

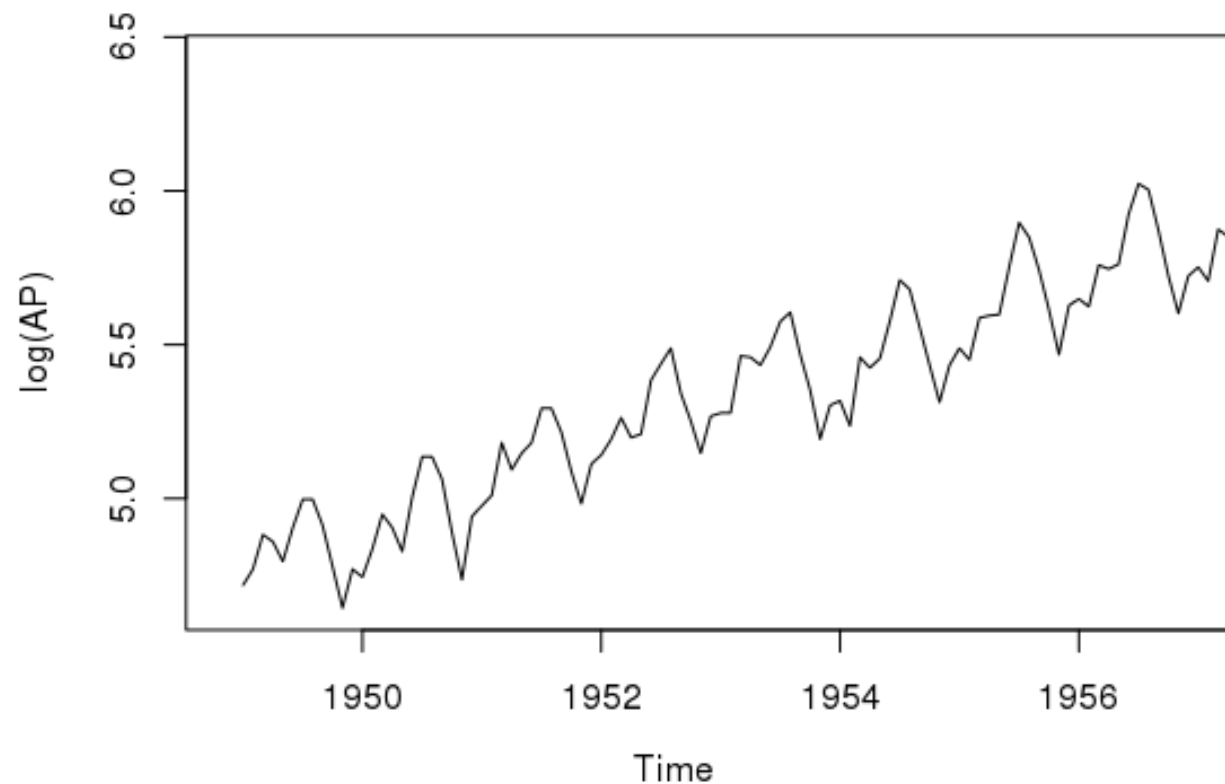
Časové rady - úvod

Beáta Stehlíková

Časové rady, FMFI UK

Analýza časových radov

- Máme mesačné dáta - počty cestujúcich aerolinkami:

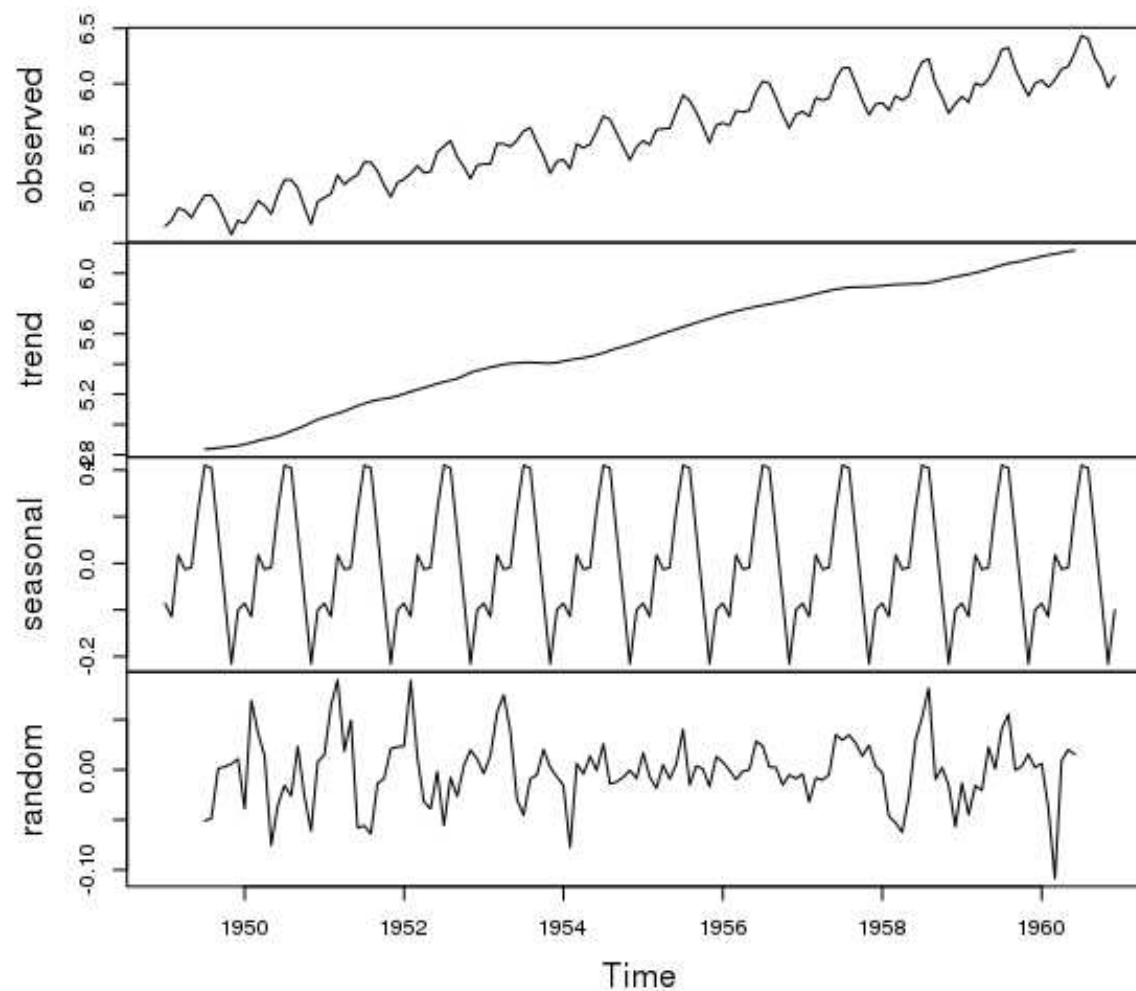


G. E. P. Box, G. M. Jenkins: **Time Series Analysis: Forecasting and Control.**

- Otázka: aký bude ďalší vývoj?

