

ARMA modely
část 2: moving average modely (MA)

Beáta Stehlíková
Časové rady, FMFI UK

V.

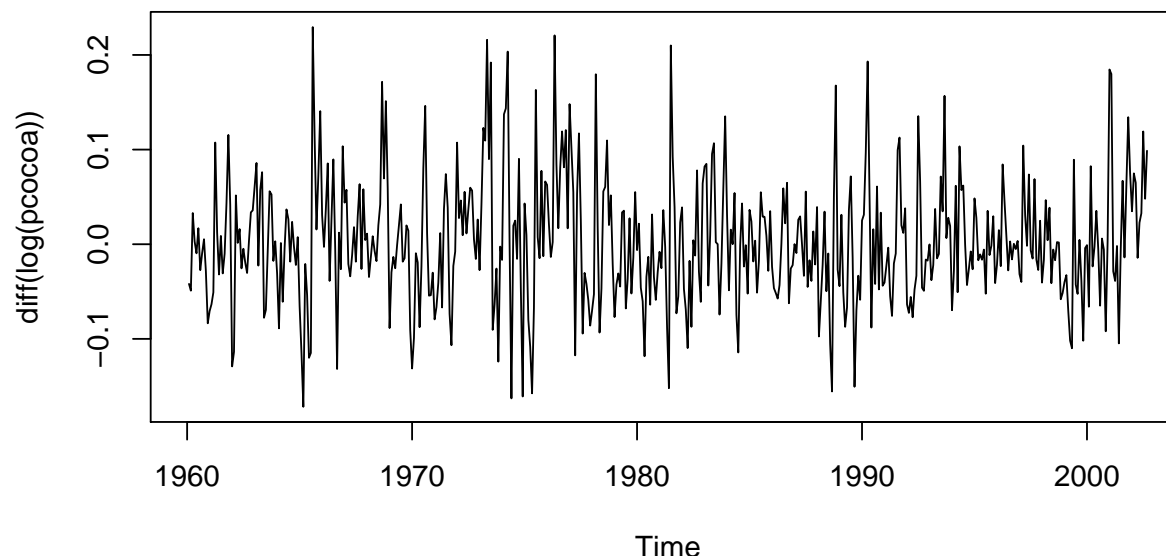
Moving average proces prvního rádu - MA(1)

Dáta z minulej prednášky

Ben Vogelpang: **Econometrics. Theory and Applications with EViews.** Pearson Education Limited, 2005.

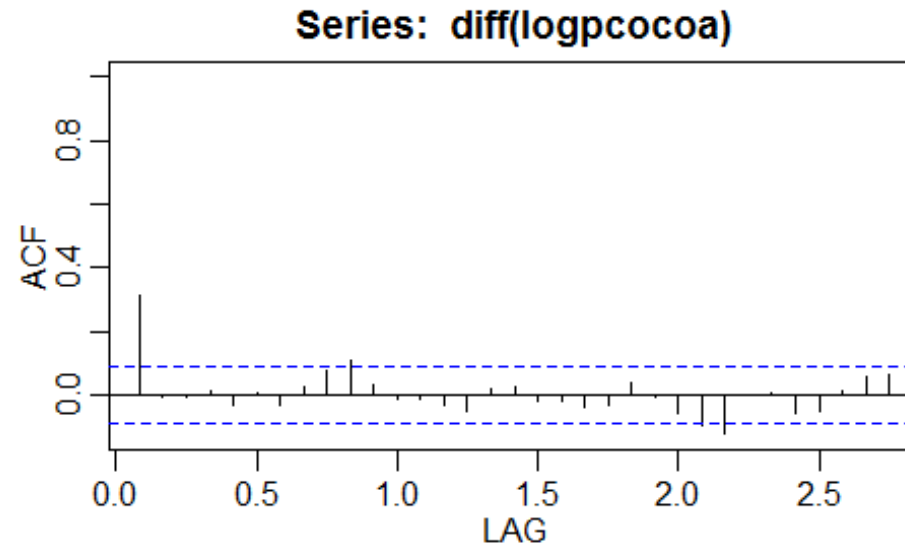
Chapter 14.7. - The Box-Jenkins Approach in Practice

