Modelovanie volatility - ARCH a GARCH modely

Beáta Stehlíková

Časové rady, FMFI UK

Ceny akcií

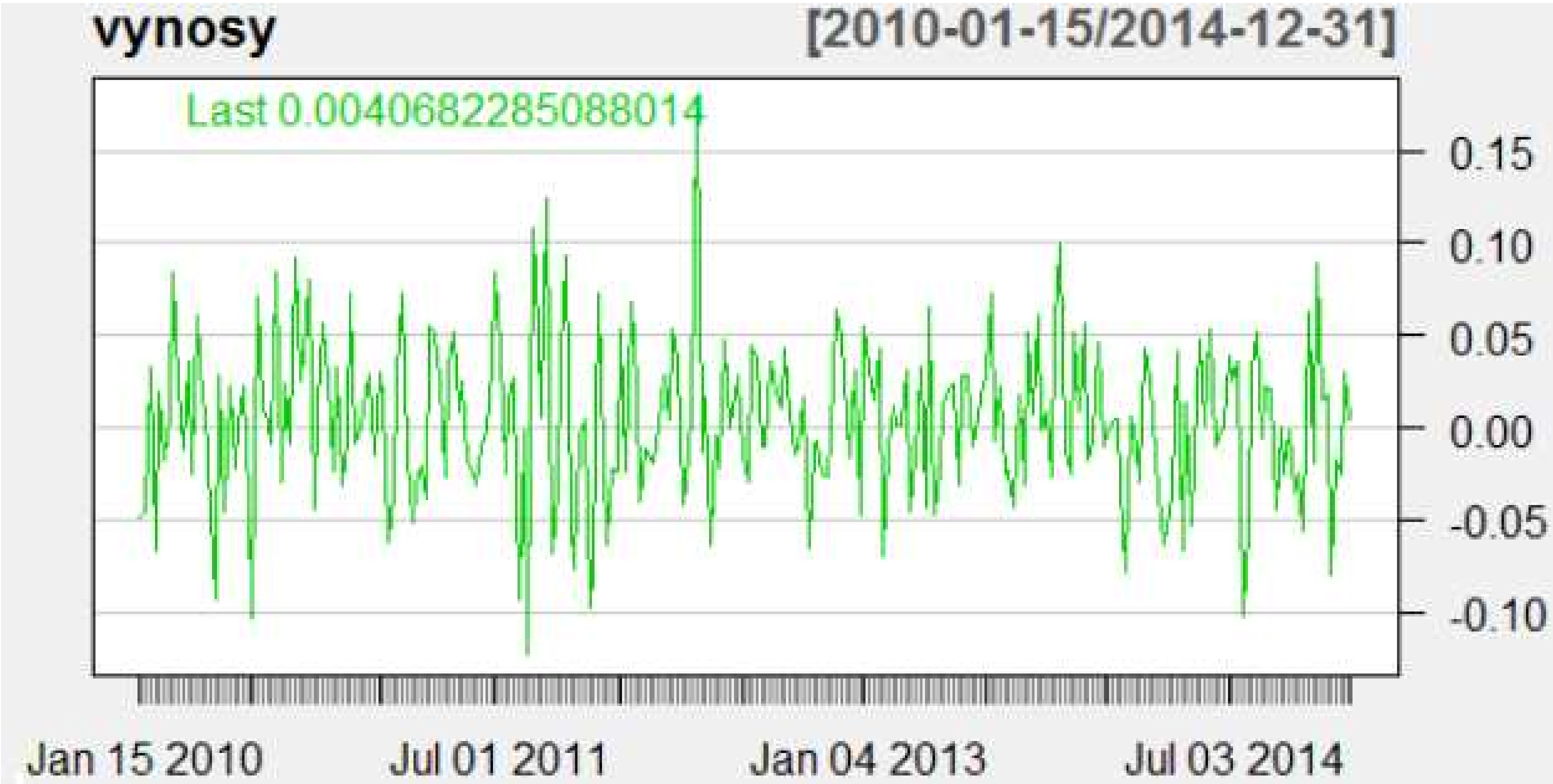
- Týždenné ceny akcií (knižnica quantmod z cvičení)
- Vypočítame spojité výnosy:

```
library(quantmod)
library(astsa)

getSymbols("EBAY", from="2010-01-01", to="2014-12-31", auto.assign=TRUE)
EBAY <- to.weekly(EBAY)
vynosy <- diff(log(EBAY$EBAY.Adjusted))[-1] # vynechame NA na zaciatku

chartSeries(vynosy, theme="white")
```

- Na cvičení na začiatku semestra sme analyzovali autokorelćie takýchto dát

Výnosy

- Priebeh výnosov:

