

# *Predikcie*

Beáta Stehlíková  
Časové rady, FMFI UK

# Predikcie

---

- Sme v čase  $t$ , chceme **predikciu** hodnoty  $x_{t+\tau}$ , t. j. hodnotu procesu o  $\tau$  období.
- Označme túto predikciu  $\hat{x}_t(\tau)$ , teda
  - ◇ index  $t$  označuje čas, v ktorom konštruujeme predikciu
  - ◇ argument  $\tau$  označuje, na koľko období dopredu tá predikcia je
- Predikciou bude **očakávaná hodnota procesu** v tom čase, pri danej informácii, ktorú máme k dispozícii:

$$\hat{x}_t(\tau) = E_t[x_{t+\tau}]$$

(index  $t$  vo výraze  $E_t$  znamená, že strednú hodnotu počítame v čase  $t$ )

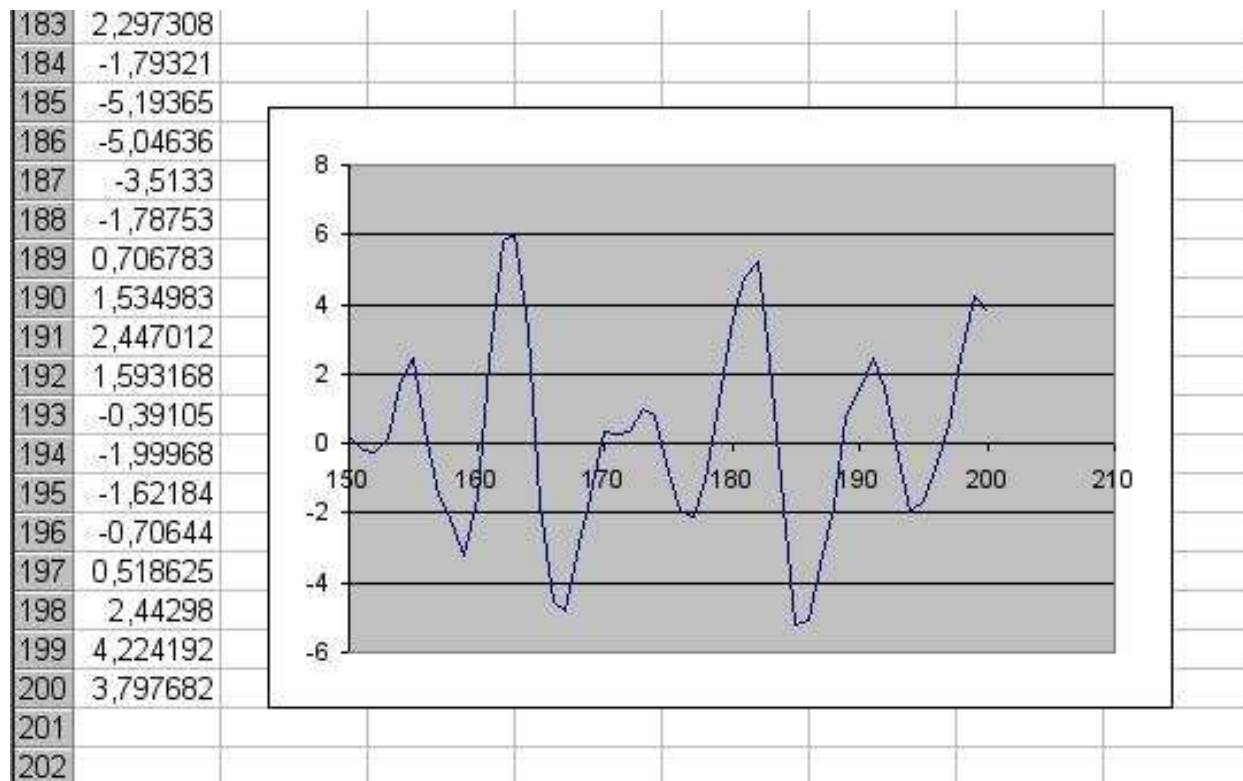
# Predikcie pre AR proces

---

- Majme proces

$$x_t = 1.4x_{t-1} - 0.85x_{t-2} + u_t$$

a dáta:



- Chceme predikcie pre hodnoty v nasledujúcich časoch.