- Mesačné dáta, január 1960 - september 2002
- $pcocoa_t$ - cena kakaa, zlogaritmujeme a kvôli stacionarite budeme pracovať s diferenciami



Dáta z minulej prednášky

- Odhadnutá ACF:



- Jedna výrazne nenulová autokorelácia, ostatné skoro nulové

Príklad z prvej prednášky

- Nech u_t je biely šum, definujeme

$$x_t = u_t + u_{t-1}$$

- Vypočítali sme:

$$E[x_t] = 0, \quad Var[x_t] = 2\sigma^2$$

$$Cov[x_t, x_{t+\tau}] = \begin{cases} \sigma^2 & \text{pre } \tau = 1 \\ 0 & \text{pre } \tau = 2, 3, \dots \end{cases}$$

$$Cor[x_t, x_{t+\tau}] = \begin{cases} 1/2 & \text{pre } \tau = 1 \\ 0 & \text{pre } \tau = 2, 3, \dots \end{cases}$$

- ACF je nulová pre $\tau = 2, 3, \dots$ - presne tá vlastnosť, ktorú potrebujeme

Zovšeobecnenie - MA(1) proces

- Nech u_t je biely šum, potom

$$x_t = \mu + u_t - \beta u_{t-1}$$

sa nazýva **moving average proces prvého rádu - MA(1)**

- **Woldova reprezentácia:** $x_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j u_{t-j}$
MA(1) proces: $\psi_0 = 1, \psi_1 = -\beta, \psi_j = 0$ pre $j = 2, 3, \dots$
- **Momenty a ACF:**

$$E[x_t] = \mu, \quad Var[x_t] = (1 + \beta^2)\sigma^2$$

$$Cov[x_t, x_{t+\tau}] = \begin{cases} -\beta\sigma^2 & \text{pre } \tau = 1 \\ 0 & \text{pre } \tau = 2, 3, \dots \end{cases}$$

$$Cor[x_t, x_{t+\tau}] = \begin{cases} -\frac{\beta}{1+\beta^2} & \text{pre } \tau = 1 \\ 0 & \text{pre } \tau = 2, 3, \dots \end{cases}$$

MA(1) proces - príklady

1. Nech u_t je biely šum s rozdelením $N(0, 4)$, definujme

$$x_t = u_t + \frac{1}{2}u_{t-1}$$

Potom: $E[x_t] = 0$, $Var[x_t] = (1 + (1/2)^2) \times 4 = 5$

$$Cor[x_t, x_{t+\tau}] = \begin{cases} \frac{1/2}{1+1/4} = 2/5 & \text{pre } \tau = 1 \\ 0 & \text{pre } \tau = 2, 3, \dots \end{cases}$$

2. Nech u_t je biely šum s rozdelením $N(0, 1)$, definujme

$$y_t = u_t + 2u_{t-1}$$

Potom: $E[y_t] = 0$, $Var[y_t] = (1 + 4) \times 1 = 5$

$$Cor[y_t, y_{t+\tau}] = \begin{cases} \frac{2}{1+4} = 2/5 & \text{pre } \tau = 1 \\ 0 & \text{pre } \tau = 2, 3, \dots \end{cases}$$