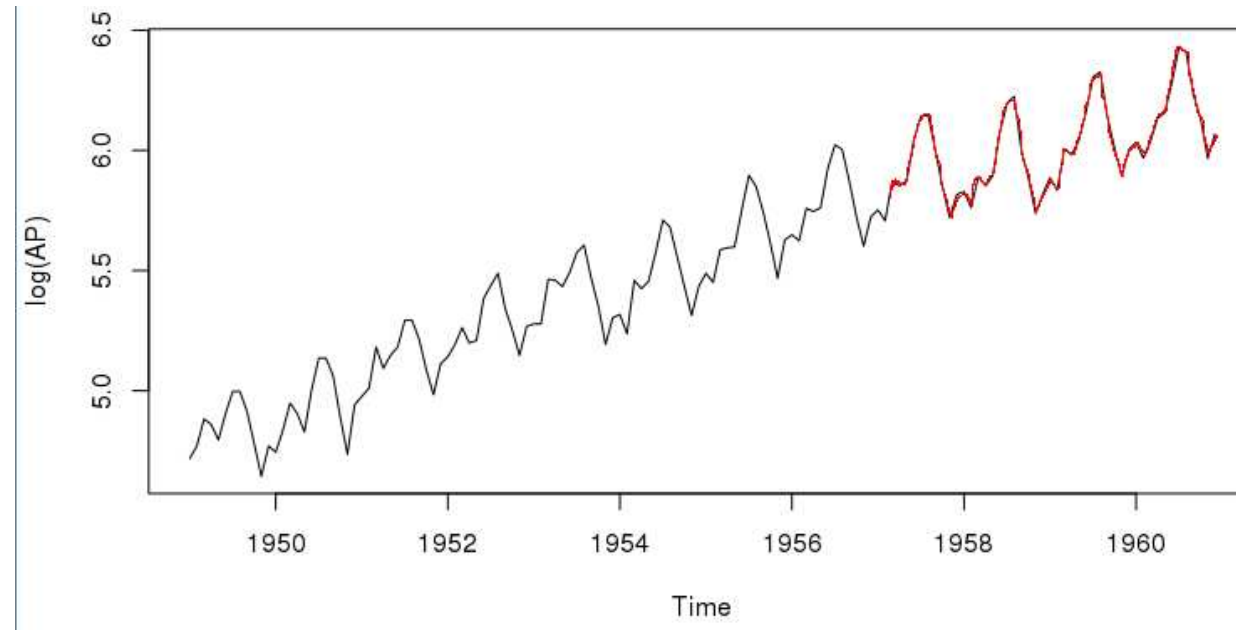
Analýza časových radov

- Vidíme **rastúci trend** a **sezónnosť** (mesiace).
- Rozklad v R-ku: `plot(decompose(log(AP)))`



Analýza časových radov

- Intuitívne: ak nenastane nejaký šok, zachová sa rastúci trend a sezónnosť, teda nejak takto:



- Otázky: Ako to vyjadriť kvantitatívne? Ako určiť presnosť odhadov, ako zostrojiť interval spoľahlivosti?

Box a Jenkins

Budeme sa zaobert' najmä prístupom od **Boxa a Jenkinsa**

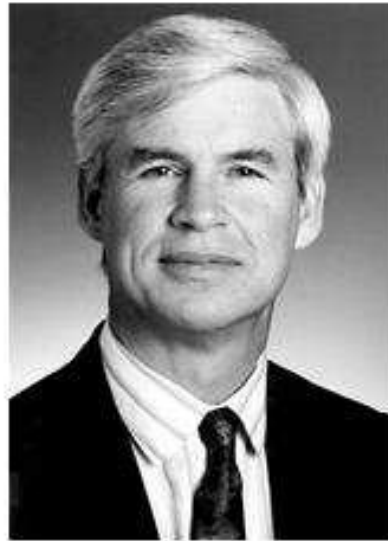


*"The first paper you wrote with Jenkins has been considered as a **breakthrough in statistics**. How do you become interested in time series?"*

Rozhovor s G. E. P. Boxom po oslave jeho 80. narodenín (1999):

<http://halweb.uc3m.es/esp/Personal/personas/dpena/articles/boxIJFinter4.PDF>

Modelovanie volatility



Robert F. Engle III



Clive W.J. Granger

The Sveriges Riksbank Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel 2003 was divided equally between Robert F. Engle III "for methods of analyzing economic time series with time-varying volatility (ARCH)" and Clive W.J. Granger "for methods of analyzing economic time series with common trends (cointegration)".

<http://www.nobelprize.org>

- ARCH model a jeho zovšeobecnenia - tiež súčasťou tohto kurzu

Zaujímavosť

- Manželka R. Engla sa narodila v Prešove, v r. 2005 spolu navštívili Prešov



Rob, Marianne, Jordan and Lindsey in Williamstown 2002.

http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/2003/engle-autobio.html

<http://www.presov.sk/portal/?c=12&id=3590>

Základné pojmy - obsah prednášky

- Časový rad, momenty
- Stacionarita, ergodicita
- Biely šum
- Woldova reprezentácia
- Autokorelačná funkcia, testy o autokorelačnej funkcii
- Operátor posunu

Časový rad, momenty

- Stochastický proces x_1, \dots, x_T - úplne je charakterizovaný T -rozmernou distribučnou funkciou
- Obvykle sa zameriavame len na prvé dva momenty:
 - ◇ stredná hodnota $E[x_t]$
 - ◇ variancia $Var[x_t]$
 - ◇ kovariancie $Cov[x_t, x_s]$, tzv. autokovariancie

Stacionarita a ergodicita

- Väčšinou máme len jeden časový rad - jednu realizáciu náhodného procesu → aby sa dala robiť štatistická inferencia, potrebujeme dodatočné predpoklady
- Napríklad: na to, aby sme odhadli strednú hodnotu, ... potrebujeme viac ako jednu realizáciu tejto náhodnej premennej
- Ergodický proces - výberové momenty počítané z časového radu s T pozorovaniami konvergujú pre $T \rightarrow \infty$ k zodpovedajúcim momentom
- Tento koncept má zmysel iba ak predpokladáme, že $E[x_t] = \mu, Var[x_t] = \sigma^2, \dots$ pre $\forall t$