# Predikcie pre AR proces

- Intuitívne:
  - ◇ do diferenčnej rovnice dosadzujeme známe hodnoty procesu a keď už k dispozícii nie sú, dosadzujeme predikcie
  - ◇ biely šum nahradíme nulou

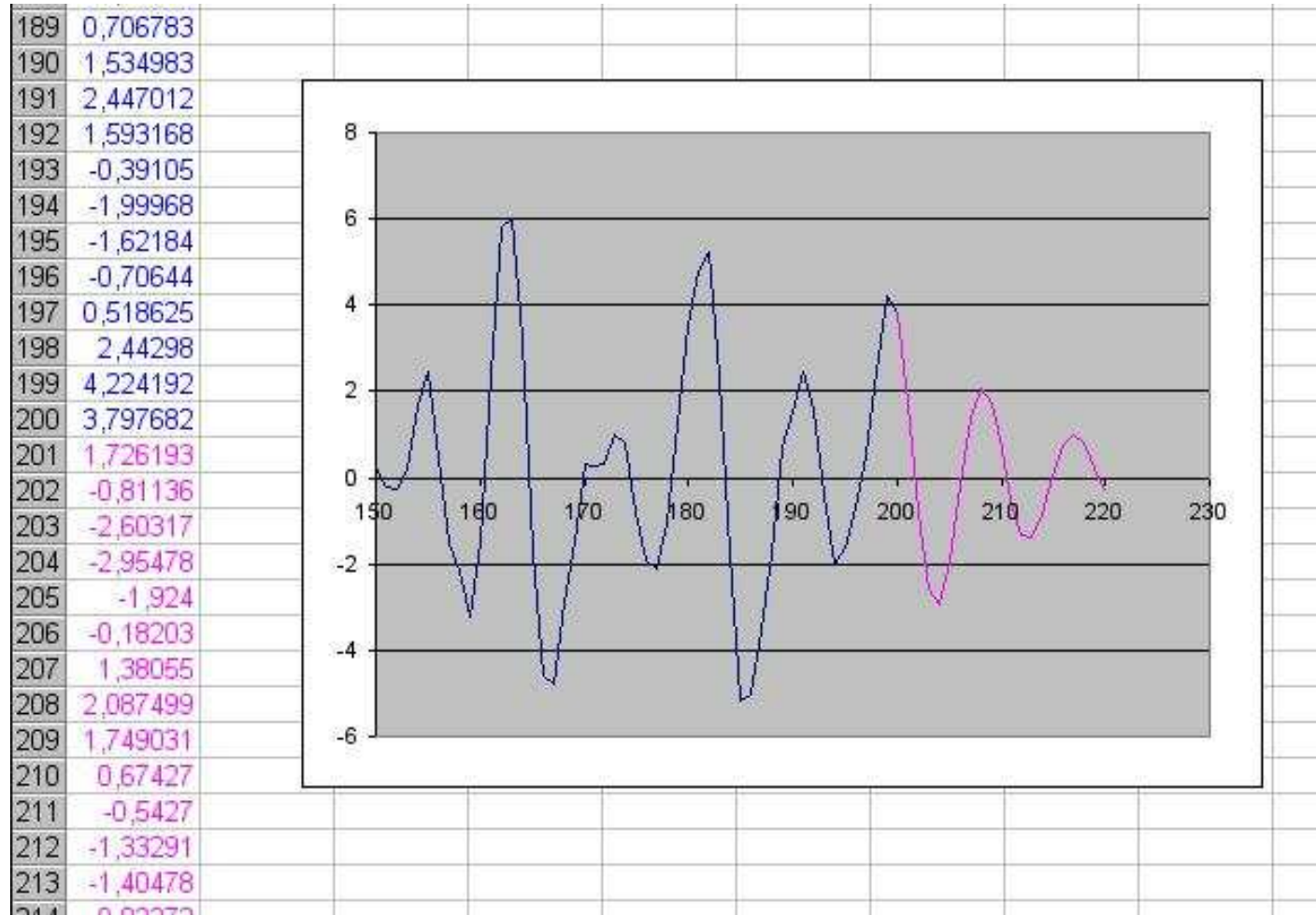
194	-1,99968	194	-1,99968
195	-1,62184	195	-1,62184
196	-0,70644	196	-0,70644
197	0,518625	197	0,518625
198	2,44298	198	2,44298
199	4,224192	199	4,224192
200	3,797682	200	3,797682
201	=1,4*A200-0,85*A199	201	1,726193
202		202	=1,4*A201-0,85*A200
203		203	

Diagram illustrating the prediction process for an AR model. The table shows historical data (194-200) and predicted values (201-203). A vertical line separates the data from the predictions. A box labeled "známa hodnota procesu" points to the value 3,797682 in row 200. A box labeled "predikcia z predchádzajúceho kroku" points to the formula for row 201.