Procesy x_t a y_t majú rovnakú ACF \rightarrow nedajú sa rozlíšiť

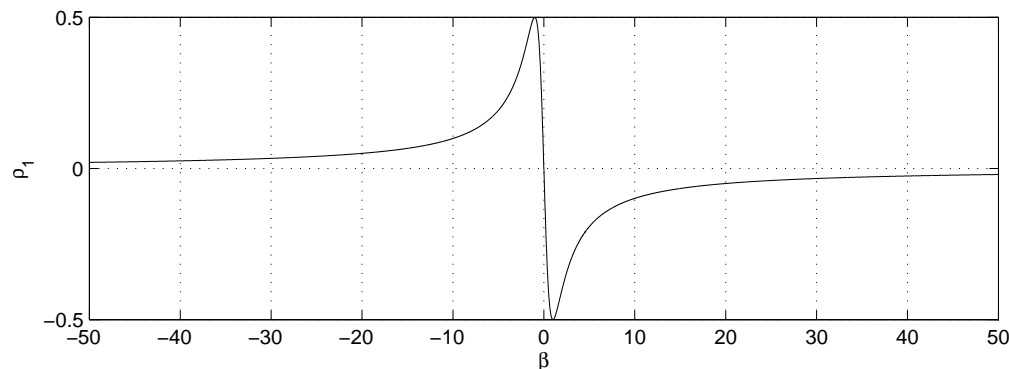
MA(1) proces - zovšeobecnenie príkladu

- Majme MA(1) proces, t.j. ACF tvaru

$$\text{Cor}[x_t, x_{t+\tau}] = \begin{cases} -\frac{\beta}{1+\beta^2} & \text{pre } \tau = 1 \\ 0 & \text{pre } \tau = 2, 3, \dots \end{cases}$$

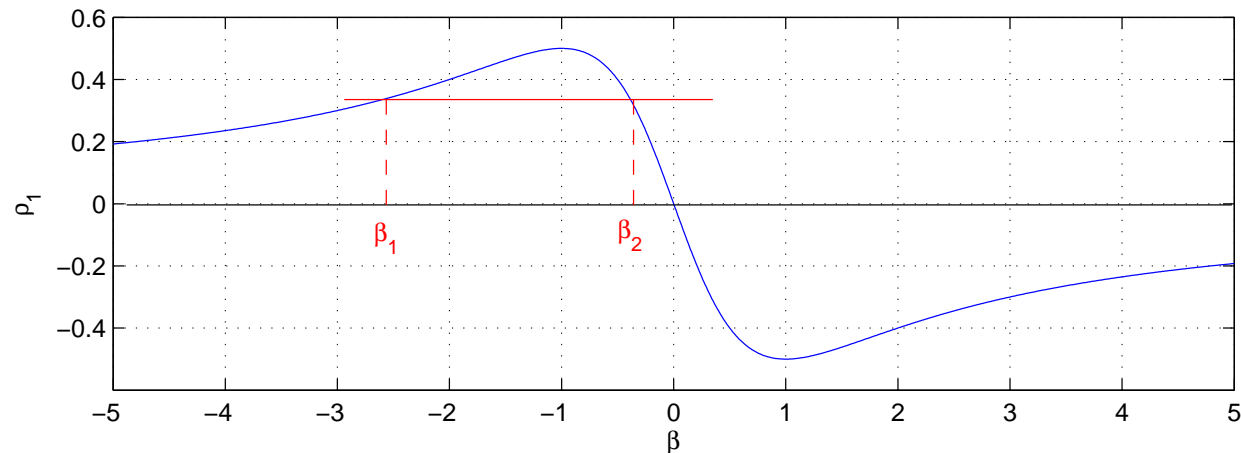
- Predpokladajme teraz, že máme danú hodnotu $\rho_1 = \rho(1)$ a chceme z nej spätne určiť koeficient β , t.j.

$$\rho_1 = -\frac{\beta}{1+\beta^2} \Rightarrow \beta = ?$$



MA(1) proces - zovšeobecnenie príkladu

- Máme teda rovnicu: $\rho_1 = -\frac{\beta}{1+\beta^2} \Rightarrow \beta^2 + \frac{1}{\rho_1}\beta + 1 = 0$



→ dve riešenia β_1, β_2 , spĺňajú $\beta_1\beta_2 = 1$.

- Procesy

$$x_t = \mu + u_t - \beta u_{t-1}, \quad x_t = \mu + u_t - \frac{1}{\beta} u_{t-1}$$

majú rovnakú ACF

- Ak chceme jednoznačnú parametrizáciu, potrebujeme dodať ďalšiu podmienku.

