Modelovanie trendu: Exponenciálne zhladzovanie, Holt-Wintersova metóda, Hodrick-Prescottov filter

Beáta Stehlíková

Časové rady, FMFI UK

Exponenciálne zhladzovanie

- Máme dáta $x_1, \ldots, x_n$ a chceme predikovať hodnotu x_{n+k}
- V tejto časti predpokladáme, že dáta nemajú trend, ani sezónne efekty
- Model:

$$x_t = \mu_t + w_t,$$

kde

  - μ_t je stredná hodnota procesu, môže závisieť od času t
  - w_t sú nezávislé náhodné odchýlky s nulovou strednou hodnotou
- Označme a_t náš odhad strednej hodnoty μ_t

Exponenciálne zhladzovanie

- Základná myšlienka exponenciálneho zhladzovania: ďalší odhad strednej hodnoty bude váženým priemerom predchádzajúceho odhadu (teda a_{t-1}) a realizovanej hodnoty x_t:

$$a_t = \alpha x_t + (1-\alpha) a_{t-1},$$

  pričom $\alpha \in (0,1)$
- Parameter α - parameter zhladzovania:
  - $\alpha \approx 1$: slabé zhladzovanie, $a_t \approx x_t$
  - $\alpha \approx 0$: silné zhladzovanie, malý vplyv pozorovanej hodnoty procesu x_t
- Predikcie: keďže nemáme trend ani sezónnosť, vieme spraviť iba $\hat{x}_{n+k|n} = a_n$

Exponenciálne zhladzovanie

- Iný zápis a_t:

$$a_t = \alpha x_t + \alpha(1-\alpha)x_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 x_{t-2} + \dots$$

  - z toho názov exponenciálne zhladzovanie (váhy exponenciálne klesajú, v súčte dávajú 1)

- Pre daný parameter α:
  - $a_1 = x_1$; ostatné rekurentne
  - predikčné chyby: $e_t = x_t - \hat{x}_{t|t-1} = x_t - a_{t-1}$
- Optimálny parameter zhladzovania: $\sum_{t=2}^{n} e_t^2 \to$ min

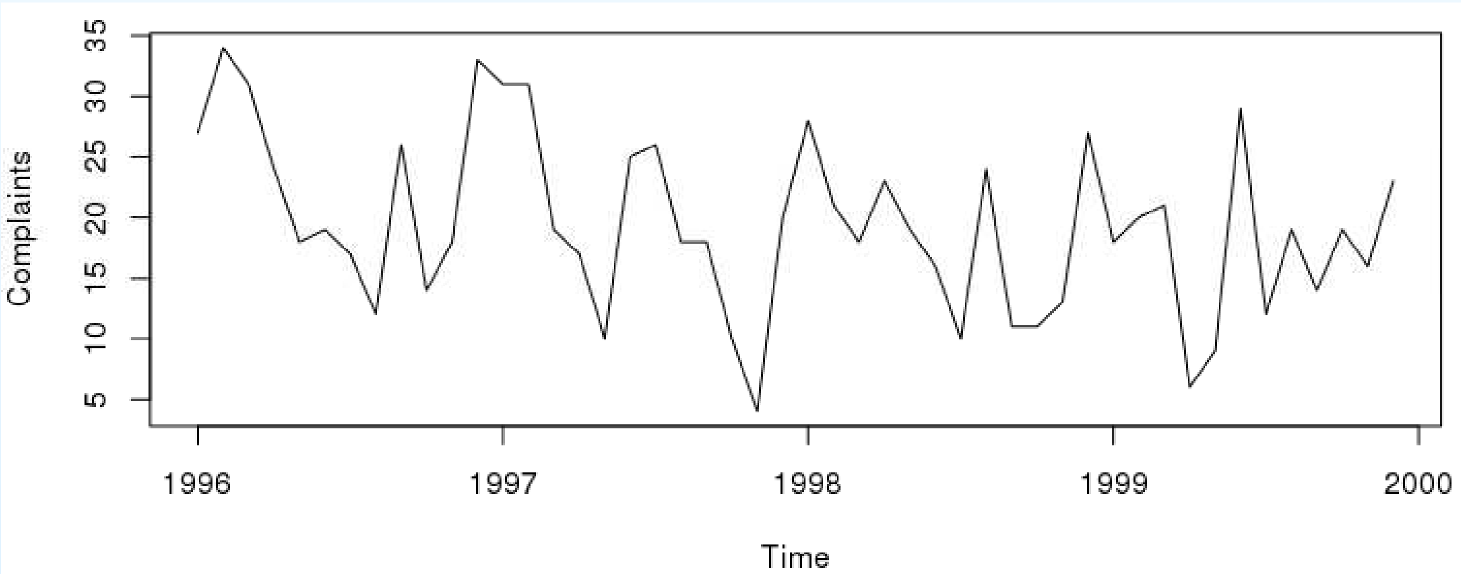
Exponenciálne zhladzovanie v R-ku: príklad

PRÍKLAD:

P. S. P.Cowpertwait, A. V. Metcalfe: Introductory Time Series with R. Springer, 2009.

Complaints to a motoring organization, pp. 56-58.