# Predikcie pre AR proces

---

- Výsledok:



# Predikcie pre AR proces

---

- Vzt'ah  $\hat{x}_t(\tau) = E_t[x_{t+\tau}]$  sa zhoduje s touto intuíciou.
- Majme AR(p) proces

$$x_t = \delta + \alpha_1 x_{t-1} + \dots + \alpha_p x_{t-p} + u_t.$$

Potom:

$$\begin{aligned} x_{t+\tau} &= \delta + \alpha_1 x_{t+\tau-1} + \dots + \alpha_p x_{t+\tau-p} + u_{t+\tau}, \\ \underbrace{E_t[x_{t+\tau}]}_{\hat{x}_t(\tau)} &= \delta + \alpha_1 E_t[x_{t+\tau-1}] + \dots + \alpha_p E_t[x_{t+\tau-p}] \\ &\quad + \underbrace{E_t[u_{t+\tau}]}_0 \end{aligned}$$

pričom

$$E_t[x_{t+s}] = \begin{cases} \hat{x}_t(s) & \text{pre } s > 0 \\ x_{t+s} & \text{pre } s \leq 0 \end{cases}$$

# Predikcie pre MA proces

---

- Majme MA(1) proces

$$x_t = \mu + u_t - \beta u_{t-1}$$

a počítajme predikcie  $\hat{x}_t(\tau)$ :

$$\begin{aligned} x_{t+s} &= \mu + u_{t+s} - \beta u_{t+s-1}, \\ \underbrace{E_t[x_{t+s}]}_{\hat{x}_t(s)} &= \mu + \underbrace{E_t[u_{t+s}]}_0 - \beta \underbrace{E_t[u_{t+s-1}]}_{u_t \text{ pre } s=1, \text{ inak } 0} \end{aligned}$$

Teda:

$$\hat{x}_t(s) = \begin{cases} \mu - \beta u_t & \text{pre } s = 1 \\ \mu & \text{pre } s = 2, 3, \dots \end{cases}$$

- CVIČENIE: Dokážte, že pre MA( $q$ ) proces platí  $\hat{x}_t(s) = \mu$  pre  $s > q$  a že pre  $s \leq q$  predikcie obsahujú realizované hodnoty bieleho šumu  $u$

# Predikcie pre MA proces

---

- Predikcie pre MA(1) proces  $x_t = \mu + u_t - \beta u_{t-1}$  sú

$$\hat{x}_t(s) = \begin{cases} \mu - \beta u_t & \text{pre } s = 1 \\ \mu & \text{pre } s = 2, 3, \dots \end{cases}$$

- obsahujú hodnotu bieleho šumu  $u_t$ . Táto hodnota už bola v čase konštrukcie predikcií realizovaná, **nie sme však schopní ju pozorovať**.

- Cvičenie z predch. slajdu  $\Rightarrow$  podobná situácia nastáva pre ľubovoľný MA(q) proces
- **Ako prakticky počítat' predikcie?**  
Myšlienka: **vyjadríme  $u_t$  pomocou hodnôt procesu  $x$**
- Tento výpočet si ukážeme na MA(1) procese



# Predikcie pre MA proces

---

- Vyjadrujeme teda  $u_t$  pomocou  $x_1, x_2, \dots, x_t$
- Využijeme pritom:

- ◇ Pre MA(1) sme odvodili

$$(1) \quad \hat{x}_t(1) = \mu - \beta u_t$$

- ◇ Pre predikčnú chybu platí

$$(2) \quad x_t - \hat{x}_{t-1}(1) = u_t$$

- Budeme postupne počítat'  $\hat{x}_t(1)$  pre  $t = 0, 1, 2, \dots$

$$(3) \quad \hat{x}_0(1) \stackrel{(1)}{=} \mu - \beta u_0$$

# Predikcie pre MA proces

---

- Pre  $t = 1$ :

$$\begin{aligned} \hat{x}_1(1) &\stackrel{(1)}{=} \mu - \beta u_1 \\ &\stackrel{(2)}{=} \mu - \beta[x_1 - \hat{x}_0(1)] \\ &\stackrel{(3)}{=} \mu - \beta[x_1 - (\mu - \beta u_0)] \\ (4) \quad &= \mu(1 + \beta) - \beta x_1 - \beta^2 u_0 \end{aligned}$$

- Pre  $t = 2$ :

$$\begin{aligned} \hat{x}_2(1) &\stackrel{(1)}{=} \mu - \beta u_2 \\ &\stackrel{(2)}{=} \mu - \beta[x_2 - \hat{x}_1(1)] \\ &\stackrel{(4)}{=} \mu - \beta[x_2 - (\mu(1 + \beta) - \beta x_1 - \beta^2 u_0)] \\ (5) \quad &= \mu(1 + \beta + \beta^2) - \beta x_2 - \beta^2 x_1 - \beta^3 u_0 \end{aligned}$$

# Predikcie pre MA proces

---

- Pre všeobecné  $t$ :

$$\hat{x}_t(1) = \mu(1 + \beta + \beta^2 + \dots + \beta^t) - \beta x_t - \beta^2 x_{t-1} - \dots - \beta^t x_1 - \beta^{t+1} u_0$$

- Aj tu vystupuje nepozorovateľná hodnota  $u_0$ , ale vplyv člena  $\beta^{t+1} u_0$  ide k nule pre  $t \rightarrow \infty$  (kde  $t$  je počet dát)  
 $\Rightarrow$  môžeme ho zanedbať