Invertovateľnosť procesu

- Budeme sa snažiť zapísať proces v tvare AR(∞):

$$x_t = \hat{\mu} + u_t + \psi_1 x_{t-1} + \psi_2 x_{t-2} + \psi_3 x_{t-3} + \dots$$

- ak sa to dá spraviť, proces sa nazýva invertovateľný

- Pre MA(1) proces:

$$x_t = \mu + (1 - \beta L)u_t$$

$$(1 - \beta L)^{-1}x_t = (1 - \beta L)^{-1}\mu + u_t$$

$(1 - \beta L)^{-1}$ existuje pre $|\beta| < 1$, vtedy

$$(1 + \beta L + \beta^2 L^2 + \dots)x_t = \mu/(1 - \beta) + u_t$$

$$x_t + \beta x_{t-1} + \beta^2 x_{t-2} + \dots = \mu/(1 - \beta) + u_t$$

MA(1) - invertovateľnosť procesu

- Dostali sme teda podmienku invertovateľnosti MA(1) procesu: $|\beta| < 1$
- Iný zápis tejto podmienky:
 - ◇ máme proces $x_t = \mu + (1 - \beta L)u_t$
 - ◇ koreň polynómu $1 - \beta L$ je $1/\beta$
 - ◇ podmienka invertovateľnosti teda hovorí, že koreň $1 - \beta L = 0$ musí byť v absolútnej hodnote väčší ako 1, teda mimo jednotkového kruhu

MA(1) - výpočet PACF

- Pripomeňme si všeobecný vzorec;

$$(1) \quad \Phi_{kk} = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \dots & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 & \dots & \rho(2) \\ & & \dots & \dots \\ \rho(k-1) & \rho(k-2) & \dots & \rho(k) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \dots & \rho(k-1) \\ \rho(1) & 1 & \dots & \rho(k-2) \\ & & \dots & \dots \\ \rho(k-1) & \rho(k-2) & \dots & 1 \end{pmatrix}}$$

- Pre MA(1) proces je $\rho(k) = 0$ pre $k = 2, 3, \dots$

MA(1) - výpočet PACF

- PACF sa (na rozdiel od AR procesu) nevynuluje:

$$\Phi_{11} = \rho(1)$$

$$\Phi_{22} = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & \rho(2) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 \end{pmatrix}} = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & 0 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 \end{pmatrix}} = \frac{-\rho(1)^2}{1 - \rho(1)^2}$$

$$\Phi_{33} = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 & \rho(2) \\ \rho(2) & \rho(1) & \rho(3) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(2) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) \\ \rho(2) & \rho(1) & 1 \end{pmatrix}} = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 & 0 \\ 0 & \rho(1) & 0 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & 0 \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) \\ 0 & \rho(1) & 1 \end{pmatrix}} = \frac{\rho(1)^3}{1 - 2\rho(1)^2}$$

$$\Phi_4 = \frac{-\rho(1)^4}{(1 - \rho(1)^2)^2 - \rho(1)^2}$$

...

Reálne dáta - ceny kakaa

- Dáta zo začiatku prednášky
- MA(1) model pre diferencie logaritmov cien (premenná y vo výstupe z R-ka):

```
> sarima(y,0,0,1,details=FALSE)
```

```
$fit
```

```
Call:
```

```
stats::arima(x = xdata, order = c(p, d, q), seasonal = list(order = c(P, D, Q), period = S), xreg = xmean, include.mean = FALSE, optim.control = list(REPORT = 1, reltol = tol))
```

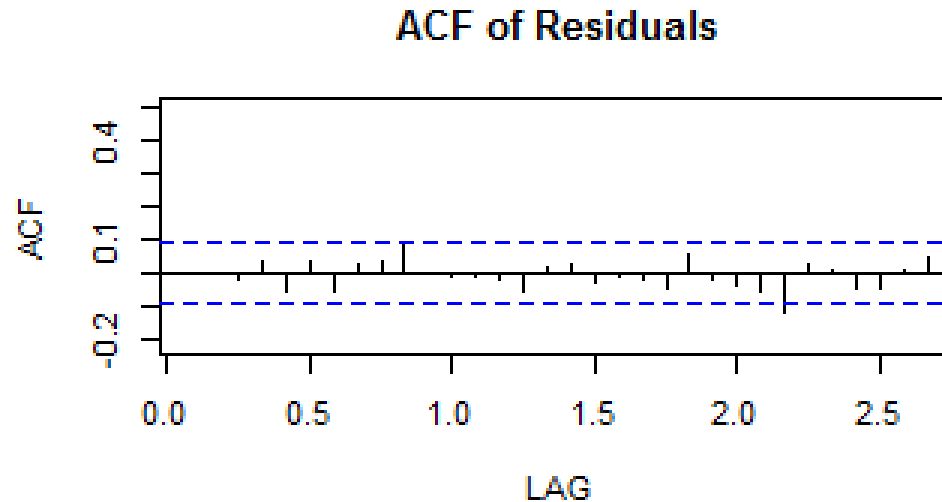
```
Coefficients:
```

```
      ma1      xmean  
0.3520  0.0024  
s.e.  0.0402  0.0037
```