Stacionarita a ergodicita

- **Silná stacionarita:** združená distribučná funkcia sa nemení pri posune v čase
- Obvykle sa pracuje so slabším predpokladom → **slabá stacionarita:**

$$(1) \quad E[x_t] = \mu \quad \forall t$$

$$(2) \quad Cov[x_t, x_s] = \gamma(|t - s|) \quad \forall t, s$$

z (2) vyplýva: $Var[x_t] = const.$ pre $\forall t$

- Ďalej budeme pod stacionaritou rozumieť slabú stacionaritu

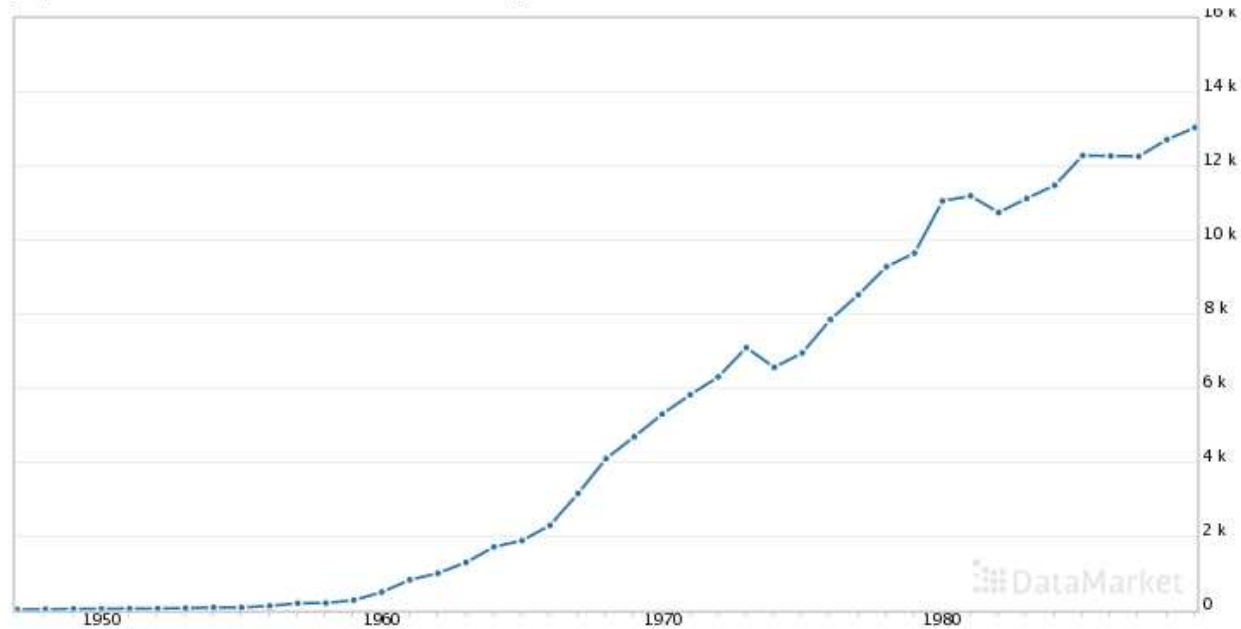
Stacionarita - dáta

- Stacionárny časový rad: dáta sú prit'ahované k určitej rovnovážnej hodnote, okolo ktorej oscilujú
- Nestacionárny časový rad: napríklad trend

Stacionarita - dáta

- PRÍKLAD 1

Japanese annual motor vehicle production for 1947-1989



<http://data.is/RVcjbL>

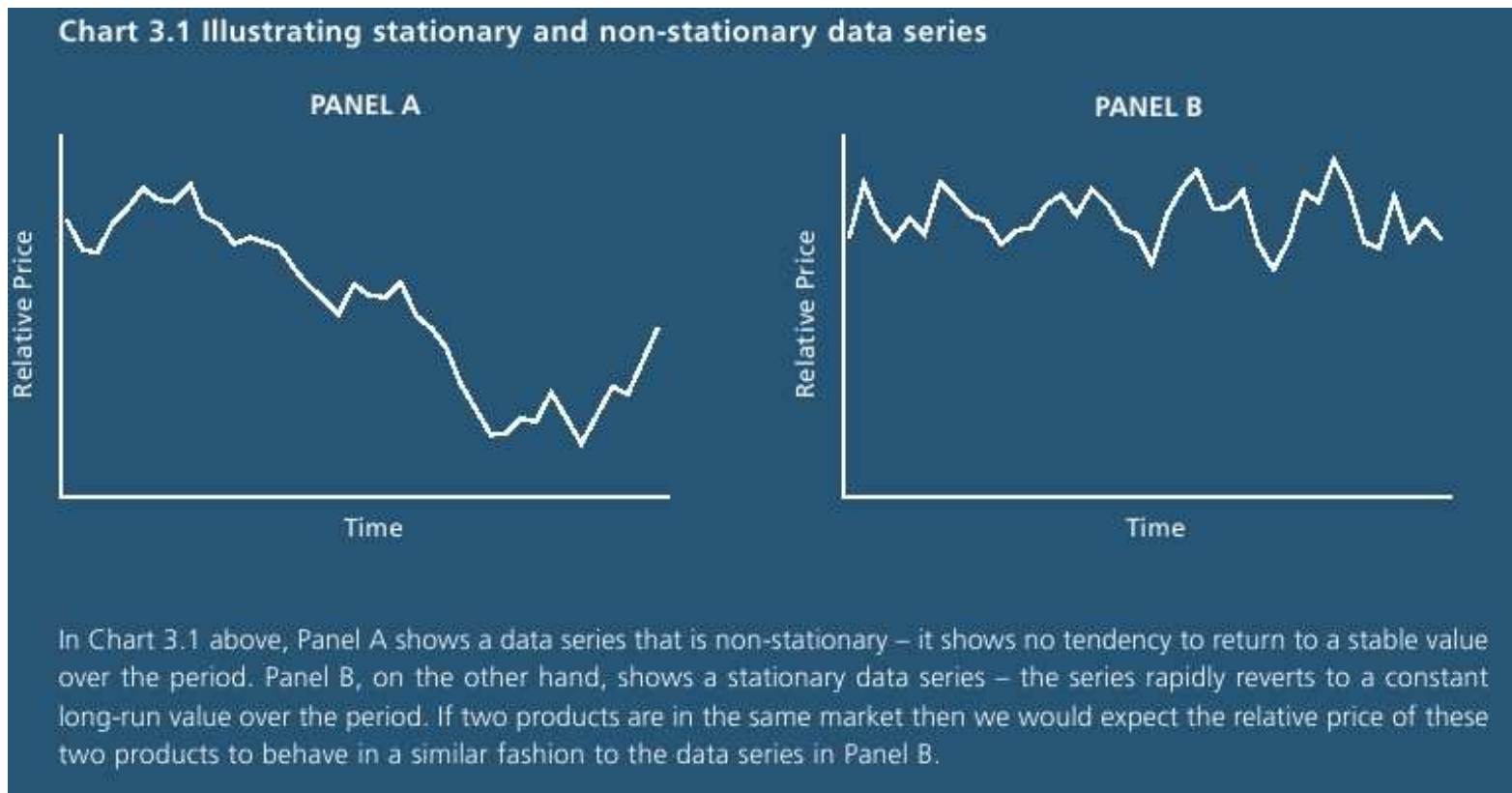
Vidíme:

rastúci trend \Rightarrow stredná hodnota nie je konštantná \Rightarrow
časový rad nie je stacionárny

Stacionarita - dáta

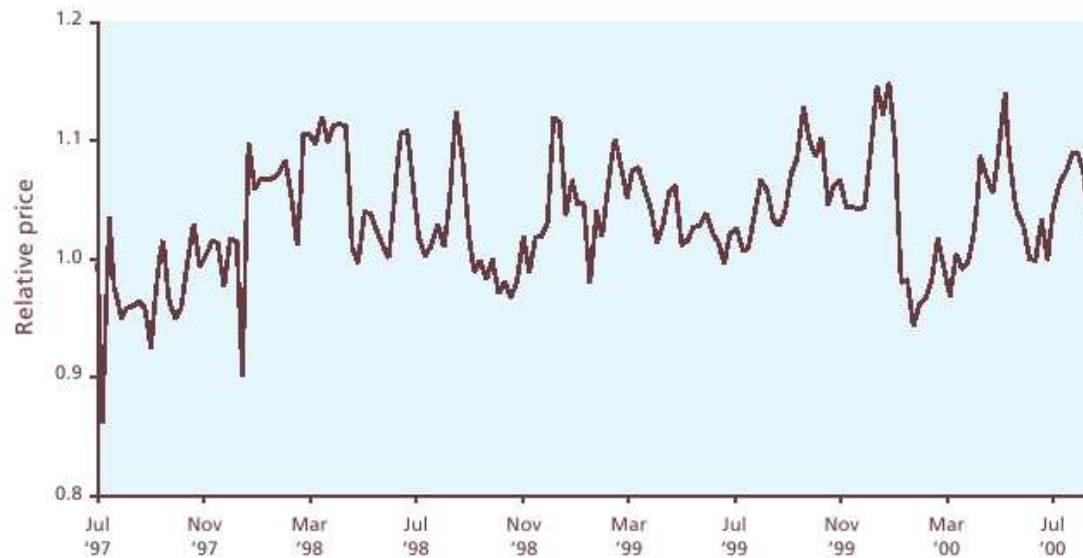
- PRÍKLAD 2

Relatívna cena: ak sa dva tovary predávajú na tom istom trhu, ich relatívna cena by sa mala pohybovať okolo určitej rovnovážnej hodnoty



Stacionarita - dáta

Chart 3.2: Price of Scottish Salmon relative to the price of Norwegian salmon in the UK



The above chart shows that the price of Scottish salmon relative to the price of Norwegian salmon in the UK appears to vary randomly around a constant long-run value, which suggests that the relative price is stationary. The econometric test for stationarity confirms that the relative price of Scottish salmon is stationary, which is what we would expect to observe if Scottish and Norwegian gutted salmon compete in the same product market in the UK.

An Introduction to Quantitative Techniques in Competition Analysis, Lexecon, 2005

http://www.crai.com/ecp/publications/full_list.htm.

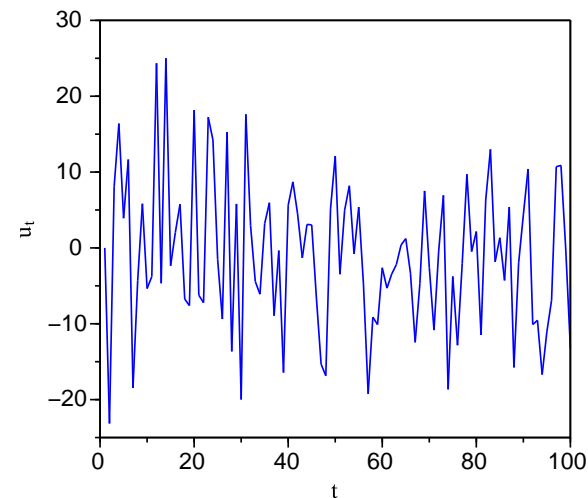
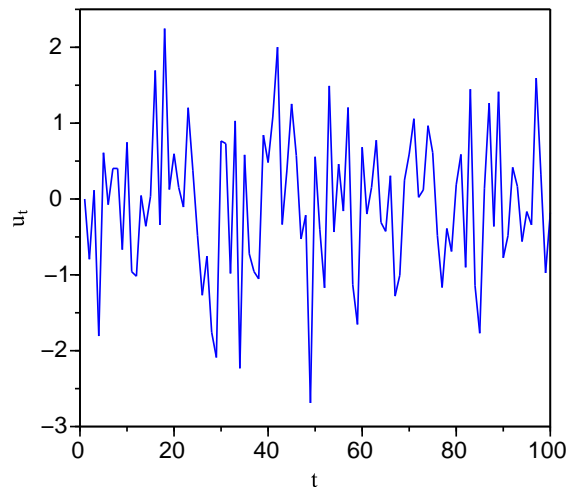
Biely šum

- Biely šum $\{u_t\}$ - dôležitý príklad stacionárneho procesu

$$E[u_t] = 0 \quad \forall t$$

$$Var[u_t] = \sigma^2 \quad \forall t$$

$$Cov[u_t, u_s] = 0 \quad \forall t \neq s$$



- Základný náhodný proces, pomocou ktorého budeme definovať ďalšie, aj modely pre dáta

Stacionarita - príklad 1

- Nech u_t je biely šum, definujme

$$x_t = u_t + u_{t-1}$$

- Vypočítame:

$$E[x_t] = 0, \quad Var[x_t] = 2\sigma^2$$

$$Cov[x_t, x_s] = \begin{cases} \sigma^2 & \text{pre } |t - s| = 1 \\ 0 & \text{pre } |t - s| = 2, 3, \dots \end{cases}$$