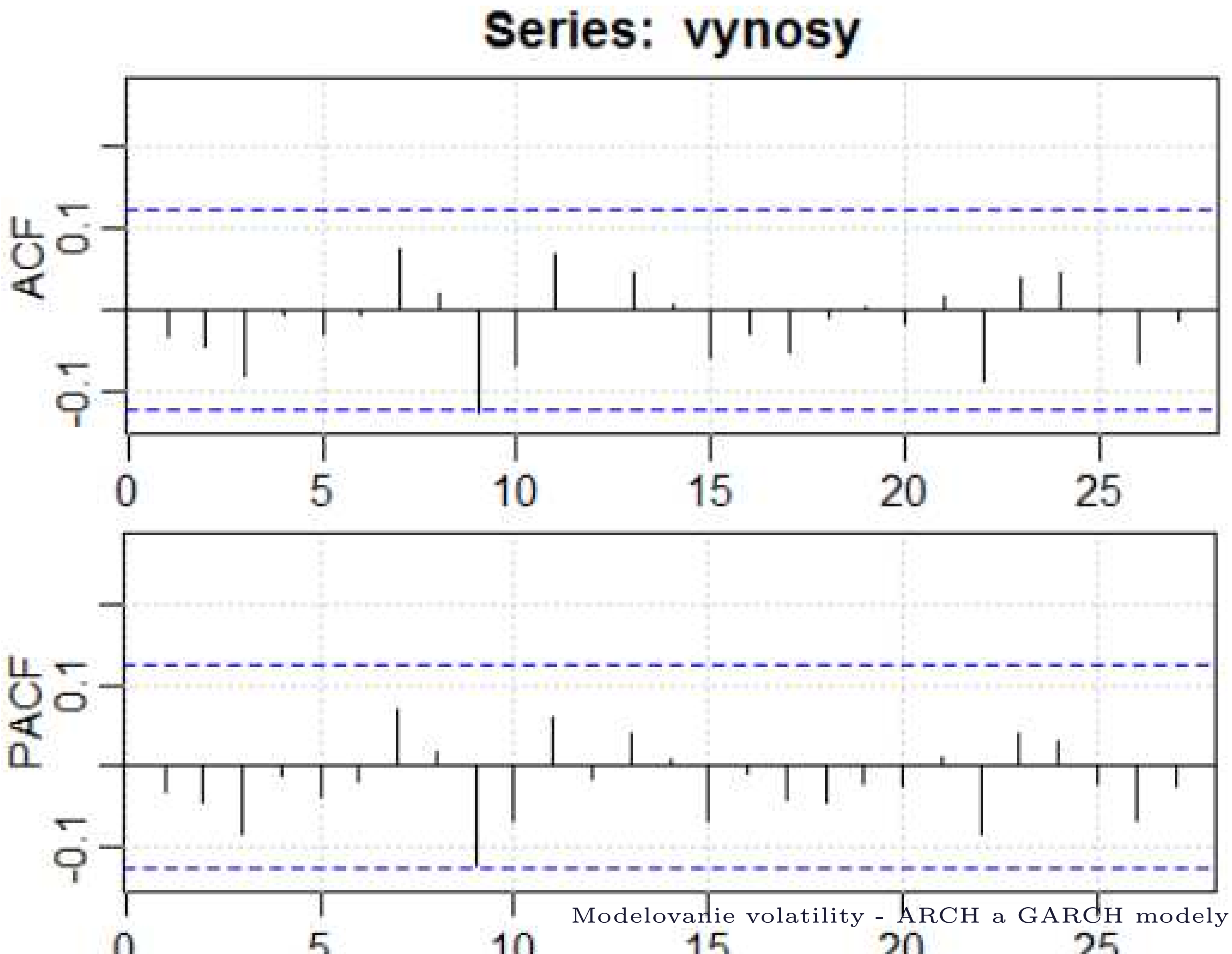


Výnosy akcií: Black-Scholesov model

- Black-Scholesov model (→ finančná mat., PDR):
$$dS = \mu S dt + \sigma S dw,$$
kde w je Wienerov proces.
- Existuje explicitné vyjadrenie pre cenu akcie v čase t :
$$S_t = S_0 e^{(\mu - 1/2\,\sigma^2)t + \sigma w_t}$$
- Výnosy v Black-Scholesovom modeli:
$$vynos_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t+\Delta t}}\right) = (\mu - 1/2\,\sigma^2)\Delta t + \sigma \Delta w$$
⇒ nezávislé s rozdelením $N((\mu - 1/2\,\sigma^2)\Delta t, \sigma^2 \Delta t)$
- Model pre časový rad výnosov:
$$vynos_t = c + u_t,$$
kde u je biely šum

Výnosy akcií: naše dáta

- Podľa ACF by to mohol byť biely šum



Výnosy akcií: naše dáta

- Výnosy modelujeme bielym šumom:

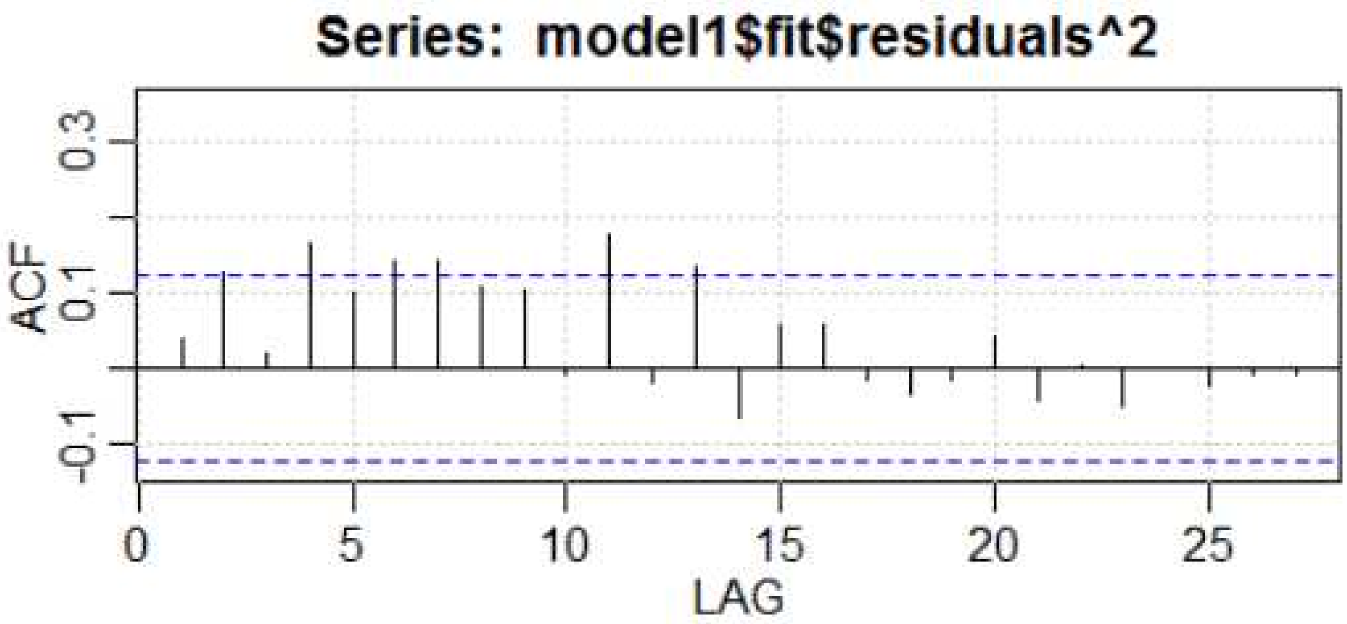
```
model1<-sarima(vynosy,0,0,0, details=FALSE)
acf2(model1$fit$residuals)   # to iste ako acf2(vynosy) -> ok
acf2(model1$fit$residuals^2) # -> PROBLEM
```

$\rightarrow$ rezíduá sú výnosy posunuté o konštantu

- Ak je absolútna hodnota rezídua malá, tak väčšinou nasleduje rezíduum tiež s malou absolútnou hodnotou
- Podobne za rezíduom s veľkou absolútnou hodnotou nasleduje často rezíduum s veľkou absolútnou hodnotou - môže byť kladné aj záporné, preto sa táto vlastnosť na autokorelácii neprejavila
- Druhé mocniny budú zrejme korelované (pre biely šum to ale neplatí)

Výnosy akcií: naše dáta

- Autokorelácia druhých mocnín:

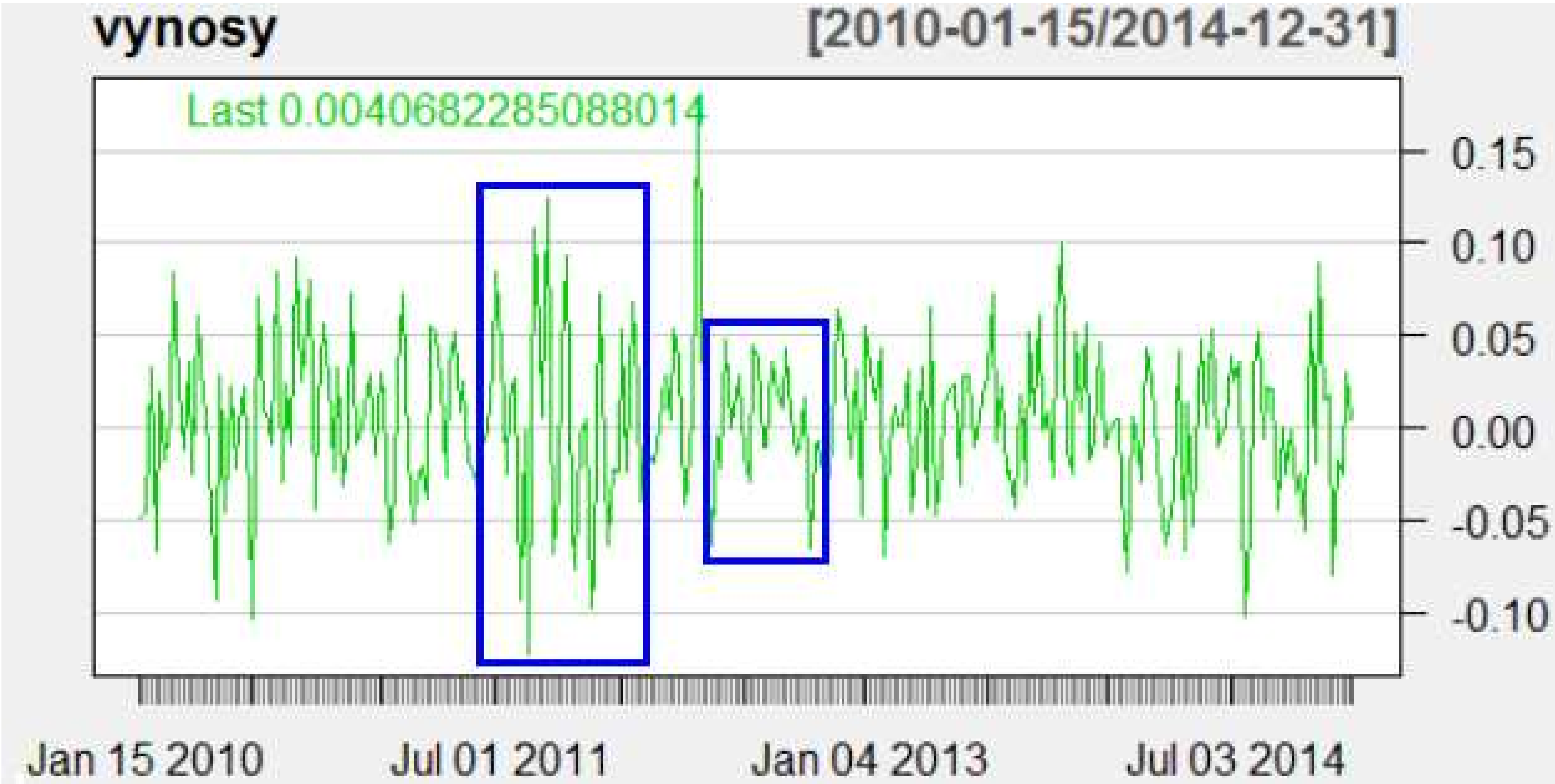


  → signifikantná autokorelácia

- OTÁZKA:
  Aký model dokáže zachytiť takéto vlastnosti?

Výnosy akcií: naše dáta

- Možné vysvetlenie: nekonštatná disperzia



ARCH a GARCH modely

- u nie je biely šum, ale
$$u_t = \sqrt{\sigma_t^2}\,\eta_t,$$
kde η je biely šum s jednotkovou disperziou; teda
$$u_t \sim N(0, \sigma_t^2)$$
- ARCH model (autoregressive conditional heteroskedasticity) - rovnica pre disperziu σ_t^2:
$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \ldots \alpha_q u_{t-q}^2$$
- Ohraničenia na parametre:
  - ◇ na zabezpečenie kladnosti disperzie:
$$\omega > 0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{q-1} \geq 0, \alpha_q > 0$$
  - ◇ kvôli stacionarite:
$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_q < 1$$

ARCH a GARCH modely

- Nevýhody ARCH modelov:
  - ◇ malý počet členov u_{t-i}^2 často nestačí - vo štvorcoch rezíduí je stále autokorelácia
  - ◇ pri väčšom počte členov sú koeficienty často nesignifikantné alebo nespĺňajú uvedené ohraničenia na parametre
- Zovšeobecnenie: GARCH modely - odstraňujú tieto problémy

ARCH a GARCH modely

- GARCH(p,q) model (generalized autoregressive conditional heteroskedasticity) rovnica pre disperziu σ_t^2:

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= \omega + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_q u_{t-q}^2 \\ &\quad + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \ldots + \beta_p \sigma_{t-p}^2\end{aligned}$$

- Ohraničenia na parametre:
  - na zabezpečenie kladnosti disperzie:

$$\omega > 0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{q-1} \geq 0, \alpha_q > 0$$

$$\beta_1, \ldots, \beta_{p-1} \geq 0, \beta_p > 0$$

  - kvôli stacionarite:

$$(\alpha_1 + \ldots + \alpha_q) + (\beta_1 + \ldots \beta_p) < 1$$

- Často sa používa GARCH(1,1).

GARCH modely v R-ku

- Modelovanie výnosov YHOO - pokračovanie
- V R-ku:
  - ◇ knižnica fGarch
  - ◇ funkcia garchFit, model sa píše v tvare napr.

    arma(1,1)+garch(1,1)
  - ◇ parametrom trace=FALSE zrušíme vypisovanie podrobností ohľadom konvergencie optimalizačného procesu
- Odhadujeme model konštanta + šum; na modelovanie šumu skúsime ARCH/GARCH modely

ARCH(1)

- Odhadovanie ARCH(1) modelu:

```
# arch(1) = garch(1,0)
model10 <- garchFit(~garch(1,0), data=vynosy, trace=FALSE)
stand.rez <- model10@residuals/model10@sigma.t # standardizovane rezidua
acf2(stand.rez)
acf2(stand.rez^2)
summary(model10)
```