- Dáta:
  - motor.txt na stránke
  - počet sťažností, mesačné dáta, 1996/01 - 1999/12
- Priebeh:



Exponenciálne zhladzovanie v R-ku: príklad

- Samotné exponciálne zhladzovanie:

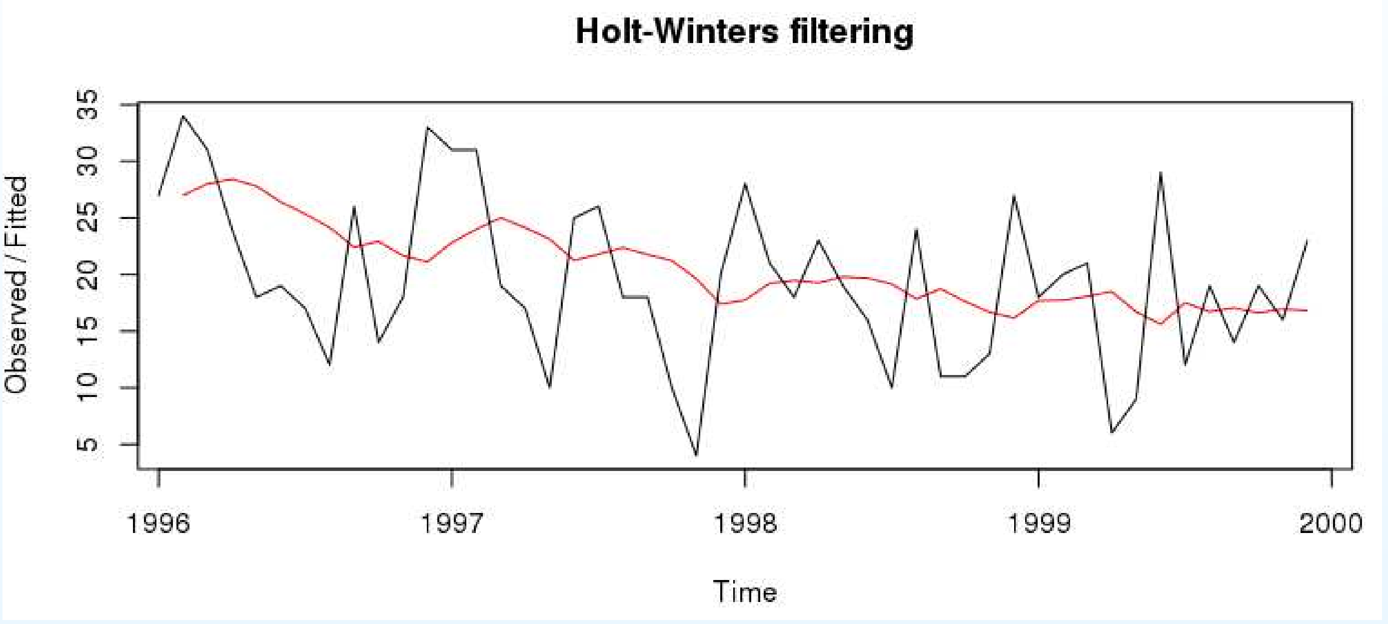
  model1 = HoltWinters(x, beta=FALSE, gamma=FALSE)

  (lebo je špeciálny to prípad všeobecnejšieho modelu, pre ktorý máme funkciu HoltWinters - uvedieme neskôr)

```
> model1=HoltWinters(x, beta=FALSE,gamma=FALSE)
> model1
Holt-Winters exponential smoothing without trend and without seasonal component

Call:
 HoltWinters(x = x, beta = FALSE, gamma = FALSE)

Smoothing parameters:
 alpha:  0.1429622
 beta :  FALSE
 gamma:  FALSE

Coefficients:
      [,1]
a 17.70343
```

