ARMA modely
časť 3: zmiešané modely (ARMA)

Beáta Stehlíková
Časové rady, FMFI UK

ARMA modely - motivácia I.

- Odhadneme ACF a PACF pre dáta a nepodobajú sa ani na AR, ani na MA proces
- Chceli by sme skúsiť skombinovať AR a MA členy

ARMA modely - motivácia II.

Majme stacionárny a invertovateľný proces:

	AR(p)	MA(q)
ACF(τ)	nenulová	0 pre $\tau > q$
PACF(τ)	0 pre $\tau > p$	nenulová
AR(∞) reprezentácia	konečný súčet	nekonečný súčet
MA(∞) repr. (Wold)	nekonečný súčet	konečný súčet

- Žiadny z týchto modelov nepripúšťa možnosť, že sa ani ACF, ani PACF nevynuluje po konečnom počte členov
- Na to by sme potrebovali proces s nekonečnou AR aj MA reprezentáciou
- Túto vlastnosť majú zmiešané ARMA modely (zmiešané = AR aj MA členy)

VII.

Model ARMA(1,1)

ARMA(1,1) - definícia

- Nech u_t je biely šum, definujeme

$$x_t = \delta + \alpha x_{t-1} + u_t - \beta u_{t-1},$$

pričom $\alpha \neq \beta$. Proces x_t sa potom nazýva ARMA(1,1) proces.

- Zápis pomocou operátora posunu L:

$$\begin{aligned}
(x_t - \alpha x_{t-1}) &= \delta + (u_t - \beta u_{t-1}) \\
(1 - \alpha L) x_t &= \delta + (1 - \beta L) u_t \qquad (1)
\end{aligned}$$

ARMA(1,1) - Woldova repr. a stacionarita

- Vyjadríme z (1) proces x_t:

  (2) $$x_t = (1-\alpha L)^{-1}\delta + (1-\alpha L)^{-1}(1-\beta L)u_t$$

- Vieme, že $(1-\alpha L)^{-1}$ existuje, ak $|\alpha| < 1$ a v tomto prípade platí:

  $$(1-\alpha L)^{-1} = 1 + \alpha L + \alpha^2 L^2 + \ldots$$

- Dosadíme do (2):

  $$\begin{aligned} x_t &= \delta/(1-\alpha) + (1 + \alpha L + \alpha^2 L^2 + \ldots)(1-\beta L)u_t \\ &= \delta/(1-\alpha) + u_t + (\alpha-\beta)u_{t-1} + \alpha(\alpha-\beta)u_{t-2} + \ldots \end{aligned}$$

  teda vo Woldovej reprezentácii

  $$\psi_0 = 1, \psi_1 = \alpha(\alpha-\beta), \psi_2 = \alpha^2(\alpha-\beta), \ldots, \psi_k = \alpha^k(\alpha-\beta), \ldots$$

- Podmienka stacionarity $|\alpha| < 1$ sa dá zapísať aj tak, že koreň polynómu $1-\alpha L$ musí byť mimo jednotkového kruhu

ARMA(1,1) - k podmienke $\alpha \neq \beta$

- Máme Woldovu reprezentáciu):

$$
\begin{aligned}
x_t &= \delta/(1-\alpha) + (1 + \alpha L + \alpha^2 L^2 + \ldots)(1 - \beta L) u_t \\
&= \delta/(1-\alpha) + u_t + (\alpha - \beta) u_{t-1} + \alpha(\alpha - \beta) u_{t-2} + \ldots
\end{aligned}
$$

- Ak by bolo $\alpha = \beta$, tak

$$x_t = \delta/(1-\alpha) + u_t,$$

teda náš proces je iba konštanta + biely šum

ARMA(1,1) - invertovatel'nosť

- Vyjadríme z (1) proces bieleho šumu u_t, aby sme dostali proces x_t vyjadrený pomocou jeho starších hodnôt + aktuálnej hodnoty bieleho šumu:

$$\begin{aligned} -\delta + (1-\alpha L)x_t &= (1-\beta L)u_t \\ -(1-\beta L)^{-1}\delta + (1-\beta L)^{-1}(1-\alpha L)x_t &= u_t \end{aligned}$$

- Vieme, že inverzný operátor $(1-\beta L)^{-1}$ existuje, ak $|\beta| < 1$
- Táto podmienka invertovatel'nosti sa dá zapísať aj tak, že koreň polynómu $1-\beta L$ musí byť mimo jednotkového kruhu

ARMA(1,1) - zhrnutie

- Pripomeňme si proces (1):

$$(1 - \alpha L)x_t = \delta + (1 - \beta L)u_t$$

- Podmienka stacionarity:
  - koreň polynómu $1 - \alpha L$ je mimo jednotkového kruhu
  - závisí teda iba od AR časti procesu
- Podmienka invertovatel’nosti:
  - koreň polynómu $1 - \beta L$ je mimo jednotkového kruhu
  - závisí teda iba od MA časti procesu

VIII.