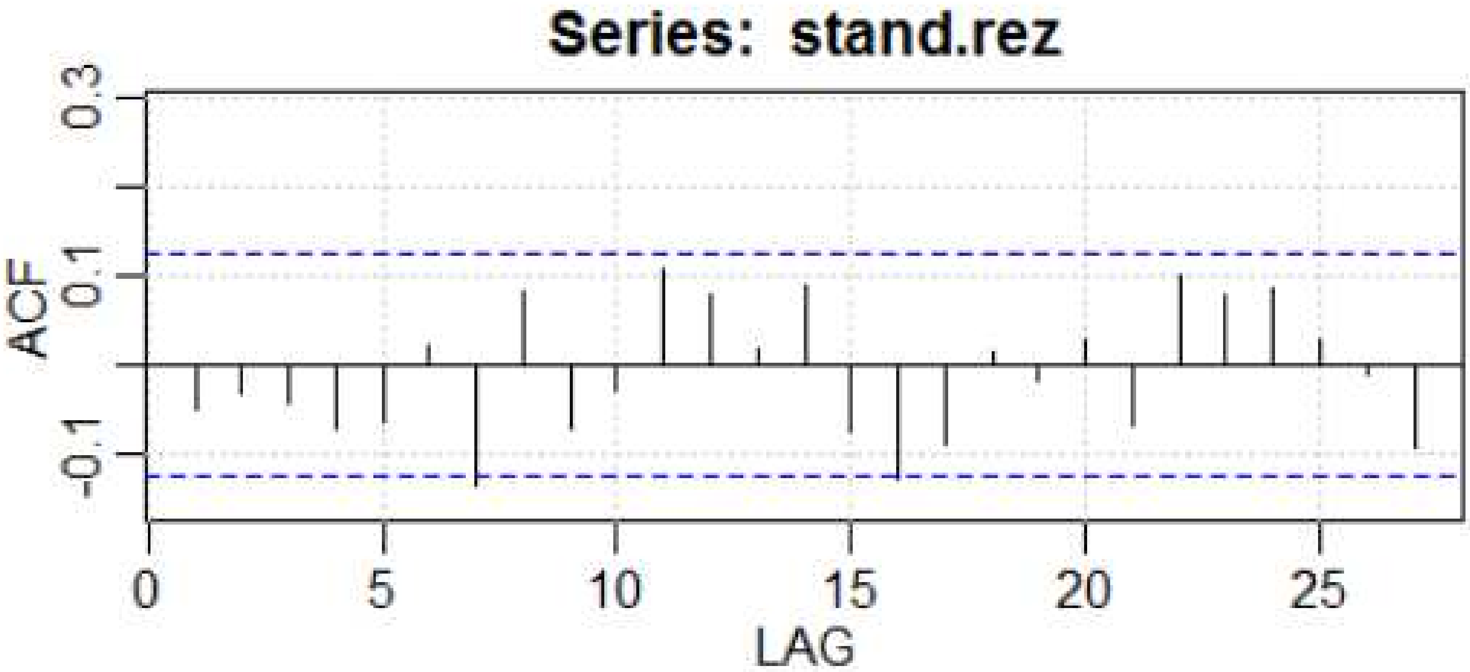
- Zobrazíme teda:
  1. ACF štandardizovaných rezíduí
  2. ACF štandardizovaných druhých mocnín rezíduí
  3. summary s testami o štandardizovaných rezíduách a ich druhých mocninách

GARCH modely v R-ku

- Prístup k užitočným hodnotám:
  - @fitted - fitované hodnoty
  - @residuals - rezíduá
  - @h.t - odhadnutá variancia
  - @sigma.t - odhadnutá štandardná odchýlka
- Štandardizované rezíduá - rezíduá vydelené ich štadardnou odchýlkou - majú byť bielym šumom
- Takisto ich druhé mocniny majú byť bielym šumom

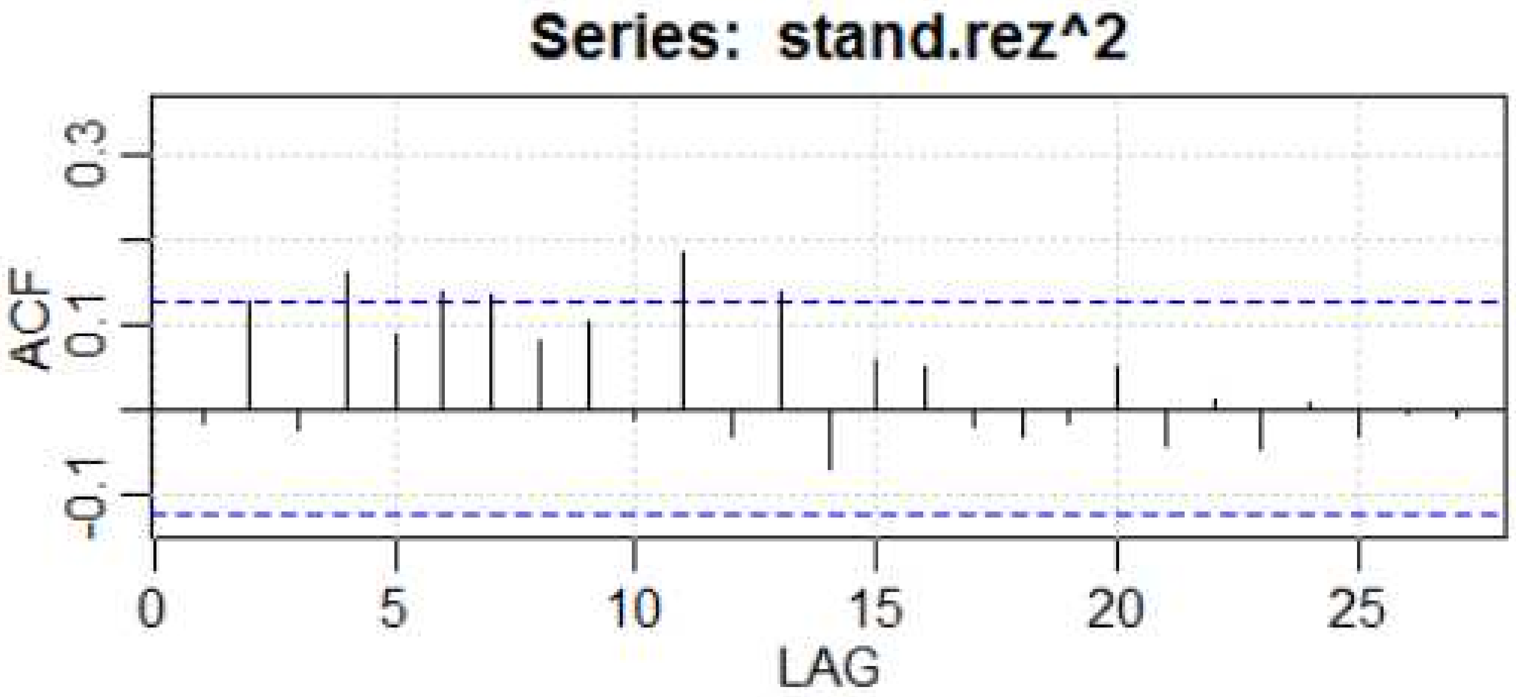
ARCH(1)

- Rezíduá:



ARCH(1)

- Druhé mocniny:



Testovanie rezíduí

- Testy:

```
Standardised Residuals Tests:
                                Statistic p-Value
 Jarque-Bera Test   R    Chi^2  29.18907  4.588523e-07
 Shapiro-Wilk Test  R    W      0.9821336 0.002392983
 Ljung-Box Test     R    Q(10)  12.29485  0.2658079
 Ljung-Box Test     R    Q(15)  21.08263  0.1342099
 Ljung-Box Test     R    Q(20)  28.34245  0.1015375
 Ljung-Box Test     R^2  Q(10)  27.55866  0.002123322
 Ljung-Box Test     R^2  Q(15)  44.23218  0.0001011277
 Ljung-Box Test     R^2  Q(20)  46.02944  0.0007985573
 LM Arch Test       R    TR^2   25.98164  0.01079828
```