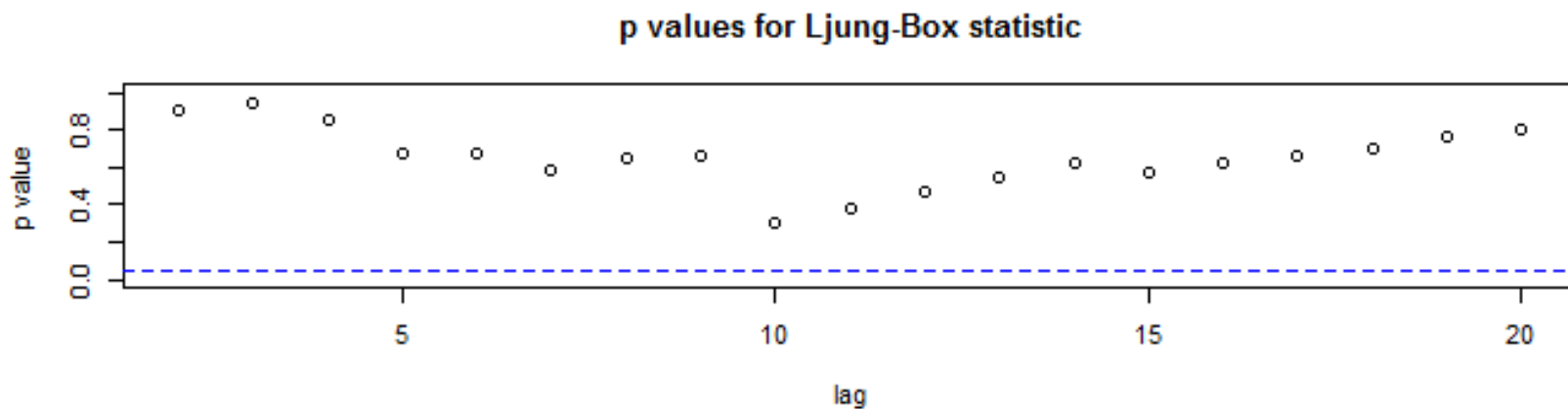
```
sigma^2 estimated as 0.003897:  log likelihood = 693.61,  aic = -1381.21
```

Reálne dáta - ceny kakaa

- ACF rezíduí:



- Ljung-Boxova štatistika:



- Model vyhovuje

VI.

Moving average proces q -teho rádu - $MA(q)$

MA(q) proces - definícia a vlastnosti

- Nech u_t je biely šum, potom

$$x_t = \mu + u_t - \beta_1 u_{t-1} - \beta_2 u_{t-2} - \dots - \beta_q u_{t-q}$$

sa nazýva **moving average proces q -teho rádu - MA(q)**

- **Woldova reprezentácia:** $x_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j u_{t-j}$
MA(q) proces: $\psi_0 = 1, \psi_1 = -\beta_1, \dots, \psi_q = -\beta_q, \psi_j = 0$
pre $j > q \rightarrow$ **MA(q) proces je vždy stacionárny**
- **Momenty, ACF, PACF:**

$$E[x_t] = \mu, \quad Var[x_t] = (1 + \beta_1^2 + \dots + \beta_q^2) \sigma^2$$

$$Cov[x_t, x_{t+\tau}] = 0 \quad \text{pre } \tau = q + 1, q + 2, \dots$$

$$\Rightarrow Cor[x_t, x_{t+\tau}] = 0 \quad \text{pre } \tau = q + 1, q + 2, \dots$$