→ proces je stacionárny

Stacionarita - príklad 2

- Nech u_t je biely šum; definujme

$$y_t = \begin{cases} u_1 & \text{pre } t = 1 \\ y_{t-1} + u_t & \text{pre } t = 2, 3, \dots \end{cases}$$

- y_t sa dá zapísať ako $y_t = \sum_{i=1}^t u_i$
- Vypočítame:

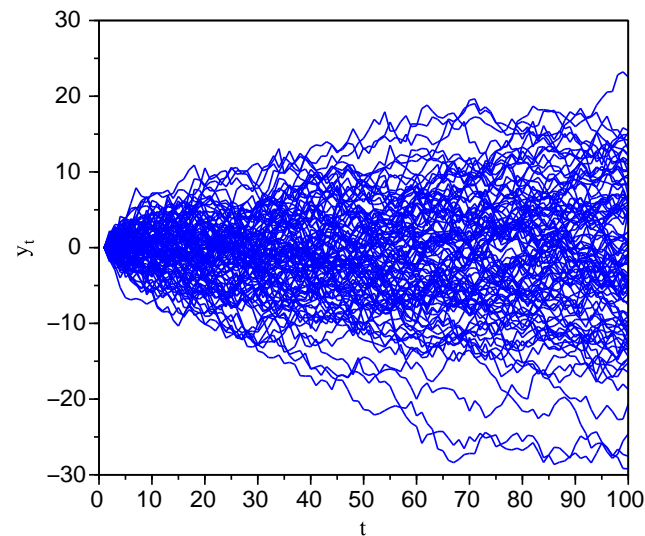
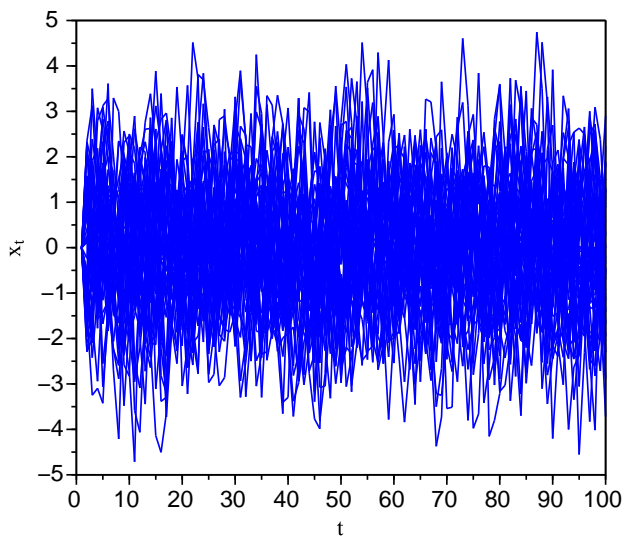
$$E[y_t] = 0, \quad Var[y_t] = t \sigma^2$$

$$Cov[y_t, y_s] = \sigma^2 \min(t, s)$$

→ proces nie je stacionárny

Stacionarita - príklady 1, 2

- Porovnanie trajektórií procesov z predchádzajúcich dvoch príkladov:
 - ◇ vľavo - stacionárny proces (pr. 1)
 - ◇ vpravo - nestacionárny proces (pr. 2), vidíme rastúcu disperziu



Stacionarita - príklad 3

- Nech $\{u_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ je biely šum, definujme

$$(3) \quad x_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j u_{t-j},$$

pričom koeficienty ψ_j splňajú $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty, \psi_0 = 1$

- Vypočítame:

$$E[x_t] = \mu, \quad Var[x_t] = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2$$

$$Cov[x_t, x_{t+k}] = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{k+j}$$

→ proces je stacionárny

Woldova reprezentácia

- Predchádzajúci príklad: proces x_t , ktorý má tvar (3), je stacionárny
- Dá sa dokázať:
Každý stacionárny proces x_t sa dá zapísať v tvare (3), t. j.

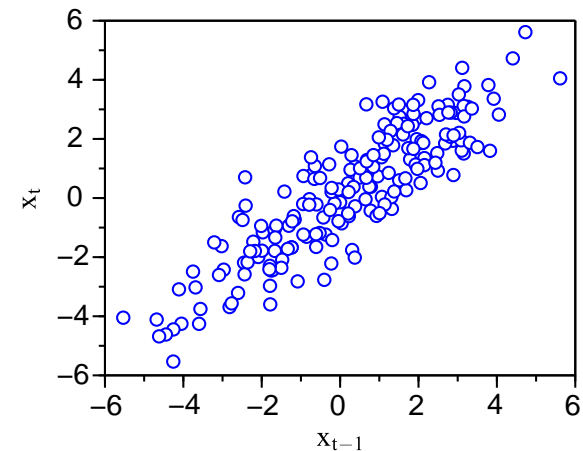
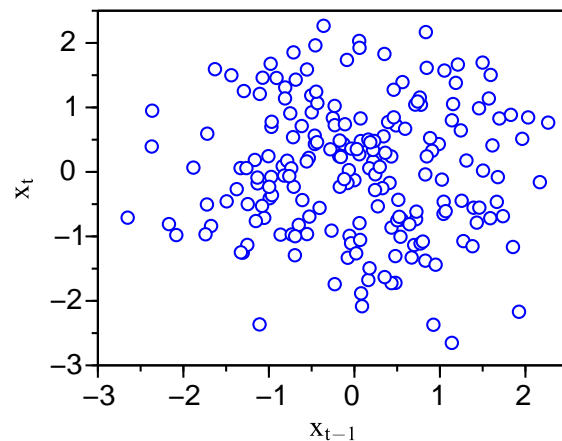
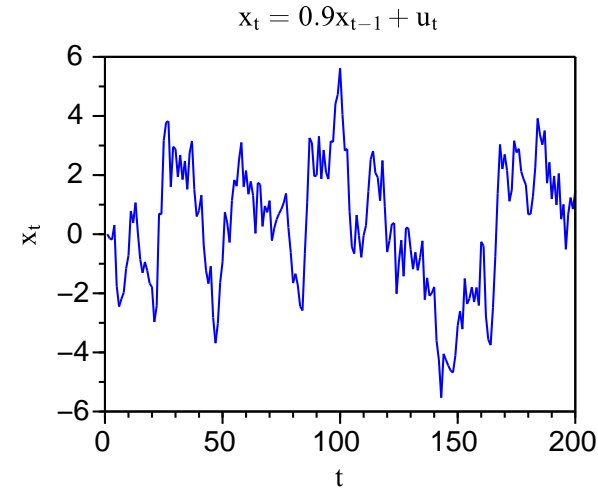
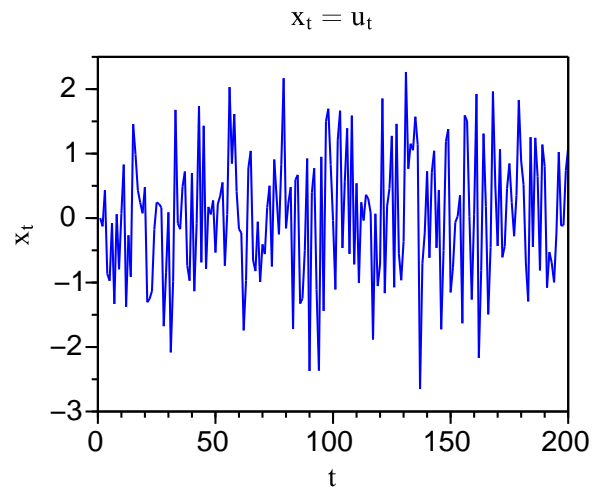
$$x_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j u_{t-j},$$