Model ARMA(p,q)

ARMA(p,q) - definícia

- Nech u_t je biely šum, definujeme

$$x_t = \delta + \alpha_1 x_{t-1} + \ldots + \alpha_p x_{t-p} + u_t - \beta_1 u_{t-1} - \ldots - \beta_q u_{t-q},$$

tento proces sa potom nazýva ARMA(p,q) proces.

- Zápis pomocou operátora posunu L:

$$\begin{aligned} (1 - \alpha_1 L - \ldots \alpha_p L^p) x_t &= \delta + (1 - \beta_1 L - \ldots - \beta_q L^q) u_t \\ \alpha(L) x_t &= \delta + \beta(L) u_t \qquad (3) \end{aligned}$$

pričom požadujeme, aby polynómy $\alpha(L)$, $\beta(L)$ nemali spoločný koreň (podrobnejšie o tejto podmienke neskôr)

ARMA(p,q) - Woldova repr., stacionarita

- Z rovnice (3) vyjadríme x_t:

$$\begin{aligned} \alpha(L)x_t &= \delta + \beta(L)u_t \\ x_t &= \alpha(L)^{-1}\delta + \alpha(L)^{-1}\beta(L)u_t \end{aligned}$$

- Potrebujeme $\alpha(L)^{-1}\beta(L)$:

$$\begin{aligned} \alpha(L)^{-1}\beta(L) &= \psi_0 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \ldots \\ \beta(L) &= \alpha(L)(\psi_0 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \ldots) \\ (1 - \beta_1 L - \ldots - \beta_q L^q) &= (1 - \alpha_1 L - \ldots \alpha_p L^p) \times \\ &\quad \times(\psi_0 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \ldots) \end{aligned}$$

Roznásobíme a porovnáme koeficinety pri L^j

ARMA(p,q) - Woldova repr., stacionarita

- Pre koeficinety ψ_j Woldovej reprezentácie dostaneme:
  - diferenčnú rovnicu
    $$\psi_k - \alpha_1 \psi_{k-1} - \ldots - \alpha_p \psi_{k-p} = 0$$
  - začiatočné podmienky
- Kvôli konvergencii radu $\sum \phi_j^2$ musia byť korene charakteristického polynómu $\lambda^p - \alpha_1 \lambda^{p-1} - \ldots \alpha_p = 0$ vnútri, t.j. korene $\alpha(L) = 0$ mimo jednotkového kruhu

ARMA(p,q) - invertovateľnosť

- Z rovnice (3) vyjadríme u_t:

$$\begin{aligned}\alpha(L)x_t &= \delta + \beta(L)u_t \\ \beta(L)u_t &= -\delta + \alpha(L)x_t \\ u_t &= -\beta(L)^{-1}\delta + \beta(L)^{-1}\alpha(L)x_t\end{aligned}$$

- Toto sa dá spraviť, ak existuje inverzný operátor $\beta(L)^{-1}$, čo je vtedy, keď korene $\beta(L) = 0$ sú mimo jednotkového kruhu

ARMA(p,q) - momenty

- Stredná hodnota: μ:

$$x_t = \delta + \alpha_1 x_{t-1} + \ldots + \alpha_p x_{t-p} + u_t - \beta_1 u_{t-1} - \ldots - \beta_q u_{t-q}$$

$$\mu = \delta + \alpha_1 \mu + \ldots + \alpha_p \mu \Rightarrow \mu = \frac{\delta}{1 - \alpha_1 - \ldots - \alpha_p}$$