- Je tu: testovanie normality, Ljung-Box pre štandardizované rezíduá a ich druhé mocniny
- Čo je nové: testovanie homoskedasticity v týchto rezíduách

ARCH(2)

- Skúsime ARCH(2) - výsledky testov:

Standardised Residuals Tests:

			Statistic	p-Value
Jarque-Bera Test	R	Chi^2	34.65834	2.978778e-08
Shapiro-Wilk Test	R	W	0.9814854	0.001841151
Ljung-Box Test	R	Q(10)	10.75724	0.3767411
Ljung-Box Test	R	Q(15)	19.54396	0.1901334
Ljung-Box Test	R	Q(20)	26.93409	0.1371285
Ljung-Box Test	R^2	Q(10)	14.11704	0.1677196
Ljung-Box Test	R^2	Q(15)	27.9337	0.02198778
Ljung-Box Test	R^2	Q(20)	30.13048	0.06776678
LM Arch Test	R	TR^2	20.09535	0.06530357

ARCH(3)

- ARCH(3) - výsledky testov:

Standardised Residuals Tests:

			Statistic	p-Value
Jarque-Bera Test	R	Chi^2	33.88186	4.391851e-08
Shapiro-Wilk Test	R	W	0.9816512	0.001968254
Ljung-Box Test	R	Q(10)	10.70552	0.3809165
Ljung-Box Test	R	Q(15)	19.44674	0.1941989
Ljung-Box Test	R	Q(20)	26.77638	0.1416733
Ljung-Box Test	R^2	Q(10)	14.01256	0.1724194
Ljung-Box Test	R^2	Q(15)	27.74511	0.02322011
Ljung-Box Test	R^2	Q(20)	29.97015	0.07033882
LM Arch Test	R	TR^2	20.00903	0.06691536

ARCH(4)

- ARCH(4) - výsledky testov:

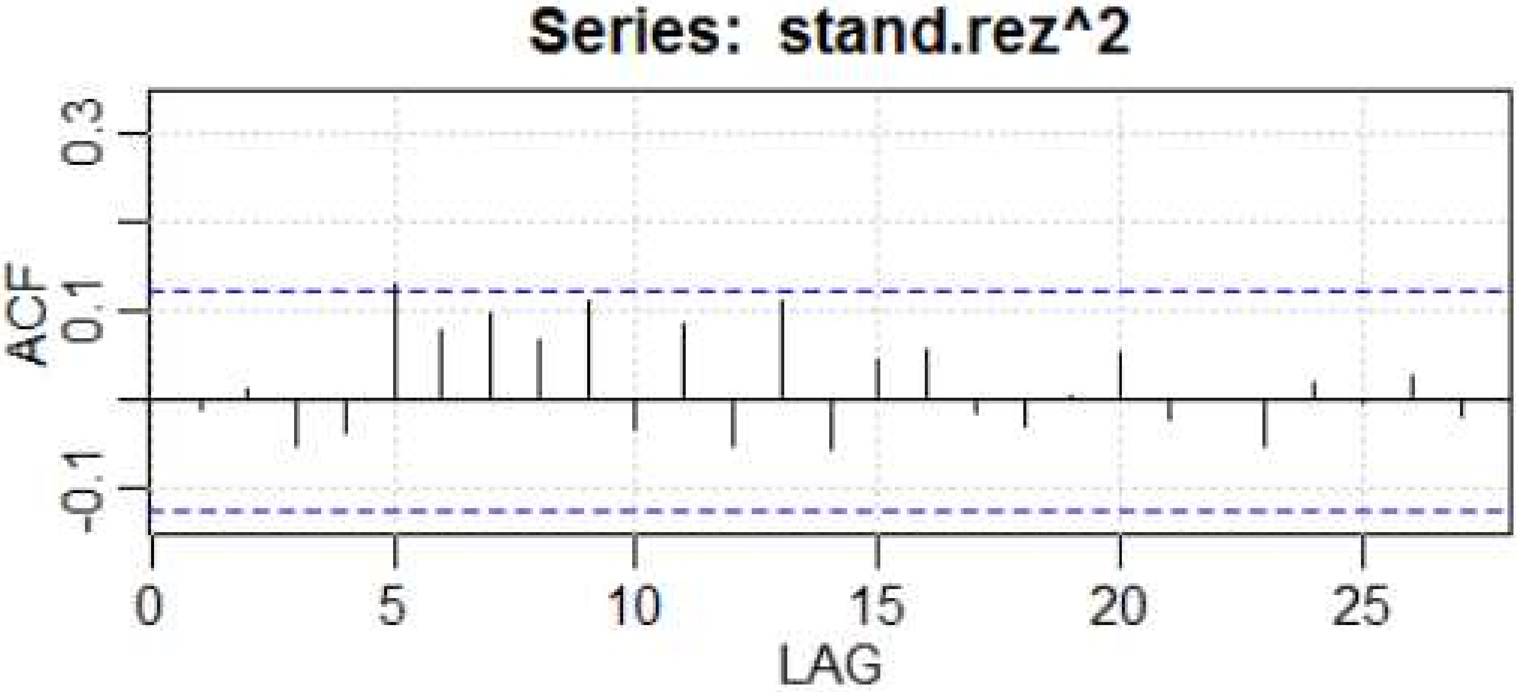
Standardised Residuals Tests:

			Statistic	p-Value
Jarque-Bera Test	R	Chi^2	12.79082	0.001669201
Shapiro-Wilk Test	R	W	0.9880808	0.0302226
Ljung-Box Test	R	Q(10)	10.54746	0.3938435
Ljung-Box Test	R	Q(15)	18.98255	0.2145258
Ljung-Box Test	R	Q(20)	26.02379	0.1650277
Ljung-Box Test	R^2	Q(10)	14.41393	0.1549343
Ljung-Box Test	R^2	Q(15)	21.97894	0.1083574
Ljung-Box Test	R^2	Q(20)	23.88737	0.2473466
LM Arch Test	R	TR^2	18.14053	0.1114896

- V rezíduách ani ich druhých mocninách už nie je autokorelácia.