Exponenciálne zhladzovanie v R-ku: príklad

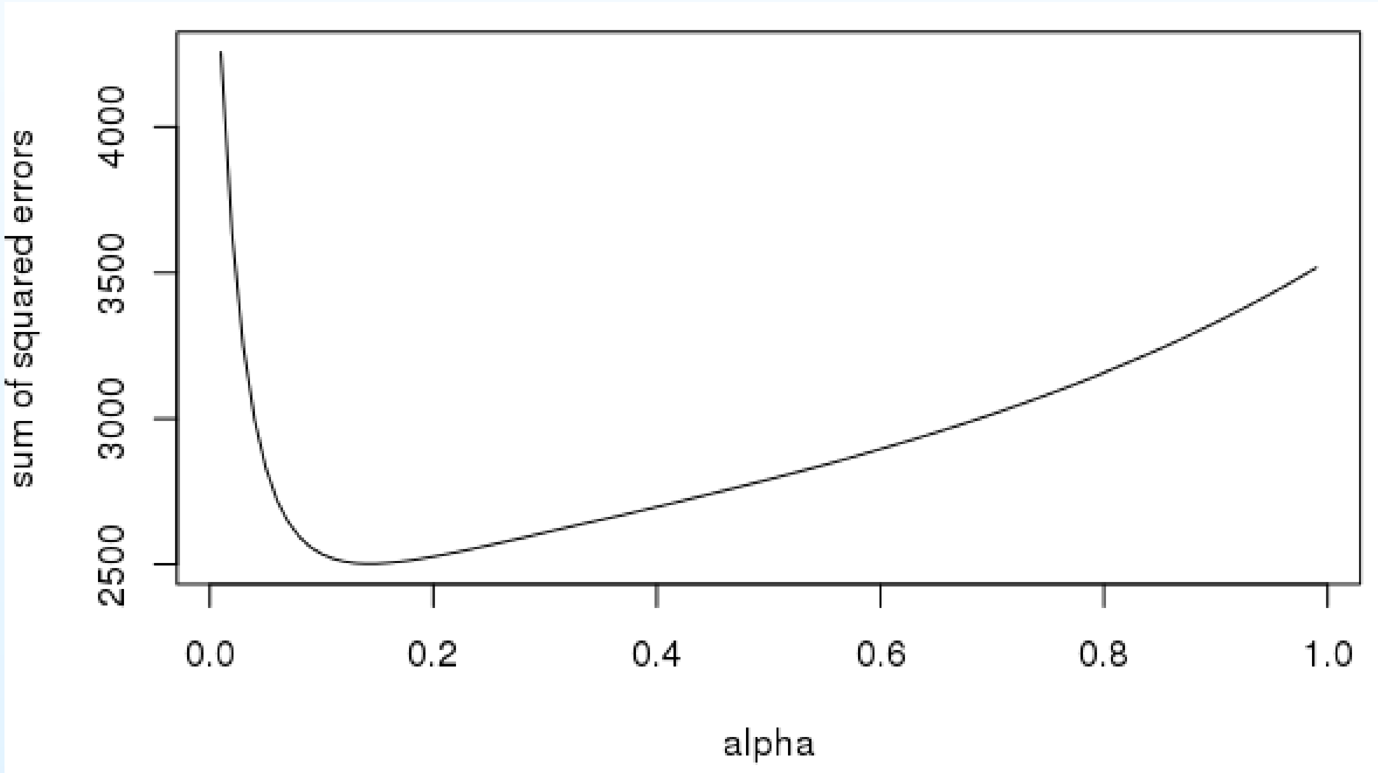
- Vykreslenie: plot(model1)



- Prístup k hodnote *sum of squared errors*, podľa ktorej sa vyberala optimálna α: príkazom model1$SSE
- Ak chceme použiť našu hodnotu α: napr. model1 = HoltWinters(x, alpha=0.2, beta=FALSE, gamma=FALSE)

Exponenciálne zhladzovanie v R-ku: príklad

- NA CVIČENÍ:
  Vykreslíme závislosť SSE od parametra α pre tieto dáta. Výpočet má potvrdiť optimálnu hodnotu α, ktorú našlo R-ko.



Holt-Wintersova metóda

- Charakteristiky časového radu:
  - a_t = level - sezónne očistená stredná hodnota
  - b_t = slope - zmena hodnoty *level* z jednej periódy na druhú (zachytáva rôzne, aj krátkodobé trendy))
  - s_t = seasonal component - sezónna zložka (závisí napr. od mesiaca)
- Predikcia pri aditívnej sezónnosti:

$$\hat{x}_{n+k|n} = a_n + kb_n + s_{n+k-p}$$

pre $k \leq p$ (napr. pre mesačné dáta je $p = 12$)

- Pri mutiplikatívnej sezónnosti:

$$\hat{x}_{n+k|n} = (a_n + kb_n)s_{n+k-p}$$

Holt-Wintersova metóda

- Algoritmus pre aditívnu sezónnosť:

$$
\begin{aligned}
a_t &= \alpha(x_t - s_{t-p}) + (1-\alpha)(a_{t-1} + b_{t-1}), \\
b_t &= \beta(a_t - a_{t-1}) + (1-\beta)b_{t-1}, \\
s_t &= \gamma(x_t - a_t) + (1-\gamma)s_{t-p},
\end{aligned}
$$

  pričom $\alpha, \beta, \gamma \in (0,1)$.
- Pre multiplikatívnu sezónnosť analogicky, napr. V R-ku help(HoltWinters)
- Parametre α, β, γ sa určia minimalizáciou SSE

Holt-Wintersova metóda v R-ku: príklad

PRÍKLAD:

P. S. P.Cowpertwait, A. V. Metcalfe: Introductory Time Series with R. Springer, 2009.

Sales of Australian wine, pp. 60-62

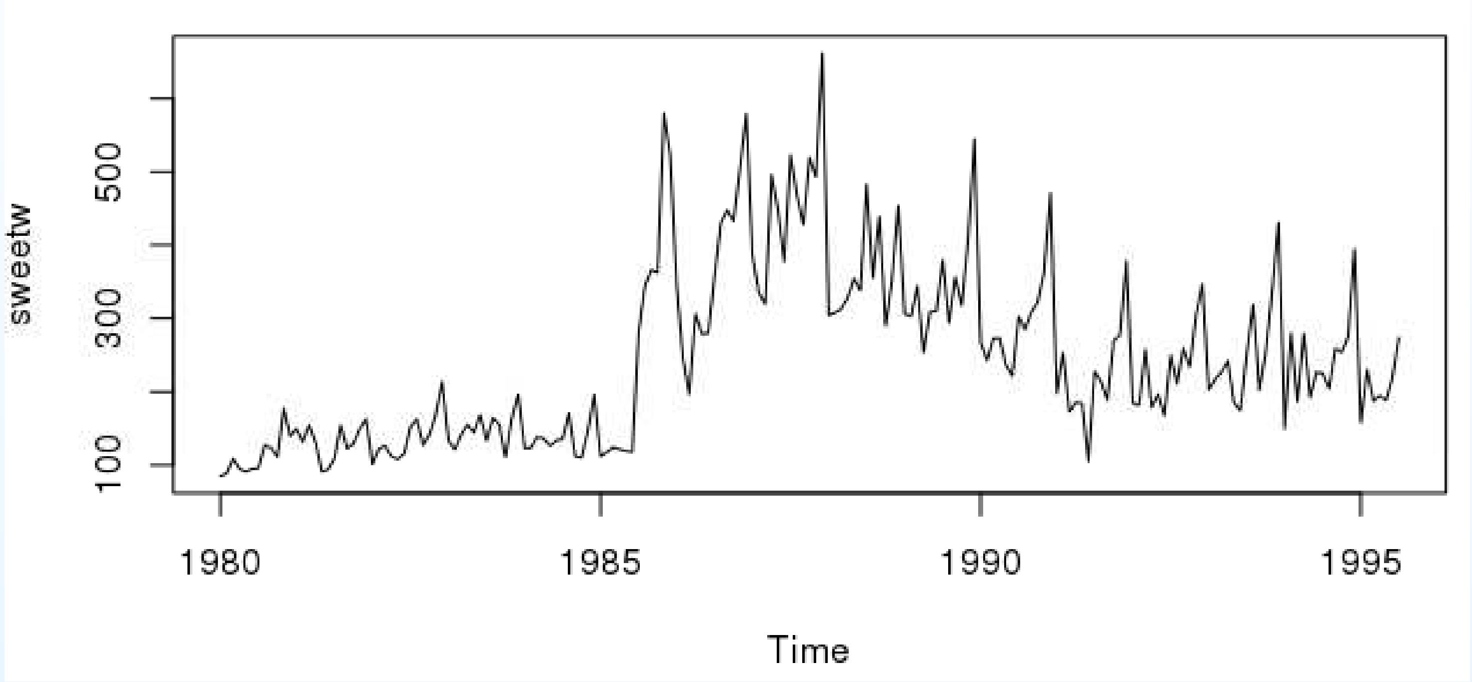
- Dáta:
  - wine.txt na stránke
  - predaj austrálskeho vína v tisícoch litrov, mesačné dáta, 1980/01 - 1995/07

```
> wine=read.table("wine.txt", header=T)
> attach(wine)
>
> wine
  winet fortw dryw sweetw  red rose spark
1     1  2585 1954     85  464  112  1686
2     2  3368 2302     89  675  118  1591
3     3  3210 3054    109  703  129  2304
4     4  3111 2414     95  887   99  1712
```

a spravíme z toho časový rad: sweetw=ts(sweetw, ...)