pričom koeficienty ψ_j spĺňajú $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$, $\psi_0 = 1$
a u_t je biely šum

- Toto vyjadrenie stacionárneho procesu sa nazýva Woldova reprezentácia (Wold, 1938)

Autokorelačná funkcia - motivácia

- Vľavo: $y_t = u_t$, vpravo: $y_t = 0.9y_{t-1} + u_t$
- Realizácia procesu a ako závisí y_t od y_{t-1}



Autokorelačná funkcia

- Autokorelačná funkcia (ACF) stacionárneho procesu:

$$\rho(\tau) = \frac{\gamma(\tau)}{\gamma(0)}$$

t. j.

$$\rho(\tau) = \text{Cor}(x_t, x_{t+\tau}) = \frac{\text{Cov}(x_t, x_{t+\tau})}{\sqrt{\text{Var}(x_t) \text{Var}(x_{t+\tau})}}$$

- Platí:

$$\rho(0) = 1, \quad \rho(\tau) = \rho(-\tau)$$

→ stačí nám počítať $\rho(\tau)$ pre $\tau = 1, 2, \dots$

Autokorelačná funkcia

- Ergodický proces \rightarrow stredná hodnota, disperzia a kovariancie sa dajú konzistentne odhadnúť z dát x_1, \dots, x_T :

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_t, \quad \hat{\gamma}(0) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (x_t - \hat{\mu})^2$$

$$\hat{\gamma}(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-\tau} (x_t - \hat{\mu})(x_{t+\tau} - \hat{\mu})$$

\rightarrow konzistentný odhad autokorelačnej funkcie:

$$\hat{\rho}(\tau) = \frac{\hat{\gamma}(\tau)}{\hat{\gamma}(0)}$$

- je asymptoticky nevychýlený

Autokorelačná funkcia - testy

- Odhad ACF v prípade bieleho šumu:
 - ◇ asymptoticky nevychýlený
 - ◇ variancia $\approx 1/T$
 - ◇ \Rightarrow približný 95 % interval spoľahlivosti: $\pm 2/\sqrt{T}$, často sa zobrazuje spolu s odhadnutými autokoreláciami
- V prípade stochastického procesu, pre ktorý $\rho(\tau) = 0$ pre $\tau > k$, pre tieto τ platí

$$\text{Var}[\hat{\rho}(\tau)] \approx \frac{1}{T} \left(1 + 2 \sum_{j=1}^k \hat{\rho}(j)^2 \right)$$

Autokorelačná funkcia - testy

- Testovanie, či daný časový rad je biely šum:
 1. interval spoľahlivosti $\pm 2/\sqrt{T}$ pre každú autokoreláciu samostatne
 2. testovanie nulovosti $\rho(1), \dots, \rho(m)$ súčasne:
 - ◇ **Box & Pierce, 1970**: ak platí H_0 , asymptoticky

$$Q = T \sum_{j=1}^m \rho(j)^2 \sim \chi_m^2$$

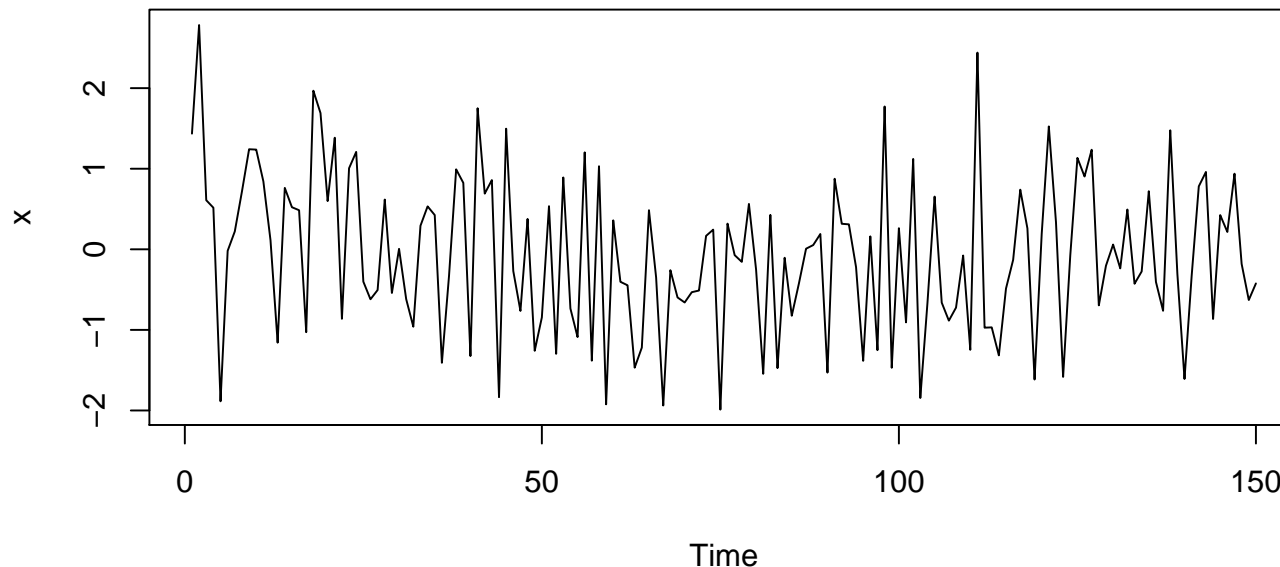
- ◇ **Ljung & Box, 1978**: modifikácia s lepšími vlastnosťami pri menšom počte dát:

$$Q = T(T + 2) \sum_{j=1}^m \frac{\rho(j)^2}{T - j} \sim \chi_m^2$$

- ◇ *počet stupňov voľnosti sa zmení, ak ide o rezíduá z modelu*

Autokorelácie časového radu - príklad 1

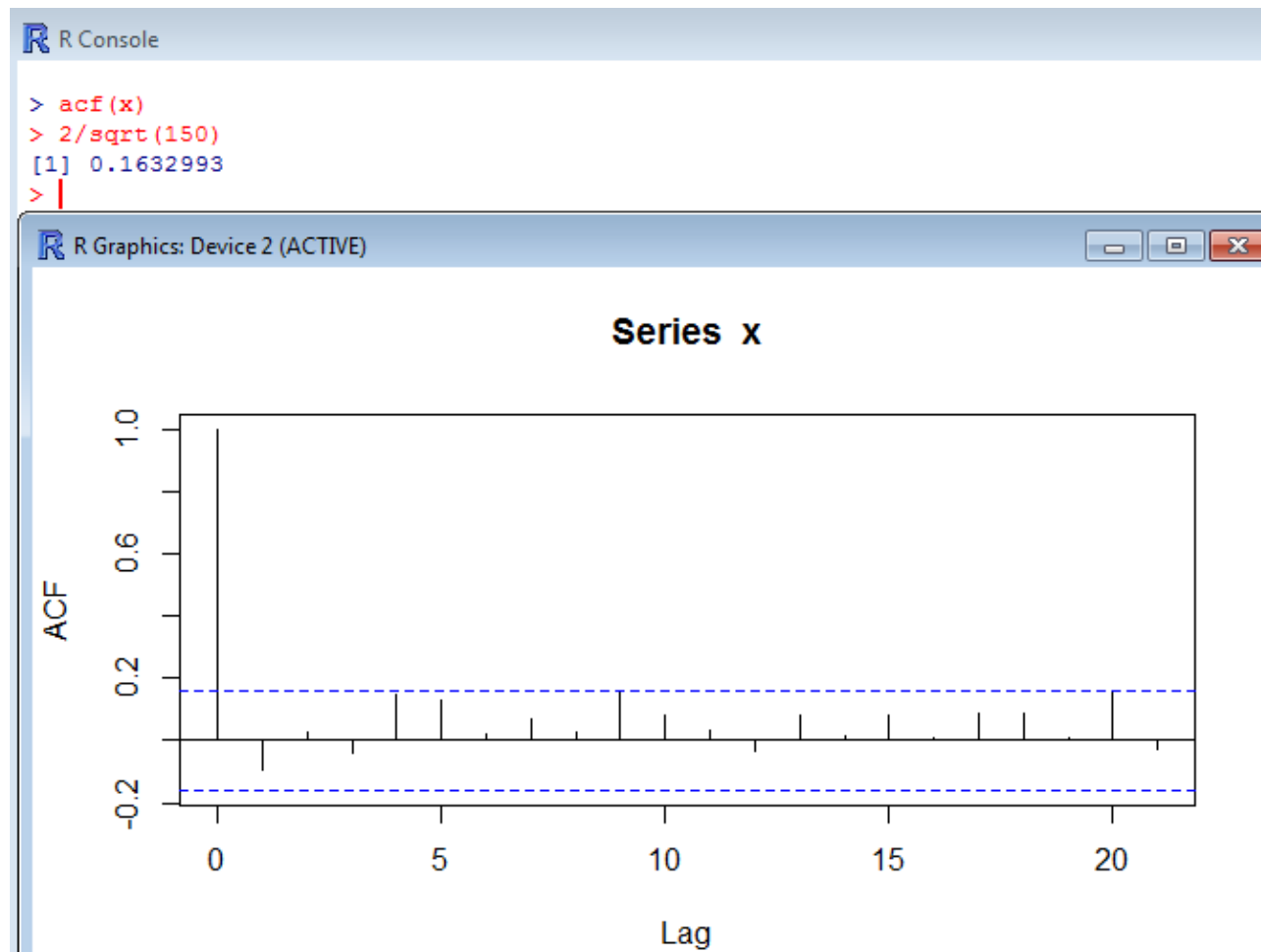
- Vygenerujeme 150 nezávislých realizácií $N(0, 1)$ rozdelení a (teda biely šum):



- Autokorelačná funkcia v softvéri R:
 - ◇ funkcia `acf`, napr. `acf(x)`
 - ◇ autokorelácia pre lag 0 je vždy 1, môžeme ju vynechať, napríklad takto:
`plot(acf(x)[1:20])`