ARCH(4)

- ACF druhých mocnín:



$\rightarrow$ bez signifikantnej autokorelácie

ARCH(4)

- Ale ARCH koeficienty α_i nie sú signifikantné:

```
Error Analysis:
        Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
mu     4.022e-03   2.433e-03    1.653   0.0983 .
omega  1.170e-03   2.003e-04    5.842 5.16e-09 ***
alpha1 3.839e-02   1.250e-01    0.307   0.7587
alpha2 1.259e-01   8.058e-02    1.563   0.1181
alpha3 1.000e-08   1.475e-01    0.000   1.0000
alpha4 1.098e-01   8.052e-02    1.364   0.1726
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

GARCH(1,1)

- Skúsme GARCH(1,1):

```
# garch(1,1)
model11 <- garchFit(~garch(1,1), data=vynosy, trace=FALSE)
stand.rez <- model11@residuals/model11@sigma.t # standardizovane rezidua
acf2(stand.rez)
acf2(stand.rez^2)
summary(model11)
```

- Testy:

```
Standardised Residuals Tests:
                                Statistic p-Value
 Jarque-Bera Test   R    Chi^2  11.47005  0.003230806
 Shapiro-Wilk Test  R    W      0.987312  0.02152423
 Ljung-Box Test     R    Q(10)  10.26988  0.4171434
 Ljung-Box Test     R    Q(15)  17.86043  0.2700744
 Ljung-Box Test     R    Q(20)  23.83093  0.2498554
 Ljung-Box Test     R^2  Q(10)  9.549341  0.4808792
 Ljung-Box Test     R^2  Q(15)  17.0167   0.3178669
 Ljung-Box Test     R^2  Q(20)  19.01346  0.5209512
 LM Arch Test       R    TR^2   12.16882  0.4322184
```

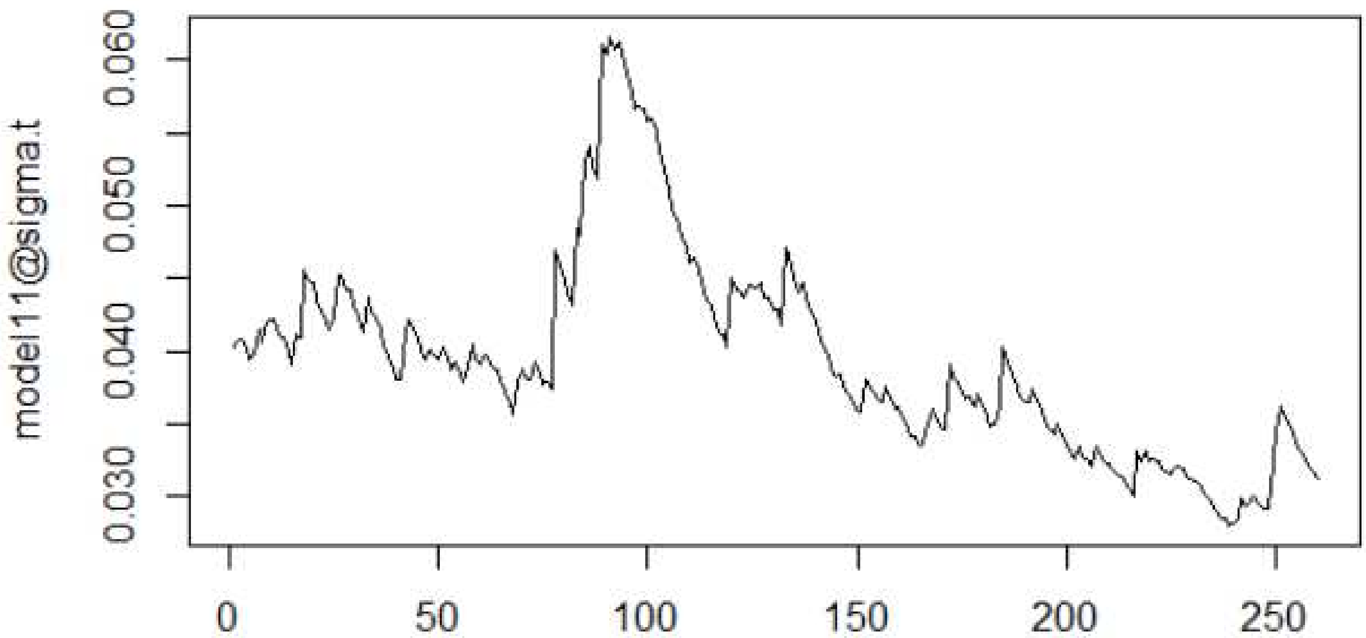
GARCH(1,1)

- Odhadnuté koeficienty:

```
Error Analysis:
        Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
mu      3.262e-03  2.351e-03    1.388   0.1652
omega   2.428e-05  3.596e-05    0.675   0.4994
alpha1  4.334e-02  2.401e-02    1.805   0.0711 .
beta1   9.396e-01  3.923e-02   23.954   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Odhadnutá štandardná odchýlka

- Vieme ju získať pomocou @sigma.t :



Odhadnutá štandardná odchýlka

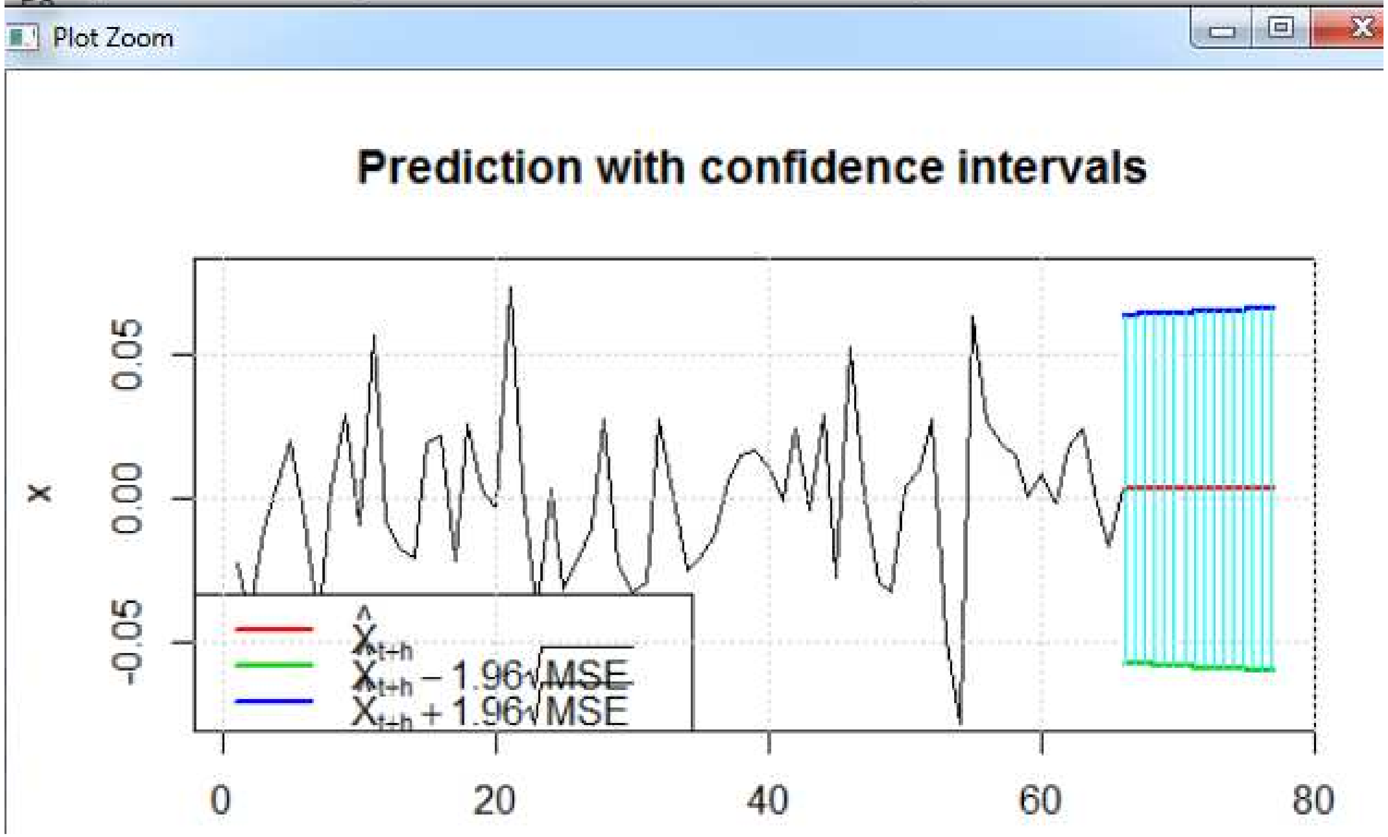
- Iný prístup k niektorým grafom - plot(model11):

```
> plot(model11)

Make a plot selection (or 0 to exit):

 1:   Time Series
 2:   Conditional SD
 3:   Series with 2 Conditional SD Superimposed
 4:   ACF of Observations
 5:   ACF of Squared Observations
 6:   Cross Correlation
 7:   Residuals
 8:   Conditional SDs
 9:   Standardized Residuals
10:   ACF of Standardized Residuals
11:   ACF of Squared Standardized Residuals
12:   Cross Correlation between r^2 and r
13:   QQ-Plot of Standardized Residuals

Selection:
```