Holt-Wintersova metóda v R-ku: príklad

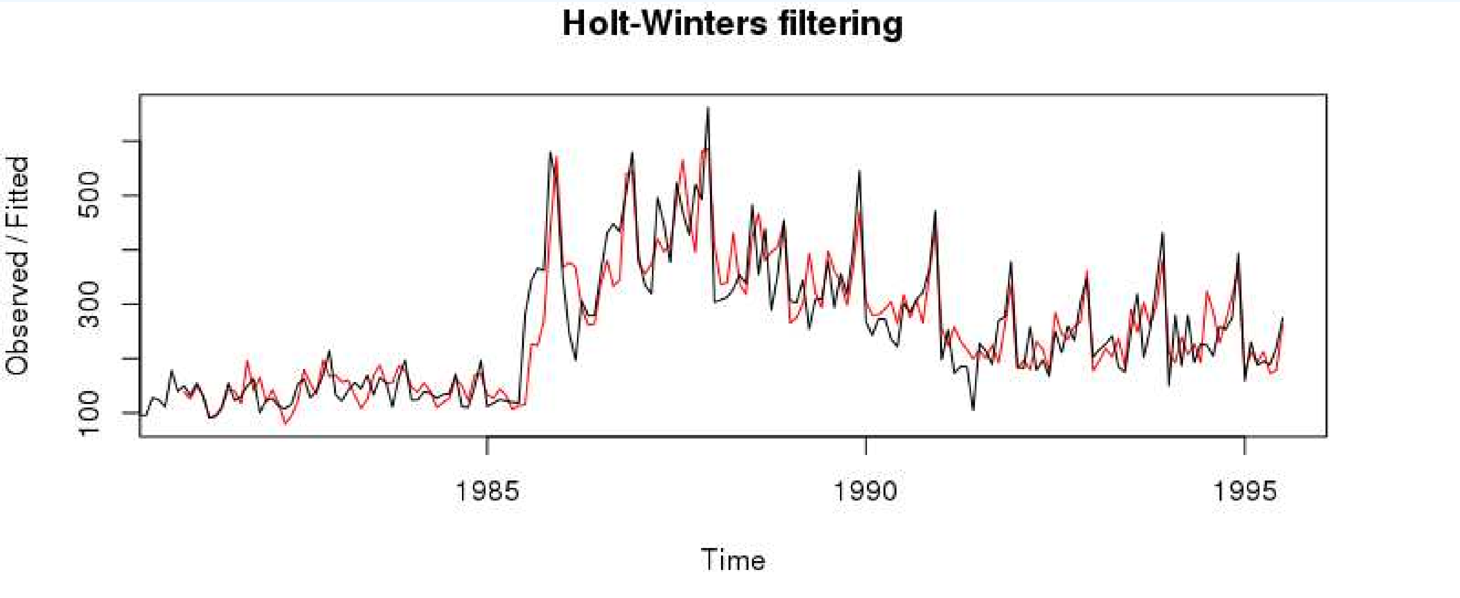
- Priebeh:



- Očakávame multiplikatívnu sezónnosť

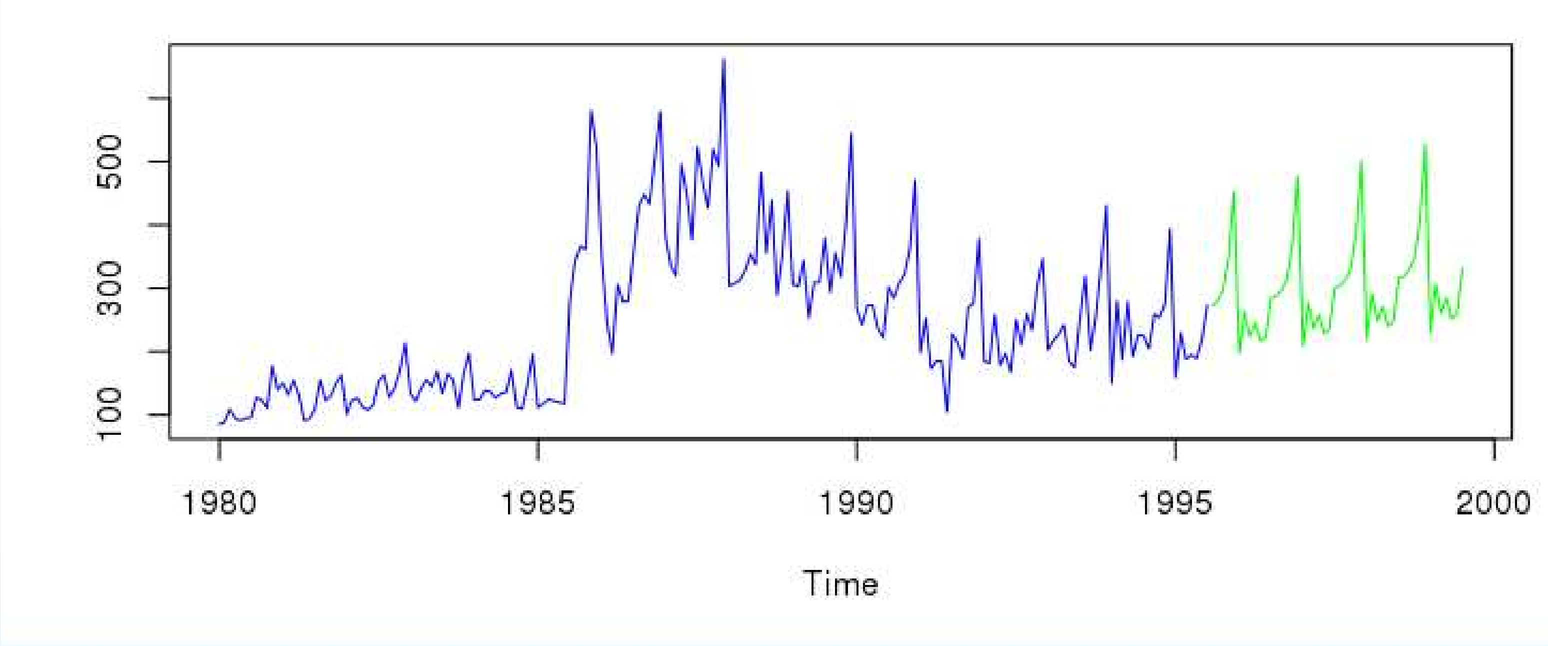
Holt-Wintersova metóda v R-ku: príklad

```
> HWsweet=HoltWinters(sweetw, seasonal="mult")
> HWsweet
Holt-Winters exponential smoothing with trend and multiplicative seasonal compon
ent.

Call:
 HoltWinters(x = sweetw, seasonal = "mult")

Smoothing parameters:
 alpha:  0.4086698
 beta :  0
 gamma:  0.4929402
```