- Variancia, autokovariancie - nech $\delta = 0$:

$$x_t = \alpha_1 x_{t-1} + \ldots + \alpha_p x_{t-p} + u_t - \beta_1 u_{t-1} - \ldots - \beta_q u_{t-q}$$

$$\Big/ \quad \times x_{t-s}, \; E[.]$$

$$\begin{aligned} \gamma(s) \;&=\; \alpha_1 \gamma(s-1) + \ldots + \alpha_p \gamma(s-p) \\ &\quad + E[u_t x_{t-s}] - \beta_1 E[u_{t-1} x_{t-s}] - \ldots - \beta_q E[u_{t-q} x_{t-s}] \end{aligned}$$

ARMA(p,q) - momenty

- Pre $s > q$ sú všetky stredné hodnoty

$$E[u_t x_{t-s}], E[u_{t-1} x_{t-s}], \ldots, E[u_{t-p} x_{t-s}]$$

nulové $\Rightarrow$ pre $s > q \wedge s > p$ (lebo na použitie nasledujúcej diferenčnej rovnice potrebujeme aspoň p začiatočných hodnôt) máme diferenčnú rovnicu pre autokovariancie:

$$(4) \qquad \gamma(s) = \alpha_1 \gamma(s-1) + \ldots + \alpha_p \gamma(s-p)$$

- ACF - vydelením (4) varianciou $\gamma(0)$ dostaneme diferenčnú rovnicu pre autokorelácie $\rho(s)$, $s > \max(p, q)$:

$$(5) \qquad \rho(s) = \alpha_1 \rho(s-1) + \ldots + \alpha_p \rho(s-p)$$

- rovnaká diferenčná rovnica ako pre proces bez MA časti, začiatočné pomienky však MA koeficienty obsahujú

Príklad: ARMA(1,1)

- Podrobnejší výpočet pre ARMA(1,1)
- Stredná hodnota μ:

$$\begin{aligned} x_t &= \delta + \alpha x_{t-1} + u_t - \beta u_{t-1} \qquad \Big/ \quad E[.] \\ \mu &= \delta + \alpha\mu + 0 \Rightarrow \mu = \frac{\delta}{1-\alpha} \end{aligned}$$

- Variancia, autokovariancie - pre $\delta = 0$:

$$\begin{aligned} x_t &= \alpha x_{t-1} + u_t - \beta u_{t-1} \qquad \Big/ \quad \times x_{t-s},\ E[.] \\ E[x_t x_{t-s}] &= \alpha E[x_{t-1}x_{t-s}] + E[u_t x_{t-s}] - \beta E[u_{t-1}x_{t-s}] \\ \text{(6)} \quad \gamma(s) &= \alpha\gamma(s-1) + E[u_t x_{t-s}] - \beta E[u_{t-1}x_{t-s}] \end{aligned}$$

Stredná hodnota $E[u_t x_{t-s}]$ je nenulová len pre $s = 0$, $E[u_{t-1}x_{t-s}]$ je nenulová len pre $s = 0$ a pre $s = 1$

Príklad: ARMA(1,1)

- Konkrétne hodnoty $E[u_t x_{t-s}]$ a $E[u_{t-1} x_{t-s}]$ vypočítame z Woldovej reprezentácie

$$x_{t-s} = u_{t-s} + (\alpha - \beta) u_{t-s-a} + \alpha(\alpha - \beta) u_{t-s-2} + \dots$$

Dostaneme:

$$E[u_t x_{t-s}] = \begin{cases} \sigma^2 & \text{pre } \tau = 0 \\ 0 & \text{pre } \tau = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

$$E[u_{t-1} x_{t-s}] = \begin{cases} (\alpha - \beta)\sigma^2 & \text{pre } \tau = 0 \\ \sigma^2 & \text{pre } \tau = 1 \\ 0 & \text{pre } \tau = 2, 3, \dots \end{cases}$$

a dosadíme do (6).

Príklad: ARMA(1,1)

- Nakoniec z (6) dostaneme pre $s = 0$, $s = 1$:

$$
\begin{aligned}
s = 0 \quad &\Rightarrow \quad \gamma(0) = \alpha\gamma(1) + \sigma^2 - \beta(\alpha - \beta)\sigma^2 \\
s = 1 \quad &\Rightarrow \quad \gamma(1) = \alpha\gamma(0) - \beta\sigma^2
\end{aligned}
$$

$\rightarrow$ sústava 2 rovníc s 2 neznámymi, jej riešením je

$$
\gamma(0) = \frac{1 + \beta^2 - 2\alpha\beta}{1 - \alpha^2}\sigma^2, \gamma(1) = \frac{(\alpha - \beta)(1 - \alpha\beta)}{1 - \alpha^2}\sigma^2 \tag{7}
$$