Predikcie

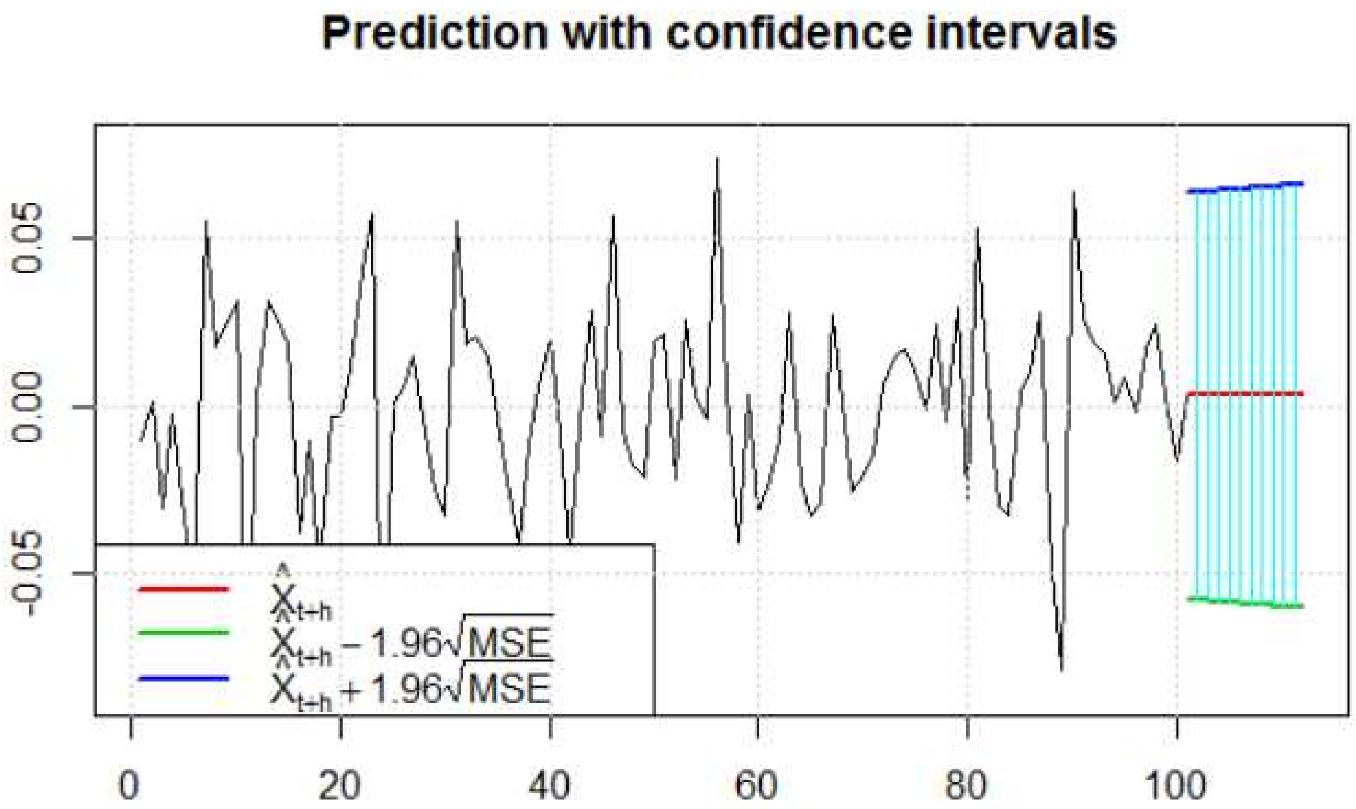
- Predikcie pomocou funkcie predict; parameter n.ahead určuje počet periód

```r
# predikcie
predikcie <- predict(model11, n.ahead=12, plot=TRUE)
```