Holt-Wintersova metóda v R-ku: príklad

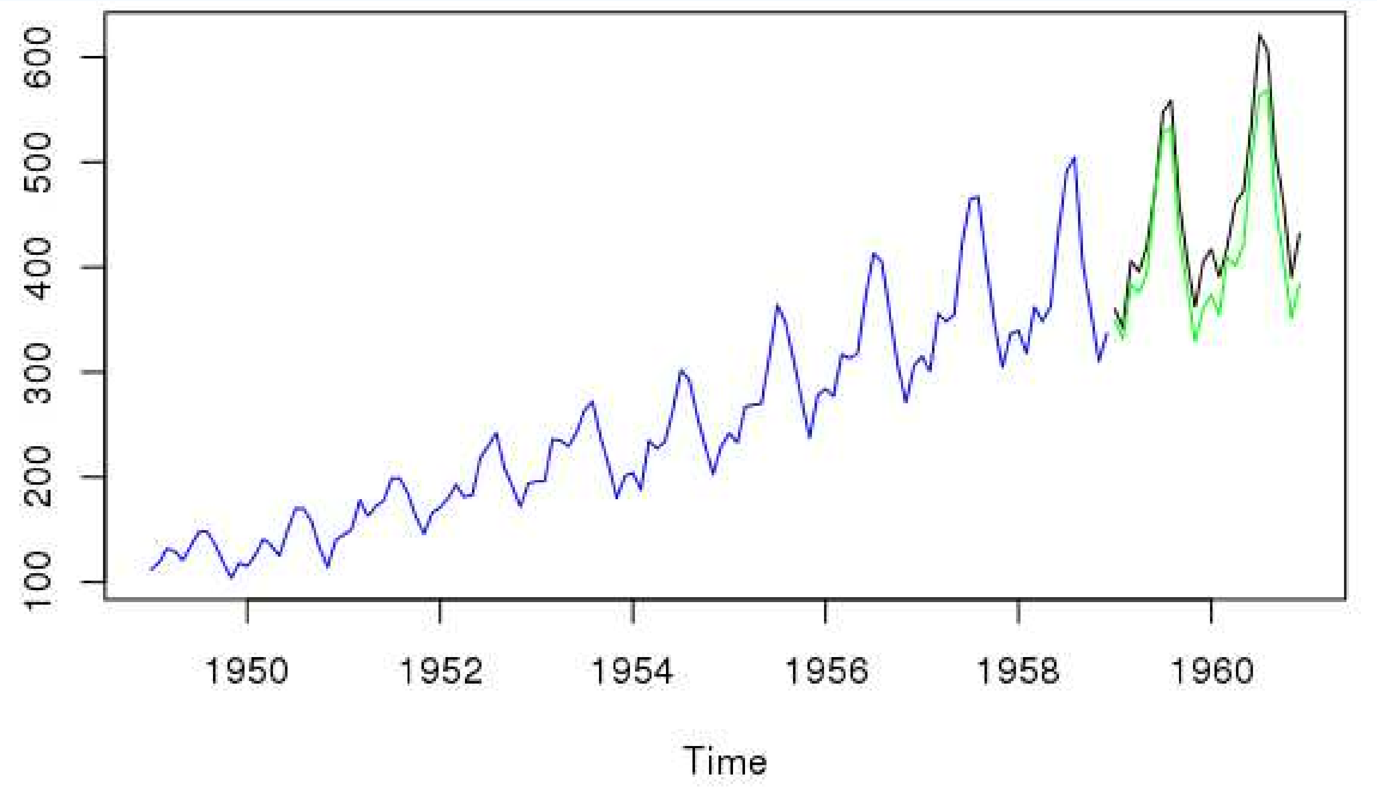
Konštrukcia predikciií - funkcia predict:




```
> sweetP=predict(HWsweet, n.ahead=48)
```

Holt-Wintersova metóda v R-ku: cvičenie

NA CVIČENÍ: Zoberieme dáta o počtoch cestujúcich aerolinkami, vynecháme posledné hodnoty a porovnáme ich s predikciou získanou Holt-Wintersovou metódou:



Hodrick-Prescottov filter

- PREDPOKLAD: V dátach nie je sezónnosť
- CIEĽ: znovu chceme vyhladiť dáta a získať trend
- Myšlienka: potrebujeme dosiahnuť dve kritériá, ktoré sú v protiklade:
  - vyhladené hodnoty by mali byť bízko skutočných
  - hladkosť, malá krivosť grafu vyhladených hodnôt (nie veľké fluktuácie), tú vieme merať druhými diferenciami (analógia s druhou deriváciou)

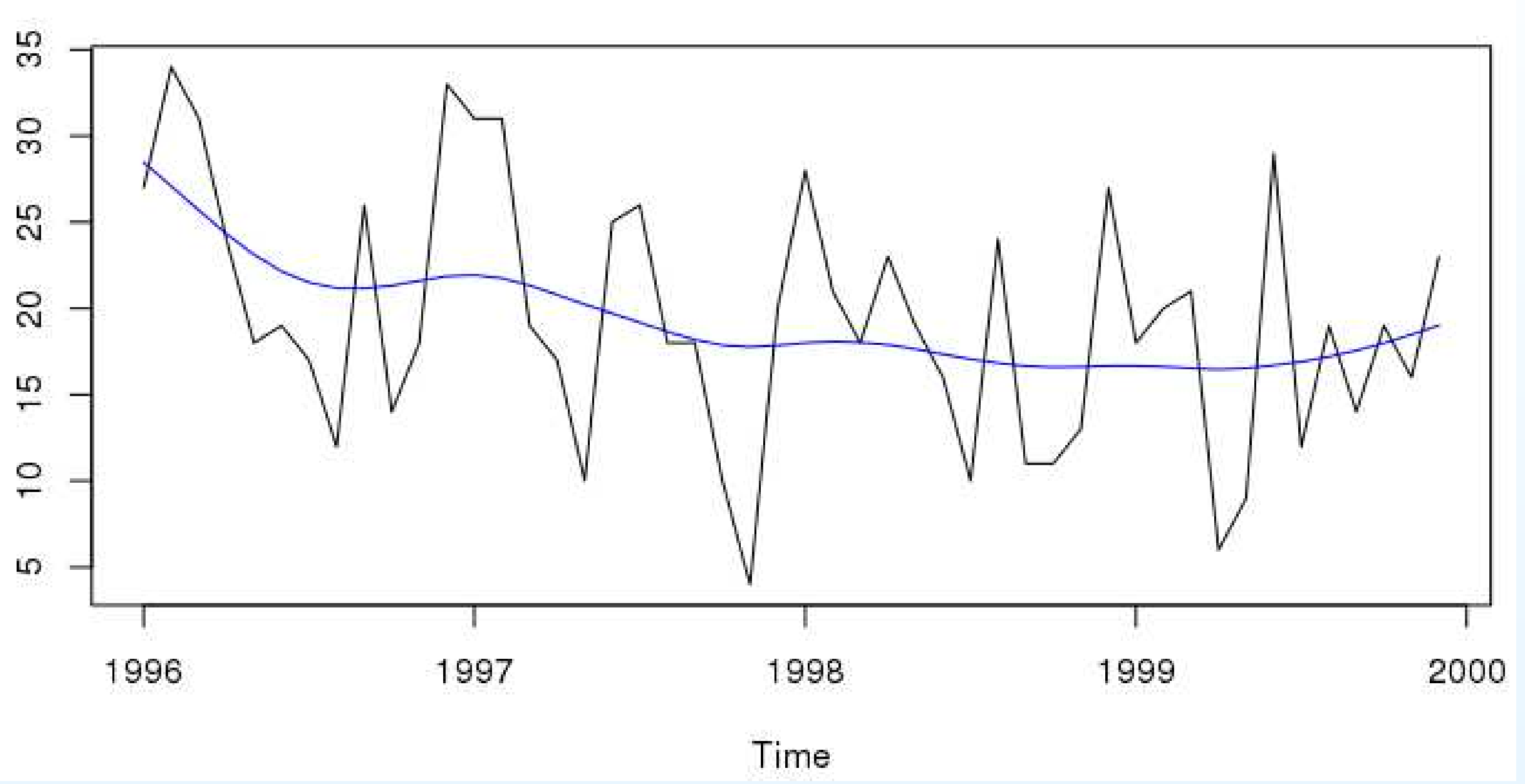
  - priradíme im váhy
- Optimalizačná úloha ($y_1, \dots, y_n$ sú dáta, λ parameter):

$$\sum_{t=1}^{n}(y_t - \tilde{y}_t)^2 + \lambda \sum_{t=2}^{n-1}(\tilde{y}_{t+1} - 2\tilde{y}_t + \tilde{y}_{t-1})^2 \to \min_{\tilde{y}_1,\dots,\tilde{y}_n}$$