MA(q) proces - definícia a vlastnosti

- Výpočet prvých q autokorelácií (môžeme uvažovať $\mu = 0$):

$$\text{Cov}[x_t, x_{t+\tau}] = E[(u_t - \beta_1 u_{t-1} - \dots - \beta_q u_{t-q}) \times (u_{t+\tau} - \beta_1 u_{t+\tau-1} - \dots - \beta_q u_{t+\tau-q})]$$

$$\begin{aligned} &= E[u_t(u_{t+\tau} - \beta_1 u_{t+\tau-1} - \dots - \beta_q u_{t+\tau-q})] \\ &\quad - \beta_1 E[u_{t-1}(u_{t+\tau} - \beta_1 u_{t+\tau-1} - \dots - \beta_q u_{t+\tau-q})] \\ &\quad \dots \\ &\quad - \beta_q E[u_{t-q}(u_{t+\tau} - \beta_1 u_{t+\tau-1} - \dots - \beta_q u_{t+\tau-q})] \end{aligned}$$

MA(q) proces - definícia a vlastnosti

- Výpočet prvých q autokorelácií - pokračovanie:

$$\tau = 1 \Rightarrow \gamma(1) = (-\beta_1 + \beta_1\beta_2 + \dots + \beta_{q-1}\beta_q)\sigma^2$$

$$\tau = 2 \Rightarrow \gamma(2) = (-\beta_2 + \beta_1\beta_3 + \dots + \beta_{q-2}\beta_q)\sigma^2$$

...

$$\tau = q \Rightarrow \gamma(q) = (-\beta_q)\sigma^2$$

- **PACF** - dosadením vypočítaných autokorelácií do všeobecného vzorca (1)

MA(q) proces - definícia a vlastnosti

- Invertovateľnosť:

$$x_t = \mu + u_t - \beta_1 u_{t-1} - \beta_2 u_{t-2} - \dots - \beta_q u_{t-q}$$

$$x_t = \mu + (1 - \beta_1 L - \dots - \beta_q L^q) u_t$$

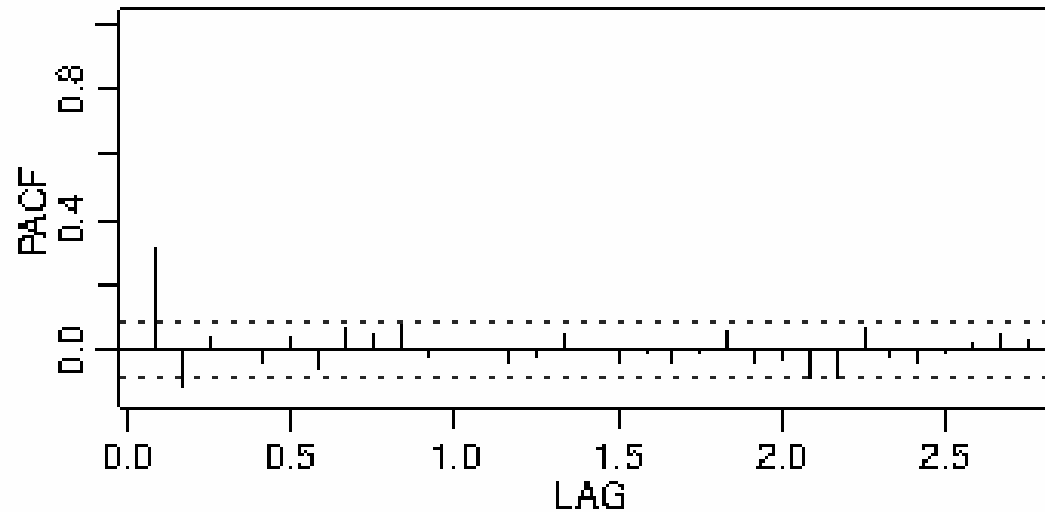
- Existencia inverzného operátora

$(1 - \beta_1 L - \dots - \beta_q L^q)^{-1}$ - korene polynómu

$1 - \beta_1 L - \dots - \beta_q L^q = 0$ musia byť mimo jednotkového kruhu

Cvičenie

- Diferencie logaritmov cien kakaa - výberová PACF:



- Priebeh PACF \rightarrow odhadnime AR(2) model

Cvičenie

- Odhadnutý model:

```
> sarima(y,2,0,0,details=FALSE)
$fit

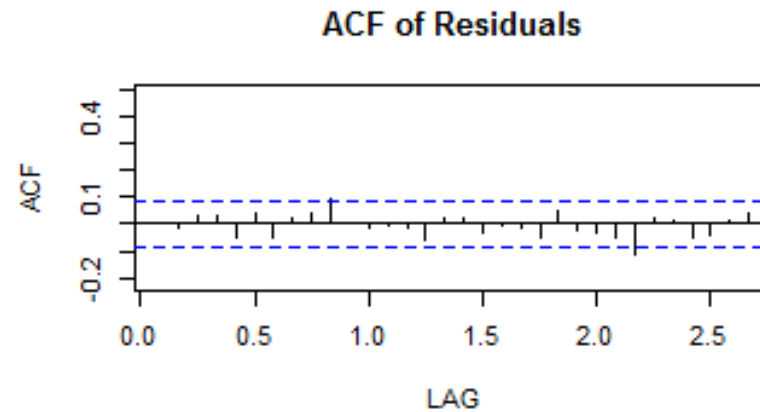
Call:
stats::arima(x = xdata, order = c(p, d, q), seasonal = list(order = c(P, D,
  Q), period = S), xreg = xmean, include.mean = FALSE, optim.control = lis$
  REPORT = 1, reltol = tol)

Coefficients:
      ar1      ar2  xmean
 0.3522 -0.1170 0.0024
s.e. 0.0439 0.0439 0.0036

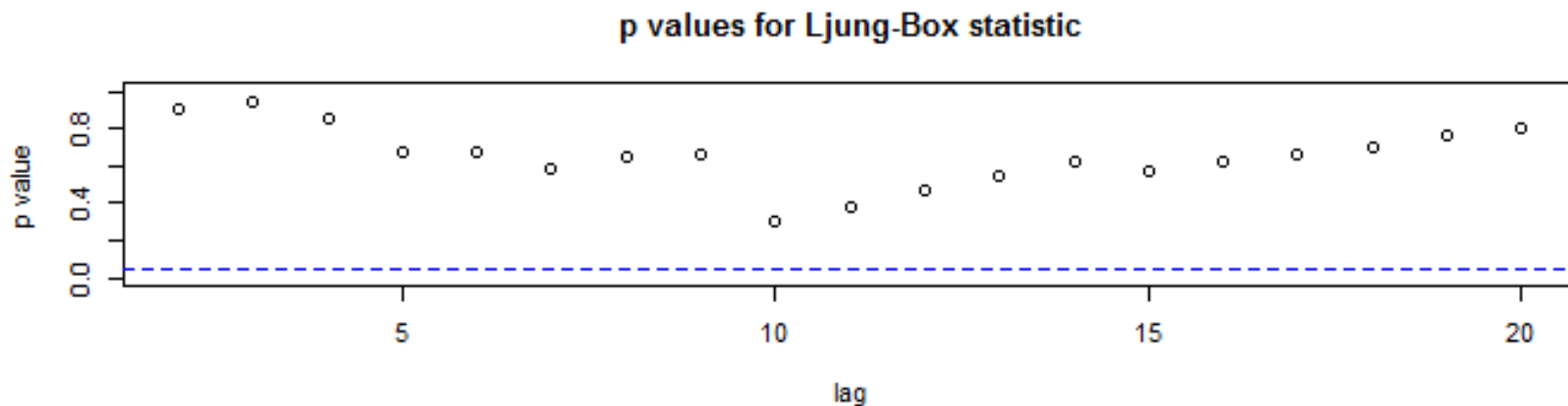
sigma^2 estimated as 0.003899:  log likelihood = 693.47,  aic = -1378.94
```

Cvičenie

- ACF rezíduí:



- Ljung-Boxova štatistika:



- Aj AR(2) model vyhovuje

Cvičenie

- Ako je možné, že vyhovuje aj MA(1) model, aj AR(2) model?
- Uvidíme, že nie sú "až tak" odlišné
- CVIČENIE:
Vypočítajte Woldovu reprezentáciu týchto dvoch procesov a porovnajte ich