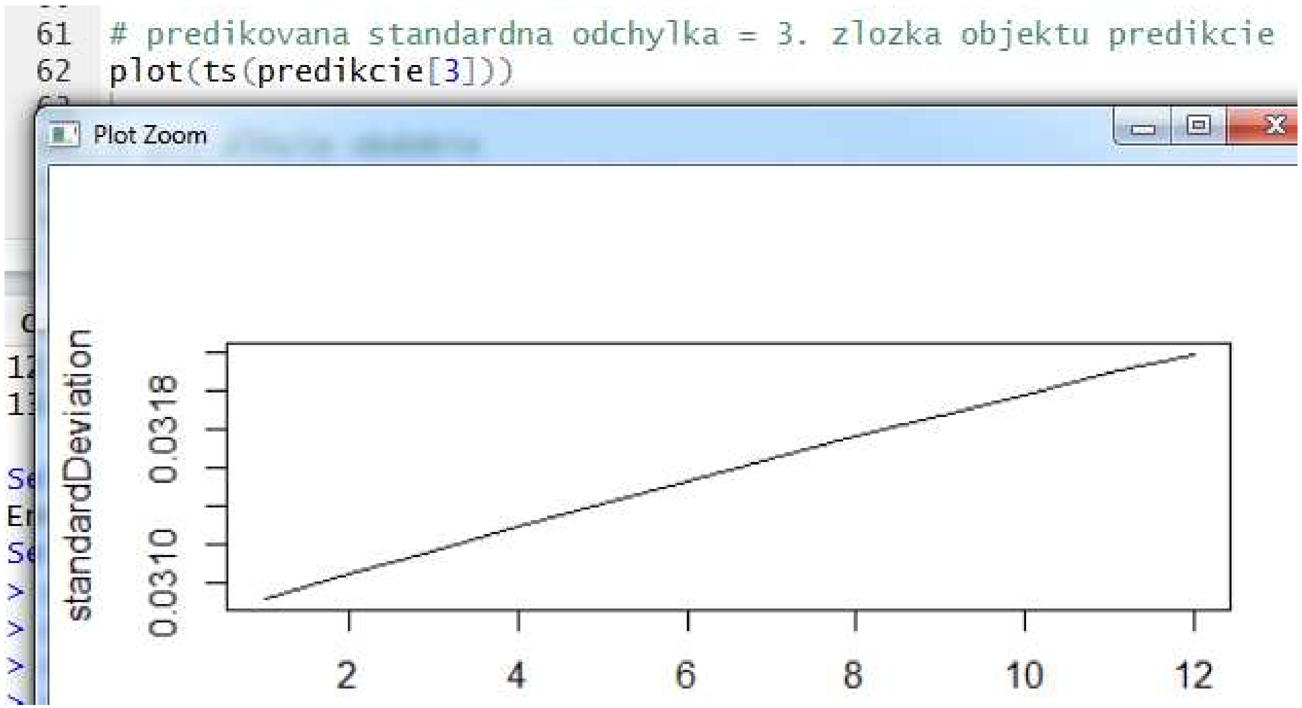
Predikcie

- Parameterom nx vieme zmeniť počet periód z dát, ktoré sa vykreslia (teraz nx=100:



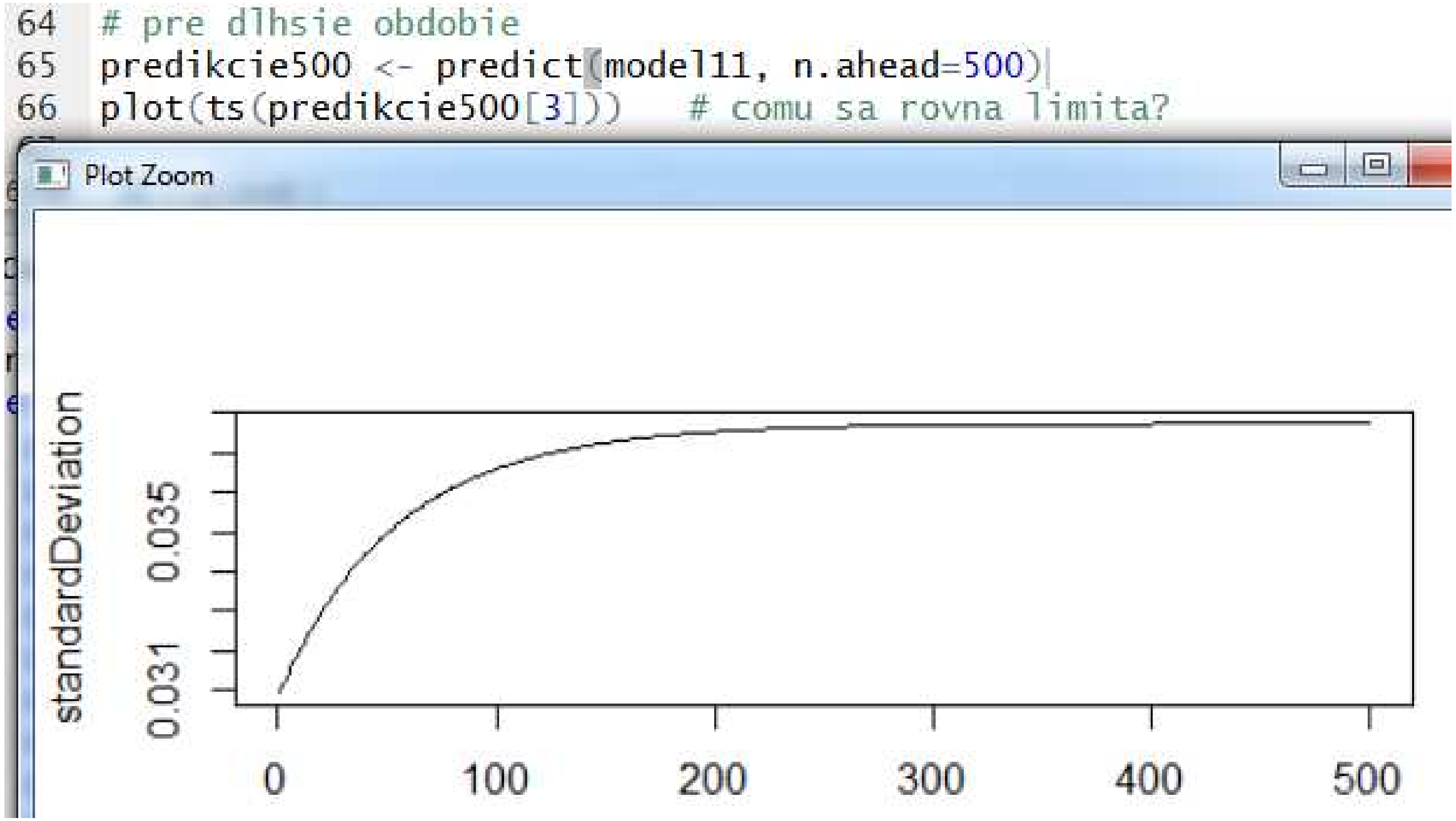
Predikcie

- Predikovaný vývoj štandardnej odchýlky:



Predikcie

- Predikovaný vývoj štandardnej odchýlky pre dlhšie obdobie - čomu sa rovná limita?



Aplikácia: Value at risk (VaR)

- Value at risk (VaR) je vlastne kvantil
- Nech X je hodnota portfólia; potom

$$\mathcal{P}(X \leq VaR) = \alpha,$$

napr. pre $\alpha = 0.05$

- Štandardne GARCH predpokladá normálne rozdelenie (dajú sa odhadovať aj iné rozdelenia) - vieme počítať kvantily
- Nedostatky:
  - ◇ predpoklad normality
  - ◇ sú aj lepšie miery rizika ako VaR

Aplikácia: Value at risk (VaR)

- NA CVIČENÍ:
  - Začnime po N hodnotách výnosov
  - Odhadneme GARCH model.
  - Spravíme predikciu pre štandardnú odchýlku a pomocou nej zostrojíme *VaR* pre výnos na nasledujúci týždeň
  - Každý týždeň posunieme okno s dátami (máme nové pozorvanie) odhadneme znovu GARCH a vypočítame nové *VaR*

Iné modely pre volatilitu

- Threshold GARCH:
  - $u_t > 0$ - *"good news"*, $u_t < 0$ - *"bad news"*
  - TARCH umožňuje, aby mali na volatilitu rôzny vplyv
  - *leverage effect*: väčší vplyv na volatilitu majú *bad news*
- Nemodelujeme disperziu (ako v ARCH/GARCH modeloch), ale
  - jej logaritmus $\rightarrow$ exponential GARCH
  - ľubovoľnú mocninu štandardnej odchýlky $\rightarrow$ power GARCH
- a ďalšie...