Hodrick-Prescottov filter v R-ku: príklad

- Hodrick-Prescottov filter v R-ku:
  - knižnica library(mFilter)
  - potom napr. hpf1=hpfilter(x,freq=100), kde freq je parameter λ
  - odhadnutý trend: hpf1$trend
- Vplyv parametra λ:
  - zoberme dáta o počte sťažností
  - použime HP-filter napr. takto: hpf1=hpfilter(x,freq=100)
  - a vykreslime: lines(hpf1$trend)

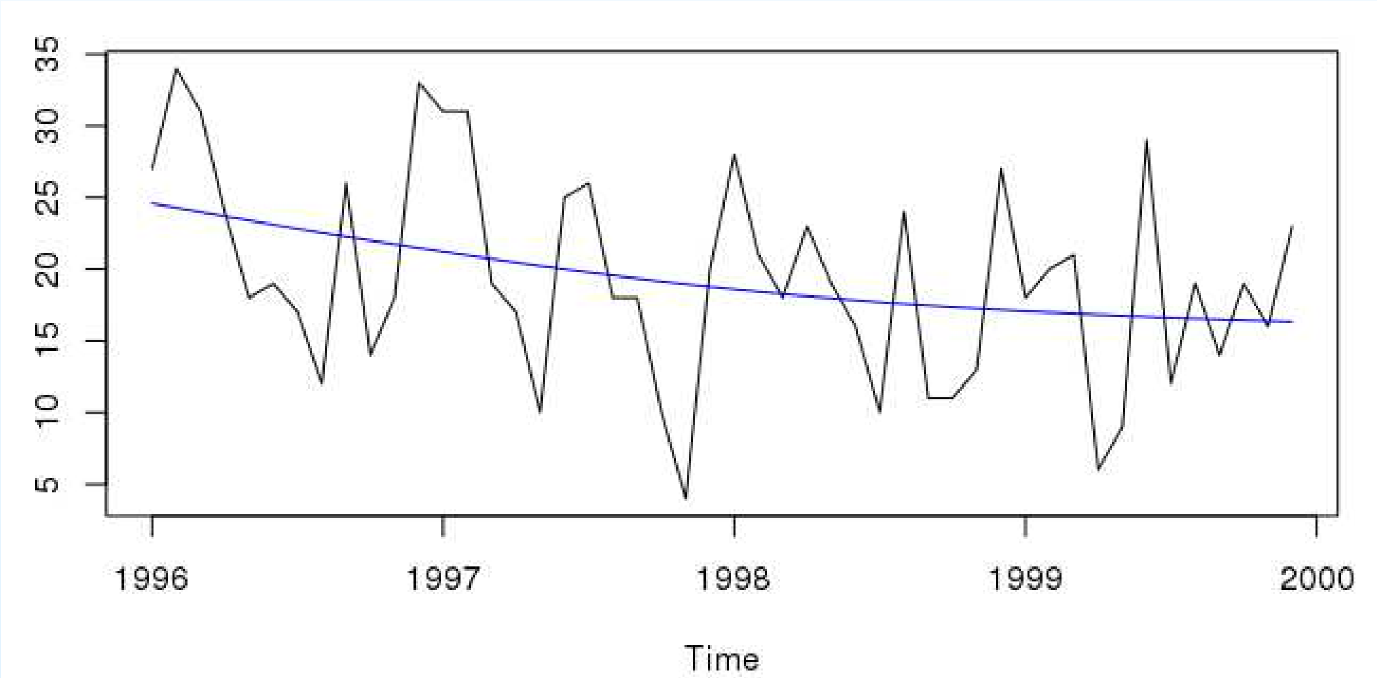
Hodrick-Prescottov filter v R-ku: príklad



INTUÍCIA: Čo sa deje pre $\lambda \to 0$ a pre $\lambda \to \infty$? Prečo?

Hodrick-Prescottov filter v R-ku: príklad

- Obvyklé hodnoty parametra λ:
  - $\lambda = 100$ pre ročné dáta
  - $\lambda = 1600$ pre kvartálne dáta
  - $\lambda = 14400$ pre mesačné dáta
- V našom prípade:



Hodrick-Prescottov filter: aplikácia

- Potenciálny HDP a produkčná medzera:
  - potenciálny HDP: maximálny výstup, ktorý vie ekonomika pri daných faktoroch vyprodukovať bez inflačných tlakov
  - skutočný HDP osciluje okolo potenciálneho (hospodárske cykly)
  - produkčná medzera: rozdiel medzi potenciálnym a reálnym výstupom
- Aplikácia HP filtra na skúmanie produkčnej medzery:
  - trendom HP filtra odhadneme potenciálny HDP
  - je to jeden z prístupov z nedávnej diplomovej práce
    http://www.iam.fmph.uniba.sk/studium/efm/diplomovky/2012/silanic/diplomovka.pdf
  - spravíme na cvičení