sa dá zadať aj začiatočná hodnota - pomocou `initial=...` - vyskúšajte.

Podrobnejšie: `?slider`

Odhadovanie parametrov Bassovho modelu v R

Príklad - dáta

Zdroj dát: *P. S. P. Cowpertwait, A. V. Metcalfe, Introductory Time Series with R. Springer 2009. Kapitola 3.3.4, str. 52-54*

Budeme modelovať **predaj VCR v USA v rokoch 1980-1989**:

```
T <- 1:10 # casova premenna, rok = 1979 + T
Sales <- c(840, 1470, 2110, 4000, 7590, 10950, 10530, 9470,
           7790, 5890) # trzby
```

Model: $Sales(t) = M \times f(t)$, kde M zodpovedá nasýteniu trhu

Úloha 1: Vykreslite priebeh tržieb.

Odhadovanie parametrov modelu

Použijeme funkciu `nls`, ktorá odhaduje nelineárny model metódou najmenších štvorcov.

Potrebuje štartovacie hodnoty parametrov, zoberieme:

- ▶ `p` a `q` z tabuľky v slajdoch alebo pomocou `manipulate`
- ▶ `M` rovné súčtu doterajších tržieb (už klesajú a celkové kumulatívne tržby zrejme nebudú až tak výrazne vyššie) alebo o niečo väčšie

Odhadovanie parametrov modelu

Použitie `nls` pre náš model - napríklad s takýmito štartovacími hodnotami:

```
Bass.nls<-nls(Sales ~ M*(((P+Q)^2/P)*exp(-(P+Q)*T))/  
             (1+(Q/P)*exp(-(P+Q)*T))^2,  
             start=c(list(M=sum(Sales),P=0.008,Q=0.6)))  
summary(Bass.nls)
```

Odhadovanie parametrov modelu

Výstup:

```
##
```

```
## Formula: Sales ~ M * (((P + Q)^2/P) * exp(-(P + Q) * T))
```

```
##      exp(-(P + Q) * T))^2
```

```
##
```

```
## Parameters:
```

```
##      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
```

```
## M 6.798e+04  3.128e+03   21.74 1.10e-07 ***
```

```
## P 6.594e-03  1.430e-03    4.61  0.00245 **
```

```
## Q 6.381e-01  4.140e-02   15.41 1.17e-06 ***
```

```
## ---
```

```
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1
```

```
##
```

```
## Residual standard error: 727.2 on 7 degrees of freedom
```


Odhadovanie parametrov modelu

Úloha 2: Porovnajzte skutočné tržby s fitovanými a spravte predikciu na nasledujúce roky.

Poznámka: Užitočný môže byť prístup k odhadnutým parametrom:

```
coef(Bass.nls)
```

```
##           M           P           Q  
## 6.798093e+04 6.593972e-03 6.380909e-01
```

```
as.vector(coef(Bass.nls))
```

```
## [1] 6.798093e+04 6.593972e-03 6.380909e-01
```

Modelovanie návštevnosti filmov v kinách Bassovym modelom

Návštevnosť filmov

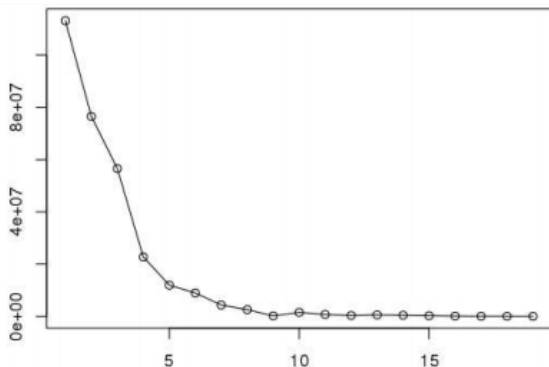
Tiež má zmysel rozlišovať:

- ▶ niektorí ľudia idú do kina, lebo o filme vedeli a chceli ho vidieť (*inovátori* v Bassovom modeli)
- ▶ iní sa rozhodli na základe odporúčania tých, ktorí ho už videli (*imitátori* v Bassovom modeli)

Dva typy filmov (I.)

Reklama, očakávaný film - veľká časť ľudí si film pozrie v prvých dňoch, napr. *The Hobbit: An Unexpected Journey* (2012)

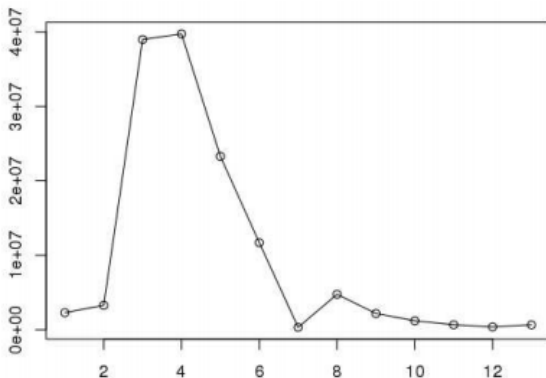
Priebeh tržieb po týždňoch:



Dva typy filmov (II.)

Film, ktorý sa populárnym stane až neskôr, napr. *The Blair Witch Project* (1999)

Priebeh tržieb po týždňoch:



Príklad

Dáta sa dajú nájsť na stránke <http://www.the-numbers.com>

Budeme používať týždenné dáta (1.-7. deň, 8.-14. deň, atď.)

Napríklad:

Daily Chart Record							
Date	Rank	Gross	% Change	Theaters	Per Theater	Total Gross	Days
2003/12/17	1	\$34,450,834		3,703	\$9,303	\$34,450,834	1
2003/12/18	1	\$17,019,987	-51%	3,703	\$4,596	\$51,470,821	2
2003/12/19	1	\$21,811,549	+28%	3,703	\$5,890	\$73,282,370	3
2003/12/20	1	\$27,492,053	+26%	3,703	\$7,424	\$100,774,423	4
2003/12/21	1	\$23,326,111	-15%	3,703	\$6,299	\$124,100,534	5
2003/12/22	1	\$13,563,208	-42%	3,703	\$3,663	\$137,663,742	6
2003/12/23	1	\$12,476,242	-8%	3,703	\$3,369	\$150,139,984	7
2003/12/24	1	\$7,544,400	-40%	3,703	\$2,037	\$157,684,384	8
2003/12/25	1	\$13,986,220	+85%	3,703	\$3,777	\$171,670,604	9
2003/12/26	1	\$19,152,196	+37%	3,703	\$5,172	\$190,822,800	10
2003/12/27	1	\$17,249,267	-10%	3,703	\$4,658	\$208,072,067	11
2003/12/28	1	\$14,196,641	-18%	3,703	\$3,834	\$222,268,708	12
2003/12/29	1	\$10,490,000	-26%	3,703	\$2,833	\$232,759,000	13
2003/12/30	1	\$9,615,000	-8%	3,703	\$2,597	\$241,937,000	14
2003/12/31	1	\$7,500,000	-22%	3,703	\$2,025	\$249,400,000	15

150139984

92233724

Príklad

```
# The LOTR: Return of the King
```

```
Sales <- c(150139984, 92233724, 52192378, 20100138,  
          15302761, 9109110, 7300394, 5612861, 5995863,  
          3809753, 3140000, 4062251, 2923806, 2055943)
```

Úloha: Odhadnite parametre Bassovho modelu a zobrazte priebeh skutočných a fitovaných tržieb.