- Pre $s = 2, 3, \ldots$ dostaneme rekurentný predpis pre ďalšie $\gamma(s)$:

$$
\gamma(s) = \alpha\gamma(s - 1)
$$

Príklad: ARMA(1,1)

- Pre $s = 2, 3, \ldots$ máme

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= \alpha\gamma(s-1) \quad \Big/ \quad \frac{1}{\gamma(0)} \\ \rho(s) &= \alpha\rho(s-1) \end{aligned}$$

$\to$ tá istá diferenčná rovnica pre ACF, ako by bola pre proces bez MA časti

- ale s inou začiatočnou podmienkou - zo vzťahu (7) máme

$$\rho(1) = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} = \frac{(\alpha-\beta)(1-\alpha\beta)}{(1+\beta^2-2\alpha\beta)}$$

- závisí aj od MA časti

PACF

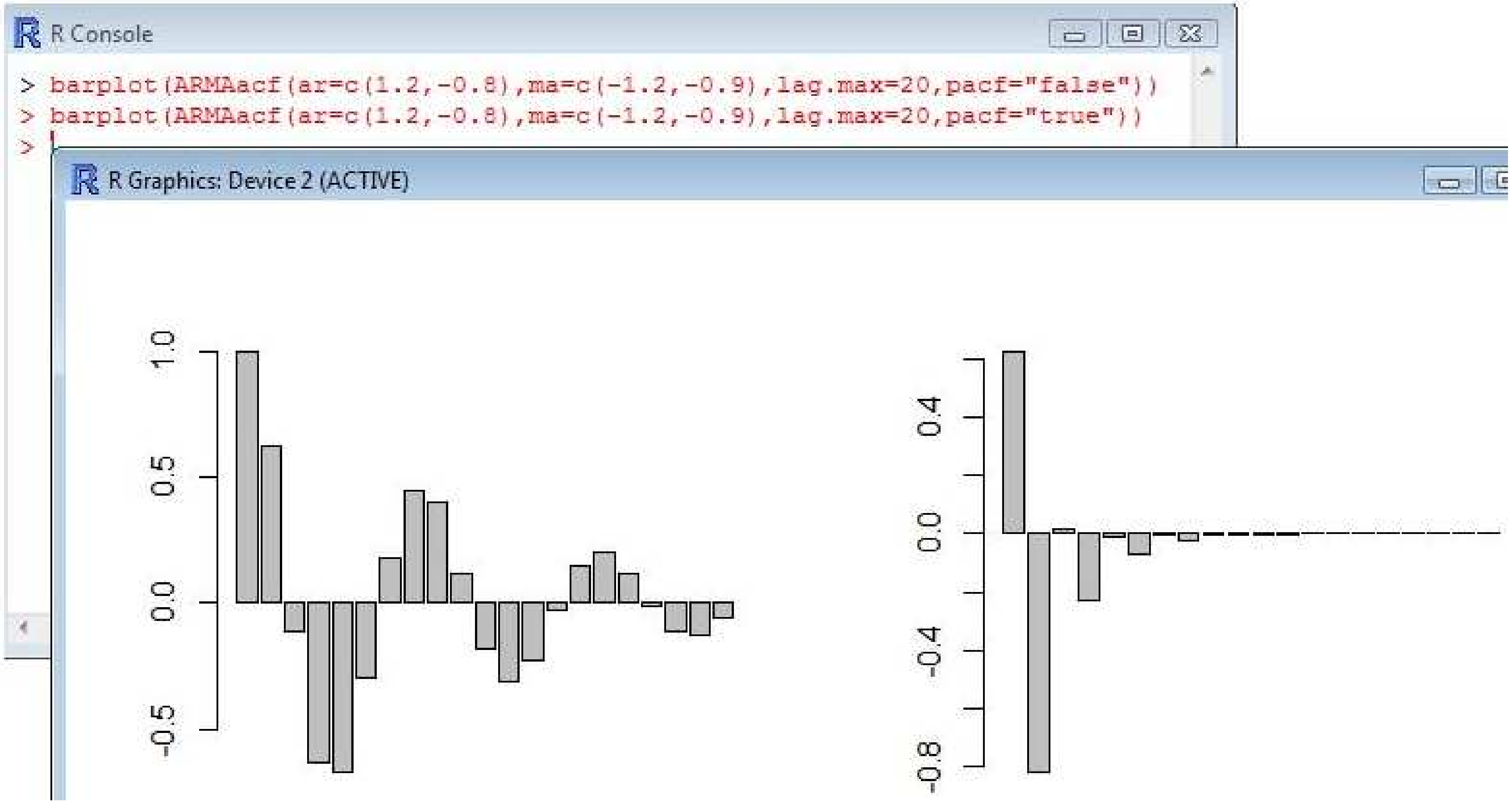
- PACF počítame rovnako ako predtým pomocou determinantov:

$$\Phi_{kk} = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \dots & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 & \dots & \rho(2) \\ & \dots & \dots & \\ \rho(k-1) & \rho(k-2) & \dots & \rho(k) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \dots & \rho(k-1) \\ \rho(1) & 1 & \dots & \rho(k-2) \\ & \dots & \dots & \\ \rho(k-1) & \rho(k-2) & \dots & 1 \end{pmatrix}} \qquad (8)$$

- Príklad: pre ARMA(1,1) proces dosadzujeme $\rho(k) = \alpha^{k-1}\rho(1)$, $\rho(1) = \frac{(\alpha-\beta)(1-\alpha\beta)}{(1+\beta^2-2\alpha\beta)}$

Príklad - vypočítaná ACF a PACF

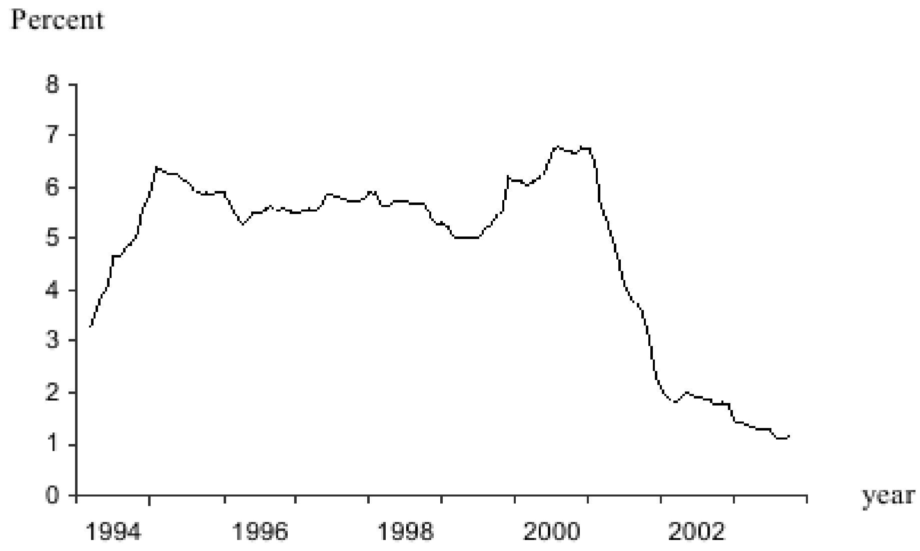
NEPLATÍ, že $ACF(k) = 0$ pre $k > q$ a $PACF(k) = 0$ pre $k > p$ (minulé roky častá chyba pri komentovaní ACF, PACF), príklad ARMA procesu:



Príklad - reálne dáta

[Kirchgässner, Wolters], example 2.15

- USA, marec 1994 - august 2003
- USR_t = 3-mesačná úroková miera



a) New York three months money market rate, 1994 – 2003

Príklad - reálne dáta

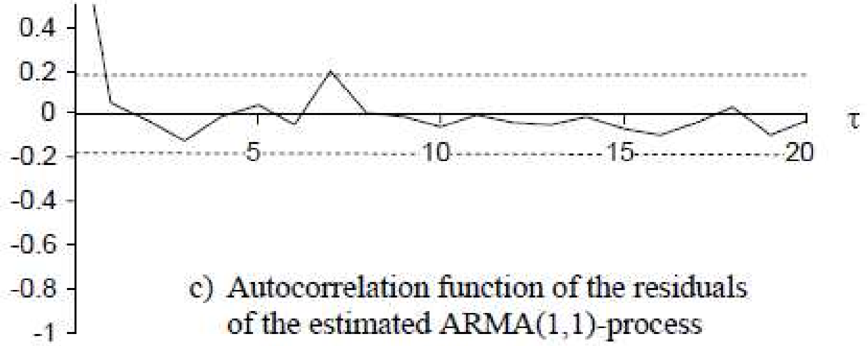
Odhadnutý model pre diferencie premennej USR:

Therefore, the following ARMA(1,1) model has been estimated for this time series:

$$\Delta USR_t = \underset{(-0.73)}{-0.006} + \underset{(10.91)}{0.831}\,\Delta USR_{t-1} + \hat{u}_t - \underset{(-3.57)}{0.457}\,\hat{u}_{t-1},.$$

$$\bar{R}^2 = 0.351,\quad SE = 0.166,\quad Q(10) = 7.897\ (p = 0.639).$$

The AR(1) as well as the MA(1) terms are different from zero and from one at any usual significance level. The autocorrelogram of the estimated residuals, which is also given in *Figure 2.10*, as well as the Ljung-Box Q statistic, which is calculated for this model with 12 autocorrelation coefficients (i.e. with 10 degrees of freedom), do not provide any evidence of a higher order process.



c) Autocorrelation function of the residuals of the estimated ARMA(1,1)-process with confidence intervals

Príklad - reálne dáta

Otázky k výstupu:

- Je odhadnutý model stacionárny? Je invertovateľný?
- *"The autocorrelogram of the estimated residuals... not provide any evidence of a higher order process"* - vysvetlite
- *"...the Box-Ljung Q statistic, which is calculated for this model with 12 autocorrelation coefficients (i.e. with 10 degrees of freedom)..."*
  - ◇ sformulujte nulovú hypotézu, ktorá sa tu testuje
  - ◇ zdôvodnite počet stupňov voľnosti
  - ◇ aký je záver testu?

ARMA(p,q) - spoločné AR a MA korene

- Pripomeňme si definíciu ARMA(p,q) procesu:

$$\begin{aligned}(1-\alpha_1 L - \ldots - \alpha_p L^p)x_t &= \delta + (1-\beta_1 L - \ldots - \beta_q L^q)u_t \\ \alpha(L)x_t &= \delta + \beta(L)u_t\end{aligned}$$

  pričom požadujeme, aby polynómy $\alpha(L)$, $\beta(L)$ nemali spoločné korene
- Prečo nemôžu mať polynómy $\alpha(L)$, $\beta(L)$ spoločné korene?
- Zovšeobecnenie toho, že pre ARMA(1,1) musí byť $\alpha \neq \beta$, inak máme triviálny proces "konštanta + biely šum"

ARMA(p,q) - spoločné AR a MA korene

- Uvažujme "ARMA(2,2)" proces

$$(1-\alpha_1 L-\alpha_2 L^2)x_t=\delta+(1-\beta_1 L-\beta_2 L^2)u_t,$$

kde
$$\begin{aligned}1-\alpha_1 L-\alpha_2 L^2 &= (1-\gamma L)(1-\gamma_1 L)\\ 1-\beta_1 L-\beta_2 L^2 &= (1-\gamma L)(1-\gamma_2 L)\end{aligned}$$

t.j. AR a MA polynómy majú spoločný koreň γ

- Potom sa proces dá zapísať nasledovne:

$$\begin{aligned}(1-\gamma L)(1-\gamma_1 L)x_t &= \delta+(1-\gamma L)(1-\gamma_2 L)u_t\\ (1-\gamma_1 L)x_t &= (1-\gamma L)^{-1}\delta+(1-\gamma_2 L)u_t\end{aligned}$$

teda je to ARMA(1,1), a nie ARMA(2,2) model

- Prakticky - ak dostaneme veľmi blízky AR a MA koreň, treba namiesto ARMA(p,q) skúsiť ARMA(p-1,q-1) model