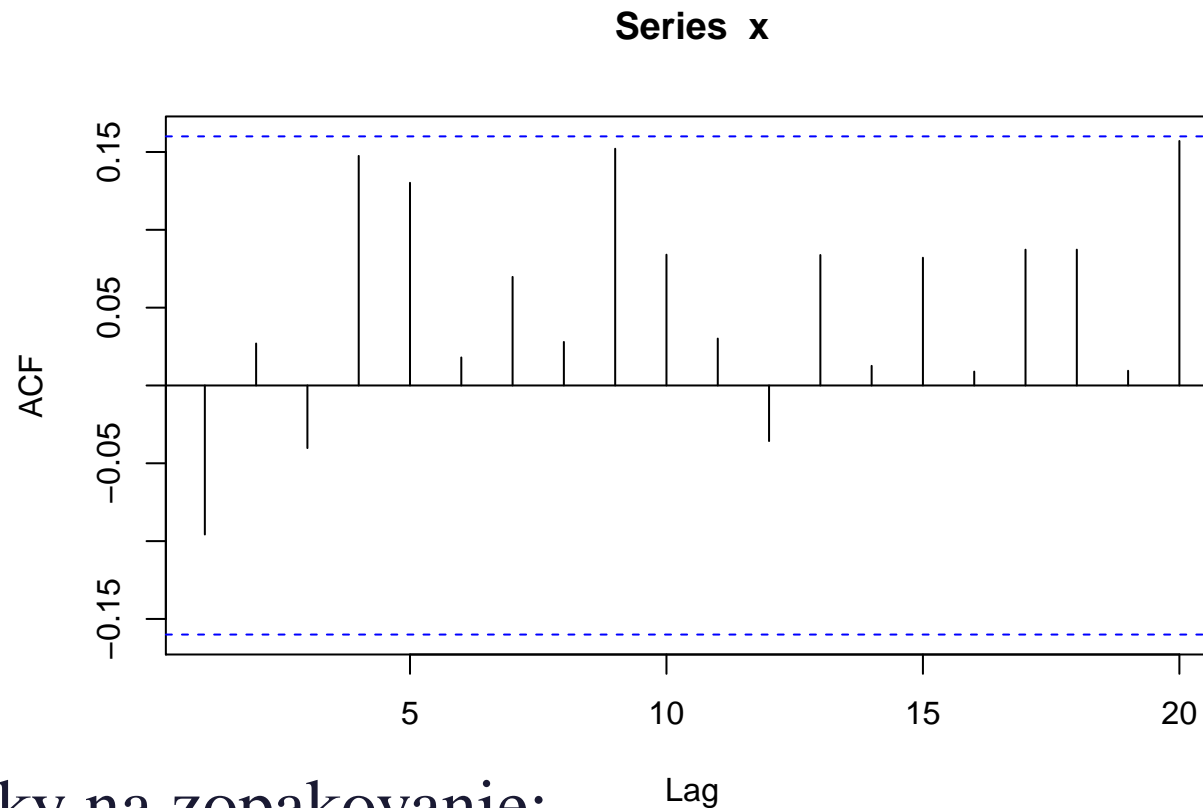
Autokorelácie časového radu - príklad 1

- Použitie funkcie **acf** + hranice intervalov spoľahlivosti :



Autokorelácie časového radu - príklad 1

- Bez nultej autokorelácie:



- Otázky na zopakovanie:
 - ◇ Akú hypotézu vieme testovať pre každú autokoreláciu?
 - ◇ Kedy sa táto nulová hypotéza zamietá?
 - ◇ Čo dostávame v našom prípade?

Autokorelačná funkcia - príklad

- Ljung-Boxova štatistika:
 - ◇ v R-ku funkcia `Box.test`
 - ◇ testujme napríklad hypotézu, že prvé tri autokorelácie sú nulové:

```
Box.test(x, lag=3, type="Ljung")
```

- Otázky na zopakovanie:
 - ◇ Aka sa vypočíta testovacia štatistika?
 - ◇ Aké je pravdepodobnostné rozdelenie štatistiky za platnosti nulovej hypotézy?
 - ◇ Pre aké hodnoty štatistiky sa hypotéza zamietá?
 - ◇ Ako sa vypočíta p-hodnota?

Autokorelačná funkcia - príklad

- Dostaneme:

```
> Box.test(x, lag=3, type="Ljung")
```

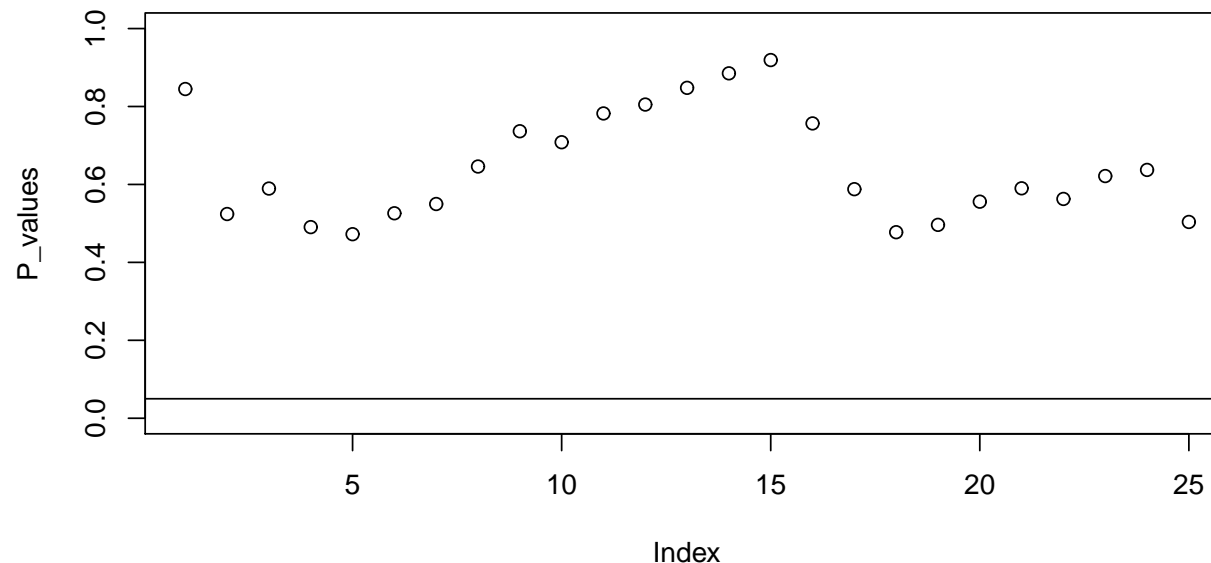
Box-Ljung test

```
data: x  
X-squared = 1.7655, df = 3, p-value = 0.6225
```

- Prístup k p-hodnotám:

`Box.test(x, lag=3, type="Ljung")$p.value`

→ dáme do cyklu vykreslíme p-hodnoty pre jednotlivé lags a porovnáme s 0.05 → čo z tohto vyplýva?



Operátor posunu

- Operátor posunu (lag operator) L - užitočný pri práci s časovými radmi
- Vrátí hodnotu procesu posunutú o jedno obdobie dozadu:

$$Lx_t = x_{t-1}$$

- Vlastnosti:
 - ◇ mocniny: $L^2x_t = L(Lx_t) = x_{t-2}$
 - ◇ $L^0 = 1$ je identita: $(1 - L)x_t = x_t - x_{t-1}$
 - ◇ počítanie s mocninami: $L^2(L^3) = L^5$
 - ◇ násobenie: $(1 - 0.5L)(1 - 0.3L) = 1 - 0.8L + 0.15L^2$
 - ◇ ak c je konštanta, tak napr.
 $(1 - 0.1L + 2L^2)c = (1 - 0.1 + 2)c = 2.9c$

Príklady na precvičenie

Pre nasledujúce procesy vypočítajte ich strednú hodnotu, disperziu a autokorelačnú funkciu:

1. $x_t = u_t + u_{t-2}$, kde u je biely šum
2. $x_t = u_t u_{t-1}$, kde u je biely šum
3. $x_t = u_t$ pre t párne a $x_t = \frac{\sqrt{2}}{2}(u_{t-1}^2 - 1)$ pre t nepárne, kde
 - (a) u je biely šum s rozdelením $N(0, 1)$
 - (b) $u_t = w_t - 1$, pričom w_t sú nezávislé náhodné premenné s exponenciálnym rozdelením so strednou hodnotou 1