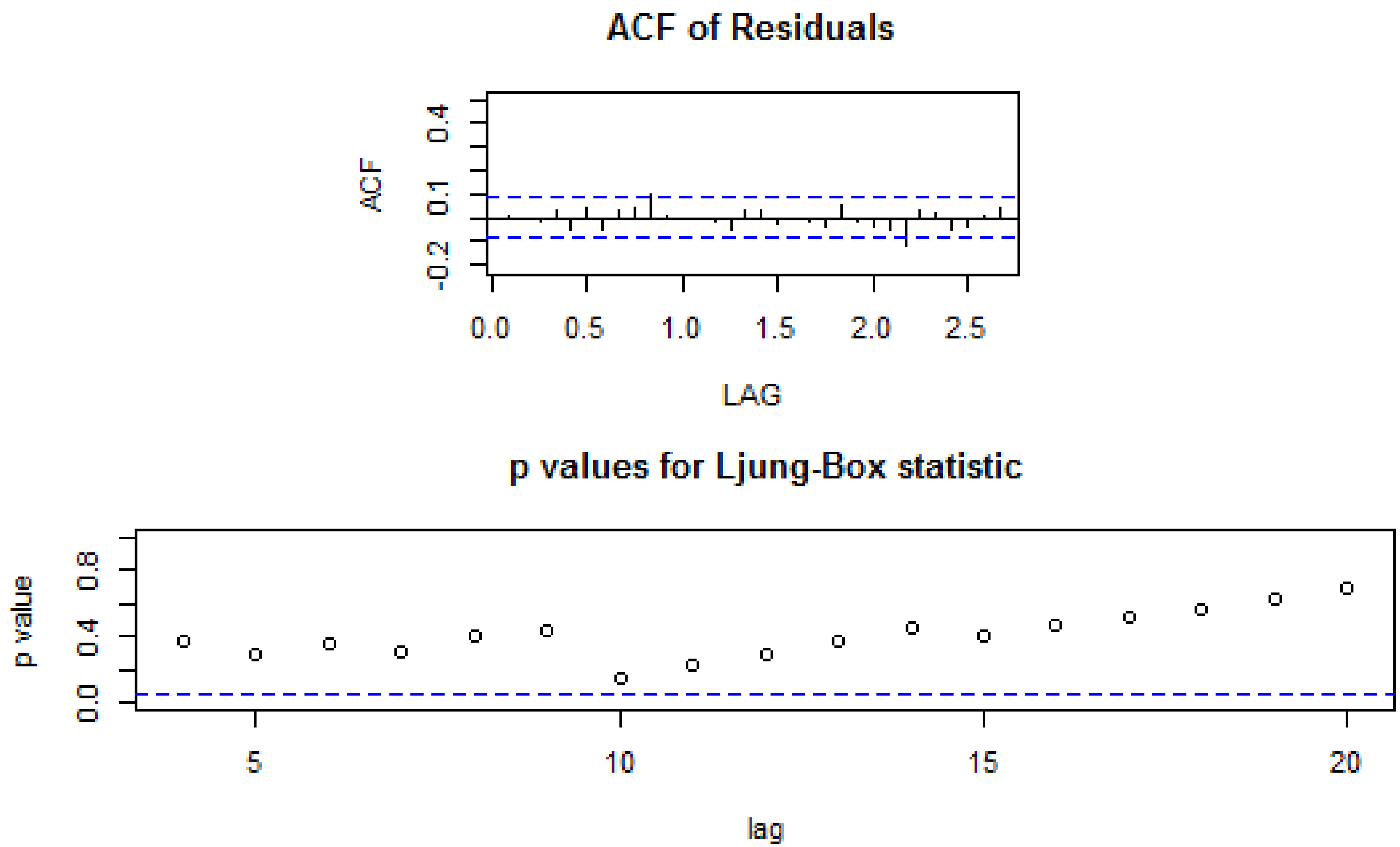
ARMA(p,q) - príklad

- PRÍKLAD: ARMA(1,2) model pre diferencie zlogaritmovaných cien kakaa (dáta z predchádzajúcej kapitoly):

```
> p=read.table("pcocoa.txt")
> p=ts(p,frequency=12,start=c(1960,1))
> sarima(log(p),1,1,2,details=FALSE)
$fit

Call:
stats::arima(x = xdata, order = c(p, d, q), seasonal = list(order = c(P, D,
    Q), period = S), xreg = constant, optim.control = list(trace = trc, REPORT =$
    reltol = tol))

Coefficients:
         ar1      ma1      ma2  constant
      0.8708  -0.5174  -0.3030    0.0025
s.e.  0.3563   0.3622   0.1401    0.0038

sigma^2 estimated as 0.003897:  log likelihood = 693.62,  aic = -1377.24
```

ARMA(p,q) - príklad

- Kontrola rezíduí:



ARMA(p,q) - príklad

- CVIČENIE:
  Vypočítajte korene AR a MA časti procesu
- Dostaneme: AR koreň je bízko jedného z MA koreňov
- Mali by sme teda namiesto ARMA(1,2) skúsiť ARMA(0,1) = MA(1) model, a ten naozaj na minulej prednáške vyšiel ako dobrý model pre tieto dáta